



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی (عناصر متناهی)

عنوان

تطبیق فضا-زمان روش‌های عناصر متناهی برای معادله موج روی دامنه‌های بی‌کران

استاد راهنما

دکتر علی مس‌فروش

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند جزی

دانشجو

سیده عالیہ رضائی کوشا شاه

بهمن ۱۳۹۲

به نام آن که جان را فکرت آموخت



مدیریت تحصیلات تکمیلی
قرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد
با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان
نامه کارشناسی ارشد خانم سیده عالیہ رضائی کوشالشاہ، رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان
تطبیق فضا-زمان روش‌های عناصر متناهی برای معادله موج روی دامنه‌های بی کران
که در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۱۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح
ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار امتیاز -۱۸۸۱) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱- عالی (۲۰-۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹-۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹-۱۶) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹-۱۴)

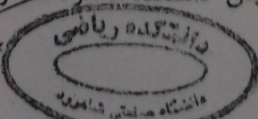
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر مهدی قوتمند جزی	استادیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای سید رضا موسوی	مربی	
۴- استاد ممتحن	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره

امضاء

۱۳۹۲/۱۱/۱۴



پروردگار...!

نه می توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

تقدیم به خانواده ام

که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش
من است.

سپاس‌گزاری...پ

سپاس می‌گویم خدای مهربانم را که زیباترین راه زندگی را به من آموخت و با گرفتن دستان ناتوانم قدم‌های مرا در این راه محکم کرد، مشکلات و سختی‌ها را برایم آسان نمود و درهای بسته دانش را با نور وجودش به رویم گشود.

بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که من را در نوشتن این پایان‌نامه یاری کردند، قدردانی و تشکر نمایم. تشکر می‌کنم از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که با خلوص نیت و در کمال صبر و آرامش پاسخ‌گوی تمام سوالات من بودند. هم‌چنین تشکر می‌کنم از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند جزی و سپاسگزارم از جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند.

سیده‌عالیه رضائی‌کوشا‌شاه
بهمن ۱۳۹۲

تعمدنامه

اینجانب سیده عالیہ رضائی کوشالشاہ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تطبیق فضا-زمان روش های عناصر متناهی برای معادله موج روی دامنه های بی کران، تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده عالیہ رضائی کوشالشاہ
بہمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، روش تطبیقی عناصر متناهی گالرکین زمان گسسته فضا-زمان، شامل شرایط مرزی غیرانعکاسی دقیق مرتبه بالا، برای مسایل موج بی کران را بیان می کنیم. بر اساس روش گاوس-سایدل، طرح تکرار چندسطحی اسپارس را برای حل دستگاه معادلات کاملاً گسسته‌ی درونی و مرزی ارائه می دهیم. با توجه به ماهیت مکانی انتشار موج روند تکراری فقط به چند تکرار در هر گام زمانی نیاز دارد. با قطری سازی ماتریس های میرایی، جرم و مرزی در هزینه صرفه جویی می کنیم. استراتژی فضا-زمان h تطبیقی که بر اساس برآورد خطای فضایی زینکوویچ-زو است را کار می بریم. برآورد خطای زمانی از جهش ناپیوسته بین گام های زمانی جواب میدان درونی و توابع کمکی مرزی به دست می آید.

کلمات کلیدی: تطبیق روش عناصر متناهی، فضا-زمان گالرکین، معادله موج، شرایط مرزی غیرانعکاسی، گسسته سازی گالرکین

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. روش عناصر متناهی برای معادله موج بی کران، ۴۴امین کنفرانس سالانه ریاضی ایران، دانشگاه فردوسی مشهد، شهریور ۹۲، ۱۴۲-۱۳۹.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	تاریخچه	۱۰۱
۵	تعاریف اولیه	۲
۱۵	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۲۰۲
۱۷	روش عناصر متناهی	۳۰۲
۲۰	تطبیق	۴۰۲
۲۱	تظریف مش (شبکه) در فضا	۱۰۴۰۲
۲۳	روش عناصر متناهی برای معادله موج بی‌کران	۳
۲۳	معادله موج دوبعدی روی دامنه‌های بی‌کران	۱۰۳
۲۹	فرمول‌بندی گسسته زمان گالرکین	۲۰۳
۳۲	معادلات فرم وردشی	۱۰۲۰۳
۳۳	گسسته‌سازی فضا-زمان	۳۰۳
۳۴	معادلات ماتریسی فضا-زمان	۱۰۳۰۳
۳۸	روش‌های نگاشت	۴۰۳
۳۸	درون‌یابی گره‌ای	۱۰۴۰۳
۳۹	روش SPR	۲۰۴۰۳
۴۰	درون‌یابی افزوده	۳۰۴۰۳
۴۱	جواب موثر معادلات ماتریسی	۵۰۳
۴۵	گسسته‌سازی زمانی برای معادلات مرزی مرتبه اول	۶۰۳
۴۸	جواب تکراری برای زوج معادلات داخلی و مرزی	۷۰۳
۵۰	استراتژی تطبیق	۸۰۳
۵۱	شاخص خطای زمانی برای معادلات مرزی	۱۰۸۰۳
۵۲	برآورد خطای فضایی و روش تطبیق	۲۰۸۰۳

۵۳		بازبینی روش تطبیق	۳۰۸۰۳
۵۵		مثال‌های عددی	۴
۵۵		پراکندگی موجک از یک استوانه بیضوی	۱۰۴
۶۵		نتایج	۲۰۴
۶۶		مراجع	
۷۲		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۶		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۸۰		نمایه	

فصل ۱

مقدمه

پایداری بدون شرط و گسترش دقت مرتبه بالای روش‌های فضا-زمان، باعث شده است که گسسته‌سازی عناصر متناهی روی دامنه زمانی، به‌خوبی دامنه فضایی، استفاده شود. ولی به‌طور خاص، پیاده‌سازی دنباله‌ای از شرایط مرزی دقیق مرتبه‌ی بالا [۳۴، ۳۳، ۳۷، ۵۸] را در فضا-زمان روش تطبیقی عناصر متناهی، برای امواج صوتی و مسایل پراکندگی در دامنه‌های خارجی بررسی می‌کنیم. روش عناصر متناهی گالرکین گسسته چند میدانی با متغیرهای مستقل را به‌کار می‌بریم. از یک طرح تکراری چند سطحی، برای حل دستگاه معادلات کاملاً گسسته‌ی داخلی و مرزی، استفاده می‌کنیم. روش تکراری در هر گام زمانی فقط به چند تکرار، برای حل مجدد جواب با دقت بالا نیاز دارد.

استراتژی فضا-زمان h تطبیقی بر اساس برآورد خطای فضایی زینکوویچ-زو^۱ [۴۷] است که از بازیابی قطعه‌ی فوق همگرا^۲ (SPR) همراه با یک برآورد خطای زمانی ناشی از جهش گسسته، در گام‌های زمانی به‌دست می‌آید. گام‌های زمانی با حفظ تفرانس خطا تنظیم می‌شوند. در این پایان‌نامه، روش تطبیقی عناصر متناهی گالرکین را برای معادله موج بی‌کران به‌کار می‌بریم. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است.

فصل دوم شامل تعاریف مقدماتی و پیش‌نیازهای روش‌های عناصر متناهی تطبیقی است. در فصل سوم تطبیق فضا-زمان معادله موج در مرز بی‌کران، شامل بخش‌های زیر را بیان می‌کنیم:

۱. شرایط مرزی غیرانعکاسی^۳ NRBC معادله موج در دامنه‌های خارجی.

۲. معادلات وردشی فضا-زمان.

۳. گسسته‌سازی فضا-زمان و ساختارهای ماتریسی.

۴. روش نگاشت مش‌های تطبیقی.

^۱Zienkiewicz-Zhu

^۲Superconvergent Patch Recovery

^۳Non Reflecting Boundary Conditions

۵. ساختارهای جبری موثر.
 ۶. الگوریتم تکرار چندسطحی برای حل زوج معادلات داخلی/مرزی.
 ۷. شاخص خطاهای زمانی و مکانی و استراتژی تطبیقی.
- در فصل چهارم، مثال‌های عددی پراکندگی موج گذرا را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ تاریخچه

روش‌های پیشروی زمانی با پایداری بدون شرط را برای روش تطبیقی امواج وابسته به زمان نیاز داریم. در بیشتر مسایل، روش‌های ضمنی مرتبه دوم استفاده می‌شود، برای برنامه‌های کاربردی سازه (دینامیک) معمولاً از دوزنقه (کرانک- نیکلسون) و خانواده نیومارک و روش‌های مرتبط استفاده می‌شود [۵۸، ۳۷، ۳۶، ۳۵، ۳۳، ۳۴]. روش‌های مرتبه دوم مانند خانواده ضمنی نیومارک، شرایط تشدید مصنوعی را نشان می‌دهند و با جواب سازگار هستند [۶۴].

یکی از روش‌های پیشروی زمانی مرتبه بالا، روش عناصر متناهی گسسته زمان گالرکین^۴ (DGFEM) است که گسسته‌سازی عناصر متناهی را در دامنه زمانی و فضایی به کار می‌برد [۶۳، ۲۰، ۹، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۵۷، ۲۶، ۲۷، ۴۴، ۴۶، ۶۷، ۶۸، ۴۵، ۸]. (DGFEM) دقت مرتبه بالا و پایداری بدون شرط دارد. ویژگی‌های اصلی (DGFEM) عبارتند از: (i) تقریب مرتبه بالا در بعد فضا و زمان، (ii) مش‌های بدون ساختار در فضا و زمان، (iii) پایه مکانیسم‌های پراکنده‌ساز در علم فیزیک، (iv) فرم جبری آن برای حل مساله، پیش‌بینی یا اصلاح روش‌های تکراری برای محاسبات موازی، مناسب است. لیسانت و راویارت^۵ [۵۶] در دو دهه پیش تقریب گسسته عناصر متناهی در زمان را برای معادلات هزلولوی مرتبه اول شروع کردند. جوهانسون^۶ و همکارانش [۱۰، ۱۱] روش‌های عناصر متناهی گسسته را با معرفی مش وابسته به نرم‌ها تعمیم دادند. روش‌های زمان گسسته با سیستم‌های سهموی و سیستم‌های فرارفت- انتشار در [۲۲، ۱۵، ۱۶] استفاده شده است. روش‌های عناصر متناهی فضا-زمان در شبیه‌سازی‌های محاسبات دینامیک سیال^۷ (CFD) که در آن جواب دقیق شوک‌ها، پدیده‌های چند مقیاسی و حرکت مرزها مهم است، کاربرد زیادی دارند [۱۸، ۲، ۶، ۶۹، ۵۴، ۱۴]. در [۶۳، ۹، ۲۷] ایده استفاده از زمان گسسته‌ی فضا-زمان عناصر متناهی برای معادلات هزلولوی مرتبه دوم زمانی انتشار امواج را گسترش دادند. این روش‌ها یک متدلوژی سازگار و یکپارچه با دقت مرتبه بالا، جواب‌های پایدار در بعدهای زمان و فضا می‌دهد و چارچوب ریاضی مناسب برای جواب‌های فضا-زمان تطبیقی ارائه می‌دهند. روش عناصر متناهی گالرکین زمان گسسته فضا-زمان (DGFEM) با دقت مرتبه بالای

^۴Time-discontinuous Galerkin Space-time Finite Element Method

^۵Lesaint, Raviart

^۶Johnson

^۷Computational Fluid Dynamics

شرایط مرزی غیرانعکاسی^۸ NRBC برای مسایل موج بی‌کران استفاده می‌شود. NRBC های مرتبه بالا دنباله‌ای از شرایط مرزی غیرانعکاسی با دقت بالا هستند که برای هر مرتبه-بالای دلخواه اجرا می‌شوند و به عنوان یک پارامتر ورودی استفاده می‌شوند. دنباله‌ای خوش‌تعریف از NRBC، دنباله بایلیس و تارکل^۹ [۱] است. NRBC های با مشتقات مراتب بالا برای اجرای مراتب بالا، مناسب نیستند.

تامپسون و هوان^{۱۰} [۵۸، ۳۷] با برداشتن مشتقات مرتبه بالا در جملات متغیرهای کمکی خاص، NRBC بایلیس و تارکل را دوباره فرمول‌بندی کردند. برای مرز غیرانعکاسی سه‌بعدی کروی، تامپسون و هوان [۵۸] نشان دادند که این NRBC ها دقیق هستند و ساختارهای داده‌ای در مقایسه با NRBC گروت و کیلیر^{۱۱} [۳۹، ۴۰] بهبود یافته است. مدل‌های بهبود یافته‌ای با شرطی‌کردن ویژگی‌های کروی هارمونیک (همساز) به‌دست آمده‌اند [۳۶، ۳۵، ۳۳].

NRBC های رتبه بالای دیگر برای مرزهای مستقیم و موجبرها، مانند NRBC کولینو^{۱۲} [۱۷] در مختصات دکارتی پیشنهاد شده‌اند. DGFEM چند میدانی برای معادلات داخلی و مرزی با متغیرهای مستقل داخلی و توابع کمکی رتبه بالا که در NRBC، گسترش یافته است [۲۶، ۲۷].

هدف از یک تطبیق، کنترل خطای تقریب فضا-زمان با کمترین هزینه است. ابزاری که پروسه تطبیقی را فراهم می‌کنند عبارتند از: ۱- برآورد خطا ۲- تطبیق مش فضایی و/یا اندازه گام زمانی ۳- انتقال داده (نگاشت) از جواب‌های مش قبلی به مش جاری. فرمول‌بندی و پیاده‌سازی برآوردهای خطا و روش‌های تطبیقی مسایل موج، نسبت به مسایل بیضوی محدود است. برآورد خطا و تطبیق انتشار موج، در [۶۸، ۵۱، ۳، ۲۵، ۶۲، ۷، ۲۳، ۶۵، ۴، ۵، ۶۶] بیان شده است.

دو روش اصلی برای تظریف یا درشت کردن مش‌های فضایی، با مش‌بندی مجدد [۵۳] یا تقسیم مجدد [۲۱] کامل می‌شوند. در تظریف، در نواحی که برآورد خطا بزرگ است، گره‌های مش جدید اضافه می‌شوند. در درشت کردن، گره‌ها در نواحی که برآورد خطا کوچک است، حذف می‌شوند.

استراتژی‌های دیگری برای مسایل تکامل زمانی، شامل زوج برآوردهای خطای فضا-زمان روی حل مساله دوگان در دامنه فضایی و زمانی پیشنهاد شده‌اند [۲۳، ۴].

^۸Nonreflecting Boundary Conditions

^۹Bayliss, Turkel

^{۱۰}Huan, Thompson

^{۱۱}Keller, Grote

^{۱۲}Collino

فصل ۲

تعاریف اولیه

در این فصل تعاریف، قضایا و مفاهیم پایه‌ای روش‌های عناصر متناهی تطبیقی را بیان می‌کنیم. تعاریف این فصل از [۳۸] و [۶۰] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۲. ماتریس مربعی A را متقارن می‌نامیم هرگاه،

$$A^T = A,$$

و آن را معین مثبت گوییم هرگاه متقارن بوده و

$$\forall v \neq 0, \quad v^T A v > 0.$$

اگر به جای علامت بزرگتر اکید، علامت $\geq$ باشد ماتریس را نیمه معین مثبت می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۲. حاصل ضرب (تنسور) کرونکر^۱

اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ باشد، حاصل ضرب کرونکر A و B را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (1.2)$$

برای ماتریس‌های مختلط مقدار نیز (۱.۲) برقرار است.

مثال ۳.۱.۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب کرونکر آن‌ها به صورت زیر است،

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 2B & 3B \\ 3B & 2B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

^۱Kronecker (Tensor) Products

تعریف ۴.۱.۲. فضای گستره ماتریس را به صورت

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m | \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۲. روش کمترین مربعات^۲

دستگاه معادلات خطی ناسازگار زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.2)$$

چون دستگاه ناسازگار است $\mathbf{b} \notin R(A)$ و برای هر $\mathbf{x}$ تساوی (۲.۲) برقرار نیست. لذا داریم،

$$\varepsilon = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad (3.2)$$

که در آن ε بردار خطا می‌باشد، اندازه خطا با استفاده از نورم دو به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\|\varepsilon\| = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \quad (4.2)$$

برای سیستم ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، هدف یافتن برداری مانند $\hat{\mathbf{x}}$ است، به طوری که خطای محاسبه شده به صورت $\|\hat{\varepsilon}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ کوچکترین مقدار خطای ممکن باشد. در این صورت بردار $\hat{\mathbf{x}}$ را جواب کمترین مربعات می‌گویند در واقع باید بردار $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ تا حد ممکن به بردار $\mathbf{b}$ نزدیک باشد و باید $\hat{\mathbf{b}} \in R(A)$ باشد. پس به دنبال بهترین تقریب برای بردار $\mathbf{b}$ در $R(A)$ هستیم. برای این منظور باید $\hat{\mathbf{b}}$ را به صورت زیر انتخاب نماییم،

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{Proj}_{R(A)} \mathbf{b}$$

یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی فضای گستره ماتریس A بهترین تقریب ممکن است. لذا برای حل مساله کمترین مربعات باید ابتدا $\hat{\mathbf{b}} = \text{Proj}_{R(A)} \mathbf{b}$ را بیابیم و سپس معادله $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ را حل کنیم.

روش‌های حل دستگاه معادلات خطی

در بعضی از روش‌های مستقیم، هدف این است که با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، به صورت ساده‌تری از معادلات رسیده و آن‌ها را حل کنیم. عملیات سطری مقدماتی عبارتند از:

۱. تعویض دو سطر (معادله).

۲. ضرب یک سطر (معادله) در یک عدد غیر صفر.

^۲Least Square Problem

۳. ضرب یک سطر (معادله) در عددی غیر صفر و جمع کردن آن با سطری دیگر.

تعریف ۶.۱.۲. روش حذفی گاوس

این روش شامل دو مرحله می‌باشد:

- مرحله اول: تبدیل ضرایب به یک ماتریس بالامثلثی با استفاده از عملیات سطری مقدماتی.
- مرحله دوم: حل و جایگذاری معکوس از آخرین معادله.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & \dots & a'_{1n} \\ \circ & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \circ & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

تعریف ۷.۱.۲. سری تیلور تابع $f(x)$ با مقادیر حقیقی یا مختلط، که در همسایگی نقطه حقیقی یا

مختلط x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (5.2)$$

می‌باشد، که در رابطه‌ی (۵.۲)، $f^{(n)}$ ، مشتق n ام تابع f در نقطه x_0 است.

تعریف ۸.۱.۲. فرمول اویلر.

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (6.2)$$

تعریف ۹.۱.۲. سری فوریه، سری فوریه مختلط و انتگرال فوریه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

• سری فوریه

هر حرکت تناوبی را می‌توان با یک سری سینوسی و کسینوسی به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned} \quad (7.2)$$

که در رابطه‌ی (۷.۲)

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \sin nx dx. \end{cases} \quad (8.2)$$

• سری فوریه مختلط

فرض کنید:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (9.2)$$

چون

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \end{cases} \quad (10.2)$$

و

$$\begin{cases} \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{cases} \quad (11.2)$$

با جایگذاری (۱۱.۲) در (۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{inx} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) + e^{-inx} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

قرار می‌دهیم

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (13.2)$$

با جایگذاری (۱۳.۲) در (۱۱.۲) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (14.2)$$

که در آن بر اساس (۱۳.۲) و (۸.۲) ضرایب c_n به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx \quad (15.2)$$

یا

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) e^{-inx} dx. \quad (16.2)$$

• انتگرال فوریه

اگر f تابعی باشد که در شرایط قضیه (۱۰.۱.۲) صدق کند، انتگرال فوریه آن عبارت است از:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw, \quad (۱۷.۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \\ B(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv. \end{aligned} \quad (۱۸.۲)$$

قضیه ۱۰.۱.۲. اگر $f(x)$ در هر فاصله متناهی به طور تکه‌ای پیوسته و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد و انتگرال (۱۹.۲) موجود باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان به صورت یک انتگرال فوریه نشان داد. در نقطه‌ای که $f(x)$ ناپیوسته باشد انتگرال فوریه برابر میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right|. \quad (۱۹.۲)$$

• اگر v تابعی حقیقی یا مختلط مقدار در $L_1(\mathbb{R}^d)$ باشد، برای $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ تبدیل فوریه را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}v(\xi) = \hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad x \cdot \xi = \sum_{j=1}^d x_j \cdot \xi_j.$$

تعریف ۱۱.۱.۲. تابع یک گامی یا هوی‌ساید^۳ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < c, \\ 1 & \text{if } t > c, \end{cases}$$

که در آن $c > 0$ است، شکل (۱.۲) را ببینید.

تعریف ۱۲.۱.۲. انتگرال‌گیری گاوسی

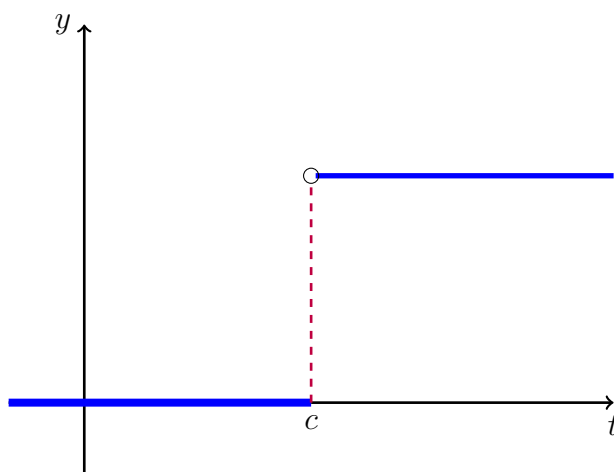
در این روش نقاط $x_1, \dots, x_m$ و وزن‌های $w_1, \dots, w_m$ را طوری انتخاب می‌کنیم که رابطه‌ی زیر برای هر تابع انتگرال‌پذیر f بالاترین درجه دقت را داشته باشد

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m w_k f(x_k). \quad (۲۰.۲)$$

برای

• انتگرال‌گیری گاوسی برای چندجمله‌ای‌های تا مرتبه $2m - 1$ دقیق است.

^۳Heaviside Function



شکل ۱.۲: تابع هوی ساید

• ساده‌ترین نوع انتگرال‌گیری گاوسی، گاوس دونقطه‌ای است که به صورت زیر بیان می‌کنیم:

مثال ۱۳.۱.۲. دو نقطه‌ی x_1 و x_2 و وزن‌های w_1 و w_2 را طوری تعیین می‌کنیم که رابطه

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad (21.2)$$

برای چندجمله‌ای‌های تا مرتبه $3 = (2(2) - 1)$ دقیق باشد بنابراین انتگرال‌گیری گاوس دونقطه‌ای برای $1, x, x^2, x^3$ دقیق است. با قرار دادن این مقادیر در (۲۱.۲) داریم،

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \quad (22.2)$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$$

با حل دستگاه (۲۲.۲) مقادیر $w_1 = w_2 = 1$ و $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را به دست می‌آوریم.

انتگرال‌گیری گاوس دو نقطه‌ای را برای هر تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (23.2)$$

تعریف ۱۴.۱.۲. چندجمله‌ای لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n.$$

ویژگی ۱۵.۱.۲. خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$ را روی $[a, b]$ ، به صورت

$$(P_i(x), P_j(x)) = \int_a^b P_i(x)P_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j, \\ c_i, & \text{if } i = j, \end{cases} \quad (24.2)$$

تعریف می‌کنیم که در آن c_i مقداری ثابت است.

تعریف ۱۶.۱.۲. قاعده‌ی گاوس لژاندر m نقطه‌ای را به صورت زیر بیان می‌کنیم،

$$Q_{GL(x)} = w_1 f(x_1) + \dots + w_m f(x_m),$$

که برای چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی $2m - 1$ دقیق است.

برای تعیین m گره x_i و وزن‌های w_i ، $2m$ معادله غیرخطی زیر را حل می‌کنیم،

$$w_1 x_1^k + \dots + w_m x_m^k = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k + 1}, \quad k = 0, \dots, 2m - 1. \quad (25.2)$$

k امین معادله‌ی (۲۵.۲) را به صورت زیر به دست می‌آوریم،

$$w_1 f(x_1) + \dots + w_m f(x_m) = \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

که برای $f(x) = x^k$ دقیق است.

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ ریشه‌های چندجمله‌ای درجه‌ی n ام لژاندر $P_n(x)$ باشد، برای هر $i = 1, \dots, m$ وزن‌های w_i انتگرال‌گیری گاوس لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx.$$

اگر $f(x)$ چندجمله‌ای از درجه کمتر از $2m$ باشد، آنگاه

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j).$$

مثال ۱۷.۱.۲.

• برای ریشه‌های $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ وزن‌های گاوس لژاندر دوقطه‌ای، $w_1 = w_2 = 1$ است که به صورت زیر می‌نویسیم،

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

• گاوس لژاندر سه نقطه‌ای برای ریشه‌های $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x = 0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ و وزن‌های متناظر $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$ و $w_2 = \frac{8}{9}$ به صورت زیر است،

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

• هر انتگرالی را با تغییر متغیر از بازه $[a, b]$ به بازه $[-1, 1]$ تبدیل می‌کنیم،

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(x)dx, \quad g(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right).$$

تعریف ۱۸.۱.۲. فضای همه توابعی که مربع آن‌ها انتگرال‌پذیر باشد را فضای $L_2(\Omega)$ می‌گوییم. ضرب داخلی و نورم در فضای $L_2(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v, w \rangle = (v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} v w dx \quad \bullet$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

تعریف ۱۹.۱.۲. فضای سوبولف^۴ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); D^{\alpha}v \in L_2(\Omega), |\alpha| < k\},$$

که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ بردار d تایی از عناصر صحیح نامنفی است و چنداندیس^۵ گفته می‌شود. مشتق مرتبه α ام و طول α ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D^{\alpha}v = \frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

ضرب داخلی، نورم و نیم‌نورم روی فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle v, w \rangle_k = \langle v, w \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}v D^{\alpha}w dx \quad \bullet$$

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^{\alpha}v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha}v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

• اگر $k = 0$ آنگاه $\|v\|_{H^0} = \|v\|_{L_2}$ ، $H^0 = H = L_2$ ،

• اگر $k = 1$ آنگاه $\{v \in L_2, D^{\alpha}v \in L_2, |\alpha| \leq 1\}$ ، H^1 ،

$$H_0^1 = \{v \in H^1, v|_{\Gamma} = 0\} \quad \bullet$$

تعریف ۲۰.۱.۲. پایه متعامد

اگر $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای متعامد باشد یعنی،

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

^۴Sobolev Space

^۵Multi Index

چنین دنباله‌ای را یک پایه متعامد (مجموعه متعامد کامل) می‌نامیم، هرگاه هر $v \in H$ را بتوانیم با ترکیبی خطی از عناصر دنباله تقریب بزنیم، یعنی اگر برای هر ε ، عدد صحیح N و اعداد حقیقی $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ وجود داشته باشند، طوری که

$$\|v - \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j\| < \varepsilon. \quad (26.2)$$

لم ۲۱.۱.۲. اگر $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ مجموعه‌ای متعامد در H باشد، آنگاه بهترین تقریب $v \in H$ ، ترکیب خطی از N تابع اول φ_j به صورت $v_n = \sum_{j=1}^N (v, \varphi_j) \varphi_j$ است.

برهان. برای هر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داریم،

$$\begin{aligned} \|v - \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j\|^2 &= \|v\|^2 - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_j (v, \varphi_j) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \\ &= \|v\|^2 + \sum_{j=1}^N (\alpha_j - (v, \varphi_j))^2 - \sum_{j=1}^N (v, \varphi_j)^2. \end{aligned} \quad (27.2)$$

□

چون سمت چپ رابطه (۲۷.۲) نامنفی است، در حالت خاص، برای هر $\alpha_j = (v, \varphi_j)$ داریم:

$$\sum_{j=1}^N (v, \varphi_j)^2 \leq \|v\|^2. \quad (28.2)$$

چون رابطه (۲۸.۲) برای هر N برقرار است، نامساوی

$$\sum_{j=1}^\infty (v, \varphi_j)^2 \leq \|v\|^2, \quad (29.2)$$

موسوم به نامساوی بسل، به دست می‌آید.

اگر $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ یک پایه متعامد باشد، خطای بهترین تقریب وقتی N به بی‌نهایت میل کند به صفر میل می‌کند، یعنی

$$\|v - \sum_{j=1}^N (v, \varphi_j) \varphi_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^N (v, \varphi_j)^2 \longrightarrow 0, \quad \text{as } N \longrightarrow \infty. \quad (30.2)$$

بنابراین تساوی پارسوال را به صورت زیر داریم

$$\sum_{j=1}^\infty (v, \varphi_j)^2 = \|v\|^2. \quad (31.2)$$

در نتیجه مجموعه‌ی $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ یک پایه متعامد است اگر و فقط اگر رابطه‌ی پارسوال برای هر $v \in H$ برقرار باشد.

تعریف ۲۲.۱.۲. اگر u, v توابع عددی و $w = (w_1, \dots, w_d)$ تابعی برداری از $x \in \mathbb{R}^d$ باشد، عملگر گرادینان^۶، عملگر دیورژانس^۷ و عملگر لاپلاس^۸ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla v = \text{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right),$$

$$\nabla \cdot w = \text{div} w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

$$\Delta \cdot v = \nabla \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2},$$

تعریف ۲۳.۱.۲. فرمول‌های انتگرال‌گیری دیورژانس و گرین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرمول دیورژانس^۹،

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot w dx = \int_{\Gamma} w \cdot n ds.$$

فرمول گرین^{۱۰}

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} w \cdot n v ds - \int_{\Omega} \nabla \cdot w v dx.$$

در حالت خاص $w = \nabla u$ فرمول گرین به شکل

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Omega} \Delta u v dx.$$

تبدیل می‌شود.

تعریف ۲۴.۱.۲. به ناهمبازی که در سمت چپ، خطا و در سمت راست، جواب تقریبی باشد، برآورد خطای پسین و به ناهمبازی که در سمت چپ، خطا و در سمت راست، جواب دقیق مساله باشد، برآورد خطای پیشین می‌گوییم.

تعریف ۲۵.۱.۲. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, d\},$$

باشد. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ دامنه گفته می‌شود اگر باز و محدب باشد. برای $d = 1$ این دامنه، بازه، برای $d = 2$ بخشی از صفحه و برای $d = 3$ قسمتی از فضا می‌باشد. مرز دامنه را با $\partial\Omega = \Gamma$ نشان می‌دهیم و بستار دامنه را به صورت $\bar{\Omega} = \Gamma \cup \Omega$ تعریف می‌کنیم.

^۶Gradient Operator

^۷Divergence Operator

^۸Laplace Operator

^۹Divergence Formula

^{۱۰}Green Formula

تعریف ۲.۶.۱.۲. (معادله انتگرالی). معادله‌ای که در آن، تابع مجهول، در انتگرالده، ظاهر شود معادله انتگرالی نامیده می‌شود.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

بیشتر فرآیندهای طبیعی را می‌توان در سطح میکروسکوپی، بدون شرح رفتار تک تک مولکول‌ها، اتم‌ها، الکترون‌ها یا اجزای دیگر، توصیف کرد. کمیت‌هایی مانند دگرذیسی، سرعت، چگالی، فشار، دما، غلظت یا میدان الکترومغناطیسی، توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، به دست می‌آیند. این معادلات، زبانی برای فرمول‌بندی بسیاری از مساله‌های مهندسی و علمی است. برای مثال، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی^{۱۱} در پیش‌بینی و کنترل خواص دینامیکی و استاتیکی ساختمان‌ها، جریان خون در سیاهرگ‌ها، آب و هوا، بازداري حرارتی تومورها، گرم کردن و ذوب کردن فلزات، زدودن آلودگی هوا و آب در تسهیلات شهری، سوزاندن گاز در موتور وسایل نقلیه، عکس‌برداری تشدید مغناطیسی، پرتونگاری مقطعی کامپیوتری در پزشکی و ... به کار می‌رود.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE خوانده می‌شود، دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که در آن، توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها، وجود داشته باشد. بیشتر PDE ها در عمل فقط شامل مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم بوده و PDE های مرتبه دوم نامیده می‌شوند.

معادله دیفرانسیل PDE مرتبه دوم با ضرایب ثابت در فضای دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Au_{xx}(x, y) + 2Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) + Eu_y(x, y) + Fu(x, y) + G = 0, \quad (32.2)$$

که در آن $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ توابعی از متغیرهای مستقل x و y هستند. معادله (۳۲.۲) بنا به آزمون $d = AC - B^2$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌شود،

$d = AC - B^2 > 0$	بیضوی	معادله پواسون
$d = AC - B^2 = 0$	سه‌موی	معادله انتقال گرما
$d = AC - B^2 < 0$	هذلولوی	معادله موج

به طور کلی، معادلات دیفرانسیل به سه دسته‌ی کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱. مسایل مقدار اولیه IVP^{۱۲}

^{۱۱}Partial Differential Equation

^{۱۲}Initial Value Problems

مثال ۱.۲.۲.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \quad t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \quad t = 0. \end{cases}$$

۲. مسایل مقدار مرزی BVP^{۱۳}

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $\partial\Omega$ مرز دامنه‌ی Ω باشد. معادله‌ی لاپلاس به صورت

$$\begin{cases} \Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, t) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

است.

در مسایل مقدار مرزی، سه نوع شرط مرزی وجود دارد:

• شرط مرزی دریکله^{۱۴}

مثال ۳.۲.۲.

$$u(x, t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

• شرط مرزی نوین^{۱۵}

مثال ۴.۲.۲.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

که در آن، $n = n(x)$ بردار یکه‌ی خارجی عمود بر Ω در $x \in \partial\Omega$ است.

• شرط مرزی روبین^{۱۶}

مثال ۵.۲.۲.

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k \cdot u(x, t) = g(x), \quad k > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

۳. مسایل مقدار ویژه^{۱۷}

^{۱۳}Boundry Value Problems

^{۱۴}Dirichlet Boundary Condition

^{۱۵}Neumann Boundary Condition

^{۱۶}Robin Boundary Condition

^{۱۷}Eigenvalue Problems

مثال ۶.۲.۲

$$-(a\varphi')' + c\varphi = \lambda\varphi \quad \text{in } \Omega = (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (33.2)$$

که در آن a و c توابعی هموار هستند، $a(x) > a_0 > 0$ و $c(x) \geq 0$ روی $\bar{\Omega}$ است، λ یک مقدار ویژه و φ تابع ویژه متناظر با آن است.

۳.۲ روش عناصر متناهی

مدل‌های ریاضی در علوم و مهندسی، بیشتر به شکل معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرالی هستند. برای استفاده از مدل‌های ریاضی در کامپیوتر، به الگوریتم‌های عددی نیازمندیم، چرا که فقط در ساده‌ترین حالات می‌توان به جواب تحلیلی رسید. ولی در حالت کلی ناگزیریم از روش‌های عددی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده کنیم. یکی از روش‌های عددی حل معادلات با مشتقات جزئی، روش عناصر متناهی^{۱۸} است که به اختصار FEM گفته می‌شود.

معادله اسکالر موج، که انتشار موج صوت را در دامنه کراندار $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ ، با مرز Γ ، مدل‌سازی می‌کند در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p &= f, & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ p(\cdot, 0) &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, 0) = 0, & \text{in } \Omega, \\ p|_{\Gamma} &= 0, & \text{on } \Gamma \times (0, T), \end{aligned} \quad (34.2)$$

که در آن $p(x, t)$ فشار، $c(x)$ سرعت صوت وابسته به $x \in \Omega$ ، t متغیر زمان، T زمانی نهایی و $f(x, t)$ تابع منبع مفروض است.

برای حل معادله (۳۴.۲) چون معادله به زمان و مکان بستگی دارد، در روش عناصر متناهی، دو حالت را در نظر می‌گیریم، ابتدا زمان را ثابت نگه داشته و معادله را نسبت به مکان حل می‌کنیم، که به نیمه‌گسسته‌سازی^{۱۹} موسوم است، سپس معادله را هم نسبت به زمان و هم نسبت به مکان گسسته می‌کنیم که گسسته‌سازی کامل^{۲۰} نامیده می‌شود.

حال می‌خواهیم جواب تقریبی $u_h(x, t)$ را برای زمان ثابت $t = t_k$ ، به دست آوریم. $u_h(x, t)$ تابعی قطعه‌ای خطی روی هر عنصر فرض شده است. این عنصر، در حالت یک بعدی بازه، در حالت دوبعدی مثلث و در حالت سه‌بعدی، چهاروجهی است. اساس کار روش عناصر متناهی به این صورت است که ابتدا باید دامنه را که یک چندضلعی است مش‌بندی کنیم. در حالت دوبعدی این مش‌بندی مثلثی‌سازی^{۲۱} نامیده می‌شود. در مثلثی‌سازی، باید شرایط زیر برقرار باشد:

^{۱۸}Finite Element Method^{۱۹}Semi Discretization^{۲۰}Fully Discretization^{۲۱}Triangulation

$$۱. \Omega = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

$$۲. h_K = \text{diam}(K)$$

$$۳. h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

در این صورت ناحیه‌ای به صورت $\mathcal{T} = \{K_j\}_{j=1}^{m_h}$ با عناصر مثلثی K خواهیم داشت که m_h تعداد نقاط داخل چندضلعی است. راس‌های مثلث $K \in \mathcal{T}_h$ ، گره نامیده می‌شوند. اشتراک هر دو مثلث از $\mathcal{T}_h$ یک گره، یک یال یا تهی است و هیچ گره‌ای از $\mathcal{T}_h$ نباید روی یالی از مثلث‌ها، قرار گیرد. حال اگر Ω ناحیه‌ای محدب و هموار باشد اما چندضلعی نباشد، برای مش‌بندی باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱. تعدادی نقطه، روی مرز دامنه، مشخص می‌کنیم.

۲. این نقاط را به وسیله خطوط راست به هم وصل می‌کنیم، ناحیه جدید به شکل چندضلعی خواهد بود.

۳. تعدادی نقطه‌ی دلخواه در داخل چندضلعی، در نظر می‌گیریم و مثلثی‌سازی را انجام می‌دهیم.

در این مش‌بندی، هر چقدر مش ظریف‌تر انتخاب شود، جواب تقریبی ما دقیق‌تر خواهد بود.

تعریف ۱.۳.۲. (فضای آزمایش).^{۲۲} مجموعه‌ای از توابع، که جواب تقریبی را در آن می‌یابیم.

تعریف ۲.۳.۲. (فضای آزمون).^{۲۳} فضای توابعی که برای شرط تعامد به کار می‌بریم.

فرض کنید $\{P_j\}_{j=1}^{m_h}$ مجموعه‌ای از گره‌های داخلی باشد. فضای توابع خطی قطعه‌ای پیوسته را به عنوان فضای آزمون به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0, \text{ در } K \in \mathcal{T}_h \text{ خطی است} : v|_{\Gamma} = 0\}.$$

حال با ضرب معادله (۳۴.۲) در تابع آزمون^{۲۴} $\varphi \in S_h$ ، و انتگرال‌گیری روی ناحیه مورد نظر داریم:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2(x)} P_{tt} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \Delta p \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx, \quad (۳۵.۲)$$

با استفاده از قضیه‌ی گرین برای جمله‌ی دوم (۳۵.۲)، به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \cdot \varphi dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi ds - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi dx \\ &= (p, n, \varphi)_{\Gamma} - (\nabla p, \nabla \varphi). \end{aligned} \quad (۳۶.۲)$$

^{۲۲}Trial Space

^{۲۳}Test Space

^{۲۴}Test Function

چون $\varphi \in S_h$ ، پس جمله‌ی اول سمت راست تساوی بالا، برابر صفر است. بنابراین، مساله به شکل یافتن $p \in H^1$ ، به گونه‌ای که

$$\left(\frac{1}{c^2} p_{tt}, \varphi\right) + (\nabla p, \nabla \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1, \quad t > 0, \quad (37.2)$$

باشد، بازنویسی می‌شود. به این صورت از مساله، فرمول‌بندی وردشی^{۲۵} یا شکل ضعیف^{۲۶} یا به اختصار V.F می‌گوییم. اگر در سمت چپ V.F به جای φ ، u قرار دهیم نورم انرژی به صورت

$$\|p\|_e = \left(\frac{1}{c^2} p_{tt}, p\right) + (\nabla p, \nabla p),$$

به دست می‌آید.

توابع $\{\varphi\}_{i=1}^{m_h}$ را به صورت

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (38.2)$$

تعریف می‌کنیم و آن را به عنوان پایه‌ای برای S_h ، در نظر می‌گیریم. بنابراین هر عضو S_h را می‌توان، به شکل ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت:

$$\forall v \in S_h, \quad v = \sum_{i=0}^{m_h} v_i \varphi_i(x), \quad v_i = v(x_i). \quad (39.2)$$

از این رو، روش عناصر متناهی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

برای هر $p_h(t) = p_h(\cdot, t) \in S_h$ ، $t > 0$ ، $p_h(t)$ را بیابید طوری که،

$$\left(\frac{1}{c^2} p_{h,tt}, \chi\right) + (\nabla p_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \quad (40.2)$$

$$p_h(T) = p_h(\cdot, T) = 0, \quad p_{h,t}(T) = 0.$$

به این نوع گسسته‌سازی، نیمه‌گسسته‌سازی، گفته می‌شود.

حال می‌خواهیم گسسته‌سازی را نسبت به هر دو متغیر فضا و زمان، انجام دهیم. در اصطلاح به این عمل، گسسته‌سازی کامل می‌گوییم. فرض کنید P^k ، تقریبی از $p(t)$ در $t = t_k$ ، $(P^k = p_h = p(t_k))$ ، τ گام زمانی، $\bar{\partial}^2$ مشتق دوم نسبت به زمان، $T = n\tau$ و $t_k = k\tau$ باشد. برای مشتق دوم p نسبت به زمان داریم،

$$\bar{\partial}^2 P^k = p_{h,tt} = \frac{P^{k+1} - 2P^k + P^{k-1}}{\tau}. \quad (41.2)$$

با جایگذاری (۳۹.۲) در (۴۱.۲) داریم

^{۲۵} Variational Formulation

^{۲۶} Weak Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{P^{k+1} - 2P^k + P^{k-1}}{\tau^2}, \chi \right) + (\nabla P^k, \nabla \chi) = (f^k, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \\ P^n = 0, \quad \bar{\partial} P^n = 0. \quad (42.2)$$

لذا،

$$\left(\frac{1}{c^2} P^{k+1}, \chi \right) + \tau^2 (\nabla P^k, \nabla \chi) = \tau^2 (f^k, \chi) + 2 \left(\frac{1}{c^2} P^k, \chi \right) - \left(\frac{1}{c^2} P^{k-1}, \chi \right), \quad (43.2) \\ \forall \chi \in S_h, \quad t > 0.$$

چون $P^k \in S_h$ ، پس می‌توان نوشت

$$P^k(x) = \sum_{j=1}^{m_h} P_i^k \varphi_i(x). \quad (44.2)$$

با قرار دادن (44.2) و $\chi = \varphi_j$ در (43.2)، عبارت

$$\sum_{j=1}^{m_h} P_i^{k+1} \left(\frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right) + \tau^2 \sum_{j=1}^{m_h} P_i^k (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) = \\ \tau^2 (f^k, \varphi_j) + 2 \sum_{j=1}^{m_h} P_i^k \left(\frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right) - 2 \sum_{j=1}^{m_h} P_i^{k-1} \left(\frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right) \quad (45.2)$$

به دست می‌آید. شکل ماتریسی (45.2)، به صورت زیر بیان می‌شود

$$M(P^{k+1} - 2P^k + P^{k-1}) = \tau^2 F^k - \tau^2 K P^k, \quad (46.2)$$

که در آن، $M = M_{ij} = (\frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j)$ ماتریس جرم، $K = K_{ij} = (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)$ ماتریس سختی، $k = 1, 2, \dots$ سطح زمانی، F^k بردار بار و P قسمت مجهول فرمول گسسته‌ی P است. همان‌گونه که می‌بینید، روش عناصر متناهی، مساله‌ای را که حل تحلیلی آن، دشوار به نظر می‌رسد، به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کند.

۴.۲. تطبیق

پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی بسیار مهمی وجود دارد که روش‌های عددی تطبیقی، برای حل دوباره‌ی آن‌ها ضروری است. این روش‌ها، به‌طور خودکار، در جهت اصلاح جواب‌های تقریبی، تعدیل می‌شوند. روش‌های عددی تطبیقی، در حوزه‌ی محاسباتی، حتی در زمینه‌ی عناصر متناهی، جدید نیستند. در حل عددی مسایل علمی در مهندسی و فیزیک مانند مکانیک جامدات و سیالات و جریان متخلخل مواد، اغلب، دقت تقریب‌های عددی توسط تکنیکی، کاهش می‌یابد. راه‌حلی برای این مشکل، تظریف شبکه‌ها در نزدیکی دامنه است. به عبارت دیگر، تعداد نقاط شبکه‌ای بیشتری را در مناطق تکنیکی، در نظر می‌گیریم. سوالی که در این جا پیش می‌آید این است که، چگونه این نواحی را تشخیص دهیم، آن‌ها

را تطریف کنیم و بین نقاط تطریف شده و تطریف نشده، تعادل را برقرار کنیم طوری که دقت سراسری، بهینه باشد. برای پاسخ به این سوال، تطبیق را به کار می‌بریم؛ یعنی باید به طریقی، روشی عددی را برای بهبود کیفیت جواب‌های تقریبی بسازیم. ساختن این روش عددی شامل تغییر در تعداد عناصر، تطریف شبکه‌ها، افزایش مرتبه‌ی تقریب، جابه‌جا شدن نقاط گره‌ای و اصلاح ساختارهای الگوریتم است. سوال دیگر این است که چگونه، برآوردهای معتبری را برای دقت جواب‌های تقریبی محاسبه شده، به دست آوریم. برآورد خطای پیشین، برای این کار، مناسب نیست چون خطای پیشین فقط اطلاعاتی را درباره‌ی رفتار مجانبی خطاها، تولید می‌کند و به‌طور منظم به جواب بستگی دارد که در حضور تکینگی ذکر شده، صدق نمی‌کند. برای پاسخ به این سوال، باید کیفیت خطای پسین جواب تقریبی را تعیین کنیم؛ یعنی خطایی که بعد از تقریب اولیه به دست می‌آید. برای این کار باید خطای پسین را محاسبه کنیم. البته، محاسبه‌ی برآورد خطای پسین باید به مراتب، کم‌هزینه‌تر از محاسبه‌ی جواب تقریبی باشد. به علاوه، باید محاسبه‌ی شاخص خطای محلی، به‌طور دینامیکی، امکان‌پذیر باشد.

۱.۴.۲ تطریف مش (شبکه) در فضا

سه نوع استراتژی تطبیقی، وجود دارد:

۱. تطریف مش ثابت،
 ۲. اضافه کردن درجه‌ی آزادی بیشتر، با استفاده از توابع پایه‌ای مراتب بالاتر در عناصر مشخص،
 ۳. حرکت تطبیقی مش محاسباتی برای به دست آوردن جواب دوباره.
- در حالت دوبعدی، مش می‌تواند مثلثی، چهار ضلعی یا ترکیبی از این دو باشد.
- فرض کنید u جواب دقیق، u_h جواب تقریبی حاصل از روش FEM، $R(u_h) = u - u_h$ خطای مانده، e خطای پسین و tol خطای قابل چشم‌پوشی باشد. الگوریتم این روش، به صورت زیر است
۱. یک مش اولیه را برای دامنه، در نظر می‌گیریم.
 ۲. جواب تقریبی u_h و $R(u_h)$ را به دست می‌آوریم.
 ۳. اگر $\|e\| > tol$ باشد، شبکه را در عناصری که $R(u_h)$ مقدار بزرگی دارد، تطریف می‌کنیم و مراحل ۱ و ۲ را تکرار می‌کنیم. در پایان الگوریتم، می‌بینیم که تطریف به یک سمت دامنه کشیده می‌شود.

فصل ۳

روش عناصر متناهی برای معادله موج بی کران

شبیه سازی عددی معادلات هذلولوی مسایل موج در بسیاری از زمینه های فیزیک، تصویربرداری فراصوت^۱ سنجش از راه دور و ردیابی مهم است. برای مدل حاکم بر انتشار موج مرتبه دوم، وابسته به زمان تابش و پراکندگی در دامنه های بی کران، برشی مصنوعی از مرز تعریف می کنیم، که ناحیه مورد نظر را احاطه کند و سپس با استفاده از روش عناصر متناهی آن را حل می کنیم.

۱.۳ معادله موج دوبعدی روی دامنه های بی کران

موج های وابسته به زمان را در یک ناحیه دوبعدی بی کران $\mathcal{R} = \frac{\mathbb{R}^2}{V}$ که هدفی با حجم V و مرز S را فرا گرفته است در نظر بگیرید. ناحیه بی کران $\mathcal{R}$ را با دایره ای به شعاع $\|x\| = R$ با مرز Γ برش می دهیم. $\Omega \subset \mathcal{R}$ زیرناحیه ای کراندار با مرز $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ است، شکل (۱.۳) را ببینید. جواب $u(x, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ در Ω و معادله موج اسکالر

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \nabla^2 u + f(x, t), \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.3)$$

با شرایط اولیه $v(x, 0) = v_0(x), u(x, 0) = u_0(x)$ صدق می کند. $c > 0$ سرعت موج، مقداری حقیقی می باشد. شرط مرزی به صورت

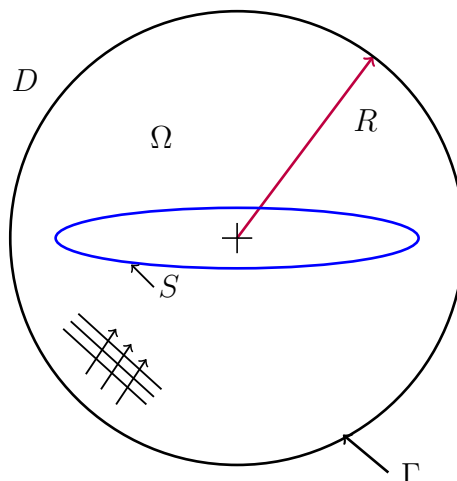
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, t), \quad x \in S, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

است. جواب برش دایره ای مرز در $r = R$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_\Gamma(\theta, t) = u(R, \theta, t), \quad v_\Gamma(\theta, t) = \frac{\partial u_\Gamma}{\partial t}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3)$$

$w = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ توابع کمکی وابسته به زمان است. برداری p تایی، $w(\theta, t) = \{w_j(\theta, t)\}_{j=1}^p$ حقیقی مقدار هستند. مقاومت ظاهری مرز Γ را با دنباله ای از شرایط پرتوهای مرزی دقیق مرتبه بالای

^۱Ultrasound



شکل ۱.۳: ناحیه بی کران دوبعدی که پراکنده ساز S با دامنه محاسباتی $\Omega \in \mathbb{R}$ ، برش دایره ای مرز Γ به شعاع R و ناحیه خارجی $D = \mathbb{R} \setminus \Omega$ را در بر گرفته است.

هاگستروم و هاری هاران^۲ [۶۱] به صورت زیر به دست می آوریم:

برای به دست آوردن جواب معادله موج دوبعدی

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

سری زیر را در نظر می گیریم:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) f^n(r, t), \quad f^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{1}{2}} f_k^n(ct - r),$$

و

$$(f_{k+1}^n)' = -\frac{(k + \frac{1}{2})^2 - n^2}{2(k + 1)} f_k^n, \quad a_n'' = -n^2 a_n,$$

قرار می دهیم

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2r} u = w_1,$$

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) f^{n,1}(r, t),$$

$$f^{n,1} = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{3}{2}} \gamma_{k,1} f_k^n(ct - r), \quad \gamma_{k,1} = -k.$$

با محاسبه

$$\frac{1}{c} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\delta_1}{r} w_1$$

^۲T.Hagstrom, S.I.Hariharan

داریم:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\gamma}{\gamma}} (-k) \frac{\partial}{\partial t} f_k^n(ct-r) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_1}{r} r^{-k-\frac{\gamma}{\gamma}} (-k) f_k^n \\
&= -\frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} (k+1) (f_{k+1}^n)' - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \delta_1 r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} (k) f_k^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left((k+1) (f_{k+1}^n)' + \delta_1 k f_k^n \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left((k+1) \left(-\frac{(k+\frac{1}{\gamma})^{\gamma} - n^{\gamma}}{\gamma(k+1)} \right) f_k^n + \delta_1 k f_k^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \left((k+\frac{1}{\gamma})^{\gamma} - n^{\gamma} \right) - \delta_1 k \right) f_k^n, \tag{۴.۳}
\end{aligned}$$

به ازای $k=0$ ،

$$r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \left(\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\gamma} - n^{\gamma} \right) - 0 \right) f_0^n = r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{n^{\gamma}}{\gamma} \right) f_0^n$$

رابطه (۴.۳) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\delta_1}{r} w_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{n^{\gamma}}{\gamma} \right) f_0^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left(-\frac{n^{\gamma}}{\gamma} \right) f_k^n \\
&+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \left((k+\frac{1}{\gamma})^{\gamma} - \delta_1 k \right) \right) f_k^n}_{(III)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} f_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \left(-\frac{n^{\gamma}}{\gamma} \right) f_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left(-\frac{n^{\gamma}}{\gamma} \right) f_k^n + (III) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} f_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} (-n^{\gamma}) f_k^n + (III) \\
&= \frac{1}{\gamma r^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-\frac{1}{\gamma}} f_0^n + \frac{1}{\gamma r^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k-\frac{1}{\gamma}} f_k^n \\
&= \frac{1}{\gamma r^{\gamma}} u + \frac{1}{\gamma r^{\gamma}} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial \theta^{\gamma}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \left((k+\frac{1}{\gamma})^{\gamma} - \delta_1 k - \frac{1}{\gamma} \right) \right) f_k^n}_{\text{جمله باقیمانده}}
\end{aligned}$$

با انتخاب $\delta_1 = 1$ در جمله باقیمانده داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 - k - \frac{1}{4} \right) f_k^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{1}{2} (k^2 - k) \right) f_k^n, \end{aligned}$$

پس برای $\delta = 1$ ،

$$w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) f^{n,2}, \quad f^{n,2} = \sum_{k=2}^{\infty} r^{-k-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} (k^2 - k) \right) f_k^n,$$

$$\gamma_{k,2} = \frac{1}{2} k(k-1).$$

فرمول کلی به صورت

$$w_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) f^{n,j}(r, t),$$

است که در آن

$$f^{n,j} = \sum_{k=j}^{\infty} r^{-k-j-\frac{1}{2}} \gamma_{k,j} f_k^n(ct-r),$$

$$\gamma_{k,j} = (-1)^j 2^{1-j} k(k-1) \dots (k-(j-1)),$$

$$\gamma_{j,j} = (-1)^j 2^{1-j} \underbrace{j(j-1) \dots (j-(j-1))}_{j!} = (-1)^j 2^{1-j} j!.$$

و برای $j \geq 2$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{j}{r} w_j = \frac{(j-\frac{1}{2})^2}{4r^2} w_{j-1} + \frac{1}{4r^2} \frac{\partial^2 w_{j-1}}{\partial \theta^2} + w_{j+1}, \quad j = 2, \dots \quad (5.3)$$

برای اثبات رابطه (۵.۳) می توانیم بسط هر جمله را در نظر بگیریم. از سمت چپ رابطه (۵.۳)

$$- \sum_{k=j-1}^{\infty} r^{-k-j-\frac{3}{2}} \gamma_{k+1,j} \frac{(k+\frac{1}{2})^2 - n^2}{2(k+1)} f_k^n + \sum_{k=j-1}^{\infty} r^{-k-j-\frac{3}{2}} j \gamma_{k,j} f_k^n,$$

و سمت راست رابطه (۵.۳) داریم،

$$\sum_{k=j-1}^{\infty} r^{-k-j-\frac{3}{2}} \frac{(j-\frac{1}{2})^2 - n^2}{4} \gamma_{k,j-1} f_k^n + \sum_{k=j+1}^{\infty} r^{-k-j-\frac{3}{2}} \gamma_{k,j+1} f_k^n,$$

برای $k \geq j+1$ ، $k = j$ ، $k = j-1$ به طور مجزا داریم:

$$k = j - 1$$

$$\begin{aligned} -\gamma_{j,j} \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2j} &= -(-1)^j 2^{1-j} j! \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2j} \\ &= (-1)^{j-1} 2^{1-j} (j-1)! \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2} \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} (j-1)! \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4} \\ &= \gamma_{j-1,j-1} \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4}, \end{aligned}$$

$$k = j$$

$$\begin{aligned} -\gamma_{j+1,j} \frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2j+2} + j\gamma_{j,j} \\ &= (-1)^{j-1} 2^{1-j} (j+1)! \frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2(j+1)} - (-1)^{j-1} 2^{1-j} j! j \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} (j)! \frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4} - \frac{(-1)^{j-1} 2^{1-j} j! j}{2} \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} (j)! \left(\frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2 - 2j}{4} \right) \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} (j)! \left(\frac{(j^2 - j + \frac{1}{\epsilon} - n^2)}{4} \right) \\ &= \gamma_{j,j-1} \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4}, \end{aligned}$$

$$k \geq j+1$$

$$\begin{aligned} -\gamma_{j+1,j} \frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2(j+1)} + j\gamma_{j+1,j} \\ &= -(-1)^j 2^{1-j} (j+1)j \dots (j+2-j) \frac{(j + \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{2(j+1)} + j(-1)^j 2^{1-j} j \dots (j+1-j) \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+2-j) \frac{j^2 + j + \frac{1}{\epsilon} - n^2}{4} + \frac{-j(-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+1-j)}{2} \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+2-j) \left(\frac{j^2 + j + \frac{1}{\epsilon} - n^2 - 2j(j+1-j)}{4} \right) \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+2-j) \left(\frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2 + (j+1-j)}{4} \right) \\ &= (-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+2-j) \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4} \\ &\quad + (-1)^{j-1} 2^{2-j} j \dots (j+2-j) \frac{(j+1-j)(j+1-j)}{4} \\ &= \gamma_{j,j-1} \frac{(j - \frac{1}{\epsilon})^2 - n^2}{4} + \gamma_{j,j+1}, \end{aligned}$$

بنابراین دنباله بازگشتی زیر نتیجه می‌شود،

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2r} u = w_1,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{j}{r} w_j = \frac{(j - \frac{1}{2})^2}{4r^2} w_{j-1} + \frac{1}{4r^2} \frac{\partial^2 w_{j-1}}{\partial \theta^2} + w_{j+1}, \quad j = 1, \dots \quad (6.3)$$

قرار می‌دهیم،

$$w_\circ = 2u,$$

با استفاده از رابطه (۶.۳)، معادله

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} + \frac{1}{c} v_\Gamma(\theta, t) + \frac{1}{2R} u_\Gamma(\theta, t) = \frac{1}{R} w_1(\theta, t), \quad (7.3)$$

را داریم. تابع $w_1(\theta, t)$ ضریب اول در بردار w است. داده $u_\Gamma(\theta, t)$ را در نظر بگیرید، $w(\theta, t)$ را طوری بیابید که

$$\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{4R} \left(A_1 + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w(\theta, t) = \left(b_1 + b_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_\Gamma(\theta, t), \quad (8.3)$$

با شرایط اولیه $w(\theta, \circ) = \circ$ و $w(\circ, t) = w(2\pi, t)$ برقرار باشد. A_1 و A_2 ماتریس‌هایی $p \times p$ به ترتیب سه قطری و قطری به صورت

$$A_1 = B \left[- \left(j - \frac{1}{2} \right)^2, 4j, -4 \right], \quad A_2 = B[-1, \circ, \circ], \quad (9.3)$$

می‌باشند، $b_1 = \frac{e_1}{(4R)}$ و $b_2 = 4b_1$ که در آن $e_1 = \{\delta_{j1}\}_{j=1}^p$ بردارهای یکه از مرتبه p هستند. تامپسون و همکارانش^۳ [۳۷] ماتریس‌های A_1 و A_2 را با مقادیری مستقل از (R) بیان کرده‌اند.

چون (۷.۳) و (۸.۳) شامل توابع مرزی $w_1(\theta, t)$ و جواب معادله موج با مرز $u_\Gamma(\theta, t)$ محدود شده است، معادله (۱۰.۳) و (۸.۳) هم‌ارزند، در پیاده سازی روش عناصر متناهی، با افزایش تعداد توابع p ، دقت دنباله‌ی شرایط مرزی افزایش می‌یابد [۳۷].

توابع مرزی با مود فوریه مماسی تجزیه می‌شوند و دستگاه معادلات زمانی مرتبه اول برای هر مود، دوباره فرمول‌بندی می‌شود [۳۷]. توابع کمکی $w(\theta, t)$ و جواب برش مرزی $u_\Gamma(\theta, t)$ را با سری فوریه به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$u_\Gamma(\theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(t) e^{im\theta}, \quad w(\theta, t) = \sum_{m=-M}^M w_m(t) e^{im\theta}, \quad (10.3)$$

در رابطه (۱۰.۳)، $u_m(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ، $w_m(t) = \{w_{m,j}\}_{j=1}^p$ و $w_{m,j}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ با تبدیل فوریه مماسی به صورت

$$u_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\Gamma(\theta, t) e^{-im\theta} d\theta, \quad w_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\theta, t) e^{-im\theta} d\theta, \quad (11.3)$$

^۳Thompson, R. Huan, D. He

است که در آن $u_m = u_m^*$ و $w_m = w_m^*$ می باشد. * مزدوج مختلط و $i = \sqrt{-1}$ را نشان می دهد. با استفاده از بسط فوریه روابط (۷.۳) و (۸.۳) به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{1}{c} v_{\Gamma}(\theta, t) + \frac{1}{\sqrt{R}} u_{\Gamma}(\theta, t) = \frac{1}{R} \sum_{m=-N}^N w_{m,1}(t) e^{im\theta}, \quad (12.3)$$

و

$$w'_m(t) + A_m w_m(t) = b_m u_m(t), \quad m \in (-M, M), \quad (13.3)$$

با شرط اولیه $w_m(0) = 0$ به دست می آوریم. در رابطه (۱۳.۳) $w_m(t)$ توابع برداری وابسته به زمان از مرتبه p هستند و $A_m = \{A_m^{ij}\}_{i,j=1}^p$ برای هر m ، ماتریسی سه قطری به صورت

$$A_m = \frac{c}{\sqrt{R}} B[m^2 - (j - \frac{1}{2})^2, \sqrt{R}j, -\sqrt{R}], \quad (14.3)$$

می باشد. بردار $b_m = \{b_{m,j}\}_{j=1}^p$ صفر و مولفه اول ناصفر بوده و مقدار $b_{m,j} = \frac{c}{\sqrt{R}}(1 - \sqrt{R}m^2)\delta_{1j}$ را دارد. در این حالت، معادلات مرزی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول برای هر بردار $w_m(t)$ ، از بعد p هستند، و با مودهای مرزی $u_m(t)$ ، به دست می آیند. دنباله ای از شرایط مرزی را با $RBC(M, p)$ نشان می دهیم، که M تعداد مودهای سری های فوریه و p تعداد معادلات کمکی (۱۳.۳)، برای هر مود m می باشد. معمولاً $p \ll M$ ، است که تعداد مودهای M ، تعداد جملات مورد نیاز برای حل دوباره جواب $u_{\Gamma}(\theta, t)$ را با یک سری فوریه روی برش دایره ای مرز، نشان می دهد.

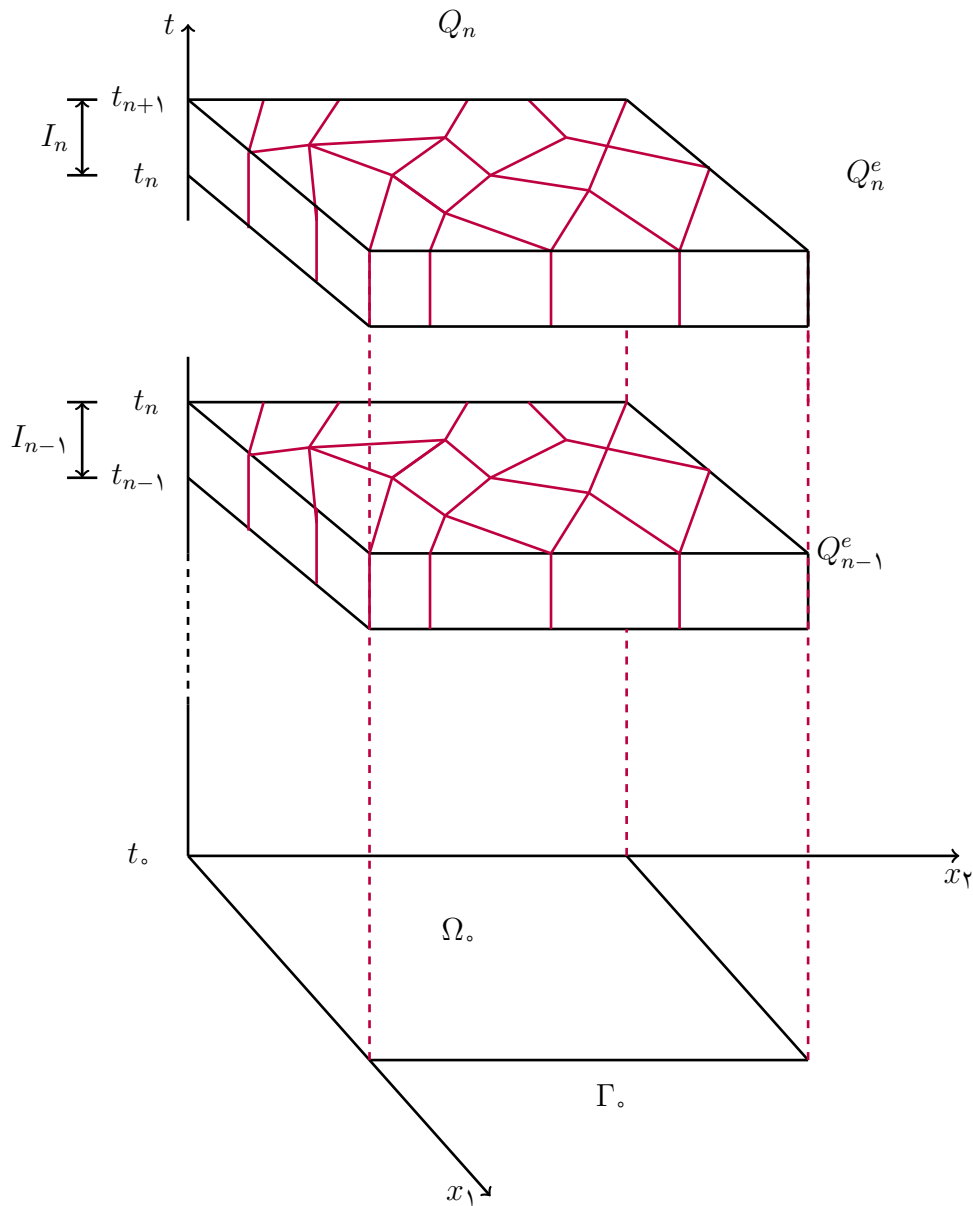
با کاربرد شرایط مرزی روی Γ ، جواب فرامیدانی در ناحیه بیرونی $D = R \setminus \Omega$ همزمان با جواب Ω محاسبه می شود. سمت راست معادله (۱۲.۳) اصلاح تقریب عملگر محلی B_1 از بایلیس و تارکل^۴ می باشد [۱].

۲.۳ فرمول بندی گسسته زمان گالرکین

بازه زمانی $(0, T)$ را به شکل $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ به N زیربازه $I_n = (t_n, t_{n+1})$ افراز می کنیم. طول گام زمانی $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ است. n امین قطعه فضا-زمان به صورت $Q_n = \Omega \times I_n$ درون دامنه فضایی Ω می باشد. مش فضا-زمان بدون ساختار درون یک قطعه ایجاد می شود. یک اشکال این روش این است که برای مساله های فضایی سه بعدی (چهاربعدی زمانی)، با مش های بدون ساختار فضا-زمان، به عناصر مرجع و مش چهاربعدی خاص نیاز داریم که به طور کلی در دسترس نیست. این روش به اندازه کافی با محدود کردن عناصر فضا-زمان درون مش متعامد، نسبت به فضا و زمان، قوی است. این روش را با انتگرال گیری گام زمانی مستقل از مختصات فضایی، به کار می بریم. عناصر فضا-زمان درون یک گام زمانی مانند شکل (۲.۳) می باشد. درون هر عنصر فضا-زمان، جواب آزمایش با پایه ای متناهی تقریب زده می شود که به هر دو بعد فضایی x و زمانی t وابسته است. توابع پایه ای $C^0(Q_n)$ را روی هر قطعه فضا-زمان پیوسته در نظر می گیریم، فصل مشترک این قطعه ها ناپیوسته

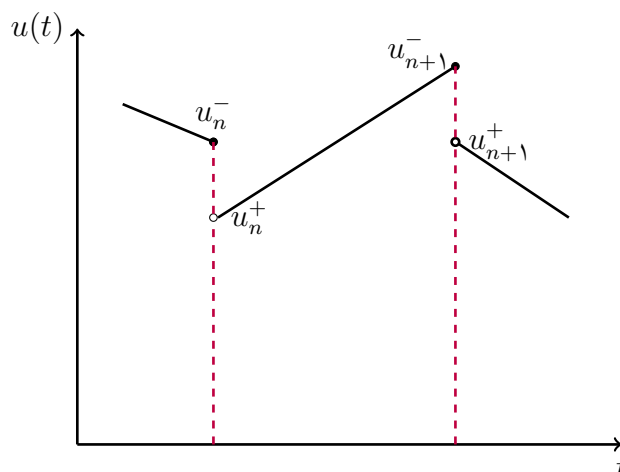
^۴A.Bayliss, E.Turkel

است. فضای توابع پایه‌ای عناصر متناهی در یک نمایش چندمیدانی را در عباراتی از متغیرهای مستقل u و v بیان می‌کنیم [۶۳، ۹، ۲۶، ۲۷].



شکل ۲.۳: دو قطعه فضا-زمان پی‌درپی با ضخامت Δt_n . درون هر قطعه فضا-زمان، مش‌های بدون ساختار متفاوت در فرآیند جواب تطبیقی استفاده می‌شود.

فضای توابع آزمایش را به صورت $V_n := \{u \in (C^\circ(Q_n))^2, u \in (\mathcal{P}^p(\Omega_e) \times \mathcal{P}^r(I_n))^2\}$ برای $u = \{u(x, t), v(x, t)\}$ تعریف می‌کنیم که $p \geq 1$ ، فضای چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر p و Ω_e دامنه فضایی عناصر است و برای توابع مرزی $w_m(t) \in W_n := \{w_m(t) \in \mathcal{P}^r(I_n)\}$ می‌باشد که در آن $r \geq 1$ ، مرتبه چندجمله‌ای زمانی است. برای گالرکین گسسته زمان، از متغیرهای مستقل در سیستم‌های هذلولوی مرتبه دوم استفاده می‌کنیم.



شکل ۳.۳: تقریب گسسته زمان

یک بخش مهم در روش فضا-زمان، جهش زمانی گسسته در فصل مشترک هر قطعه‌ی فضا-زمان است.

حدهای یکطرفه‌ی توابع قطعه‌ای پیوسته، در هر قطعه فضا-زمان را به صورت

$$u(x, t_n^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+, s > 0} u(x, t_n + s), \quad u(x, t_n^-) = \lim_{s \rightarrow 0^-, s < 0} u(x, t_n - s),$$

تعریف می‌کنیم و عملگر جهش برای قطعه‌های فضا-زمان^۵ به صورت زیر است:

$$[u(t_n)] = u(x, t_n^+) - u(x, t_n^-), \quad 0 \leq n \leq N.$$

ضرب داخلی را در L_2 استاندارد به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(w, u) = \int_{\Omega} w u dx,$$

با نورم

$$\|u\|_{\Omega} = (u, u)^{\frac{1}{2}},$$

و ضرب داخلی روی پرتو مرزی،

$$(w, u)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} w u d\Gamma, \quad (w, u)_s = \int_s w u ds, \quad (15.3)$$

تعریف می‌کنیم و نورم روی مرز Γ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم،

$$\|u\|_{\Gamma}^2 := \frac{1}{2R} (u, u)_{\Gamma} = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} u_{\Gamma}^2(\theta, t) R d\theta. \quad (16.3)$$

بخش حقیقی و موهومی سری فوریه را به صورت $u_m^c = 2\text{Re}(u_m)$, $u_m^s = -2\text{Im}(u_m)$ نشان

می‌دهیم. با توجه به نامساوی بسل، $\|u_M\|_{\Gamma}^2 \leq \|u\|_{\Gamma}^2$ وقتی $M \rightarrow \infty$ سری فوریه به $u_{\Gamma}(\theta, t)$

همگرا می‌شود. سپس از برابری پارسوال $\lim_{M \rightarrow \infty} \|u_M\|_{\Gamma}^2 = \|u\|_{\Gamma}^2$ سری‌های فوریه متناهی

^۵Jump Operator

$$\|u_M\|_{\Gamma}^2 := \pi \sum_{m=-M}^M u_m^2(t) = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} (u_0^c)^2 + \sum_{m=1}^M [(u_m^c)^2 + (u_m^s)^2] \right\}, \quad (17.3)$$

نتیجه می شود.

۱.۲.۳ معادلات فرم وردشی

فرمول بندی عناصر متناهی فضا-زمان با استفاده از روش گسسته زمان گالرکین به صورت زیر بیان می شود:

داده f و g و شرایط اولیه $\{u(x, t_n^-), v(x, t_n^-)\}, w_m(t_n^-)$ را از گام قبلی در نظر می گیریم.

برای $n = 0, 1, \dots, N-1$ روی هر قطعه فضا-زمان توابع $u = \{u(x, t), v(x, t)\} \in V_n$ و $w_m(t) \in W_n$ ، $x \in \Omega \cup \partial\Omega, t \in I_n$ ، را بیابید طوری که برای هر تابع آزمون، $\bar{u} = \{\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)\} \in V_n$ و $\bar{w}_m(t) \in W_n$ زوج معادلات انتگرالی زیر برقرار باشند،

$$A(\bar{u}, u)_n + B_{\Gamma}(\bar{u}, u)_n = F_s(\bar{v})_n + \frac{\pi}{2} \sum_{m=-M}^M F_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_{m,1})_n, \quad (18.3)$$

$$A_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_m)_n = b_{m,1} F_{\Gamma}(\bar{w}_{m,1}, u_m)_n, \quad m \in (-M, M), \quad (19.3)$$

$$A(\bar{u}, u)_n := \int_{I_n} \left\{ \left(\bar{v}, \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (\nabla \bar{v}, \nabla u) + \left(\nabla \bar{u}, \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \right) \right\} dt \\ + (\bar{v}(t_n^+), \frac{1}{c^2} [v(t_n)]) + (\nabla \bar{u}(t_n^+), [\nabla u(t_n)]),$$

$$B_{\Gamma}(\bar{u}, u)_n := \int_{I_n} \left\{ \frac{1}{c} (\bar{v}, v)_{\Gamma} + \frac{1}{\sqrt{\pi} R} (\bar{v}, u)_{\Gamma} + \frac{1}{\sqrt{\pi} R} \left(\bar{u}, \frac{\partial u}{\partial t} - v \right)_{\Gamma} \right\} dt \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi} R} (\bar{u}(t_n^+), [u(t_n)])_{\Gamma},$$

$$A_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_m)_n := \int_{I_n} \left\{ \bar{w}_m(t) \cdot \frac{dw_m}{dt}(t) + \bar{w}_m(t) \cdot A_m w_m(t) \right\} dt + \bar{w}_m(t_n^+) \cdot [w_m(t_n)],$$

$$F_s(\bar{v})_n := \int_{I_n} \{ (\bar{v}, f) + (\bar{v}, g)s \} dt,$$

$$F_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_{m,1})_n := \int_{I_n} \bar{w}_m(t) w_{m,1}(t) dt, \quad \bar{w}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} R} (\bar{v}, e^{im\theta})_{\Gamma},$$

$$F_{\Gamma}(\bar{w}_{m,1}, u_m)_n := \int_{I_n} \bar{w}_{m,1}(t) u_m(t) dt, \quad u_m(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} R} (u, e^{-im\theta})_{\Gamma}.$$

برای $n = 0$ ، $\{u(x, t_0^-), v(x, t_0^-)\} = \{u_0(x), v_0(x)\}$ و $w_m(t_0^-) = 0$ است، درون بازه فضا-زمان $I_n = (t_n^+, t_{n+1}^-)$ جواب های آزمون و آزمایش را با ترکیب خطی از چند جمله ای های زمانی $\mathcal{P}^r(I_n)$ ، تقریب می زنیم. از داده قبلی $t_n^- = t_{n-1}^+$ به عنوان شرایط اولیه برای قطعه جاری استفاده می کنیم.

۳.۳ گسسته سازی فضا-زمان

درون هر قطعه فضا-زمان $Q_n = \Omega \times I_n$ ، گسسته سازی فضا-زمان متعامد را با تقریب زمانی به صورت

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{r+1} u_i^h(x) \varphi_i(t), \quad x \in \Omega, \quad t \in I_n, \quad (20.3)$$

تعریف می کنیم. به علت پیوستگی گام های زمانی، برای توابع پایه ای زمانی $\phi_i(t) \in \mathcal{P}^r(I_n)$ ، می توانیم از درون یاب لاگرانژ، چند جمله ای لژاندر، یا توابع پایه ای دیگری استفاده کنیم. ابتدا و انتهای گام زمانی را به ترتیب با $t_1 = t_n^+$ و $t_{r+1} = t_{n+1}^-$ نشان می دهیم. برای توابع درون یاب لاگرانژ، $\phi_i(t_j) = \delta_{ij}$ و برای $r = 1$ توابع پایه ای برای چند جمله ای خطی به صورت $\phi_1(t) = \frac{t-t_1}{\Delta t_n}$ و $\phi_2(t) = \frac{t-t_2}{\Delta t_n}$ هستند، و $\Delta t_n = t_2 - t_1$ است. چند جمله ای های استاندارد لاگرانژ را به صورت

$$N_{ij} = N_i(x) N_j(y), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m,$$

$$N_i(x) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{(x - x_r)}{(x_i - x_r)}, \quad N_i(y) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^m \frac{(y - y_s)}{(y_i - y_s)},$$

$$N_{ij}(x_r, y_s) = \begin{cases} 1 & i = r, j = s, \\ 0 & o.w, \end{cases}$$

برای گسسته سازی فضا-زمان در نظر می گیریم.

تقریب فضایی $u_i^h(x) = u(x, t_i)$ با ترکیب خطی از توابع درون یاب $N_A(x)$ به صورت

$$u_i^h(x) = \sum_{A=1}^{D_n} N_A(x) u_A(t_i), \quad (21.3)$$

بیان می کنیم که در آن $u_A(t_i) = u(x_A, t_i)$ به گره زمانی t_i وابسته است. N_A ، توابع پایه ای لاگرانژ با محمل فشرده وابسته به گره مکانی x_A در مش قطعه جاری می باشد،

$$u_i^h(x) = N_n(x)(d_i),$$

N_n برداری سطری و $d_i = \{u_A(t_i)\}_{A=1}^{D_n}$ برداری ستونی است. برای جواب های تطبیقی، مش فضایی، از یک گام زمانی به گام دیگر تغییر می کند. N_{n-1} ، پایه قطعه قبلی و N_n ، پایه قطعه جاری می باشد. درون یاب فضا-زمان را به صورت

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{r+1} u_i^h(x) \varphi_i(t) = N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i = N_n(x) d_n(t), \quad (22.3)$$

بیان می‌کنیم که در رابطه (۲۲.۳)

$$d_n(t) = \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i,$$

می باشد به طور مشابه، برای متغیر مستقل $v(x, t)$ ، درونیاب فضا-زمان را به صورت

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{r+1} v_i^h(x) \varphi_i(t) = N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) c_i = N_n(x) c_n(t), \quad (23.3)$$

تعریف می‌کنیم، در رابطه (۲۳.۳)، $c_i = c_n(t_i) = \{v_A(t_i)\}_{A=1}^{D_n}$ ، درونیاب توابع مرزی وابسته به زمان را به صورت

$$w_m(t) = \sum_{i=1}^{r+1} w_{m,i} \varphi_i(t), \quad m \in (-M, M), \quad (24.3)$$

نشان می‌دهیم.

۱.۳.۳ معادلات ماتریسی فضا-زمان

با جایگزین کردن (۲۲.۳)-(۲۴.۳) در (۱۸.۳) معادلات کاملاً گسسته برای هر قطعه فضا-زمان n به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} A(\bar{u}, u)_n + B_\Gamma(\bar{u}, u)_n &= F_s(\bar{v})_n + \imath\pi \sum_{m=-M}^M F_\Gamma(\bar{v}_m w_{m,1})_n, \\ A\left(N_n(x) \bar{d}_n(t), N_n(x) d_n(t)\right)_n + B_\Gamma\left(N_n(x) \bar{d}_n(t), N_n(x) d_n(t)\right)_n &= \\ F_s\left(N_n(x) \bar{c}_n(t)\right)_n + \imath\pi \sum_{m=-M}^M F_\Gamma\left(N_n(x) \bar{c}_n(t), w_{m,1} \varphi_1(t)\right)_n, \end{aligned} \quad (25.3)$$

$$\begin{aligned} A\left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{d}_i, N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i\right)_n + B_\Gamma\left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{d}_i, N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i\right)_n \\ = F_s\left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i\right)_n + \imath\pi \sum_{m=-M}^M F_\Gamma\left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, w_{m,1} \varphi_1(t)\right)_n \end{aligned} \quad (26.3)$$

برای جملات سمت چپ (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 A(\bar{u}, u)_n := & \int_{I_n} \left\{ \left(N_B(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, \frac{1}{c} N_A(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi'_i(t) c_i \right) + \right. \\
 & \left(\nabla N_B(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, \nabla N_A(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i \right) + \\
 & \left. \left(\nabla N_B(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{d}_i, \nabla \left(N_A(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi(t)'_i d_i - N_B(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) c_i \right) \right) \right\} dt + \quad (27.3) \\
 & \left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t_1) \bar{c}_i, \frac{1}{c} \left[N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t_1) \bar{c}_i \right] \right) + \\
 & \left(\nabla N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t_1) \bar{d}_i, \left[\nabla N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t_1) d_i \right] \right),
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 B_\Gamma(\bar{u}, u)_n := & \int_{I_n} \left\{ \frac{1}{c} \left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) c_i \right)_\Gamma + \right. \\
 & \frac{1}{\bar{r}_R} \left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) d_i \right)_\Gamma + \\
 & \left. \frac{1}{\bar{r}_R} \left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{d}_i, N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi'_i(t) d_i - N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) c_i \right) \right\} dt + \quad (28.3) \\
 & \frac{1}{\bar{r}_R} \left(N_n(x), N_n(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_1) d_i.
 \end{aligned}$$

جملات منفی جهش را به سمت راست معادله می‌بریم و برای مجموع دو جمله سمت چپ (۲۵.۳) داریم،

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c^2} \left(N_A(x), N_B(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{c}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j'(t) c_j + \\
& \left(\nabla N_A(x), \nabla N_B(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{c}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) d_j + \\
& \left(\nabla N_A(x), \nabla N_B(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j'(t) d_j - \\
& \left(\nabla N_A(x), \nabla N_B(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) c_j + \\
& \frac{1}{c^2} \left(N_n(x), N_n(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{c}_i \left(\varphi_i(t_1) \varphi_j(t_1) \right) c_i + \\
& \left(\nabla N_n(x), \nabla N_n(x) \right) \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \left(\varphi_i(t_1) \varphi_j(t_1) \right) d_i + \\
& \frac{1}{c} \left(N_n(x), N_n(x) \right)_\Gamma \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{c}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) c_j + \\
& \frac{1}{\sqrt{R}} \left(N_n(x), N_n(x) \right)_\Gamma \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{c}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) d_j + \\
& \frac{1}{\sqrt{R}} \left(N_n(x), N_n(x) \right)_\Gamma \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j'(t) d_j - \\
& \frac{1}{\sqrt{R}} \left(N_n(x), N_n(x) \right)_\Gamma \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) c_j + \\
& \frac{1}{\sqrt{R}} \left(N_n(x), N_n(x) \right)_\Gamma \sum_{i,j=1}^{r+1} \bar{d}_i \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_1) d_j,
\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

و برای جملات سمت راست معادله (۲۵.۳) داریم،

$$\begin{aligned}
F_s(\bar{v})_n &= \int_{I_n} \left\{ \left(N_n(x) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, f \right) + \left(N_n(x) \sum_{i,j=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i, g \right)_s \right\} dt \\
&= \int_{I_n} \left\{ \left(N_n(x), f \right) \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i + \left(N_n(x), g \right)_s \sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(t) \bar{c}_i \right\} dt \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \bar{c}_i \int_{I_n} \left\{ \left(N_n(x), f \right) + \left(N_n(x), g \right)_s \right\} \varphi_i(t) dt,
\end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Gamma}(v_m^-, w_{m,\gamma})_n &:= \int_{I_n} N_n(x) \sum_{i=\gamma}^{r+\gamma} \varphi_i(t) \bar{c}_i w_{m,\gamma}(t) dt \\
\left(\bar{v}(t_n^+), \frac{1}{c^{\gamma}} v(t_n^-) \right) &= \frac{1}{c^{\gamma}} \int_{\Omega} N_n^T(x) \varphi_i(t_{\gamma}) v_i^h(x, t_n^-) dx \\
\left(\nabla \bar{u}(t_n^+), \nabla u(t_n^-) \right) &= \int_{\Omega} \nabla N_n^T(x) \varphi_i(t_{\gamma}) \nabla u_i^h(x, t_n^-) dx \\
\frac{1}{\gamma R} \left(\bar{u}(t_n^+), u(t_n^-) \right)_{\Gamma} &= \frac{1}{\gamma R} \int_{\Gamma} \nabla N_n^T(x) \varphi_i(t_{\gamma}) \nabla u_i^h(x, t_n^-) dx,
\end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

با استفاده از روابط (۲۹.۳) - (۳۰.۳) فرم ماتریسی معادلات گسسته برای هر قطعه فضا-زمان n را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

ضرایب $(d_i, c_i)_{j=\gamma}^{r+\gamma}$ را طوری بیابید که برای هر $\{\bar{d}_i, \bar{c}_i\}_{i=\gamma}^{r+\gamma}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\gamma}^{r+\gamma} (\bar{d}_i, \bar{c}_i) \cdot \begin{bmatrix} A_{ij} K_n & -B_{ij} K_n \\ B_{ij} K_n & (A_{ij} M_n + B_{ij} C_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \\
\sum_{j=\gamma}^{r+\gamma} (\bar{d}_i, \bar{c}_i) \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_i(t_{\gamma}) f_n^u \\ \varphi_i(t_{\gamma}) f_n^v + \hat{f}_{i,n} \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

برقرار باشد، در (۳۲.۳) ماتریس‌های $A = [A_{ij}]$ و $B = [B_{ij}]$ را با انتگرال‌گیری روی گام زمانی

I_n به صورت

$$A_{ij} := \int_{I_n} \phi_i(t) \phi_j'(t) dt + \phi_i(t_{\gamma}) \phi_j(t_{\gamma}), \quad B_{ij} := \int_{I_n} \phi_i(t) \phi_j(t) dt, \tag{۳۳.۳}$$

تعریف می‌کنیم، توابع پایه زمانی در هر گام زمانی ارزیابی می‌شوند. در جمله جهش $t_{\gamma} = t_n^+$ است. ماتریس‌های جرم مقارن، میرایی و سختی را با انتگرال‌گیری روی دامنه فضایی برای گام جاری n به صورت

$$M_n = [M_{AB}]_n, \quad M_{AB} := \frac{1}{c^{\gamma}} (N_A, N_B), \tag{۳۴.۳}$$

$$C_n = [C_{AB}]_n, \quad C_{AB} := \frac{1}{c} (N_A, N_B), \tag{۳۵.۳}$$

$$K_n = [K_{AB}]_n, \quad K_{AB} := (\nabla N_A, \nabla N_B) + \frac{1}{\gamma R} (N_A, N_B)_{\Gamma}, \tag{۳۶.۳}$$

نشان می‌دهیم. جواب گام زمانی جاری با شرایط اولیه از گام زمانی قبلی t_n^- و بردار سمت راست به دست می‌آید.

$$f_n^u := \int_{\Omega} \nabla N_n^T(x) \nabla u^h(x, t_n^-) dx + \frac{1}{\gamma R} \int_{\Gamma} N_n^T(x) u^h(x, t_n^-) d\Gamma, \tag{۳۷.۳}$$

$$f_n^v := \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} N_n^T(x) v^h(x, t_n^-) dx, \quad (38.3)$$

توابع مرزی Γ به صورت

$$\hat{f}_{i,n} = \hat{f}_{i,n}^s + \hat{f}_{i,n}^{\Gamma},$$

می باشند که در آن

$$\hat{f}_{i,n}^s = \int_{I_n} f_n^s(t) \varphi_i(t) dt, \quad (39.3)$$

و $f_n^s(t) = \{f_A\}_n$, $f_A := (N_A, f) + (N_A, g)_s$ می باشد. برای درون یاب گره ای با پایه لاگرانژ، تقریب $f_n^s(t) = \sum_{j=1}^{r+1} \varphi_j(t) f_n^s(t_j)$ را به کار می بریم، (39.3) به صورت زیر ساده می کنیم،

$$f_{i,n}^s = \sum_{j=1}^{r+1} B_{ij} f_n^s(t_j), \quad (40.3)$$

با استفاده از تابع مرزی کمکی $w_m^1(t)$ داریم،

$$f_{i,n}^{\Gamma} = \sum_{j=1}^{r+1} B_{ij} f_n^{\Gamma}(t_j), \quad f_n^{\Gamma}(t_j) = 2\pi \sum_{m=-M}^M w_{m,1}(t_j) F_{m,n}, \quad (41.3)$$

که در آن $F_A^m := \frac{1}{\sqrt{\pi R}} (N_A, e^{im\theta})_{\Gamma}$ ، $F_{m,n} = \{F_A^m\}_n$ برای درون یاب لاگرانژ در زمان،

$$\sum_{j=1}^{r+1} \begin{bmatrix} A_{ij} K_n & -B_{ij} K_n \\ B_{ij} K_n & (A_{ij} M_n + B_{ij} C_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{r+1} \begin{Bmatrix} \circ \\ B_{ij} f_{j,n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{i,1} f_n^u \\ \delta_{i,1} f_n^v \end{Bmatrix}, \quad (42.3)$$

نشان می دهیم که در آن $f_{j,n} = f_n^s(t_j) + f_n^{\Gamma}(t_j)$ است.

۴.۳ روش های نگاشت

برای توزیع مجدد مش تطبیقی (پالایش/عدم پالایش) به نگاشتی از گام زمانی قبلی به مش جدید روی قطعه فضا-زمان نیاز داریم. به این منظور ابتدا درون یاب گره ای و سپس روش درون یابی افزوده، را بیان می کنیم.

۱.۴.۳ درون یابی گره ای

جواب انتهایی گام زمانی قبلی را با عناصر فضایی مش جاری درون یابی می کنیم و تقریبی ساده با درون یابی گره ای را به صورت

$$u^h(x, t_n^-) \approx \hat{u}^h(x, t_n^-) = \sum_{A=1}^{D_n} N_A(x) \hat{u}_A(t_n^-) = N_n(x) \hat{d}_n(t_n^-), \quad (43.3)$$

به دست می‌آوریم که $\hat{d}_n(t_n^-) = \{\hat{u}_A(t_n^-)\}_{A=1}^{D_n}$ را از مش قبلی محاسبه کردیم.

$$\hat{u}_A(t_n^-) = \sum_{B=1}^{D_{n-1}} N_B^-(x_A) u_B^h(t_n^-) = N_{n-1}(x_A) d_{n-1}(t_{n-1}^+), \quad (44.3)$$

به طور مشابه $\hat{v}^h(x, t_n^-) \approx N_n(x) \hat{c}_n(t_n^-) = \{\hat{v}_A(t_n^-)\}_{A=1}^{D_n}$ می‌باشد. برای هر گره مش جاری، جواب را از عناصری در مش قبلی که شامل گره جاری است درونیابی می‌کنیم. الگوریتم‌های کارآمد، عناصری شامل مکان نقاط تعیین شده را مشخص می‌کنند [۱۹، ۲۴]. درونیابی‌های گره‌ای $u^h(x, t_n^-)$ و $v^h(x, t_n^-)$ در (۳۷.۳) و (۳۸.۳) منجر به ساده سازی زیر می‌شود،

$$f_n^u \approx K_n \hat{d}(t_n^-), \quad f_n^v \approx M_n \hat{c}(t_n^-), \quad (45.3)$$

که با FEM گسسته زمان گالرکین برای معادلات دینامیک شبه گسسته متناظر است [۲۰]. در این حالت، ماتریس سختی K_n را از سطر اول معادله (۴۲.۳) حذف، در نتیجه جواب را ساده می‌کنیم. در بخش بعدی با اجرای یک بلوک حذفی گاوس روی دستگاه معادلات (۴۲.۳)، c_i را مستقل از d_i حل می‌کنیم، سپس d_i را با برداری به روز شده محاسبه می‌کنیم.

۲.۴.۳ روش SPR

روش بازیابی قطعه فوق همگرا^۶ SPR روی گرادیان‌های فوق همگرا در نقاط انتگرال‌گیری گاوس لژاندر پایه‌گذاری شده است [۴۲، ۵۹، ۵۰]. در هر عنصر e درون هر قطعه، مرکز عنصر x_s^e ، را گرادیان فوق همگرا قرار می‌دهیم. گرادیان را درون هر قطعه، با یک چندجمله‌ای از درجه p با ضرایبی از بهترین مقادیر فوق همگرا، در جمله کمترین مربعات بهبود می‌بخشیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_A^* := \nabla u_A^*(x_A) = \alpha_A \cdot P(x_A).$$

برای عناصر خطی ($p = 1$)، $P^T(x) = [1, x, y]$ ، و α_A بردار ضرایبی می‌باشد که خطای L_2 را درون هر قطعه با یک تابع مینیمم‌کننده، مینیمم می‌کند،

$$J(\alpha_A) = \sum_{s=1}^{N_s} \left(\nabla u^h(x_s^e) - \alpha_A \cdot P(x_s^e) \right)^2,$$

که در آن N_s تعداد نقاط نمونه‌گیری درون هر قطعه است، عملگر بازیابی روی مش قبلی را به صورت

$$\varepsilon^*(x, t_n^-) = \sum_{A=1}^{D_{n-1}} N_A^-(x) \varepsilon_A^*, \quad (46.3)$$

تعریف می‌کنیم.

^۶Superconvergent Patch Recovery

۳.۴.۳ درونیابی افزوده

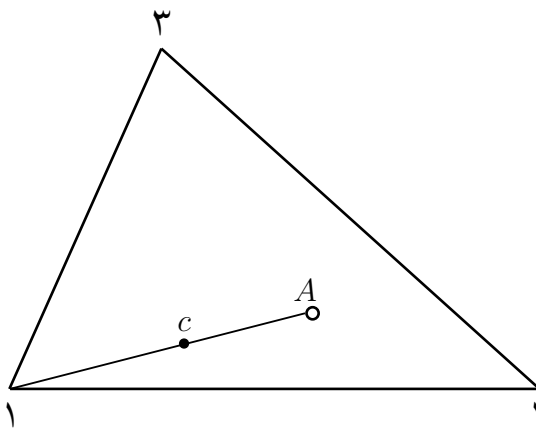
درونیابی افزوده^۷ نگاهی از مش قبلی به مش جدید است که برای عناصر گره‌ای مثلثی دقت بالایی دارد. روش EI دقت درونیابی گره‌ای را بهبود می‌بخشد و ویژگی‌هایی (۴۵.۳) را حفظ می‌کند. گره جاری x_A را درون عنصر مش قبلی با گره‌های محلی $k = 1, 2, 3$ ایجاد می‌کنیم، شکل (۳.۴.۳) را ببینید. با استفاده از بسط سری تیلور، هر گره محلی عنصر به صورت

$$u_k^*(x_A) = u^h(x_k) + \Delta x_k \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x} \right)_{x=x_c} + \Delta y_k \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial y} \right)_{x=x_c}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (47.3)$$

است، که در آن $\Delta x_k = (x_A - x_k)$ و $\Delta y_k = (y_A - y_k)$ است و جملات مشتق، گرادیان‌های بهبود یافته مولفه‌های وابسته به محیط عناصر گره k هستند. از تکنیک SPR برای نقطه میانی گره‌های A و k ، یعنی $x_c = \frac{(x_A + x_k)}{2}$ استفاده می‌کنیم. سپس نگاهی از گره جاری x_A با درونیابی (۴۷.۳) روی گره‌های محلی عناصر مش قبلی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u_A^* = \sum_{k=1}^3 N_k(x_A) u_k^*(x_A) = \underbrace{\sum_{k=1}^3 N_k(x_A) u^h(x_k)}_{\text{درونیابی}} + \underbrace{\sum_{k=1}^3 N_k(x_A) \{ \Delta x_k \cdot \nabla u_k^*(x_c) \}}_{\text{افزوده}}, \quad (48.3)$$

که در آن $\Delta x_k = (\Delta x_k, \Delta y_k)$ و $\nabla u_k^*(x_c) = \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x}, \frac{\partial u_k^*}{\partial y} \right)_{x=x_c}$ است. جمله اول، درونیابی استاندارد است و جمله دوم اصلاحی از عناصر داخلی با دقت بالاتر می‌باشد. روند فوق را برای نگاشت دقیق v_A^* به کار می‌بریم.



شکل ۴.۳: گره محلی A درون عنصر مش قبلی با نقطه میانی بین A و راس ۱ در سه گره مثلث.

برای سازگاری، وقتی گره جاری x_A را بر گره محلی x_k منطبق کنیم، آنگاه $x_c = 0$ ، و درونیابی افزوده (۴۸.۳) به علت ویژگی درونیاب $N_k(x_A) = \delta_k A$ نقطه $u(x_k)$ را نشان می‌دهد. برای مش

^۷Enhanced Interpolation

دو گره‌ای عناصر خطی یک‌بعدی، جواب‌های گره‌ای را با درونیابی چندجمله‌ای درجه دوم بیان می‌کنیم، سپس گرادیان‌های خطی بازیابی شده تکنیک SPR را در نقطه میانی x_c ارزیابی و مشابه (۴۸.۳) درونیابی می‌کنیم. چند جمله‌ای درجه دوم را در نقاط داخلی عناصر تولید می‌کنیم. برای جزییات بیشتر [۱۳] را ببینید.

با تبدیل جواب افزوده مش قبلی به مش جاری، با استفاده از نگاشت گره‌ای استاندارد مشابه (۴۳.۳) رابطه

$$u^*(x, t_n^-) = \sum_{A=1}^{D_n} N_A(x) u_A^*(t_n^-) = N_n(x) d_n^*(t_n^-), \quad (49.3)$$

را به دست می‌آوریم، که در آن $d_n^*(t_n^-) = \{u_A^*(t_n^-)\}_{A=1}^{D_n}$ برداری از مقادیر گره‌ای درونیابی افزوده روی جواب مش قبلی است،

$$u_A^*(t_n^-) = \sum_{B=1}^{D_{n-1}} N_B^-(x_A) \left[u_B^h(t_n^-) + \Delta x_B \cdot \nabla u_B^*(x_c, t_n^-) \right], \quad (50.3)$$

که $\Delta x_B = (x_A - x_B)$ و بردارهای

$$\nabla u_B^*(x_c, t_n^-) = \alpha_B \cdot P(x_c), \quad (51.3)$$

گرادیان‌های وابسته به قطعه Ω_A هستند که در نقطه میانی گره x_A و x_B یعنی $x_c = \frac{(x_A + x_B)}{2}$ به دست می‌آوریم. برای گرادیان‌های ∇v^* نیز تکنیک SPR را به کار می‌بریم. با استفاده از روش EI، بردار ماتریسی با حفظ روابط (۴۵.۳) تولید می‌کنیم و ساختار جبری ساده‌تری را ارائه می‌دهیم.

۵.۳ جواب موثر معادلات ماتریسی

نتایج روش عناصر متناهی فضا-زمان گالرکین گسسته زمان^۸ را برای حل تعداد زیادی از زوج معادلات، در هر گام زمانی به کار می‌بریم. با حذف اندیس n در آرایه‌های (۴۲.۳) و ضرب طرفین رابطه در ماتریس $[A_{ij}]^{-1}$ و به کار بردن روش حذفی گاوس داریم،

$$\sum_{j=1}^{r+1} \begin{bmatrix} \delta_{ij} K & -A_{ij}^{-1} B_{ij} K \\ A_{ij}^{-1} B_{ij} K & (\delta_{ij} M + A_{ij}^{-1} B_{ij} C) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{r+1} \left\{ \begin{matrix} \circ \\ A_{ij}^{-1} B_{ij} f_j \end{matrix} \right\} + \begin{Bmatrix} A_{i1}^{-1} f^u \\ A_{i1}^{-1} f^v \end{Bmatrix}, \quad (52.3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی

$$\sum_{k=1}^{r+1} A_{ik}^{-1} B_{kj} = D_{ij},$$

^۸Time-Discontinuous Galerkin Space-Time Finite Element Methods

در رابطه‌ی (۵۲.۳) داریم

$$\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} \begin{bmatrix} \delta_{ij}K & -D_{ij}K \\ D_{ij}K & \delta_{ij}M + D_{ij}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{i\backslash}^{-\backslash} f^u \\ A_{i\backslash}^{-\backslash} f^v + \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} D_{ij}f_j \end{Bmatrix},$$

$(-D_{ij})$ برابر بلوک اول را با بلوک دوم جمع می‌کنیم،

$$\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} \begin{bmatrix} \delta_{ij}K & -D_{ij}K \\ O & \delta_{ij}M + D_{ij}C + E_{ij}K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{i\backslash}^{-\backslash} f^u \\ A_{i\backslash}^{-\backslash} f^v - \sum_{k=\backslash}^{r+\backslash} D_{ik}A_{k\backslash}^{-\backslash} f^u + \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} D_{ij}f_j \end{Bmatrix},$$

سپس دستگاه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} \begin{bmatrix} \delta_{ij}K & -D_{ij}K \\ O & M_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{i\backslash}^{-\backslash} f^u \\ r_i^* \end{Bmatrix}, \quad (53.3)$$

که در رابطه (۵۳.۳)

$$D_{ij} = \sum_{k=\backslash}^{r+\backslash} A_{ik}^{-\backslash} B_{kj}, \quad E_{ij} = \sum_{k=\backslash}^{r+\backslash} D_{ik} D_{kj}, \quad F_{i\backslash} = \sum_{k=\backslash}^{r+\backslash} D_{ik} A_{k\backslash}^{-\backslash},$$

و

$$M_{ij}^* = \delta_{ij}M + D_{ij}C + E_{ij}K,$$

$$r_i^* = A_{i\backslash}^{-\backslash} f^v - F_{i\backslash} f^u + \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} D_{ij}f_j,$$

را تعریف می‌کنیم. c_j را مستقل از d_j از بلوک دوم سطری حل می‌کنیم، سپس d_j را از اولین بلوک سطری محاسبه می‌نماییم. با استفاده از درونیابی گره‌ای و (۴۵.۳)، جملات $f^u = Kd_\circ$ ، $f^v = Mc_\circ$ را داریم که در آن $(d_\circ, c_\circ) = (d(t_n^-), c(t_n^-))$ می‌باشد. سپس دستگاه (۵۰.۳) را به صورت

$$\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} \begin{bmatrix} \delta_{ij}K & -D_{ij}K \\ O & M_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{i\backslash}^{-\backslash} Kd_\circ \\ r_i^* \end{Bmatrix},$$

می‌نویسیم. سطر اول را در K^{-1} ضرب می‌کنیم،

$$\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} \begin{bmatrix} \delta_{ij}I & -D_{ij}I \\ O & M_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{i\backslash}^{-\backslash} d_\circ \\ r_i \end{Bmatrix}, \quad (54.3)$$

در رابطه (۵۴.۳)، $r_i = A_{i1}^{-1} M c_0 - F_{i1} K d_0 + \sum_{j=1}^{r+1} D_{ij} f_j$ ، بلوک سطری دوم را برای حل c_j به کار می‌بریم.

$$\sum_{j=1}^{r+1} M_{ij}^* c_j = r_j, \quad i = 1, \dots, r+1, \quad (55.3)$$

c_j را از (۵۵.۳) محاسبه می‌نماییم، سپس d_j را به سادگی از بلوک سطری اول به صورت

$$d_i = A_{i1}^{-1} d_0 + \sum_{j=1}^{r+1} D_{ij} c_j, \quad i = 1, \dots, r+1, \quad (56.3)$$

به دست می‌آوریم. برای محاسبه d_i ، حل معادله لازم نیست و می‌توانیم آن را با درونیابی گره‌ای به دست آوریم. سپس تعداد معادلات سیستم اصلی (۴۲.۳) با حل (۵۵.۳) و به روز کردن (۵۶.۳)، از $2(r+1)$ معادله، به $(r+1)$ معادله کاهش می‌یابد، در نتیجه با این روند هزینه محاسبات را کاهش می‌دهیم. با استفاده از بردار ستونی $c = [c_1, \dots, c_{r+1}]$ و $r = [r_1, \dots, r_{r+1}]$ ، (۵۵.۳) را به صورت حاصل ضرب (تنسور) کرونگر

$$(I_{r+1} \otimes M + D \otimes C + E \otimes K) c = r, \quad (57.3)$$

می‌نویسیم، که در آن $D = [D_{ij}]$ و $E = D^2 = [E_{ij}]$ است. برای درونیابی خطی در زمان با $r = 1$ ، (۵۵.۳) یا معادل آن (۵۷.۳) را به صورت

$$\begin{bmatrix} M + D_{11}C + E_{11}K & D_{12}C + E_{12}K \\ D_{21}C + E_{21}K & M + D_{22}C + E_{22}K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}, \quad (58.3)$$

می‌نویسیم. معادله (۵۸.۳) را در ماتریس جایگشت $(P \otimes I)$ که $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم، در

نتیجه

$$(P \otimes M + PD \otimes C + PE \otimes K) C = P \otimes r, \quad (59.3)$$

یا

$$(P \otimes M + \hat{D} \otimes C + \hat{E} \otimes K) C = \hat{r}, \quad (60.3)$$

که در آن $\hat{D} = PD$ و $\hat{E} = PE = \hat{D}D$ و $\hat{r} = P \otimes r$. با بسط دادن (۶۰.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} M + \hat{D}_{11}C + \hat{E}_{11}K & \alpha M + \hat{D}_{12}C + \hat{E}_{12}K \\ \beta M + \hat{D}_{21}C + \hat{E}_{21}K & M + \hat{D}_{22}C + \hat{E}_{22}K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 + \alpha r_2 \\ r_2 + \beta r_1 \end{Bmatrix}, \quad (61.3)$$

به منظور به دست آوردن ماتریس‌های قطری بلوکی مشابه، ضرایب قطری C و K را برابر قرار می‌دهیم، داریم:

$$M + \hat{D}_{11}C + \hat{E}_{11}K = M + \hat{D}_{22}C + \hat{E}_{22}K$$

$$(PD)_{11} + (PDD)_{11} = (PD)_{22} + (PDD)_{22},$$

$$(e_1) D_{11} + \alpha D_{21} = \beta D_{12} + D_{22}, \quad (e_2) E_{11} + \alpha E_{21} = E_{22} + \beta E_{12},$$

چون $\hat{E} = \hat{D}D$ ، دو معادله وابسته خطی هستند، یعنی $(e_2) = (e_1)(D_{11} + D_{22})$ ، بنابراین خانواده‌ای از بلوک‌های قطری مشابه را به دست می‌آوریم که توسط متغیر مستقل α و پارامتری شده‌اند. اگر $\beta = 0$ ماتریس بلوکی لی و ویبرگ^۹ [۶۷، ۶۸] نتیجه می‌شود، در این حالت $\alpha = \frac{D_{22}-D_{11}}{D_{21}}$ است. α و β را طوری انتخاب می‌کنیم که ماتریس سختی K در قطر اصلی حذف شود، سپس در حالت مشابه با برابر قرار دادن ماتریس میرایی C داریم، $\alpha = -\frac{E_{11}}{E_{21}}$ و $\beta = -\frac{E_{22}}{E_{12}}$ طوری که $\hat{E}_{11} = \hat{E}_{22} = 0$ و $\hat{D}_{11} = \hat{D}_{22}$ می‌شود. برای داده‌های لی و ویبرگ، $\alpha = \frac{2}{3}$ ، $\beta = 0$ ، [۶۷، ۶۸] شکل ماتریسی زیر را داریم،

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{6} & -\frac{\Delta t}{6} \\ \frac{\Delta t}{3} & \frac{\Delta t}{3} \end{bmatrix}, \quad E = DD = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{18} & -\frac{\Delta t^2}{9} \\ \frac{\Delta t^2}{3} & \frac{\Delta t^2}{6} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = -\frac{E_{11}}{E_{21}} = -\frac{-\frac{\Delta t^2}{18}}{\frac{\Delta t^2}{3}} = \frac{1}{6}, \quad \beta = -\frac{E_{22}}{E_{12}} = -\frac{\frac{\Delta t^2}{6}}{-\frac{\Delta t^2}{9}} = \frac{3}{2},$$

$$\begin{bmatrix} M + \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{6}K & \frac{2}{3}M + \frac{\Delta t}{6}C \\ \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{3}K & M + \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{6}K \end{bmatrix},$$

K را از بلوک‌های قطری حذف می‌کنیم،

$$\stackrel{r_1 - \frac{1}{3}r_2}{=} \begin{bmatrix} M + \frac{\Delta t}{3}C & \frac{1}{6}M - \frac{\Delta t}{12}C - \frac{\Delta t^2}{12}K \\ \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{3}K & M + \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{6}K \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{r_2 - \frac{2}{3}r_1}{=} \begin{bmatrix} M + \frac{\Delta t}{3}C & \frac{1}{6}M - \frac{\Delta t}{12}C - \frac{\Delta t^2}{12}K \\ \frac{2}{3}M + \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{3}K & \frac{2}{3}M + \frac{\Delta t}{3}C \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\frac{2}{3}r_2}{=} \begin{bmatrix} M + \frac{\Delta t}{3}C & \frac{1}{6}M - \frac{\Delta t}{12}C - \frac{\Delta t^2}{12}K \\ \frac{2}{3}M + \frac{\Delta t}{3}C + \frac{\Delta t^2}{3}K & M + \frac{\Delta t}{3}C \end{bmatrix}$$

^۹Li, Wibrg

$$\begin{bmatrix} \widehat{M} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{21} & \widehat{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 + \frac{1}{6}r_2 \\ r_2 + \frac{2}{3}r_1 \end{Bmatrix}, \quad (62.3)$$

که

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= M + \frac{\Delta t}{4}C, \quad \widehat{M}_{12} = \frac{1}{6}M - \frac{\Delta t}{12}C - \frac{(\Delta t)^2}{12}K, \\ \widehat{M}_{21} &= \frac{3}{4}M + \frac{3}{4}\Delta tC + \frac{(\Delta t)^2}{4}K, \\ r_1 &= \frac{\Delta t}{6}(f_1 - f_2) + MC_0, \\ r_2 &= \frac{\Delta t}{4}(f_1 + f_2) + MC_0 - \Delta tKd_0. \end{aligned}$$

بردارهای f_1 و f_2 را با استفاده از توابع کمکی $w_{m,1}(t)$ به صورت

$$f_j^\Gamma = 2\pi \sum_{m=-M}^M w_{m,1}(t_j)F_m, \quad j = 1, 2$$

به دست می‌آوریم و برای هر مود مماسی،

$$F_m = \{F_{m,A}\}, \quad F_{m,A} = \frac{1}{2\pi R}(N_A, e^{im\theta})_\Gamma.$$

c_1 و c_2 را دوباره حل می‌نماییم، سپس d_1 و d_2 را با رابطه (۵۶.۳) محاسبه می‌کنیم،

$$d_1 = d_0 + \frac{\Delta t}{6}(c_1 - c_2), \quad d_2 = d_0 + \frac{\Delta t}{4}(c_1 + c_2),$$

رابطه (۶۲.۳) برای درونیابی فضایی به دست می‌آوریم، انتگرال‌گیری‌گره‌ای را برای قطری کردن M ، (۳۴.۳) و C ، (۳۵.۳) به کار می‌بریم. در نتیجه، برای روش تکراری، در هر گام زمانی، فقط ماتریس‌های تولید شده با $\widehat{M}_{12}$ و $\widehat{M}_{21}$ و $\widehat{M}$ را لازم داریم، بنابراین به فاکتورگیری ماتریس نیازی نیست. در فرم لی و ویبرگ، زیر ماتریس قطری به خاطر وجود ماتریس سختی K نمی‌تواند قطری شود. ساختار جبری ماتریسی (۵۵.۳) و (۵۶.۳) برای سیستم‌های هذلولی مرتبه دوم دیگر مانند معادلات نیمه گسسته در ایلاستودینامیک^{۱۰} و ساختارهای دینامیکی معتبر است.

۶.۳ گسسته‌سازی زمانی برای معادلات مرزی مرتبه اول

توابع پایه‌ای (۲۲.۳) و (۲۴.۳) را در رابطه (۱۹.۳) قرار می‌دهیم و با انتگرال‌گیری از (۳۳.۳)، نتایج زیر را به دست می‌آوریم،

^{۱۰} Elastodynamics

$$A_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_m)_n = b_{m,\backslash} F_{\Gamma}(\bar{w}_{m,\backslash}, u_m)_n, \quad m \in (-M, M), \quad (۶۳.۳)$$

$$A_{\Gamma}(\bar{w}_m, w_m)_n := \int_{I_n} \underbrace{\{\bar{w}_m(t) \cdot \frac{dw_m}{dt}(t)\}}_* + \underbrace{\bar{w}_m(t) \cdot A_m w_m(t)}_{**} dt \\ + \bar{w}_m(t_n^+) \cdot [w_m(t_n)], \quad (۶۴.۳)$$

از رابطه * داریم:

$$\int_{I_n} \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i}(t) \varphi_i(t) \cdot \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,j}(t) \varphi'_j(t) dt = \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi'_j(t) \bar{w}_{m,i}(t) \cdot w_{m,j}(t) dt \quad (۶۵.۳)$$

و رابطه ** داریم:

$$\int_{I_n} \bar{w}_m(t) \cdot A_m w_m(t) dt = \int_{I_n} \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i}(t) \varphi_i(t) \cdot A_m \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,i}(t) \varphi_i(t) dt \\ = \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \int_{I_n} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt A_m \bar{w}_{m,i}(t) w_{m,i}(t) \quad (۶۶.۳)$$

و برای جمله سوم رابطه (۶۴.۳)

$$\bar{w}_m(t_n^+) \cdot [w_m(t_n)] = \bar{w}_m(t_n^+) (w_m(t_n^+) - w_m(t_n^-)) \quad (۶۷.۳)$$

روابط زیر را به دست می آوریم،

$$\sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i}(t_n^+) \varphi_i(t_n^+) \left[\sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,j}(t_{\backslash}) - \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,j}(t_n^-) \right] \varphi_j = \\ \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i}(t_{\backslash}) \varphi_i(t_{\backslash}) \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,j}(t_{\backslash}) \varphi_j(t_{\backslash}) - \\ \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i}(t_{\backslash}) \varphi_i(t_{\backslash}) \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} w_{m,j}(t_n^-) \varphi_j(t) \quad (۶۸.۳)$$

از سمت راست رابطه (۶۳.۳) داریم:

$$b_{m,\backslash} F_{\Gamma}(\bar{w}_{m,\backslash}, u_m)_n = b_{m,\backslash} \int_{I_n} \bar{w}_{m,\backslash}(t), u_m(t) dt \\ = b_{m,\backslash} \int_{I_n} \sum_{i=\backslash}^{r+\backslash} \bar{w}_{m,i} \varphi_i(t) \cdot \sum_{j=\backslash}^{r+\backslash} u_{m,j} \varphi_j(t) dt \quad (۶۹.۳) \\ = b_m \int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt u_{m,j} \bar{w}_{m,i}(t)$$

معادلات (۶۵.۳) - (۶۹.۳) را به صورت زیر خلاصه می کنیم،

$$\sum_{j=1}^{r+1} (A_{ij}I + B_{ij}A_m)w_{m,i} = \sum_{j=1}^{r+1} B_{ij}u_{m,j}b_m + \delta_{i1}w_m(t_n^-), \quad (70.3)$$

$$i = 1, \dots, r+1,$$

معادله (۷۰.۳) را در A_{ij}^{-1} ضرب می‌کنیم،

$$\sum_{j=1}^{r+1} (\delta_{ij}I + D_{ij}A_m)w_{m,i} = \sum_{j=1}^{r+1} D_{ij}u_{m,j}b_m + A_{i1}^{-1}w_m(t_n^-), \quad (71.3)$$

$$i = 1, \dots, r+1.$$

سپس $w_{m,i}$ را از $u_{m,j}$ به دست می‌آوریم، $u_\Gamma(\theta, t)$ ، از تبدیل فوریه رابطه (۱۱.۳) روی پرتو مرزی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\Gamma(\theta, t) e^{-im\theta} d\theta, \quad w_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\theta, t) e^{-im\theta} d\theta.$$

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{r+1} u_{m,j} \varphi_j(t), \quad u_{m,j} = F_{m,n}^* \cdot d_j. \quad (72.3)$$

$F_{m,n}^*$ و $F_{m,n}$ را مانند بردارهای حقیقی محاسبه می‌کنیم. برای کارایی اجرای تبدیل فوریه گسسته در فضا [۳۷] را ببینید.

با به کار بردن عملگر جایگشت، مشابه (۶۰.۳)، معادله (۷۱.۳) را به صورت

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{A}_m^+ \\ \hat{A}_m^- & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{m,1} \\ w_{m,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_{m,1} \\ \hat{f}_{m,2} \end{Bmatrix}, \quad (73.3)$$

به دست می‌آوریم که در آن

$$\hat{A}_m^+ = \frac{1}{3}(I + \Delta t A_m), \quad \hat{A}_m^- = (3I + \Delta t A_m),$$

$$\hat{f}_{m,1} = \frac{1}{3}(2w_m(t_n^-) - \Delta t u_{m,2}b_m), \quad \hat{f}_{m,2} = 4w_m(t_n^-) + \Delta t u_{m,1}b_m,$$

است. برای ماتریس‌های کوچک A_m ، $p < 10$ است. چون دستگاه (۷۳.۳)، قطری بلوکی است،

ابتدا

$$\hat{A}_{m,2} w_{m,2} = \hat{f}_{m,2} - \hat{A}_m^- \hat{f}_{m,1}, \quad (74.3)$$

را با ماتریس ضرایب $\hat{A}_{m,2} = (I + \hat{A}_m^- \hat{A}_m^+)$ محاسبه می‌کنیم، سپس $w_{m,1} = \hat{f}_{m,1} + \hat{A}_m^+ w_{m,2}$ را به دست می‌آوریم. معمولاً $M \ll N_\Gamma$ ، که N_Γ تعداد گره‌های روی مرز می‌باشد. هزینه استفاده از شرایط پرتو مرزی مرتبه بالا، برای دستگاه معادلات (۷۳.۳) و (۷۴.۳) زیاد است. در تبدیل فوری گسسته $u_{m,j} = F_{m,n}^* \cdot d_j$ ، بردار $F_{m,n}^*$ را در هر تطبیق مش بندی مجدد، دوباره محاسبه می‌کنیم. با این وجود این هزینه همیشه کمتر از حل معادلات (۶۲.۳) است. برای بررسی پیچیدگی برآوردها و کارایی پیاده‌سازی $F_{m,n}^*$ ، [۳۷] را ببینید.

۷.۳ جواب تکراری برای زوج معادلات داخلی و مرزی

برای حل معادلات داخلی و مرزی، الگوریتم زیر را به کار می‌بریم. با استفاده از مقادیر گام قبلی، فقط به تعدادی از تکرارها برای حل زوج معادلات با خطای قابل تامل

$$e_i^k := \frac{\|c_i^{k+1} - c_i^k\|}{\|c_i^k\|} < \epsilon, \quad i = 1, 2. \quad (75.3)$$

نیاز داریم. شرایط اولیه را به صورت $c_0 = c(t_n^-)$ ، $c_{-1} = c(t_{n-1}^+)$ قرار می‌دهیم. الگوریتم به صورت زیر است:

الگوریتم (روش تکراری دو سطحی با بلوک G-S)

۱. از جواب گام قبلی

$$\begin{aligned} d_1^\circ &= d_0, & d_2^\circ &= d_0 + c_0 \Delta t_n, \\ c_1^\circ &= c_0, & c_2^\circ &= c_0 + a_0 \Delta t_n, & a_0 &= \frac{(c_0 - c_{-1})}{\Delta t_n}, \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. حلقه تکرار بیرونی: برای $k = 0, 1, \dots$

۲. مودهای مرزی را محاسبه کنید:

$$u_{m,i}^k = F_{m,n}^* \cdot d_i^k, \quad i = 1, 2.$$

۳. معادلات مرزی را حل کنید:

$$\hat{A}_{m,2} w_{m,2}^k = \hat{f}_{m,2}^k - \hat{A}_m^- \hat{f}_{m,1}^k.$$

۴. به روز کنید:

$$w_{m,1} = \hat{f}_{m,1}^k + \hat{A}_m^+ w_{m,2}^k.$$

قرار دهید: $c_i^\circ = c_i^k$, $i = 1, 2$

حلقه تکرار گاوس-سایدل^{۱۱} G-S بلوکی برای $l = 0, 1, \dots$

^{۱۱}Gauss-Seidel

۵. روش G-S را برای سیستم $\widehat{M}c_2 = \hat{r}_2^{(l)} - \widehat{M}_{21}c_1^{(l)}$ به کار ببرید و $c_2^{(l+1)}$ به روز کنید.

۶. روش G-S را برای سیستم $\widehat{M}c_1 = \hat{r}_1^{(l)} - \widehat{M}_{12}c_2^{(l+1)}$ به کار ببرید و $c_1^{(l+1)}$ به روز کنید.

اگر $(e_i^{(l)} < \epsilon, i = 1, 2)$ ، از حلقه تکرار G-S بلوکی خارج شوید.

پایان حلقه تکرار G-S بلوکی.

قرار دهید: $c_i^{k+1} = c_i^{(l+1)}, i = 1, 2$.

قرار دهید: $\hat{r}^{(l)} = \hat{r}_2 - \widehat{M}_{21}c_1^{(l)}, c^{(l)} = c_2^{(l)}$.

۷. به روز کنید:

$$d_1^{k+1} = d_0 + \frac{\Delta t}{\epsilon}(c_1^{k+1} - c_2^{k+1}),$$

$$d_2^{k+1} = d_0 + \frac{\Delta t}{\gamma}(c_1^{k+1} + c_2^{k+1}).$$

اگر $(e_i^k < \epsilon, i = 1, 2)$ ، از حلقه تکرار بیرونی خارج شوید.

پایان حلقه تکرار بیرونی.

روش تکراری (G-S) برای گام ۵ و ۶ به صورت زیر می باشد:

قرار دهید: $\hat{r}^{(l)} = \hat{r}_2 - \widehat{M}_{21}c_1^{(l)}$ و $c^{(l)} = c_2^{(l)}$

۵. به روز کنید:

$$c_i^{(l+1)} = \frac{1}{\widehat{M}_{ii}} \left(\hat{r}_i^{(l)} - \sum_{j<i} \widehat{M}_{ij}c_j^{(l+1)} - \sum_{j>i} \widehat{M}_{ij}c_j^{(l)} \right), i = 1, 2, \dots$$

قرار دهید: $c_2^{(l+1)} = c^{(l+1)}$ و $\hat{r}^{(l+1)} = \hat{r}_1 - \widehat{M}_{12}c_2^{(l+1)}$ و $c^{(l)} = c_1^{(l)}$.

۶. به روز کنید:

$$c_i^{(l+1)} = \frac{1}{\widehat{M}_{ii}} \left(\hat{r}_i^{(l+1)} - \sum_{j<i} \widehat{M}_{ij}c_j^{(l+1)} - \sum_{j>i} \widehat{M}_{ij}c_j^{(l)} \right), i = 1, 2, \dots$$

قرار دهید: $c_1^{(l+1)} = c^{(l+1)}$.

برای داده های معادلات داخلی، حلقه داخلی همگرا می باشد و قبل از حلقه بیرونی به روز می شود. معادلات داخلی و هر بلوک به طور مستقل با تکرار G-S حل می شود. تکرار G-S در الگوریتم، برای حل کننده های مستقیم مناسب است، چون $\widehat{M}$ متقارن و معین مثبت است. چن و وو^{۱۲} [۳۱] بلوک

^{۱۲}Chien, Wu

G-S مشابهی با حل‌کننده‌های مستقیم برای معادلات ماتریسی [۶۷، ۶۸] بیان کرده‌اند. بلوک ژاکوبی که با حل‌کننده‌های مستقیم [۶۷، ۶۸] به کار رفته است، کارایی کمتری دارد. برای ماتریس‌های بزرگ با مش‌های تطبیقی و گام‌های زمانی، استفاده از حل‌کننده‌های تکراری، بهتر است. در این حالت، بلوک‌ها تکراری با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج برای ماتریس‌های معین مثبت متقارن حل می‌شوند.

۸.۳ استراتژی تطبیق

ترکیبی از نورم انرژی در دامنه داخلی Ω ، همراه با یک جمله اضافی که با شرایط مرزی Γ سازگار است به صورت

$$\|u\|_n^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} v^2(t_n) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(t_n))^2 dx + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma} u^2(t_n) d\Gamma, \quad (۷۶.۳)$$

تعریف می‌کنیم. اختلاف جواب تقریبی و جواب واقعی را خطا می‌نامیم،

$$e_u(x, t) = u(x, t) - u_{ex}(x, t), \quad e_v(x, t) = v(x, t) - v_{ex}(x, t).$$

خطای زمانی در زمان t_n را با جملات جهش زمانی محلی، سراسر سطح مشترک قطعه فضا-زمان، به صورت

$$\|e_t\|_n^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} [e_v(t_n)]^2 dx + \int_{\Omega} [\nabla e_u(t_n)]^2 dx + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma} [e_u(t_n)]^2 d\Gamma, \quad (۷۷.۳)$$

نشان می‌دهیم.

جواب واقعی u_{ex} و $v_{ex} = \frac{\partial u_{ex}}{\partial t}$ را در زمان t_n در نظر می‌گیریم، پس جهش در جواب گسسته عنصر متناهی، بین قطعه‌های فضا-زمان، خطا می‌باشد.

$$[e_u] = e_u(t_n^+) - e_u(t_n^-) = u(t_n^+) - u(t_n^-),$$

$$[e_v] = e_v(t_n^+) - e_v(t_n^-) = v(t_n^+) - v(t_n^-),$$

در نتیجه رابطه (۷۷.۳) با رابطه

$$\|e_t\|_n^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} [v(t_n)]^2 dx + \int_{\Omega} [\nabla u(t_n)]^2 dx + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma} [u(t_n)]^2 d\Gamma, \quad (۷۸.۳)$$

معادل است. خطای نسبی در گام زمانی را به صورت

$$\eta_t(t_n) = \frac{\|e_t\|_n}{\|u\|_n} \leq \eta_t^{TOL}, \quad (۷۹.۳)$$

تعیین می‌کنیم. جواب‌ها را از گام زمانی قبلی با گره‌های مش جاری درون‌یابی می‌کنیم. با استفاده از گسسته‌سازی فضا-زمان (۲۲.۳) و (۲۳.۳) رابطه (۷۶.۳) و (۷۸.۳) را به شکل ماتریسی زیر بیان می‌کنیم.

$$\|u\|_n^2 = d_n(t_n^-) \cdot K_n d_n(t_n^-) + c_n(t_n^-) \cdot M_n c_n(t_n^-), \quad (۸۰.۳)$$

$$\|e_t\|_n^2 = [d_n(t_n)] \cdot K_n [d_n(t_n)] + [c_n(t_n)] \cdot M_n [c_n(t_n)]. \quad (۸۱.۳)$$

در رابطه (۸۱.۳) K_n و M_n ماتریس‌های سختی و جرم، گام جاری هستند. نورم‌های (۸۰.۳) و (۸۱.۳) را به طور محلی روی هر عنصر محاسبه و سپس جمع می‌کنیم. مرز انتگرال را در روابط (۷۶.۳) و (۷۸.۳) در نظر نمی‌گیریم. در این حالت، ماتریس سختی K_n (۸۱.۳) بخشی از عناصر آرایه‌های درونی را در بر می‌گیرد [۴۵، ۶۸]. کارایی جهش در جواب‌های گسسته مانند شاخص خطا است، به علت ویژگی فوق همگرایی جواب زمان گسسته گالرکین (TDG)، جواب را در انتهای هر گام زمانی به دست می‌آوریم.

گام زمانی جدید Δt_n^{new} را به شکل زیر

$$\Delta t_n^{new} = \left(\frac{\eta_t^{TOL}}{\eta_t} \right) \frac{1}{m} \Delta t_n^{old}, \quad (۸۲.۳)$$

تعیین می‌کنیم که $m = r + 1$ است. برای تقریب‌های خطی $r = 1$ و $m = 2$ می‌باشد. برای کنترل تغییر گام زمانی دو پارامتر حقیقی $\beta_{t1} < 1/0$ و $\beta_{t2} > 1/0$ ، و عدد صحیح $K_t > 0$ را معرفی می‌کنیم. اگر $\eta_t > \eta_t^{TOL}$ آنگاه جواب رد شده و پالایش گام زمانی را اجرا می‌کنیم. اگر $\eta_t < \beta_{t1} \eta_t^{TOL}$ و K_t چند بار رخ دهد، جواب را می‌پذیریم، هرچند، اندازه گام زمانی در گام بعدی افزایش یابد. پارامتر $\beta_{t2} > 1/0$ را برای اندازه گام زمانی جدید به کار می‌بریم. مقدار $\frac{\eta_t^{TOL}}{\beta_{t2}}$ را به جای خطای η_t^{TOL} در اندازه گام زمانی جدید استفاده می‌کنیم. در این روش، خطای گام زمانی جدید همیشه در $\eta < \eta_t^{TOL}$ صدق می‌کند.

۱.۸.۳ شاخص خطای زمانی برای معادلات مرزی

نورم L_2 روی مرز Γ را، در هر گام زمانی n ، با کنترل خطای زمانی توابع مرزی، به صورت

$$\|w\|_n^2 = \int_0^{2\pi} (w(\theta, t_n^-))^2 d\theta = 2\pi \sum_{m=-M}^M (w_m(t_n^-))^2 = 2\pi \sum_{i=1}^p \|w_i\|_n^2, \quad (۸۳.۳)$$

تعریف می‌کنیم، در رابطه (۸۳.۳)

$$\|w_i\|_n^2 = \sum_{m=-M}^M (w_{m,i}(t_n^-))^2, i = 1, 2, \dots, p, \quad (۸۴.۳)$$

می‌باشد. p ، تعداد توابع کمکی برای هر مود است، به عنوان مثال $M = 20$ و $p = 6$. اندازه محلی خطای زمانی از باقی‌مانده‌های جواب گسسته در گام زمانی را به صورت

$$\|e_w\|_n^2 = 2\pi \sum_{m=-M}^M \left([w_m(t_n)] \right)^2 = 2\pi \sum_{m=-M}^M \sum_{i=1}^p \left(w_{m,i}(t_n^+) - w_{m,i}(t_n^-) \right)^2. \quad (۸۵.۳)$$

محاسبه می‌کنیم. خطای نسبی مرزی به صورت،

$$\eta_w = \frac{\|e_w\|_n}{\|w\|_n} < \eta_w^{TOL}, \quad (۸۶.۳)$$

بیان می‌کنیم. اگر خطای نسبی مرزی (۸۶.۳)، از خطای η_w^{TOL} بیشتر شود، گام زمانی را می‌توانیم مشابه متغیرهای میدان داخلی u و v دوباره تعریف کنیم. خطای نسبی مرزی را (۸۶.۳) با متغیر میدان، و گام زمانی، دستگاه مرزی / درونی (۷۹.۳) کنترل می‌کنیم.

به عنوان مثال، پرتو / پراکندگی میدان موج ابتدا درون ناحیه فشرده دامنه محاسباتی Ω متمرکز می‌شود. در این حالت متغیرهای u و v میدان غیرصفر، پس از گذشت زمانی، با سرعت موج c ، به برش مرزی Γ می‌رسند. در ابتدا، چون جواب‌های توابع مرزی w_m غیر فعال هستند، فقط عملگر محلی B_1 برای Γ اعمال می‌شود. زمانی که اولین رخداد میدان غیر صفر تغییرپذیر که به Γ می‌رسد، با استفاده از نورم مرزی (۱۷.۳) بزرگی آن را با یک خطای کوچک بررسی می‌کنیم. وقتی که نورم مرزی از خطا بیشتر باشد، توابع مرزی w_m در جواب‌های الگوریتم فعال می‌شوند و آن را با خطای (۸۶.۳) توصیف می‌کنیم.

۲.۸.۳ برآورد خطای فضایی و روش تطبیق

برای برآورد خطای فضایی در گام زمانی، اختلاف بین گرادیان‌های SPR [۴۷، ۴۸] و FEM را در نورم L_2 محاسبه می‌کنیم. خطا را روی هر عنصر Ω_e ، محاسبه می‌کنیم و از مجموع خطاها، خطای کلی زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\|e_s\|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_e} \|e_s\|_{n,e}^2, \quad (۸۷.۳)$$

که در رابطه (۸۷.۳)

$$\|e_s\|_{n,e}^2 = \int_{\Omega_e} \left[\nabla u^*(x, t_{n+1}^-) - \nabla u^h(x, t_{n+1}^-) \right]^2 dx,$$

خطای عنصر e است. ∇u^* گرادیان به دست آمده از بازیابی قطعه‌ی فوق همگرایی تکنیک (SPR) [۴۷] است. چون گرادیان‌های بازیابی شده ∇u^* در نرخ بالایی به گرادیان‌های ∇u^h ، FEM همگراست، کارایی شاخص خطا را مانند نسبت خطای برآورد شده با خطای درست اندازه‌گیری می‌کنیم و تقریباً دقیق است، یعنی مثل مش پالایش شده است. اندیس کارایی به مقدار بهینه یک نزدیک خواهد شد [۴۸].

برآورد خطای نسبی را با کنترل دقت تقریب فضایی، پایینتر از خطای قابل تامل نگه می‌داریم،

$$\eta_s(t_n) = \frac{\|e_s\|_n}{\|u^h\|_n} \leq \eta_s^{TOL}. \quad (۸۸.۳)$$

یک بار خطا را برآورد می‌کنیم و تعیین می‌کنیم که به مش جدید نیاز داریم. یک مش بهینه را با فرض توزیع برابر خطا با کمترین تعداد عناصر مورد نیاز به دست می‌آوریم. معیار پالایش را به صورت زیر تعیین می‌کنیم،

$$h_e^{new} = \frac{h_e^{old}}{\xi_e}, \quad (۸۹.۳)$$

که h_e^{old} اندازه عنصر e در مش قبلی، و h_e^{new} اندازه عناصر جدید در ناحیه است. پارامتر پالایش هر عنصر [۵۲] را به صورت

$$\xi_e = \frac{1}{\eta_e^{(p+1)}} \left[\sum_{e=1}^{N_e} \eta_e^{\frac{1}{(p+1)}} \right]^{\frac{1}{2p}}, \quad \eta_e = \frac{\|e_s\|_{n,e}}{\|u^h\|_{n,e}}, \quad (۹۰.۳)$$

تعریف می‌کنیم. p ، درجه چندجمله‌ای توابع پایه‌ای مش و η_e برآورد خطای نسبی عنصر e در برآورد کلی η_s است.

پارامتر پالایش [۴۵، ۶۸]، میانگین خام تکنیک [۴۹]، می‌باشد.

$$\xi_e = \left(\frac{\|e_s\|_{n,s}}{\bar{e}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \bar{e} = \eta_s^{TOL} \frac{\|u^h\|_n}{\sqrt{N_e}}, \quad (۹۱.۳)$$

در رابطه (۹۱.۳)، $\bar{e}$ خطای میانگین مجاز عناصر و N_e ، تعداد عناصر روی مش جاری است. در هر گام زمانی فقط یک توزیع مجدد مجاز است و (۹۰.۳) یک توزیع خطای یکنواخت تولید می‌کند و عناصر کمتری از (۹۱.۳) را نیاز داریم.

مشابه روش تطبیقی که برای تغییر اندازه گام زمانی استفاده نمودیم، دو پارامتر حقیقی $\beta_{s1} < 1/0$ و $\beta_{s2} > 1/0$ و عدد صحیح $K_s > 0$ را معرفی می‌کنیم. اگر $\eta_s > \eta_s^{TOL}$ ، جواب رد می‌شود و پالایش مش را اجرا می‌کنیم. اگر $\eta_s < \beta_{s1} \eta_s^{TOL}$ و K_s در چند بار متوالی رخ دهد، جواب را می‌پذیریم و توزیع مجدد مش را بزرگتر می‌کنیم. برای اینکه $\eta_s < \eta_s^{TOL}$ در مش جدید صدق کند، $\frac{\eta_s^{TOL}}{\beta_{s2}}$ را به جای η_s^{TOL} در (۹۰.۳) یا (۹۱.۳) به کار می‌بریم. برای درستی هندسی شکل‌های مرزی، عنصر ماکزیم $h_e < h_{max}$ را معرفی می‌کنیم.

۳.۸.۳ بازبینی روش تطبیق

فرآیند جواب تطبیقی کلی را به شرح زیر خلاصه می‌کنیم:

۱. مش اولیه را تولید کنید و اندازه گام زمانی اولیه را تعیین کنید.
۲. حلقه روی گام‌های زمانی، $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ ، $n = 0, \dots, N$ ،
 - a. گام زمانی را درون بازه $I_n = (t_n, t_{n+1})$ کنترل کنید.
 - i. از جواب گام قبلی پیش‌گویی کنید.
 - ii. زوج معادلات درونی/مرزی را با روش تکراری چند سطحی حل کنید و جواب تقریبی را به دست آورید.
 - iii. شاخص خطای زمانی محلی را محاسبه کنید، اگر شاخص از خطا پایین‌تر است، از محاسبه خارج شوید.
 - iv. گام زمانی جدید Δt_n را به روز کنید و به (۲a) برگردید.
 - b. برآورد خطای پسین فضایی را محاسبه کنید. اگر برآورد پایین‌تر از خطا است، از محاسبه خارج شوید.
 - c. اگر به مش جدید نیاز دارید، مش‌بندی مجدد را اجرا کنید، و نگاشتی از مش قبلی به مش جدید انجام دهید، ماتریس‌ها را بازسازی کنید و به (۲a) برگردید.

۳. پایان حلقه گام زمانی

در هر گام زمانی، فقط یک مش‌بندی مجدد مجاز می‌باشد. در این روش، خطاهای زمانی و فضایی به‌طور مستقل و کارا هستند، نتایج را در تطبیقی پی‌درپی از فضا و زمان ارزیابی می‌کنیم. روش‌های دیگری برای مسایل تکامل زمانی، روی حل یک مساله دوگان اضافی شامل برآوردهای خطای زمانی و فضایی پیشنهاد شده‌اند [۲۳، ۴]. مزیت روش [۲۳، ۴] این است که انباشتگی خطای محلی را اندازه‌گیری می‌کند و اشکال آن، هزینه اضافی حل مساله دوگان، دشواری توصیف شاخص پالایش برای تنظیم گام زمانی و اندازه مش جدید از شاخص خطا می‌باشد.

فصل ۴

مثال‌های عددی

در این فصل، کنترل برآوردهای فضایی و زمانی روش تطبیقی را برای پراکندگی گذرا از یک استوانه بیضوی، ارایه می‌دهیم. برای تولید عناصر خطی (مش‌های مثلثی) از نرم‌افزار BL2D استفاده می‌کنیم و نتایج را برای تقریب خطی، $r = 1$ به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۰.۴. بسامد

به تعداد دفعاتی که یک رویداد تناوبی در واحد زمان اتفاق می‌افتد، و به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$f = \frac{1}{T}$$

۱.۴ پراکندگی موجک از یک استوانه بیضوی

تابش موجکی در زمان متناهی به صورت

$$u^{(i)}(x, t) = g(t - t_s)h(x, t), \quad (1.4)$$

در نظر می‌گیریم، که

$$g(t) = \frac{(0.25\beta^2 - 0.5)e^{-0.25\beta^2} - 13e^{-13.5}}{0.5 + 13e^{-13.5}}, \quad (2.4)$$

یک پالس ریکر^۱ است [۴۳]،

$$h(x, t) = H(t - t_s) - H(t - t_s - 6 - \frac{\sqrt{6}}{\omega_r}),$$

و $\beta = \omega_r t - 3\sqrt{6}$ ، ω_r بسامد غالب تحریک است.

^۱Ricker

DGFEM تطبیقی با دقت مرتبه بالای شرایط مرزی پرتو را برای ردیابی میدان پراکندگی، انعکاس پالس ریکر از بیضی صلب، استفاده می‌کنیم. جواب تطبیقی را با،

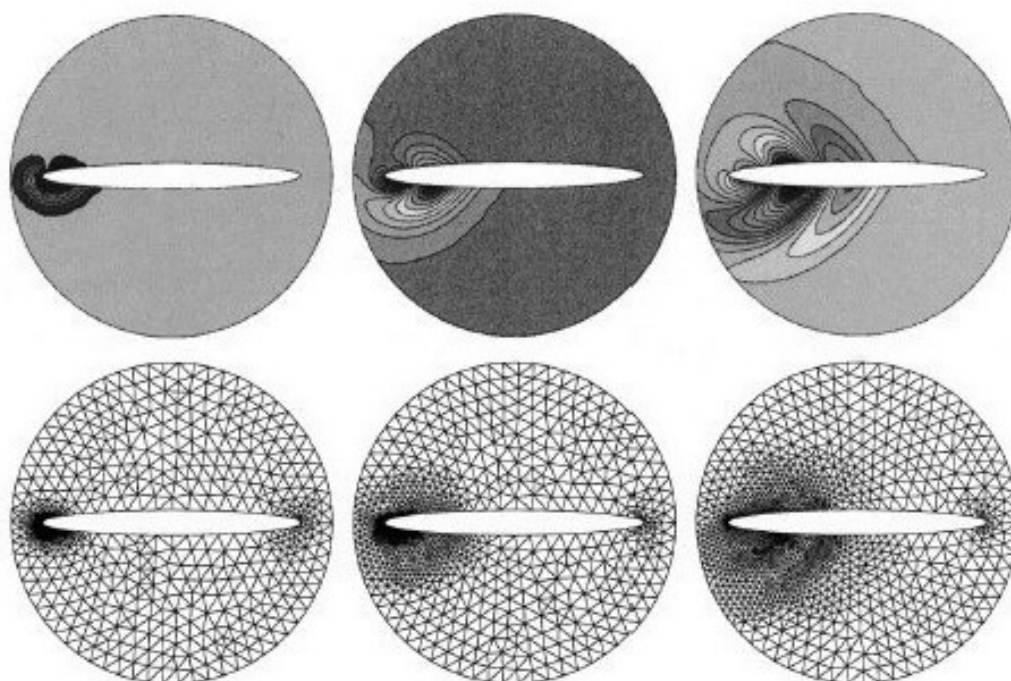
$$\beta_t = (\beta_{t1}, \beta_{t2}) = (0.7, 1.2), \quad \beta_s = (\beta_{s1}, \beta_{s2}) = (0.5, 1.1), \quad (\eta_s, \eta_t) = (10, 0.6) \\ (K_s, K_t) = (20, 10) \quad \text{و} \quad h_{max} = 0.12 \quad \text{کنترل می‌کنیم.}$$

شکل‌های (۱۰.۴) - (۴.۴) تصویر لحظه‌ای جواب میدان پراکندگی DGFEM تطبیقی در زمان، متناظر با مش‌های تطبیقی موثر بر ردیابی میدان پراکندگی را به‌عنوان حرکت پالس موج از دامنه محاسباتی را نشان می‌دهیم. منحنی‌های تراز را در هر گام زمانی کوچکتر می‌کنیم، طوری که مقادیر $\max / \min$ در هر گام زمانی، به‌طور مساوی بین 30° منحنی تراز باشند. مش را در نواحی با گرادیان بالا تظریف و در نواحی ساکن درشت می‌کنیم. در ابتدا، میدان پراکندگی در نزدیکی سطح پراکنده‌ساز متمرکز می‌شود و سپس مثل حرکت موج صفحه‌ای پراکنده‌ساز بیضوی گسترش می‌یابد. موج دامنه محاسباتی را بعد از $t = 3/5$ ترک می‌کند. متفرق شدن با دامنه معنی‌داری تا $t = 5$ ادامه می‌یابد.

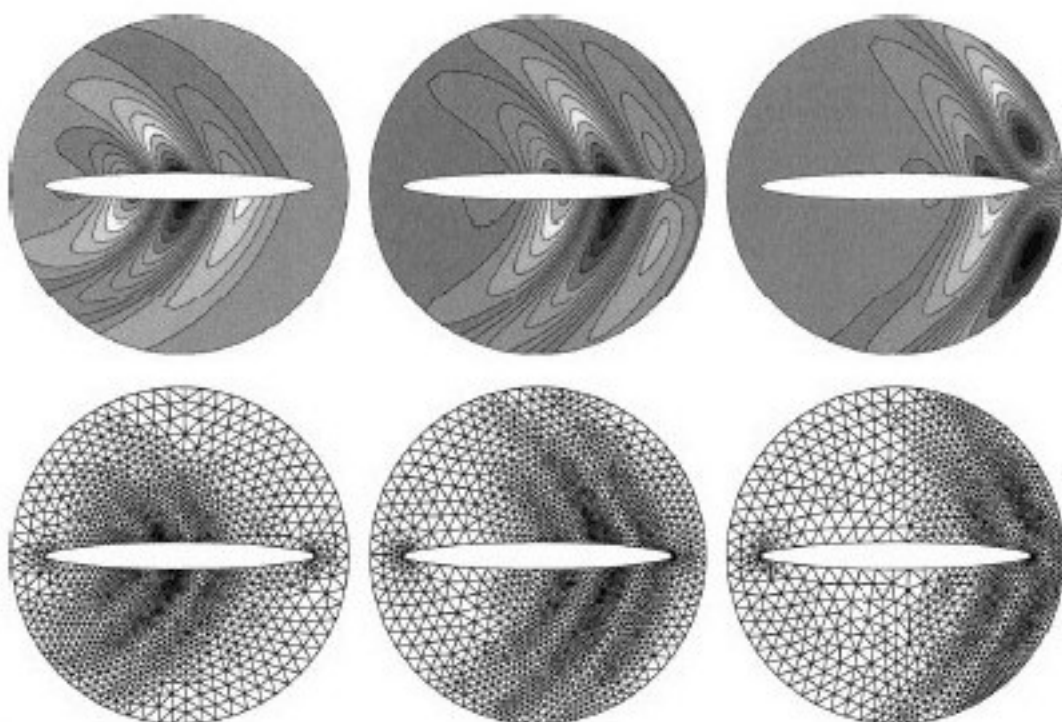
نورم انرژی کلی (سراسری) (۷۶.۳) و (۸۰.۳) را به‌عنوان پیشرفت جواب نمایش می‌دهیم. شکل (۵.۴) در ابتدا انرژی میدان پراکندگی درون دامنه محاسباتی مثل پیشرفت پالس موج می‌باشد. پس از مدتی موج‌های میدان پراکندگی از سراسر برش مرزی دایره‌ای Γ عبور می‌کند، پرتو میرایی ظاهر می‌شوند. اندازه گام زمانی را در شکل (۶.۴) نشان می‌دهیم. در ابتدا گام‌های زمانی کوچک هستند سپس به تدریج با حفظ محدوده خطای زمانی موردنظر با حداکثر خطای نسبی $\eta_s \leq 0.5$ ، افزایش می‌یابند.

در شکل (۶.۴) نورم توابع کمکی مرزی، $\|w\|_n$ (۸۳.۳) را نشان می‌دهیم. نورم توابع مرزی تا زمان اولیه، $t = 0.8$ تقریباً صفر است که در آن، دامنه نوسان قابل توجهی از میدان پراکندگی درونی به برش مرزی دایره‌ای می‌رسد. برای هر گام زمانی خطای نسبی پایین‌تر از خطای 1% است. $\eta_w \leq 1\%$

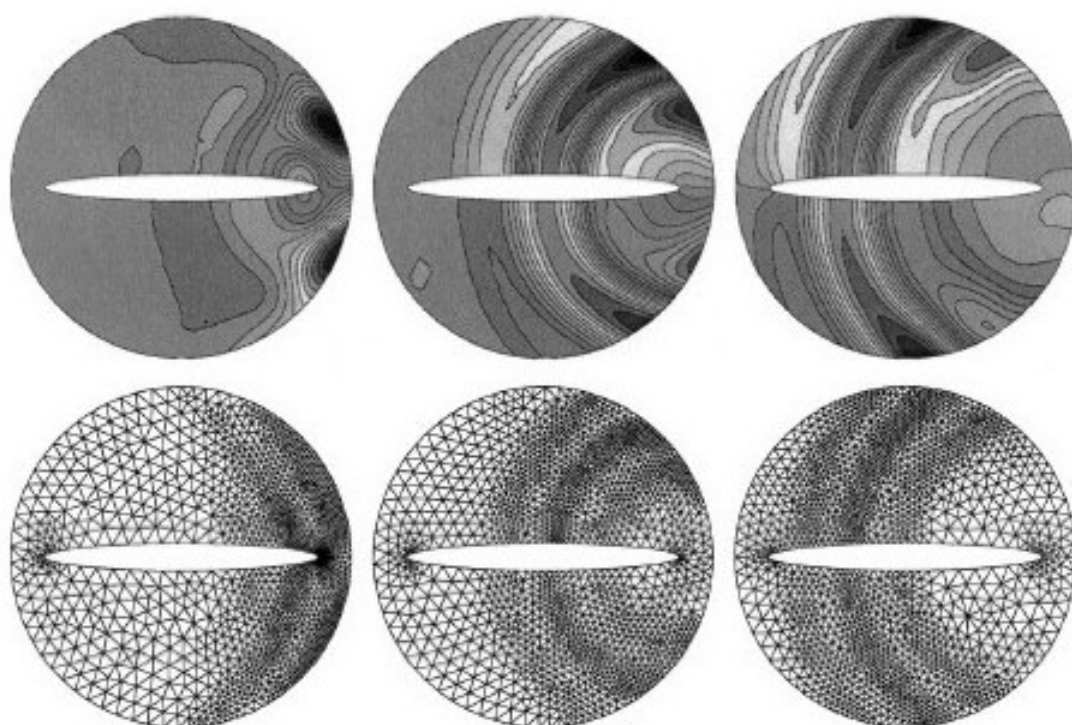
در شکل (۷.۴) جواب‌های تطبیقی و تظریف مش دقیق را در بالا و پایین بیضی $(x, y) = (0, \pm b)$ مقایسه می‌کنیم. با کاهش تیرانس برآورد خطا می‌توانیم جواب تظریف مش را به درستی با گره‌ها و گام‌های زمانی مطابق کنیم.



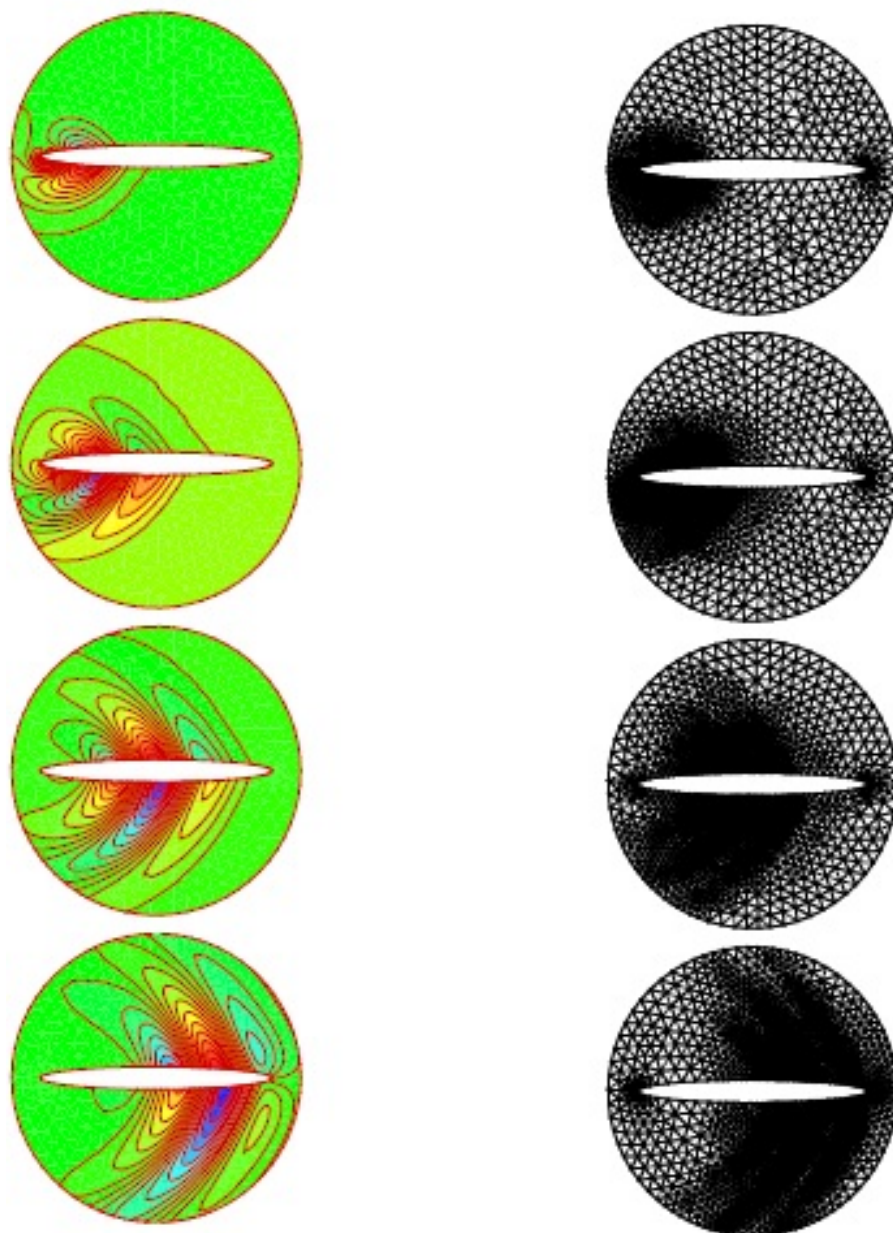
شکل ۱۰۴: جواب میدان پراکندگی در تصویر لحظه‌ای در زمان $t = (0.5, 1.0, 1.5)$ متناظر با مش‌های تطبیقی جواب ردیابی پراکندگی.



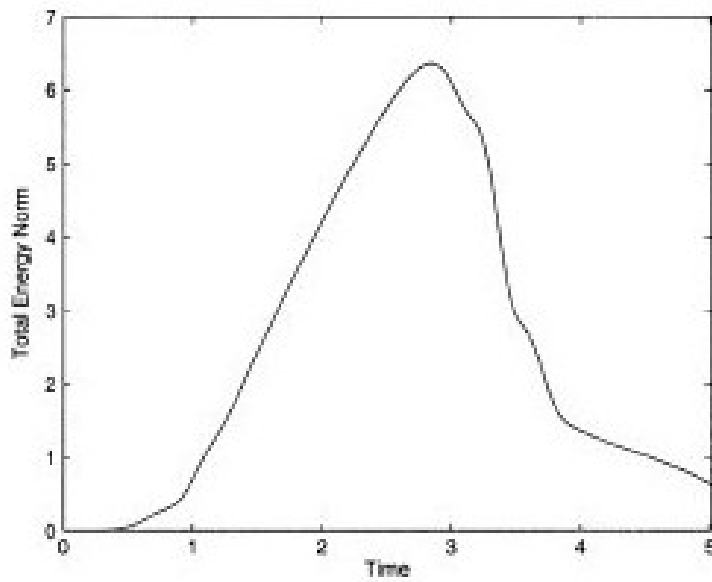
شکل ۲.۴: جواب میدان پراکندگی در تصویر لحظه‌ای در زمان $t = (2/0, 2/5, 3/0)$ متناظر با مش‌های تطبیقی جواب ردیابی پراکندگی.



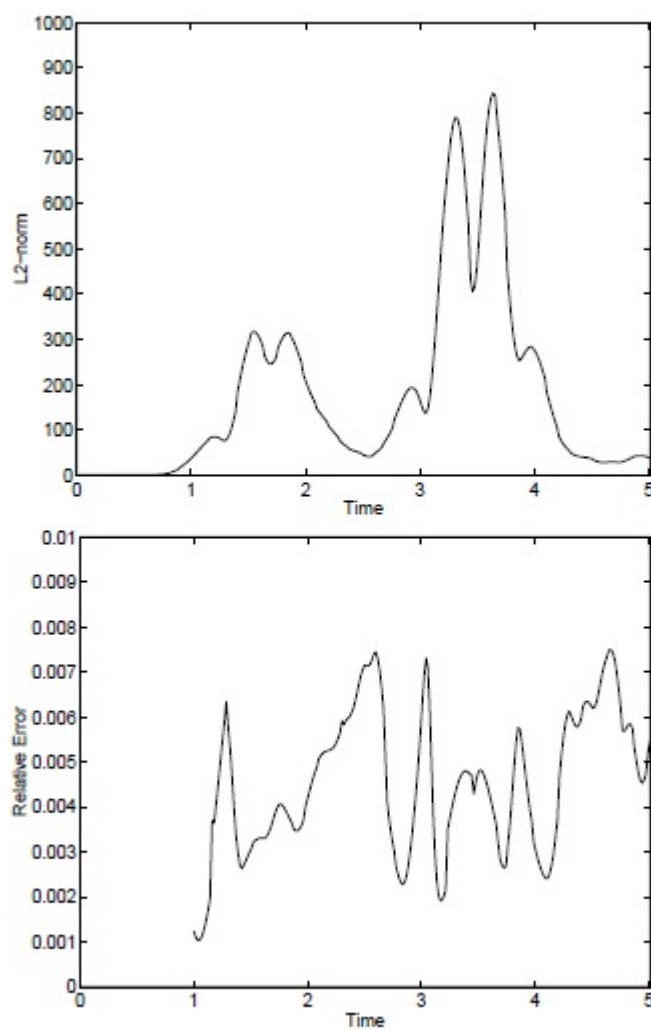
شکل ۳.۴: جواب میدان پراکندگی در تصویر لحظه‌ای در زمان $t = (3/5, 4/5, 4/5)$ متناظر با مش‌های تطبیقی جواب ردیابی پراکندگی.



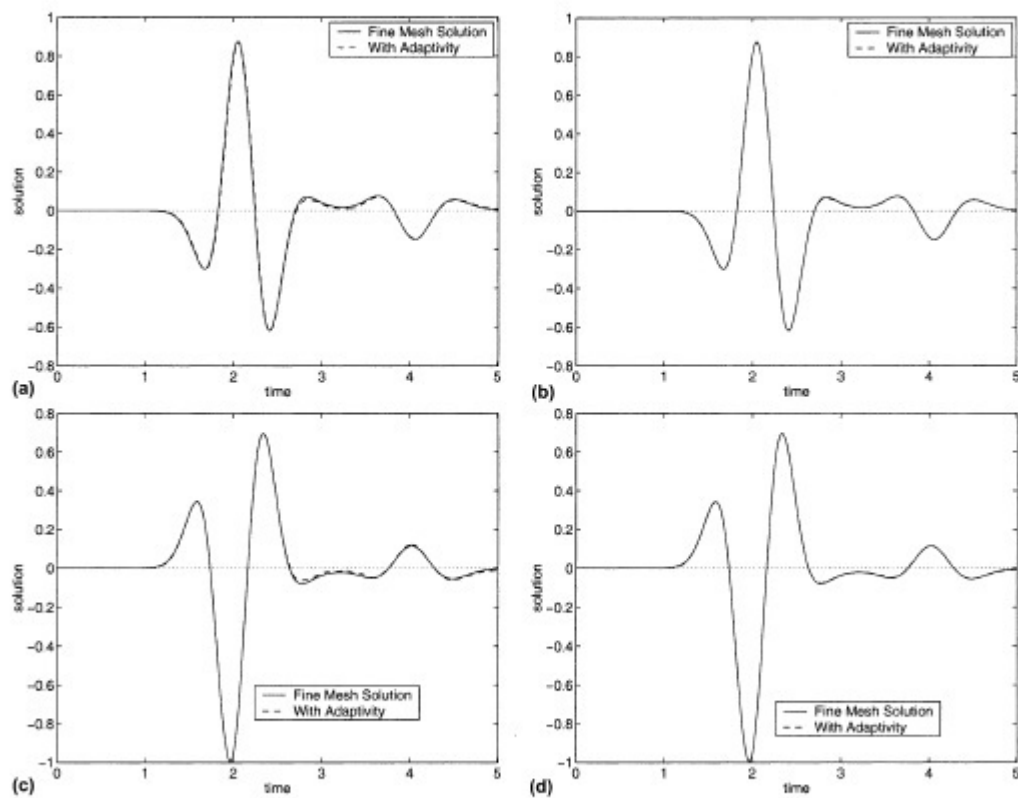
شکل ۴.۴: تصویر لحظه‌ای جواب میدان پراکندگی پالس ریکر در زمان $t = (1/5, 2/5)$, $\delta t = 0/5$.
و مش تطبیقی جواب ردیابی پراکندگی پالس ریکر



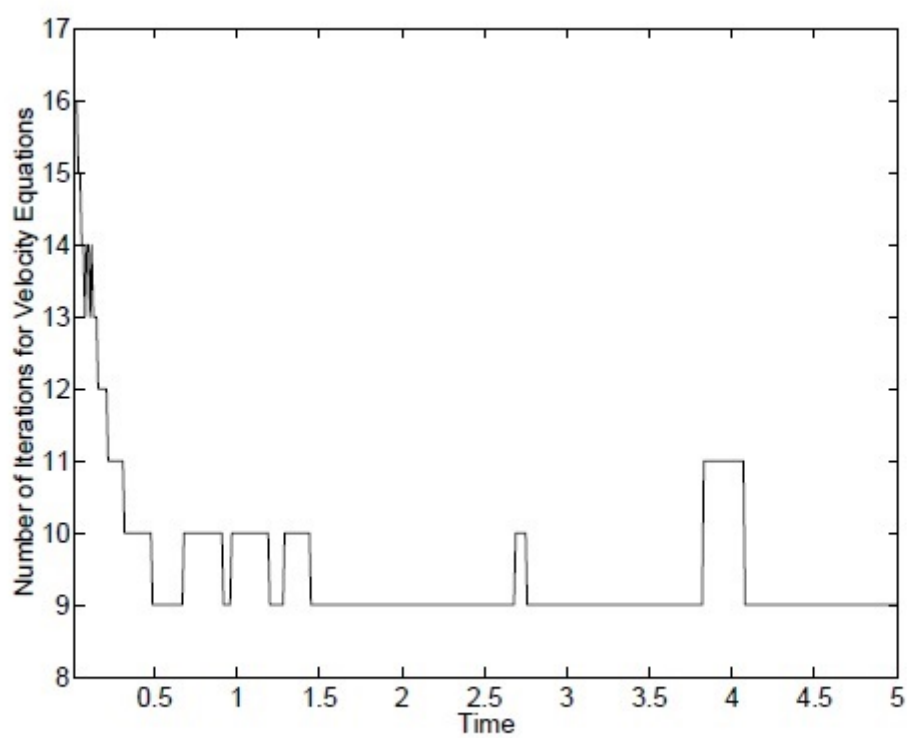
شکل ۵.۴: نورم انرژی کلی (۸۰.۳) درون دامنه محاسباتی Ω .



شکل ۴.۶: برآورد خطای معادلات مرزی: شکل بالا نورم $L_2 \text{norm} \|w_\gamma^p\|_n$ ، (۸۳.۳) . شکل پایین خطای نسبی η_w .



شکل ۷.۴: مقایسه جواب تطبیقی با جواب مش تظرفی: (a) نقطه ۲: $(\circ, +b)$ ؛ (b)؛ (b) نقطه ۱: $(\circ, -b)$ ؛ (c)؛ $\eta_s^{TOL} = 10\%$ و (d)؛ $\eta_s^{TOL} = 6.5\%$.



شکل ۸.۴: کل تکرارها = ۴۷۴۷ در بازه زمانی $t = (0, 5)$.

۲.۴ نتایج

روش‌های تطبیقی با الگوریتم‌های کارآمد را برای DGFEM با شرایط مرزی غیر انعکاسی مرتبه بالا، برای مسایل موج بی‌کران به‌کار بردیم. فرایندها را در دوبعدی اجرا کردیم ولی برای مسایل سه‌بعدی نیز معتبر هستند.

با ساختارهای ماتریسی کارآمد، برای درونیابی چندجمله‌ای مرتبه بالا، تعداد معادلات را برای حل، به نصف کاهش دادیم. زوج معادلات درونی/مرزی را با استفاده از الگوریتم تکرار چند-سطحی که بر اساس روش گاوس-سایدل است، حل نمودیم.

به علت ماهیت محلی انتشار موج، استراتژی تکراری فقط به تعدادی از تکرارهای هر گام زمانی، برای حل مجدد جواب با دقت بالا نیاز دارد. با قطری‌سازی ماتریس‌های جرم و میرایی مرزی در هزینه صرفه‌جویی می‌کنیم. در این حالت ساختار جبری ماتریس‌های قطری بلوکی مجزا، برای معادلات سرعت، سریعتر از روش تکراری صریح نتیجه می‌دهد.

برای انتقال داده (نگاشت) بین مش‌ها، روش درونیابی افزوده جدید (EI) را برای مثلثی‌سازی، بسط دادیم.

مطالعات عددی پراکندگی پرتو گذرا، دقت، اعتبار و کارآمدی استراتژی تطبیق فضا-زمان را نشان می‌دهد.

- این روش را می‌توان برای چهارضلعی دوبعدی و مکعب‌های سه‌بعدی گسترش داد.
- پیاده‌سازی چندجمله‌ای مرتبه دوم و مراتب بالاتر را با استراتژی hp تطبیقی، در هر دو بعد زمان و فضا، در چارچوب DGFEM، می‌توان گسترش داد.
- با توجه به کارایی ردیابی پالس‌های موج گذرا، روش‌های hp تطبیقی محلی را می‌توان به عناصر و چندجمله‌ای‌های مراتب محلی، در فضا و زمان، روی فاصله و زمان بزرگ تعمیم داد.

- [1] A. Bayliss, E. Turkel, *Radiation boundary conditions for wave-like equations*, Commun. Pure Appl. Math. 33 (1980) 707–725.
- [2] A. Masud, T.J.R. Hughes, *A space–time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier–Stokes equations for moving domain problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 146 (1-2) (1997) 91–126.
- [3] A. Safjan, L. Demkowicz, J.T. Oden, *Adaptive finite element methods for hyperbolic systems with applications to acoustics*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 32 (1991) 677–707.
- [4] A. Schleupen, E. Ramm, *Local and global error estimation in linear structural dynamics*, Comput. Struct. 76 (6) (2000) 741–756.
- [5] B.A. Grohmann, T. Wallmersperger, B.H. Kroplin, *Time discontinuous stabilized space–time finite elements for Timoshenko beams*, AIAA J. 39 (11) (2001) 2158–2167.
- [6] B.E. Webster, M.S. Shephard, Z. Rusak, J.E. Flaherty, *Automated adaptive time-discontinuous finite-element method for unsteady compressible airfoil aerodynamics*, AIAA J. 32 (4) (1994) 748–757.
- [7] C.A. Issa, K. Balasubramaniam, K. Srengan, *Adaptive hp-finite element for transient analysis*, Appl. Math. Comput. 65 (1994) 315–334.
- [8] C.C. Chien, T.Y. Wu, *An improved predictor/multi-corrector algorithm for a time-discontinuous Galerkin finite element method in structural dynamics*, Comput. Mech. 25 (2000) 430–437.
- [9] C. Johnson, *Discontinuous Galerkin finite element methods for second-order hyperbolic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 107 (1993) 117–129.
- [10] C. Johnson, U. Navert, J. Pitkaranta, *Finite element methods for linear hyperbolic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 45 (1984) 285–312.
- [11] C. Johnson, J. Pitkaranta, *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, Math. Comput. 46 (1986) 1–26.

- [12] D. Givoli, B. Neta, *High-order non-reflecting boundary scheme for time-dependent waves*, J. Comput. Phys. 186 (1) (2003) 24–46.
- [13] D. He, *Local space–time adaptive finite element methods for the wave equation on unbounded domains*, Ph.D. Dissertation, Clemson University, May 2003.
- [14] D. N’dri, A. Garon, F. Fortin, *A new stable space–time formulation for two-dimensional and three-dimensional incompressible viscous flow*, Int. J. Numer. Methods Fluids 37 (8) (2001) 865–884.
- [15] D. Schottzau, C. Schwab, *Time discretization of parabolic problems by the hp-version of the discontinuous Galerkin finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. 38 (2000) 837–875.
- [16] E. Onate, M. Manzan, *A general procedure for deriving stabilized space–time finite element methods for advection–diffusion problems*, Int. J. Numer. Methods Fluids 31 (1) (1999) 203–221.
- [17] F. Collino, *High order absorbing boundary conditions for wave propagation models, straight line boundary and corner cases*, in: R. Kleinman, et al. (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM, Delaware, 1993, pp. 161–171.
- [18] F. Shakib, T.J.R. Hughes, Z. Johan, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. The compressible Euler and Navier–Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 89 (1991) 141–219.
- [19] Graham F. Carey, *Computational Grids: Generation, Adaptation, and Solution Strategies*, Taylor and Francis, London, 1997.
- [20] G. Hulbert, *Time finite element methods for structural dynamics*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 33 (1992) 307–331.
- [21] J. Maubach, *Local bisection refinement for simplicial grids generated by reflection*, Math. Model. Numer. Anal. 35 (5) (2001) 879–897.
- [22] K. Eriksson, C. Johnson, *Adaptive finite element methods for parabolic problems I: a linear model problem*, SIAM J. Numer. Anal. 28 (1991) 43–77.
- [23] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Introduction to adaptive methods for differential equations*, Acta Numerica (1995) 105–158.
- [24] K. Jansen, F. Shakib, T.J.R. Hughes, *Fast projection algorithm for unstructured meshes*, in: S.N. Atluri (Ed.), Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering, vol. 146, AIAA, Washington, DC, 1992.

- [25] L.F. Zeng, N.E. Wiberg, *Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems*, Comp. Mech. 9 (1992) 315–332.
- [26] L.L. Thompson, *A multi-field space-time finite element method for structural acoustics* *Proceedings of the 1995, Design Engineering Technical Conferences, Acoustics, Vibrations, and Rotating Machines*, Boston, MA, 17–21 September, vol. 3, Part B, ASME, New York, 1995, pp. 49–64.
- [27] L.L. Thompson, *Advances in space-time finite element methods for structural acoustics and fluid-solid interaction*, in: D. Lee, Y.-H. Pao, M.H. Schultz, Teng Y.-C. (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical and Computational Acoustics*, Honolulu, HI, 21–25 August 1995, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1996, pp. 223–234.
- [28] L.L. Thompson, D. He, *Adaptive space-time finite element methods for the wave equation on unbounded domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 1947–2000.
- [29] L.L. Thompson, P.M. Pinsky, *A space-time finite element method for structural acoustics in infinite domains, Part I: formulation, stability, and convergence*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 132 (1996) 195–227.
- [30] L.L. Thompson, P.M. Pinsky, *A Space-time finite element method for structural acoustics in infinite domains, Part II: Exact timedependent non-reflecting boundary conditions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 132 (1996) 229–258.
- [31] L.L. Thompson, P.M. Pinsky, *A space-time finite element method for the exterior structural acoustics problem: time-dependent radiation boundary conditions in two spatial dimensions*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 39 (1996) 1635–1657.
- [32] L.L. Thompson, P.M. Pinsky, *A space-time finite element method for the exterior acoustics problem*, J. Acoust. Soc. Am. 99 (6) (1996) 3297–3311.
- [33] L.L. Thompson, R. Huan, *Computation of transient radiation in semi-infinite regions based on exact nonreflecting boundary conditions and mixed time integration*, J. Acoust. Soc. Am. 106 (6) (1999) 3095–3108.
- [34] L.L. Thompson, R. Huan, *Computation of far field solutions based on exact nonreflecting boundary conditions for the timedependent wave equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000) 1551–1577.
- [35] L.L. Thompson, R. Huan, *Finite element formulation of exact non-reflecting boundary conditions for the time-dependent wave equation*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 45 (1999) 1607–1630.

- [36] L.L. Thompson, R. Huan, *Implementation of exact non-reflecting boundary conditions in the finite element method for the time dependent wave equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 187 (2000) 137–159.
- [37] L.L. Thompson, R. Huan, D. He, *Accurate radiation boundary conditions for the two-dimensional wave equation on unbounded domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2001) 311–351.
- [38] M. Asadzadeh, *An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations*, January 2010.
- [39] M.J. Grote, J.B. Keller, *Exact nonreflecting boundary condition for the time dependent wave equation*, SIAM J. Appl. Math. 55 (1995) 280–297.
- [40] M.J. Grote, J.B. Keller, *Nonreflecting boundary conditions for time dependent scattering*, J. Comput. Phys. 127 (1996) 52–65.
- [41] M.N. Guddati, J.L. Tassoulas, *Continued-fraction absorbing boundary conditions for the wave equation*, J. Comput. Acoust. 8 (1) (2000) 139–156.
- [42] M. Ziamal, *Superconvergence and reduced integration in the finite element method*, Math. Comput. 32 (1980) 663–685.
- [43] N.H. Ricker, *Transient Waves in Visco-Elastic Media*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 1977.
- [44] N.-E. Wiberg, L. Zeng, X. Li, *Error estimation and adaptivity in elastodynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 101 (1992) 369–395.
- [45] N.-E. Wiberg, X.D. Li, *Adaptive finite element procedures for linear and non-linear dynamics*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 46 (1999) 1781–1802.
- [46] N.-E. Wiberg, X.D. Li, *A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semidiscrete finite element method in dynamic analysis*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994) 3585–3603.
- [47] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, *The superconvergent patch recovery and a posterior error estimates. Part 1: the recovery technique*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 33 (1992) 1331–1364.
- [48] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, *The superconvergent patch recovery and a posterior error estimates, Part 2: error estimates and adaptivity*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 33 (1992) 1365–1382.
- [49] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 24 (1987) 337–357.

- [50] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, *Superconvergence and the superconvergent patch recovery*, Finite Elem. Anal. Design 19 (1995) 11– 23.
- [51] O.C. Zienkiewicz, Y.M. Xie, *A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis*, Earthquake Engrg. Struct. Dyn. 20 (1991) 871–887.
- [52] P. Coorevits, P. Ladeveze, J.P. Pelle, *An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 121 (1995) 91–120.
- [53] P. George, *Automatic Mesh Generation* , Wiley, New York, 1991.
- [54] P. Hansbo, *A free-Lagrange finite element method using space-time elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188 (1–3) (2000) 347–361.
- [55] P. Laug, H. Borouchaki, *The BL2D Mesh Generator: Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual*, Rapport Technique INRIA RT-0194, July, 1996.
- [56] P. Lesaint, P.A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, in: C. de Boor (Ed.), *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic press, New York, 1974, pp. 89–123.
- [57] I. Harari, K. Grosh, T.J.R. Hughes, M. Malhotra, P.M. Pinsky, J.R. Stewart, L.L. Thompson, *Recent developments in finite element methods for structural acoustics*, Arch. Comput. Methods Engrg. 3 (1996) 132–311.
- [58] R. Huan, L.L. Thompson, *Accurate radiation boundary conditions for the time-dependent wave equation on unbounded domains*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 47 (2000) 1569–1603.
- [59] R.J. Mackinnon, G.F. Carey, *Superconvergent derivatives: a Taylor series analysis* , Int. J. Numer. Methods Engrg. 28 (1989) 489– 509.
- [60] S. Larsson and V. Thomée, *Partial Differential Equations with Numerical Methods* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York City, 2009.
- [61] T. Hagstrom, S.I. Hariharan, *A formulation of asymptotic and exact boundary conditions using local operators*, Appl. Numer. Math. 27 (1998) 403–416.
- [62] T. Belytschko, M. tabbara, *H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization* , Int. J. Numer. Methods Engrg. 36 (1993) 4245–4265.
- [63] T.J.R. Hughes, G. Hulbert, *Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates* , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 66 (1988) 339–363.

-
- [64] V. Cannillo, M. Mancuso, *Spurious resonances in numerical time integration methods for linear dynamics*, J. Sound Vibrat. 238 (3) (2000) 389–399.
- [65] W. Bangerth, R. Rannacher, *Finite element approximation of the acoustic wave equation: error control and mesh adaptation*, East–West J. Numer. Math. 7 (4) (1999) 263–282.
- [66] W. Bangerth, M. Grote, C. Hohenegger, *Finite element method for time dependent scattering: nonreflecting boundary condition adaptivity, and energy decay*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 2453–2482.
- [67] X.D. Li, N.-E. Wiberg, *Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 39 (1996) 2131–2152.
- [68] X.D. Li, N.-E. Wiberg, *Implementation and adaptivity of a space–time finite element method for structural dynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 156 (1998) 211–229.
- [69] Y.T. Feng, D. Peric, *A time-adaptive space–time finite method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces: computational issues*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (5–7) (2000) 499–518.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Experiment	آزمایش
Index	اندیس
Integration	انتگرال‌گیری
Superconvergent Patch Recovery	بازیابی قطعه فوق همگرا
Estimate	برآورد
Truncation	برش
Block Gaussian elimination	بلوک حذفی گوس
Block Gaussian-Seidel	بلوک گاوس سایدل
Block Diagonal	بلوک قطری
unbounded	بی‌کران
Stablility	پایداری
basis	پایه
Radiation	پرتو
Backward	پسرو
Scattering	پراکندگی
Continous	پیوسته
Function	تابع
Auxiliary function	تابع کمکی
Adaptive	تطبیق
Approximate	تقریب
Distribution	توزیع
Current	جاری
Solution	جواب
Multi Index	چند اندیشه
Polynomial	چند جمله‌ای

Error	خطا
Domain	دامنه
Spatial Domain	دامنه فضایی
Degrees-of-Freedom	درجه آزادی
Interpolation	درون‌یابی
Enhanced Interpolation	درون‌یابی افزوده
Nodal Interpolation	درون‌یابی گره‌ای
Sequence	دنباله
Couchy Sequence	دنباله کوشی
Finite Element Method	روش عنصر متناهی
Two-dimensional	دو بعدی
Divergence	دیورژانس
Refinement	ریز کردن
Fourier Mode	سبک فوریه
Fourier Series	سری فوریه
Indicator	شاخص
Condition	شرط
Lipschitz Condition	شرط لیپ-شیتز
Dirichlet Boundary Condition	شرط مرزی دریکله
Neumann Boundary Condition	شرط مرزی نویمان
Boundary Condition	شرط مرزی
Radius	شعاع
Scalar Product	ضرب اسکالر
Coefficient	ضریب
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Nonreflecting	غیرانعکاسی
Bilinear Form	فرم دوخطی
Vector Space	فضای برداری
Space-time	فضا-زمان
Normed Linear Space	فضای خطی نرم‌دار
Sobolev Space	فضای سوبولوف

Complite Linear Space	فضای ضرب داخلی کامل
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Previous	قبلی
Dterministic	قطعی
Pice Wise	قطعه‌ای
error bound	کران خطا
Time-step	گام زمانی
Discreteization	گسسته‌سازی
Discontinuous	گسسته
Gradient	گرادیان
Laplacian	لاپلاسی
Matrix	ماتریس
Sparse Matric	ماتریس اسپارس
Mass Matric	ماتریس جرم
Stiffness Matric	ماتریس سختی
Damping Matric	ماتریس میرایی
Symmetric	متقارن
Orthogonal	متعامد
High-order	مرتبه بالا
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Complex-Valued	مختلط مقدار
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Bundry Value Problem	مساله مقدار مرزی
Mesh	مش
Partial Diffrential Equation	معادلات مشتقات جزئی
Potential Equation	معادله پواسون
Wave equation	معادله موج
Elementry	مقدماتی
Spatial	مکان
Scaled Trace Inequality	نامساوی تریس
Couchy-Schwartz Inequality	نامساوی کوشی شوارتز
Triangle-Inequality	نامساوی مثلثی

Norm	نرم
Theory	نظریه
Projection	نگاشت
Semi Norm	نیم نرم
Semi-discrete	نیمه گسسته
Convergent	همگرا
Orthonormal	یکامتعامد
Time-dependent	وابسته به زمان

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A Posteriori Error	خطای پسین
Adaptive	تطبیق
Approximate	تقریب
Auxiliary function	تابع کمکی
Backward	پسرو
Basis	پایه
Bilinear Form	فرم دوخطی
Block Diagonal	بلوک قطری
Block Gaussian elimination	بلوک حذفی گوس
Block Gaussian-Seidel	بلوک گاوس سایدل
Condition	شرط
Boundary Condition	شرط مرزی
Bundry Value Problem	مساله مقدار مرزی
Coefficient	ضریب
Continous	پیوسته
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Complex-Valued	مختلط مقدار
Convergent	همگرا
Current	جاری
Complite Linear Space	فضای ضرب داخلی کامل
Couchy-Schwartz Inequality	نامساوی کوشی شوارتز
Damping Matric	ماتریس میرایی
Degrees-of-Freedom	درجه آزادی
Dirichlet Boundary Condition	شرط مرزی دریکله
Discontinuous	گسسته

Discreteization	گسسته‌سازی
Distribution	توزیع
Divergence	دیورژانس
Domain	دامنه
Deterministic	قطعی
Elementary	مقدماتی
Enhanced Interpolation	درون‌یابی افزوده
Estimate	برآورد
Error	خطا
Error bound	کران خطا
Experiment	آزمایش
Finite Element Method	روش عنصر متناهی
Fourier Mode	سبک فوریه
Fourier Series	سری فوریه
Function	تابع
Gradient	گرادیان
Hilbert Space	فضای هیلبرت
High-order	مرتبه بالا
Index	اندیس
Indicator	شاخص
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Integration	انتگرال‌گیری
Interpolation	درون‌یابی
Laplacian	لاپلاسی
Lipschitz Condition	شرط لیپ-شیتز
Mass Matric	ماتریس جرم
Mesh	مش
Matrix	ماتریس
Multi Index	چند اندیس
Neumann Boundary Condition	شرط مرزی نویمان
Nodal Interpolation	درون‌یابی گره‌ای
Norm	نرم

Normed Linear Space	فضای خطی نرم‌دار
Nonreflecting	غیرانعکاسی
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	یکامتعامد
Partial Differential Equation	معادلات مشتقات جزئی
Pice Wise	قطعه‌ای
Poisson Equation	معادله پواسون
Polynomial	چند جمله‌ای
Previous	قبلی
Projection	نگاشت
Radiation	پرتو
Radius	شعاع
Refinement	ریزکردن
Scalar Product	ضرب اسکالر
Scaled Trace Inequality	نامساوی تریس
Scattering	پراکندگی
Semi Norm	نیم نرم
Semi-discrete	نیمه گسسته
Sequence	دنباله
Sobolev Space	فضای سوبولوف
Solution	جواب
Space-time	فضا-زمان
Spatial	مکان
Spatial Domain	دامنه فضایی
Sparse Matric	ماتریس اسپارس
Stablility	پایداری
Stiffness Matric	ماتریس سختی
Superconvergent Patch Recovery	بازیابی قطعه فوق همگرا
Symmetric	متقارن
Time-dependent	وابسته به زمان، زمانی

Time-step	گام زمانی
Theory	نظریه
Triangle-Inequality	نامساوی مثلثی
Truncation	برش
Two-dimensional	دو بعدی
unbounded	بی‌کران
Vector Space	فضای برداری
Wave equation	معادله موج

Aabstract

In this thesis we focus on adaptive procedures for the time-discontinuous Galerkin space–time finite element method (DGFEM) including high-order accurate nonreflecting boundary conditions (NRBC) for unbounded wave problems are developed. Sparse multi-level iterative scheme based on the Gauss–Seidel method are developed to solve the resulting fully-discrete system equations for the interior hyperbolic equations. Due to the local nature of wave propagation, the iterative strategy requires only a few iterations per time step. An h-adaptive space–time strategy is employed based on the Zienkiewicz–Zhu spatial error estimate, together with a temporal error estimate arising from the discontinuous jump between time steps of both the interior field solutions and auxiliary boundary functions.

keywords: Adaptive finite element method, Discontinuous Galerkin method, Wave equation, Nonreflecting boundary conditions, time-discontinuous Galerkin



Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Adaptive spacetime finite element methods for the wave equation on unbounded domains

Supervisor

Dr.A. Mesforush

Advisor

Dr.M. Govatmand

by

Sayedeh Alieh Rezaee Kuoshalshah

2014