دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

کاربرد آزادسازی لاگرانژ در مسائل مکان‌یابی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر مهرداد غزنوی

دانشجو

زینب سرکرده

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به:

امام زمان

تنها امید زندگی............

سپاس گزاری...

در ابتدا از یگانه بی‌همتا، به خاطر عنایات خاصه‌اش در تمامی مراحل زندگی‌ام متشکرم.
از پدر و مادر عزیزم، این دو گوهر گرانبها که دعای خیرشان، همیشه بدرقه راهم بوده است و همسر عزیزم که سختی‌های زیادی را متحمل شده و شرایط را برای ادامه تحصیل اینجانب فراهم نمود و تنها خواهرم کمال تشکر را دارم و از ایزد لایزال سلامت و توفیق روز افزون این عزیزان را مسالت می‌نمایم.
صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را از استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی به پاس زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند و صبورانه ایشان تقدیم می‌نمایم.

زینب سرکرده
بهمن ۱۳۹۲

تعهدنامه

اینجانب **زینب سرکرده** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **کاربرد آزادسازی لاگرانژ در مسائل مکان‌یابی** ، تحت راهنمایی **دکتر جعفر فتحعلی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ University of Shahrood “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زینب سرکرده
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زینب سرکرده رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **تحقیق در عملیات** تحت عنوان: **کاربرد آزادسازی لاگرانژ در مسایل مکان‌یابی**

که در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : قابل قبول امتیاز ۱۵/۴) ☐	دفاع مجدد ☐	مردود ☐

1ـ عالی (20 ـ 19) 2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)

3ـ خوب (17/99 ـ16) 4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنما	دکتر جعفر فتحعلی	استادیار	
2ـ استاد مشاور	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	
3ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
4ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
5 ـ استاد ممتحن	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در مساله‌ی مکان‌یابی هدف تعیین مکان بهینه‌ی سرویس دهنده‌ها روی شبکه است، که این کار با ارائه الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل صورت می‌گیرد. در میان الگوریتم‌های مطرح شده، الگوریتمی سودمند است که در زمان کمتر و با هزینه‌ی کمتری قابل اجرا باشد.
مساله‌ی p-میانه یکی از مهمترین مسائل در نظریه مکان‌یابی است و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف همانند مکان‌یابی مراکز توزیع کالا، مراکز اداری و ...دارد.
در نظریه مکان‌یابی در ابتدا از ایده‌های آزادسازی لاگرانژ استفاده می‌شده است، آزادسازی لاگرانژ در حقیقت روشی برای حل مسائل تحقیق در عملیات است. در این پایان نامه کاربردهایی از آن را در نظریه مکان‌یابی بررسی می‌کنیم.
در فصل اول، یک سری مفاهیم اولیه مکان‌یابی و تعاریف و قضایایی با موضوع آزادسازی بیان می‌شود.
در قصل دوم، ضمن معرفی و مدل‌بندی مساله مکان‌یابی انبار ساده، کران پایینی برای جواب بهینه این مساله ارائه می‌دهیم.
درفصل سوم، کران پایین مساله p میانه را با ارائه الگوریتمی ابتکاری بدست می‌آوریم.
در فصل آخر، روش‌های لاگرانژ و ابتکاری جایگزینی- لاگرانژ برای حل مساله p-میانه را مورد بررسی قرار داده و عملکرد خوب روش‌های ابتکاری لاگرانژ در کاهش زمان محاسبه را نتیجه‌گیری می‌کنیم.

کلمات کلیدی : آزادسازی لاگرانژ ، مکان‌یابی ، مساله p-میانه ،مساله مکان‌یابی انبار ساده و روش ابتکاری جایگزینی لاگرانژ.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ مکان‌یابی و مساله p- میانه

مکان‌یابی یکی از شاخه‌های ریاضیات کاربردی و مهندسی صنایع است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکان‌یابی مراکز (مکان‌یابی ساختمان‌ها و مراکز) را انتخاب مکان برای یک یا چند مرکز، با در نظرگرفتن سایر مراکز و محدودیت‌های موجود می‌دانند، به‌گونه ای که هدف ویژه‌ای بهینه شود. این هدف می‌تواند هزینه حمل و نقل، ارائه خدمات عادلانه به مشتریان، در دست گرفتن بزرگترین بازار و غیره باشد.
مساله‌ی مکان‌یابی از جمله مسائل مهمی است که امروزه کاربرد زیادی در علوم مختلف دارد و توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب کرده است.
در مساله‌ی مکان‌یابی، هدف تعیین مکان بهینه‌ی سرویس دهنده‌ها روی شبکه است که این کار با ارائه الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل صورت می‌گیرد. در میان الگوریتم‌های مطرح شده، الگوریتمی سودمند است که در زمان کمتر و با هزینه‌ی کمتری قابل اجرا باشد.
مساله‌ی مکان‌یابی را به قرن هفدهم میلادی نسبت می‌دهند، زمانی‌که فرما[۱] مساله‌ی زیر را مطرح کرد:
فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه‌ی چهارم را به صورتی بیابید که مجموع فاصله‌ها تا سه نقطه‌ی داده شده می‌نیمم شود. این مساله در سال ۱۶۴۰ در ایتالیا توسط توریچلی[۲] حل شد، لذا این نقطه را نقطه توریچلی می‌نامند.
اولین تعریف مساله مکان‌یابی به صورت کاربردی در سال ۱۹۰۹ توسط وبر[۳] [۴۸] ارائه شد، او مساله پیداکردن مکان یک سرویس دهنده را که مجموع فاصله‌ی آن تا چند مشتری کمترین مقدار ممکن باشد، معرفی نموده و مورد بررسی قرار داد.
مطالعات جدی بر روی مساله مکان‌یابی در سال ۱۹۶۴ توسط حکیمی[۴] [۲۱] وارد مرحله جدیدی شد. حکیمی تابع هدف را به دو صورت کمترین مجموع و مینیماکس مطرح کرد. حکیمی مساله‌ی مکان‌یابی بر روی شبکه را به منظور یافتن مکان بهینه‌ی گشت‌های پلیس در بزرگراه‌ها و مناطق شهری مورد استفاده قرار داد.
برخی از دانشمندان، مدل‌های مختلف مسائل مکان‌یابی را طبقه‌بندی کردند. اولین طبقه‌بندی توسط هندلر[۵] و میرچندانی[۶] [۲۴] ارائه شد. همچنین طبقه‌بندی‌های دیگری در این زمینه توسط

---
[۱] Ferma
[۲] Toricheli
[۳] Weber
[۴] Hakimi
[۵] Handler
[۶] Mirchandani

کرارپ[۷] و پروزن[۸] [۳۱] و هانسن و همکاران[۹] [۲۶]، میرچندانی و فرانسیس[۱۰] [۳۹] ، فرانسیس [۱۳]، اون[۱۱] و دسکین[۱۲] [۴۰]، اسکاپارا[۱۳] و اسکاتلا[۱۴] [۴۳] درزنر[۱۵] و هاماخر[۱۶] [۹] انجام شده است. هال[۱۷] [۲۳] لیستی از مقاله‌های مختلف در مورد مسائل مکان‌یابی را در یک سایت اینترنتی [؟] جمع آوری کرده است.

مسائل مکان‌یابی روی شبکه‌ها، نحوه انتخاب مجموعه‌ای از نقاط برای تعیین مکان‌های مشخصی در شبکه را مشخص می‌کنند. در حقیقت، با استفاده از مجموعه‌ی مشخصی از قیدها و با تخمین زدن معیارهای مختلف، نیاز مشتری‌ها را به صورت بهینه برآورده می‌کنیم. در مسائل مکان‌یابی مدل‌بندی شده روی شبکه یا گراف، راس‌های شبکه بیان‌کننده نقاطی هستند که استفاده کنندگان آن خواهان سرویسی هستند، که به این راس‌ها نقاط تقاضا می‌گوییم. یال‌ها نشان‌دهنده‌ی وجود ارتباط بین رئوس است.

۲.۱ مساله p - میانه

مساله p - میانه یکی از مهم‌ترین مسائل در نظریه مکان‌یابی است و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف همانند" مکان‌یابی مراکز شبکه‌های ارتباطی کامپیوتری، مراکز توزیع کالا، مراکز اداری و نظامی، ایستگاه‌های اتوبوس و مراکز پستی "دارد.

تعریف ۱.۲.۱. میانه، نقطه‌ای از شبکه است که مجموع فواصل وزن دار سایر نقاط تقاضا تا این نقطه کمترین مقدار باشد. در مساله p میانه، میانه‌ها می‌توانند هر نقطه‌ای از شبکه باشند که در این حالت مساله را مساله p - میانه‌ی مطلق گویند. البته اگر هدف پیدا کردن نقاط میانه، تنها روی راس‌ها باشد، مساله را مساله p - میانه‌ی راسی گویند .

در مساله‌ی p - میانه روی شبکه‌ها هدف پیدا کردن مجموعه‌ی $X = \{x_۱, x_۲, ..., x_p\}$ شامل مکان p سرویس دهنده روی شبکه‌ی $N = (V, E)$ است، به طوری‌که اگر هر راس v_i دارای وزن w_i باشد، مجموع فاصله‌های وزنی این مجموعه تا تمام رئوس روی شبکه N می‌نیمم شود. به

[۷] Krarup
[۸] Pruzan
[۹] Hansen
[۱۰] Fransic
[۱۱] Owen
[۱۲] Daskin
[۱۳] Scaparra
[۱۴] Scutella
[۱۵] Drezner
[۱۶] Hamacher
[۱۷] Hal

عبارتی در این حالت هدف کمینه کردن مجموع فاصله‌ها خواهد بود، یعنی:

$$min \quad f(x) = \sum_{v_i \in N} w_i d(X, v_i)$$

فاصله هر راس $v \in V$ از مجموعه X به صورت فاصله‌ی v تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده در X تعریف می‌شود، یعنی:

$$d(X, v) = \min_{x_i \in X} \quad d(x_i, v)$$

و $d(v_i, v_j)$ فاصله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس v_i و v_j روی شبکه می‌باشد.
یک مدل برنامه ریزی خطی صفر و یک برای مساله p-میانه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\min \quad Z = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} w_i d_{ij} x_{ij}$$

$$subject \ \ to$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱, && \forall i = ۱, ..., n \\
&x_{ij} \leq y_j, && \forall i = ۱, ..., n, j = ۱, ..., n \\
&\sum_{j=۱}^{n} y_j = p && \\
&x_{ij} = \{۰, ۱\}, && \forall i = ۱, ..., n, j = ۱, ..., n \\
&y_j = \{۰, ۱\}, && \forall j = ۱, ..., n
\end{aligned}$$

در مدل (۱.۱) متغیرهای فاصله y_j و x_{ij} به صورت زیر می‌باشند؛

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } i \text{ به سرویس‌دهنده } j \text{ اختصاص داده شود ،} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } j \text{ به عنوان مکان سرویس‌دهنده انتخاب شود ،} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

در مدل (۱.۱) اولین محدودیت بیان کننده این نکته است که هر راس می‌بایست فقط به یک سرویس دهنده اختصاص یابد، به عبارتی هر مشتری می‌بایست فقط از یک سرویس دهنده سرویس بگیرد.
دومین محدودیت بیان می‌کند که راس‌ها را تنها می‌توان به رئوسی اختصاص داد که به عنوان مکان یک سرویس‌دهنده در نظر گرفته شده باشد، یعنی به ازای آن راس $y_j = ۱$ باشد. (یعنی مشتری i قسمتی از سرویس گیری خود را از سرویس دهنده j دریافت کند.) به عبارت بهتر به ازای $i = ۱, ...n, j = ۱, ..., n$ داریم: $x_{ij} \leq y_j$.
نکته مهم این است که محدودیت $x_{ij} \leq y_j \ \ \forall i = ۱, .., n, j = ۱, ..., n$ را می‌توان با محدودیت $\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} \leq n y_j$ جایگزین کرد.

محدودیت بعدی نشان‌دهنده‌ی این است که تعداد p سرویس دهنده می‌بایست در شبکه تاسیس شده باشند.
روش‌های مختلفی که برای حل مساله‌ی p- میانه به کار برده می‌شود، را می‌توان به چهاردسته تقسیم کرد: روش شمارشی، روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی، روش‌هایی با استفاده از گراف‌ها و روش‌های ابتکاری.
اساس کار روش‌های مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی برای مساله p- میانه استفاده از مدل برنامه ریزی خطی صفر و یک است. اولین مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک برای این مساله توسط ریول[۱۸] و اسوین[۱۹] [۴۲] ارائه شد.
روش‌های ابتکاری که برای مساله‌ی p- میانه به کار گرفته می‌شود، روش‌های مبتنی بر آزمون و خطا هستند. این روش‌ها تضمین نمی‌کنند که جواب بدست آمده یک جواب بهینه باشد. این روش‌ها زمانی به‌کار می‌روند که یک جواب نزدیک به جواب بهینه (ولی نه لزوما بهینه) در اختیار داشته باشیم.
روش‌های ابتکاری به دو گروه روش‌های ابتکاری کلاسیک و روش‌های فرا ابتکاری تقسیم می‌شوند. گروه اول به سه گروه برنامه ریزی ریاضی، جستجوی محلی و روش‌های ابتکاری سازنده تقسیم می‌شوند.
اولین روش‌های فرا ابتکاری برای مساله‌ی p- میانه را کوهن[۲۰] و هامبورگر[۲۱] [۳۲] در الگوریتمی مبتنی بر روش‌های آزمند و بهبود بخشنده ارائه دادند. از دیگر روش‌های اولیه می‌توان جستجوی همسایگی مارانزانا[۲۲] [۳۴] در سال ۱۹۶۴ و روش جانشینی راس‌ها توسط تیتز و بارت[۲۳] [۴۷] در سال ۱۹۶۸ اشاره کرد.
از جمله الگوریتم‌های دقیق اعمال شده بر روی مساله‌ی p- میانه می‌توان به روش گالوا[۲۴] [۱۶] با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ در سال ۱۹۹۳ و برنامه ریزی خطی ریول و اسوین اشاره کرد. همچنین در سال ۱۹۷۸ ایرلنکوتر[۲۵] [۱۲] با استفاده از تکنیک کاهشی دوگان الگوریتمی را برای مساله p- میانه ارائه داد.

در این بخش، یکی از قضایای پرکاربرد در مبحث مکان‌یابی را مطرح می‌کنیم که به خاصیت بهینگی راسی معروف است.

در مساله p- میانه، یک جواب بهینه وجود دارد که شامل p راس شبکه است.

به عبارتی از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت، مجموعه جواب‌های بهینه از یک مجموعه نامتناهی به یک مجموعه متناهی کاهش پیدا می‌کنند.

---

۱۸ Revelle
۱۹ Swain
۲۰ Kuhen
۲۱ Hamburger
۲۲ Maranzana
۲۳ Teitz & Bart
۲۴ Galvao
۲۵ Erlenkotter

۳.۱ مقدمه کوتاهی در مورد آزاد سازی لاگرانژ

آزادسازی لاگرانژ [۲۶] در حقیقت روشی برای حل مسائل تحقیق در عملیات است. با وجود این‌که این‌گونه بیان شده که مفهوم آزادسازي لاگرانژ اولین بار در سال ۱۹۷۴ توسط جئوفرن[۲۷][۱۹] استفاده شده بوده است، لکن کار چند دانشمند دیگر چند سال جلوتر از کار جئوفرن انجام گرفته بود. به عنوان مثال در سال‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۷۱ هلد[۲۸] و کرارپ[۲۹][۲۷، ۲۸] این مفهوم را برای مساله فروشنده دوره گرد در موفقیت الگوریتم خود استفاده کردند.
آزادسازی لاگرانژ معمولا در بهینه سازی ترکیبیاتی برای تولید کردن کران‌های پایین برای یک مساله می‌نیمم سازی استفاده می‌شود. در نظریه مکان‌یابی در ابتدا از ایده‌های آزادسازی استفاده می‌شود، که باید به بیلد و کرارپ [۳، ۴] در سال‌های ۱۹۶۶ و ۱۹۶۷ نسبت داده شود، به عبارتی فرآیند تولید کران پایین متناظر برای مساله مکان‌یابی انبار ساده[۳۰]توسط نویسندگان[۱۱] در سال ۱۹۶۷ تعمیم داده شد. این فرآیند[۱۱]در سال‌های ۱۹۶۷-۱۹۶۹ در یک سری از گزارشات تحقیقی به زبان دانمارکی منتشر شد.
در سال ۱۹۷۲ دیهر[۳۱][۸] و مارستن[۳۲] [۳۵] اولین نویسندگانی بودند که از ایده‌های آزادسازی لاگرانژ برای حل مساله p-میانه استفاده کردند. دیهر در سال ۱۹۷۲ یک الگوریتم ابتکاری که کران‌های بالا و پایین را برای مساله p-میانه پیدا می‌کند، پیشنهاد کرد. این الگوریتم با بیان ساختار دوگان آزادسازی برنامه ریزی خطی مسائل p-میانه کران‌هایی خیلی نزدیک به کران‌های پایین برای این مسائل را بیان می‌کرد.

۴.۱ آزادسازی مساله برنامه ریزی خطی

تعریف ۱.۴.۱. مساله $RP : Z^R = max\{\ f(x) \quad x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\ \}$[۳۳]را مساله آزادسازی شده مساله $IP\ : Z = max\{\ c^T x \mid x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\ \}$ [۳۴] می‌نامند، هرگاه:

۱. $X \subseteq T$.

۲. $\forall x \in X \quad f(x) \geq c^T x$.

قضیه ۲.۴.۱. [۴۹] *اگر مساله RP آزادسازی شده مساله IP باشد، آنگاه $Z^R \geq Z$.*

[۲۶] Lagrangean Relaxation
[۲۷] Geoffrion
[۲۸] Held
[۲۹] Krarup
[۳۰] Simple Plant Location Problem(SPLP)
[۳۱] Diehr
[۳۲] Marsten
[۳۳] Relaxation Problem
[۳۴] Integer Problem

برهان. فرض کنید x^* جواب بهینه مساله IP باشد، پس:

$$x^* \in X \subseteq T \qquad , Z = c^T(x^*) \leq f(x^*)$$

و چون $x^* \in T$ لذا $f(x^*)$ یک کران پایین برای Z^R است، یعنی اگر $\overline{x}$ جواب بهینه Z^R باشد، داریم:

$$Z = f(x^*) \leq f(\overline{x}) = Z^R$$

□

تعریف ۳.۴.۱. برای مساله برنامه ریزی خطی $Z = max\{\ cx \mid x \in P\ \}$ با فرمول‌بندی $P = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\ \}$ شکل آزادسازی شده برنامه ریزی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z^{LP} = max\{\ cx \mid x \in X \subseteq Z^n\ \}$$

قضیه ۴.۴.۱. [۴۹] *فرض کنید $P_۱$ و $P_۲$ دو فرمول‌بندی برای مساله عدد صحیح Z_{LP} باشند به صورتی‌که $Z_{LP} = max\{\ cx \mid x \in X \subseteq Z^n\ \}$ ، به قسمی‌که $P_۱$ از $P_۲$ بهتر باشد. اگر داشته باشیم، $Z_۱^{LP} = max\{\ cx \mid x \in X\ \}$ و $Z_۲^{LP} = max\{\ cx \mid x \in X\ \}$ آنگاه: $Z_۱^{LP} \leq Z_۲^{LP}$.*

برهان. اولا چون $P_۱$ از $P_۲$ بهتر است، پس:

$$P_۱ \subseteq P_۲ \tag{۱.۱}$$

حال اگر فرض کنیم x^* یک جواب بهینه مساله $Z_۱^{LP}$ باشد، پس $x^* \in P_۱$، لذا با توجه به رابطه (۱.۱) داریم، $x^* \in P_۲$ از طرفی طبق تعریف $Z_۲^{LP}$ ، cx^* یک کران پایین برای $Z_۲^{LP}$ است، پس $Z_۱^{LP} \leq Z_۲^{LP}$. □

قضیه ۵.۴.۱. [۴۹] *اگر مساله آزاد سازی شدهLP[۳۵] نشدنی باشد، آنگاه مساله اصلیIP نیز نشدنی است.*

برهان. چون مساله آزادسازی شده نشدنی است، پس $= T$ و چون $X \subseteq T$ لذا $X = \emptyset$. □

قضیه ۶.۴.۱. [۴۹] *فرض کنیدx^* جواب بهینه مساله RP باشد، اگر $x^* \in X$ و $f(x^*) = c(x^*)$ آنگاه x^* یک جواب بهینه مساله IP است.*

برهان. چون $x^* \in X$ پس

$$Z \geq c(x^*) = f(x^*) = Z^R$$

از طرفی بنا به قضیه ۲.۴.۱ . $Z \leq Z^R$. بنابراین حکم نتیجه می‌شود $Z = Z^R$ یعنی x^* جواب بهینه مساله IP است. □

[۳۵] Linear Programming

تعریف ۷.۴.۱. مساله برنامه ریزی خطی اصلی [۳۶] به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Z(P) = \max \quad & C^T x \\ subject\ \ to \quad & \\ & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

مساله آزادسازی شده لاگرانژ RP[۳۷]مساله فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Z(LR_\lambda) = \max \quad & C^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ subject\ \ to \quad & \\ & Bx \leq d \\ & x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n \qquad \lambda \geq ۰ \end{aligned}$$

تعریف ۸.۴.۱. معمولا محدودیت‌هایی که تعداد متغیرها در آنها کمتر است و ماتریس دستگاه حاصل از آنها به صورت تنک است، به عنوان محدودیت نرم در نظر گرفته می‌شوند و سایر محدودیت‌ها، محدودیت‌های سخت در نظر گرفته می‌شوند.

در روش آزادسازی لاگرانژ در حقیقت به جای حذف کردن محدودیت سخت، آن محدودیت را به صورت مذکور به تابع هدف اضافه می‌کنیم. (در این مساله محدودیت $Ax \leq b$ محدودیت سخت می‌باشد.)
به این‌ترتیب آزادسازی لاگرانژ یک کران بالا را برای مقدار جواب بهینه مساله اصلی $Z(P)$ مشخص می‌کند.

قضیه ۹.۴.۱. [۴۹] *برای هر مجموعه از ضربگرهای $\lambda \geq ۰$، خواهیم داشت:*

$$Z(P) \leq Z(LR_\lambda)$$

برهان. فرض کنید x^* یک جواب بهینه (و یا شدنی) مساله ILP باشد، لذا داریم:

$$x^* \in X, Ax^* \leq b \qquad (b - Ax^* \geq ۰)$$

از طرفی چون $\lambda \geq ۰$ پس:

$$Z(P) = c^T x^* \leq c^T x^* + \lambda(b - Ax^*) \leq Z(LR_\lambda)$$

□

[۳۶] Integer Linear Programing (ILP)

[۳۷] Relaxation Problem

۵.۱ دوگان لاگرانژ

مساله D به صورت زیر را دوگان لاگرانژ مساله (۲.۱) گوییم:

$$D \qquad Z(D) = \min_{\lambda \geq ۰} Z(LR_\lambda)$$

۲.۱

قضیه ۱.۵.۱. [۴۵] *اگر مساله D دوگان لاگرانژ مساله اولیه $Z(P)$ باشد، آنگاه:*

$$Z(D) \geq Z(P)$$

برهان. طبق قضیه ۹.۴.۱ به ازای هر $\lambda \geq ۰$ داریم:$Z(P) \leq Z(LR_\lambda)$، بنابراین:

$$Z(P) \leq \min_\lambda Z(LR_\lambda) = Z(D)$$

□

مثال ۲.۵.۱. مساله کوله پشتی زیر را در نظر بگیرید،

$$Z(P) = \max \qquad ۱۰x_۱ + ۱۲x_۲ + ۳x_۳$$

$$subject\ \ to$$

$$۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ \leq ۴$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳$$

آزادسازی لاگرانژ این مساله به صورت زیر می‌باشد.

$$Z(LR_\lambda) = \max \qquad ۱۰x_۱ + ۱۲x_۲ + ۳x_۳ + \lambda(۴ - ۲x_۱ - ۳x_۲ - x_۳)$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳$$

آزادسازی لاگرانژ بدست آمده برای هر $\lambda \geq ۰$ براحتی قابل حل است.

$$\begin{aligned} Z(LR_\lambda) = \max \qquad & ۱۰x_۱ + ۱۲x_۲ + ۳x_۳ + \lambda(۴ - ۲x_۱ - ۳x_۲ - x_۳) \\ &= (۱۰ - ۲\lambda)x_۱ + (۱۲ - ۳\lambda)x_۲ + (۳ - \lambda)x_۳ + ۴\lambda \\ &= P_۱x_۱ + P_۲x_۲ + P_۳x_۳ + ۴\lambda \\ & x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳ \end{aligned}$$

$$P_۱ = ۱۰ - ۲\lambda \qquad , P_۲ = ۱۲ - ۳\lambda \qquad , P_۳ = ۳ - \lambda$$

اگر $\forall i = ۱, ..., ۴$ $P_i > ۰$ آنگاه قرار می‌دهیم: $x_i = ۱$ و اگر $P_i < ۰$ آنگاه قرار می‌دهیم: $x_i = ۰$. بنابراین با فرض

$$\overline{x_۱} = \begin{cases} ۱ & ۱۰ - ۲\lambda < ۰ (\lambda < ۵) \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$\overline{x_۲} = \begin{cases} ۱ & ۱۲ - ۳\lambda < ۰ (\lambda < ۴) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

$$\overline{x_۳} = \begin{cases} ۱ & ۳ - \lambda < ۰ (\lambda < ۳) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

داریم :

$$\lambda > ۵ \longrightarrow x = (۰, ۰, ۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۴\lambda$$

$$۴ \leq \lambda < ۵ \longrightarrow x = (۱, ۰, ۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۱۰ + ۲\lambda$$

$$۳ \leq \lambda < ۴ \longrightarrow x = (۱, ۱, ۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۲۲ - \lambda$$

$$۰ \leq \lambda < ۳ \longrightarrow x = (۱, ۱, ۱) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۲۵ - ۲\lambda$$

در صورتی‌که $\lambda = ۴$ را قرار دهیم، جواب بهینه آزادسازی لاگرانژ $Z(LR_۴)$، نقطه $(۱, ۰, ۰)$ با مقدار $Z(LR_۴) = ۱۸$ خواهد بود.(یعنی می‌نیمم مقدار تابع هدف به ازای $\lambda = ۴$ اتفاق می‌افتد). مقدار $Z(LR_\lambda)$ به مقدار ضریبگر $\lambda \geq ۰$ وابسته است. بهترین کران بالا (در این مساله ماکسیمم سازی) که از طریق آزادسازی لاگرانژ بدست می‌آید، $\min\limits_{\lambda} Z(LR_\lambda)$ است.

حال مساله آزادسازی به صورت می‌نیمم را در نظر می‌گیریم و آزادسازی لاگرانژ آن را می‌نویسیم.

مثال ۱.۵.۳.

$$Z(P) = \min \qquad ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ + ۵x_۴$$

$$subject\ \ to$$

$$۷x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۳ + ۳x_۴ \geq ۱۷$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳$$

$$Z(LR_\lambda) = \min \qquad ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ + ۵x_۴ - \lambda(۷x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۳ + ۳x_۴ - ۱۷)$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳$$

آزاد سازی لاگرانژ بدست آمده برای هر $\lambda \geq ۰$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} Z(LR_\lambda) &= \min \ (۳ - ۷\lambda)x_۱ + (۴ - ۵\lambda)x_۲ + (۵ - ۴\lambda)x_۳ + (۵ - ۳\lambda)x_۴ + ۱۷\lambda \\ &= P_۱x_۱ + P_۲x_۲ + P_۳x_۳ + P_۴x_۴ + ۱۷\lambda \\ & x_j \in \{۰, ۱\} \qquad \forall j = ۱, ۲, ۳ \end{aligned}$$

اگر $\forall i = ۱, ..., ۴ \quad P_i > ۰$ آنگاه $x_i = ۱$ و اگر $P_i < ۰$ آنگاه $x_i = ۰$ و بنابراین با فرض:

$$\overline{x_۱} = \begin{cases} ۱ & ۳ - ۷\lambda < ۰ (\lambda < \frac{۳}{۷}) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

$$\overline{x_۲} = \begin{cases} ۱ & ۴ - ۵\lambda < ۰ (\lambda < \frac{۴}{۵}) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

$$\overline{x_۳} = \begin{cases} ۱ & ۵ - ۴\lambda < ۰ (\lambda < \frac{۵}{۴}) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

$$\overline{x_۴} = \begin{cases} ۱ & ۵ - ۳\lambda < ۰ (\lambda < \frac{۵}{۳}) \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

داریم:

$$\lambda < \frac{۳}{۷} \longrightarrow x = (۰,۰,۰,۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۱۷\lambda$$

$$\frac{۳}{۷} \leq \lambda < \frac{۴}{۵} \longrightarrow x = (۱,۰,۰,۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۳ + ۱۰\lambda$$

$$\frac{۴}{۵} \leq \lambda < \frac{۵}{۴} \longrightarrow x = (۱,۱,۰,۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۷ + ۵\lambda$$

$$\frac{۵}{۴} \leq \lambda < \frac{۵}{۳} \longrightarrow x = (۱,۱,۱,۰) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۱۲ + \lambda$$

$$\frac{۵}{۳} \leq \lambda \longrightarrow x = (۱,۱,۱,۱) \qquad , Z(LR_\lambda) = ۱۷ - ۲\lambda$$

در صورتی‌که $\lambda = \frac{۵}{۳}$ را قرار دهیم، جواب بهینه آزادسازی لاگرانژ برابر است با $Z(LR_{\frac{۵}{۳}}) = ۱۲ + \frac{۵}{۳}$. (یعنی ماکسیمم مقدار تابع هدف به ازای $\lambda = \frac{۵}{۳}$ رخ می‌دهد.)
مقدار $Z(LR_\lambda)$ به مقدار ضربگر $\lambda \geq ۰$ وابسته است. بهترین کران پایین (چون مساله می‌نیمم سازی) از طریق آزادسازی لاگرانژ بدست می‌آید $\max_\lambda Z(LR_\lambda)$.

فصل ۲

محاسبه کران‌های پایین برای مسائل مکان‌یابی انبار ساده

۱.۲ مقدمه

در دنیای صنعتی امروز، واحدهای تولیدی سعی دارند با مکان‌یابی مناسب انبارهای مورد نیاز خود و همچنین مسیر یابی وسایل نقلیه به منظور حمل کالاهای تولیدی به این انبارها، هزینه‌های خود را کاهش دهند. لازم به ذکر است که مکان انبارها در تعیین مسیر وسایل نقلیه موثر است.
در این فصل، دو دانشمند به نام‌های بیلد[۱] و کرارپ[۲] [۱۱] ابتدا یک مدل ساده برنامه‌ریزی ریاضی جهت بهینه‌سازی تعیین مکان انبارها ارائه و سپس روندی را برای پیدا کردن کران پایین این مساله بیان کردند. تابع هدف در این مدل شامل می‌نیمم مجموع هزینه‌ها ست.

۲.۲ توضیحي از مساله و چند نتیجه بنیادي

مساله مکان‌یابی انبار ساده نوعی مساله مکان‌یابی بدون ظرفیت است که با ارائه تابع هدفی در جهت می‌نیمم کردن هزینه‌ها، و محدودیت‌های بدون ظرفیت، مکان انبارها را به بهترین صورت و با کمترین هزینه تعیین می‌کند. به عبارت بهتر این مساله ویژگی تک منبعی دارد و با در نظر نگرفتن هیچ ظرفیتی برای محدودیت‌ها، هر مشتری را به نزدیک‌ترین سرویس دهنده‌اش اختصاص می‌دهد.
بیلد و کرارپ [۱۱]، در زمینه پیدا کردن کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده اقداماتی را انجام دادند. لذا به منظور بیان استدلال‌های این دو دانشمند ابتدا فرمول‌بندي مساله مکان‌یابي انبار ساده را بیان کرده و در ادامه به بیان توضیحاتی در مورد آن و چند نتیجه بنیادی از آن می‌پردازیم.
به منظور ارائه مدل، نمادگذاري ذیل را بیان مي‌کنیم .

مجموعه‌ها ؛

I : مجموعه اي از مکان‌هاي در دسترس براي مکانیابي سرویس‌دهنده‌ها.

$i \in I = \{۱, ..., m\}$

J : مجموعه مشتري‌ها. $j \in J = \{۱, ..., n\}$

پارامترها ؛

m : تعداد کل مکان سرویس‌دهنده‌ها.

n : تعداد مشتري‌ها.

t_{ij} : هزینه هر واحد از سرویس دهنده i به مشتري j

f_i : هزینه ثابت مرتبط به سرویس‌دهنده i.

b_j : تقاضاي مشتري j (تعداد واحدها).

هزینه بهره برداري ؛

[۱] Bilde

[۲] Krarup

$c_{ij} = t_{ij}b_j$: کل هزینه انتقال زمانيکه مشتری j کلا از وسیله iسرویس بگیرد.

$\delta = [\delta_{ij}]$: يك ماتريس $[m \times n]$ - بعدي از اعداد حقيقي.

λ_j : تعداد سطح ستون j .

متغيرها؛

x_{ij} : کسري از تقاضاي مشتري j كه از وسيله i سرويس بگيرد.

اگر يك مشتري فقط از يك سرويس دهنده سرويس بگيرد، داريم:

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مشتری } j \text{ از سرویس دهنده } i \text{ سرویس بگیرد} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر سرویس دهنده } i \text{ نزدیک باشد} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

r_i : متغير كمكي (عددي) مرتبط به سرويس دهنده i ام.

حال با در اختيار داشتن اين مجموعه‌ها، پارامترها و متغيرها مي‌توانيم مساله مكان‌يابي انبار ساده را بنويسيم:

$$Z_{SPLP} = \min \qquad \sum_{i=۱}^{m} f_i y_i + \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$subject \ \ to$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = ۱ \qquad \forall j$$

$$y_i - x_{ij} \geq ۰ \qquad \forall i, j$$

$$x_{ij} \in \{۰, ۱\} \qquad \forall i, j$$

$$y_i \in \{۰, ۱\} \qquad \forall i$$

محدودیت اول بیان کننده آن است که هر مشتری تنها می‌تواند ااز یک سرویس دهنده، تقاضای خود را دریافت کند.

محدوديت بعدي توليداتي كه تنها از سرويس دهنده‌هاي نزديك فرستاده شده‌اند را تضمين مي‌كنند (یعنی در مکان j می‌بایست سرویس دهنده تاسیس شده باشد.) محدوديت‌هاي باقيمانده ماهيت متغيرهاي تصميم را تعريف مي‌كنند.

بدون از دست دادن کلیت، بیلد و کرارپ [۱۱] فرض کردند تمام هزینه‌هاي ثابت f_i، و پارامترهاي c_{ij} نامنفي هستند، لذا محدوديت فاصله $\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = ۱$ را با محدوديت $\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq ۱$ جايگزين كردند. چرا كه با داشتن خاصيت نامنفي بودن پارامتر هاي f_i و c_{ij} بهينه بودن جواب نتيجه خواهد شد.

يك راه مستقيم در توليد كران پايين روي $Z_{SPLP}^{\cdot} = min\{Z_{SPLP}\}$ آزادكردن محدوديت‌هاي صحيح $x_{ij}, y_i \geq ۰$ و حل نتايج مساله برنامه ريزي خطي است.

لذا، نویسندگان یك روش ابتکاري کارآمد را براي ماکزیمم کردن کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده تعمیم دادند. آنها در جهت انجام روش ابتکاری کارآمد خود ابتدا ماتریس شدنی‌ای را به نام Δ تعریف کرده و با کمک گرفتن از آن و بیان قضیه‌ای روندی را در جهت یافتن کران پایین بیان کردند.

تعریف ۱.۲.۲. ماتریس Δ شدني گفته مي‌شود، اگر در شرایط ذیل صدق کند:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} \leq f_i \qquad \forall i, \qquad \Delta_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j \tag{1.2}$$

قضیه ۲.۲.۲. [۱۱] *با داشتن مجموعه اي از اعداد نامنفي Δ_{ij} که در تعریف ۱.۲.۲ صدق مي‌کنند، داریم:*

$$\sum_{j=1}^{n} \min_i \{c_{ij} + \Delta_{ij}\} \leq Z^{*}_{SPLP}$$

برهان. با توجه به فرض، ماتریس Δ شدنی‌ای را در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت آن را به تابع هدف مساله (۱.۲) اضافه و کم می‌کنیم؛

$$SPLP : Z_{SPLP} = \min \qquad \sum_{i=1}^{m}(f_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} x_{ij}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + \Delta_{ij}) x_{ij}$$

$$subject\ \ to$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1 && \forall j \\ &y_i - x_{ij} \geq 0 && \forall i,j \\ &x_{ij} \in \{0,1\} && \forall i,j \\ &y_i \in \{0,1\} && \forall i \end{aligned}$$

دو مساله (۱.۲) و (۲.۲) با یکدیگر معادل هستند، جواب بهینه آن‌ها را (x^{*}, y^{*}) در نظر می‌گیریم .

از آنجایی‌که $\forall i,j$ $\quad y_i \geq x_{ij}$ و $f_i \geq \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}$ و چون طرفین نامعادله فوق مثبت هستند داریم:

$$f_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \tag{3a}$$

و برای هر Δ شدنی و هر (x,y) نشان داده شده، یک جواب شدنی در (۳a) است.

بنابراین مساله برنامه ریزی خطی زیر را برای هر مجموعه ثابت از پارامترهای شدنی Δ_{ij}، بیان

می‌کنیم:

$$Z_{LBSPLP} = \min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x_{ij}$$

$$subject\ \ to$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1 \qquad\qquad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad \forall i,j$$

مساله (۲.۲) در حقیقت صورت کران پایین مساله برنامه ریزی خطی مساله مکان‌یابی انبار ساده است.

$$\min\{Z_{LBSPLP}\} = Z^{*}_{LBSPLP}$$

برای $(x,y)=(x^{0},y^{0})$، جواب شدنی Z^{0}_{SPLP} را از رابطه ($3a$) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} Z^{0}_{SPLP} &= \sum_{i=1}^{m}(f_i y^{0}_i - \sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}x^{0}_{ij}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x^{0}_{ij} \\ &\geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x^{0}_{ij} \\ &\geq Z^{*}_{LBSPLP} \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

بنابراین :

$$Z^{*}_{LBSPLP} = \sum_{j=1}^{n}\min_{i}\{c_{ij}+\Delta_{ij}\} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x_{ij} \tag{۳.۲}$$

به عبارت بهتر Z^{*}_{LBSPLP} مجموع ستوني مي‌نيمم ماتريس $(C+\Delta)$ است. □

نتیجه ۳.۲.۲. *کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده به مسیر تعیین شدن Δ وابسته است.*

نتیجه ۴.۲.۲. *با توجه به مقدار $Z^{*}_{LBSPLP}=\sum_{j=1}^{n}\min\{c_{ij}+\Delta_{ij}\}$ ، برای پیداکردن کوچکترین کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده، می‌توان جواب بهینه مساله زیر را بدست آورد.*

$$W_{LBSPLP} = \max \quad \sum_{j=1}^{n}\min_{i}\{c_{ij}+\Delta_{ij}\}$$

$$subject\ \ to$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij} \leq f_i \qquad\qquad \forall i$$

$$\Delta_{ij} \geq 0 \qquad\qquad \forall i,j$$

در حقیقت مساله (۴.۲) را می‌توان دوباره فرمول‌بندی کرده و همانند یک برنامه خطی آن‌را حل کرد ولی نویسندگان تصمیم گرفتند، به جاي جستجوي يك رويه كرانداري يا تلاش براي

پیدا کردن جواب بهینه مساله کرانداری، کران‌هاي خیلی نزدیکی به کران پایین را با استفاده از محاسباتي محدود، بدست بیاورند. به این منظور یك رویه ابتکاري را تعمیم دادند که در زیر توضیح داده می‌شود.

این فرآیند ابتکاری با داشتن ماتریسc و Δ که تماما شامل صفرهاست آغاز می‌شود.

r_i مجموعه ای از متغیرهای کمکی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_i = f_i - \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} \qquad \forall i \tag{۴.۲}$$

جایی‌که متغیرهای کمکی r_i با هزینه f_i برابرند، $(n+1)$ امین عدد $(r_i, \Delta_{i_1}, ..., \Delta_{i_n})$ در کل محاسبات همانند یک افراز متتناظر f_i نمایش داده شود.

ایده بیلد و کرارپ، پیداکردن افرازهایی از هزینه‌های ثابت به منظور ماکزیمم کردن مجموع می‌نیمم ستون ماتریس $(C+\Delta)$ است. تمام پارامترهای c_{ij}، مقادیر اصلی شان را ثابت نگه‌می‌دارد و عناصر Δ به صورت مکرر و پیاپی افزایش می‌یابند.

روند عملیات در ستون‌های ماتریس $(C+\Delta)$ همزمان انجام می‌شود. در هر گام یک ستون انتخاب شده و سعی می‌شود با افزایش پارامترهای Δ_{ij} مربوطه، مجموعه‌ای از عناصرش را تغییر دهد و اصلاح کند. این کار با حداقل مصرف متغیرهای r_iیک تاثیر ماکسیمم سازی در می‌نیمم سازی ستون متناظر دارد.

نهایتا، نویسندگان برای بهتر انتخاب کردن ستون بعدی، به هر ستون j از ماتریس $(c+\Delta)$ تعداد سطح λ_j را اختصاص دادند که در حقیقت این تعداد با تعداد کوچکترین عنصر آن ستون برابر است. به عبارتی، اگر در هر مرحله از محاسبه کاندید بعدی برای انتخاب را j^* در نظر بگیریم، قانون انتخاب به صورت زیر نوشته می‌شود.(ستوني با کوچکترین تعداد سطح)

$$j^* = \min\{\ j \quad ;\ \lambda_j = \min_{s \in J}(\lambda_s) \quad s \in j\ \} \tag{۵.۲}$$

براي مشاهده جزئیات بیشتر این رویه ابتکاري همراه با یك مثال عددي، خوانندگان را به مقاله بیلد و کرارپ [۴] ارجاع مي‌دهیم .

۳.۲ محاسبه کران‌پایین به کمک آزادسازی لاگرانژ

همان‌گونه که در قضایای بخش۴.۱ بیان شد، در مسائل می‌نیمم سازی، آزادسازی لاگرانژ متناظر آنها یک کران پایین برای مساله اصلی ارائه می‌دهد. از این‌رو بیلد و کرارپ [۱۱]روند یافتن کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده را با نوشتن آزادسازی لاگرانژ مساله ۱.۲ دنبال کردند. آنها با در نظر گرفتن Δ_{ij} به عنوان ضریب لاگرانژ متناظر با محدودیت‌هاي پیچیده و سخت

$y_i - x_{ij} \geq ۰ \quad \forall i,j$ مساله آزادسازی لاگرانژ مساله مکان‌یابی انبار ساده را بیان کردند.

$$\begin{aligned} Z_{LR۱-SPLP} &= \min \quad \sum_{i=۱}^{m} f_i y_i + \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \Delta_{ij}(x_{ij} - y_i) \\ &= \sum_{i=۱}^{m}(f_i - \sum_{j=۱}^{n}\Delta_{ij})y_i + \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x_{ij} \\ & subject \ \ to \\ & \qquad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq ۱, \qquad \forall i \\ & \qquad x_{ij} \in \{۰,۱\}, \qquad \forall i,j \\ & \qquad y_i \in \{۰,۱\}, \qquad \forall i \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم ضربگرهای Δ_{ij} در شرط شدنی بودن رابطه (۱.۲) صدق کنند، لذا ممکن است متغیرهای y_i از رابطه $LR۱-SPLP$ حذف شوند، زیرا که

$$\forall i \qquad \sum_{j}\Delta_{ij} \leq f_i \Rightarrow \ \forall i \qquad y_i = ۰$$

در صورت حذف شدن متغیرهای y_i از مساله (۶.۲) مساله$LR۱-SPLP$ با مساله (۲.۲) معادل است. یعنی مساله (۶.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} Z_{LR۱-SPLP} &= \min \quad \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}(c_{ij}+\Delta_{ij})x_{ij} \\ & subject \ \ to \\ & \qquad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq ۱ \qquad \forall i \\ & \qquad x_{ij} \geq ۰ \qquad \forall i,j \end{aligned}$$

لذا با توجه به رابطه ۳.۲ مي‌نيمم مقداري از $Z_{LR۱-SPLP}$ با رابطه زير تعيين مي‌شود، به عبارت بهتر کران پايين مساله مکان‌يابی انبار ساده برابر با مقدار زير است:

$$Z^{\cdot}_{LR۱_{S}PLP} = \sum_{j=۱}^{n}\min_{i}\{c_{ij}+\Delta_{ij}\}$$

در مفاهيم آزادسازي لاگرانژ کارهاي بيلد و کرارپ همانند يك پارامترسازي آزادسازي ديده مي‌شود، به عبارتی در روند کرانداري از پارامترهاي Δ_{ij} در بدست آوردن کران‌هاي پايين استفاده می‌شود.

۴.۲ سایر کارهای مرتبط

الگوریتم موفق مکان‌یابی-تخصیصی بدون ظرفیت دوگان در سال ۱۹۷۸ توسط ایرلنکتور[۳][۱۲] برای مسایل مکانیابی انبار ساده تعمیم داده شد، که علی‌رغم تشابه با کار بیلد و کرارپ تعیمی از آن محسوب نمی‌شود. همانطور که در مقدمه بیان شد، بیلد و کرارپ به صورت مستقل کار خود را شروع کردند.
در سال ۱۹۸۹ کروکل[۴][۳۰] ، مستقیما روی کار ایرلنکتور اقداماتی را انجام داد و توانست اجرای الگوریتم مکان‌یابی بدون ظرفیت دوگان را به طور ویژه‌ای بهتر و زمان‌های محاسباتی را به طور قابل ملاحظه‌ای کم کند، از این حیث استفاده از روند دوگان‌سازی صعودی در حل مسایل مکان‌یابی انبار ساده و مسایل مرتبط نیز ادامه یافت. به عنوان مثال فرض کنید مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب[۵] که مساله مهمی در طراحی شبکه‌های حمل و نقل است را در نظر بگیرید. در این مسائل هدف، پیدا کردن هزینه جواب‌های مساله از مکان هاب‌ها و اختصاص ترمینال هایشان با وجود هزینه‌های تاسیس و حمل و نقل است.
در سال ۱۹۹۶ کلینسویسز[۶][۲۹] یک روش دوگان سازی صعودی برای مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب ارایه داد. روش پیشنهادی او که براساس الگوریتم‌های دوگان سازی صعودی و شاخه و کران بود، از کارهای بیلد و کرارپ[۴] در سال‌های ۱۹۷۷ و ایرلنکتور[۱۲]در سال ۱۹۷۸ ناشی شده بود.
اولین فرمول‌بندی برنامه ریزی صحیح از مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب در سال ۱۹۹۴ توسط کمپبل[۷][۵] داده شده است. کلینویسز[۸][۲۹] ارتباط نزدیکی بین مساله مکان‌یابی انبار ساده و مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب را بیان کرد و روش جوابی را پیشنهاد کرد که همانند تعمیمی از روش ایرلنکتور برای مساله مکان‌یابی هاب، دیده می‌شد.
دانشمندان دیگری همچون سانگ[۹] و جین[۱۰][۴۵] در سال ۲۰۰۱ و میبر[۱۱] و وانگر[۱۲][۳۷] در سال ۲۰۰۲ نیز فرمول‌بندی‌های ریاضی متعددی را برای مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب ارایه دادند و از روش‌هایی براساس دوگان‌سازی برای جواب‌هایشان استفاده کردند.
نهایتا در سال ۲۰۰۶ کانووس و همکارانش[۱۳][۶] یک فرمول‌بندی دوگان از مساله مکان‌یابی تخصیصی ضربگر بدون ظرفیت هاب نشان داد.

[۳] Erlenkotter
[۴] Krokel
[۵] Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem(UMAHLP)
[۶] Klincewicez
[۷] Campbell
[۸] Klincewicez
[۹] Sung
[۱۰] Jin
[۱۱] Meyer
[۱۲] Wanger
[۱۳] Canovas

آن‌ها همچنین یک فرآیند دوگان سازی صعودی پیچیده را با استفاده از حل مساله آزاد شده و تولید کران‌هایی نزدیک به هر راس از الگوریتم شاخه و کران‌شان تعمیم دادند. و به منظور کامل کردن بررسی خود جهت استفاده از روش‌هایی براساس دوگان در حل مسائل مکان‌یابی اهمیت این روش‌ها را نشان دادند. رابطه نزدیک بین دوگان‌سازی صعودی و روش‌های آزادسازی لاگرانژ وجود دارد، که توسط بیلد و کرارپ [۴] بیان شد.

فصل ۳

محاسبه کران پایین مساله p- میانه

۱.۳ توضيحي از مساله

در سال ۱۹۷۲دیهر [۸] يك الگوريتم ابتكاري براي پيدا كردن كران‌هاي بالا و پايين مساله p- ميانه، ارائه داد. ابتدا او يك شبكه $G = (V, E)$ را در نظر گرفت با n راس v به هم پيوسته با يال‌هاي E، براي هر راس j مقداری حقيقی با وزن نامنفی h_j در نظر گرفت، و به هر يال E يك فاصله يا طول نامنفي مربوط كرد.
فرض كنيد $V^p = \{ \ i_1, ..., i_p \ \}$ مجموعه اي از هر p راس در V را شامل شود، يعنی $V^P \subset V$.
تعريف می‌کنيم:

$$d(v^p, j) = \min\{ \ d(i_1, j), ..., d(i_p, j) \ \}$$

كه در آن طول $d(i_k, j)$ كوتاه‌ترين مسير از راس i_k به راس j است. D را به عنوان يك ماتريس $[n \times n]$- بعدي از فاصله‌هاي وزن‌دار شده به صورت $D = [D_{ij}] = [h_j d(i, j)]$ تعريف مي‌کنيم.
براي هر زير مجموعه V^p مقدار $S(V^p)$ به صورت زير تعريف می‌شود.

$$S(V^p) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in V^p} \{D_{ij}\} \tag{۱.۳}$$

براي درک بهتر تعاريف فوق، شبکه زير را در نظر بگيريد:
شبکه‌ای با ۵ راس و ۶ يال دارد. وزن هر راس و کوتاه‌ترين مسير بين راس‌ها داده شده است. لذا ماتريس $[n \times n]$ - بعدي D و مقدار $S(V^p)$ را می‌توان نوشت.

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = 5 \qquad h_3 = 3 \qquad h_4 = 2 \qquad h_5 = 6$$

$$d(1, 2) = 10 \quad , d(1, 3) = 7 \quad , d(1, 5) = 6 \quad , d(2, 1) = 10 \quad , d(2, 3) = 5 \quad , d(2, 4) = 8$$

$$d(3, 2) = 5 \quad , d(3, 1) = 7 \quad , d(3, 4) = 4 \quad , d(4, 3) = 4 \quad , d(4, 2) = 8 \quad , d(5, 1) = 6$$

$$D = [D_{ij}] = [h_j d(i, j)] = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 21 & 0 & 36 \\ 10 & 0 & 15 & 16 & 0 \\ 7 & 25 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(V^p) = \sum_{j=1}^{5} \min_{i \in V^p} \{D_{ij}\} = \min \sum_{j=1}^{5} \{D_{ij}\} = 23$$

با توجه به تعريف(۱.۳)، براي يك زير مجموعه داده شده V^p مقدار $S(V^p)$ با جمع كردن مي‌نيمم مقادير D_{ij} در هر ستون (راسی از شبکه) تعيين می‌شود. بنابراين p-ميانه با زير مجموعه V^p_* به صورت زير تعريف می‌شود.

$$S(V^p_*) = \min_{V^p \subset V} \{S(V^p)\}$$

با توجه به این بیان دیهر [۸] ، p-میانه همانند يك مجموعه اي از p-راس‌هاي شبكه تعريف شده است. این مطلب بنا به قضیه بهینگی راسی که در فصل (۱.۱)بیان شد درست است. (زيرا حكيمي[۱] در قضیه بهینگی راسی ثابت کرد حداقل يك زير مجموعه $V^p \subset V$ وجود دارد كه (بدرستي) p راس‌ها را دربرمي‌گيرد، اينچنين كه $S(V^P) \leq S(Y^P)$ براي هر مجموعه Y^P از p نقطه روي يال يا راس‌هاى شبکه $G = (V, E)$ و p-میانه بهينه يك شبكه مي‌تواند همانند يك زير مجموعه از p راس شبکه جستجو شود.)

دیهر[۸] در ادامه روند کاری خود، جواب الگوریتم‌اش را در دو مرحله بدست آورد:

۱. بیان الگوریتمی ابتكاري براي پيدا كردن تقريبي يك كران بالا برای جواب مساله.(این الگوریتم، الگوریتم ابتکاری جایگزینی ـ حریصانه [۲] است، که جابجایی راسی و تکرار مسیری مشابه با الگوریتم تیتز و بارت [۳] دارد، که در اینجا بحث نخواهد شد.)

۲. يك جستجوي ابتكاري روي یک مساله دوگان در تعيين يك كران پايين. دیهر [۸] برای تعیین کران پایین، ابتدا در بخش مساله دوگان با بیان یک قضیه، کران پایین $S(V^P)$ را بدست آورده و در ادامه در بخش دوگان ابتکاری روندی ابتکاری را برای پیداکردن کران پایین مساله p-میانه و مکان‌یابی انبار ساده بیان می‌کند.

۲.۳ مساله دوگان

برای بررسی مساله دوگان، ابتدا قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱.۲.۳. [۸] *براي هر زير مجموعه V^P از بردارهای p یک کران پایین $\underline{S}(V^P)$ برای مقداری از $S(V^P)$ به صورت زیر داده شده است:*

$$\underline{S}(V^P) = \sum_{j=1}^{n}[B_j - \sum_{i \in V^p} \max(0, B_j - D_{ij})] \leq S(V^P) \qquad j = 1, 2, ..., n \qquad (۲.۳)$$

(B_j *متغرهاي حقيقي مقدار هستند.*)

برهان. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید:

$$D_{i_1 j} \leq \quad ... \quad \leq D_{i_p j} \qquad \text{برای بعضی } j \text{ ها}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم رابطه زیر$\forall i = 1, ...n, j = 1, ..., n$ برقرار است و سپس با جمع کردن طرفین نامعادله فوق حکم را نتیجه می‌گیریم.

$$B_j - \sum_{i \in V^p} \max(0, B_j - D_{ij}) \leq \min_{i \in V^p} D_{ij} = D_{i_1 j} \qquad (۳.۳)$$

برای متغیرهای B_j دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

[۱] Hakimi

[۲] Greedy

[۳] Titz & Bart

۱. $B_j \leq D_{i_1 j}$. در این‌صورت خواهیم داشت :

$$B_j - \sum_{i \in V^p} \max(\cdot, B_j - D_{ij}) = B_j - \cdot = B_j \leq \min_{i \in V^p} D_{ij} = D_{i_1 j}$$

لذا در این حالت، رابطه (۳.۳) برقرار است.

۲. $B_j > D_{i_1 j}$. در این صورت خواهیم داشت:

$$B_j - (B_j - D_{i_1 j}) - \sum_{k=2}^{p} \max(\cdot, B_j - D_{i_k j}) = D_{i_1 j} - \sum_{k=2}^{p} \max(\cdot, B_j - D_{i_1 k})$$

قرار می‌دهیم

$$K = \sum_{k=2}^{p} \max(\cdot, B_j - D_{i_1 k}) = \max(\cdot, B_j - D_{i_2 j}) + \ldots + \max(\cdot, B_j - D_{i_p j})$$

بنابراین:

$$D_{ij} - K \leq D_{i_1 j}$$

با توجه به اینکه K نامنفی است، لذا رابطه (۳.۳) برقرار است.

از آنجایی‌که کران‌ها برای هرز j برقرار هستند:

$$B_1 - \sum_{i \in v^p} \max(\cdot, B_j - D_{i1}) \leq \min D_{i_1 j} \qquad j = 1$$

$$B_2 - \sum_{i \in v^p} \max(\cdot, B_j - D_{i2}) \leq \min D_{i_1 j} \qquad j = 2$$

$$B_3 - \sum_{i \in v^p} \max(\cdot, B_j - D_{i3}) \leq \min D_{i_1 j} \qquad j = 3$$

$$\vdots$$

$$B_n - \sum_{i \in v^p} \max(\cdot, B_j - D_{in}) \leq \min D_{i_1 j} \qquad j = n$$

لذا رابطه (۴.۳) برای مجموع روی j برقرار است.

$$\underline{S}(V^P) = \sum_{j=1}^{n} [B_j - \sum_{i \in V^p} \max(\cdot, B_j - D_{ij})] \leq S(V^P) \qquad j = 1, 2, ..., n \qquad (۴.۳)$$

□

نتیجه ۲.۲.۳. *برای پیدا کردن کران پایین یک جواب بهینه $S(V_p^\cdot)$، لازم است $\underline{S}(V^p)$ روی V^p شامل V می‌نیمم شود. یعنی:*

$$\min_{V^p \subset V} \quad \underline{S}(V^p) \leq S(V_p^\cdot) \qquad (۵.۳)$$

نتیجه ۳.۲.۳. *با در نظر گرفتن یک سود G_i برای هر $i \in V$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} \max(\cdot, B_j - D_{ij}) \qquad , G_{i_1} \geq G_{i_2} \geq ... \geq G_{i_n}$$

$\underline{S}(V^p)$ *را می‌توان به صورت زیر نشان داد:*

$$\underline{S}(V^p) = \sum_{j=۱}^{n} B_j - \sum_{k=۱}^{p} G_{i_k} \qquad ; V^p = (i_۱, ..., i_p) \tag{۶.۳}$$

اکنون با بیان این قضیه و نتایج آن می‌توان نتیجه گرفت، برای پیدا کردن کران پایین، می‌بایست انتخاب مناسبی در مورد متغیرهای B_j داشته باشیم، لذا در ادامه در بخش دوگان ابتکاری در این‌باره بحث خواهیم کرد.

۳.۳ دوگان ابتکاری

در این قسمت به کمک روش ابتکاری جایگزینی حریصانه مقادیر جواب بدست آمده را در تعیین مقادیر آغازین متغیرهای B_j استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که در مرحله حریصانه برای رسیدن به جواب، راس‌ها به صورت دنباله‌وار انتخاب می‌شوند، و به صورت تقریبی مقادیر جواب $S(V^p), S(V^{p-۱})$ را برای مسایل p و $p-۱$-میانه پیدا می‌کنیم. لذا دیهر[۸] ابتدا فرض کرد:

۱. مقادیر $S(V^P), S(V^{P-۱})$ در مسائل p و $p-۱$-میانه بهینه هستند و با ماکسیمم کران‌های پایین برابرند.

۲. مقادیر متغیرهای دوگان برابر با ماکسیمم کران‌های پایین مسایل p و $p-۱$-میانه هستند.

و لذا بنابر فرمول (۶.۳) نوشت:

$$S(V^{p-۱}) - S(V^p) = (\sum_{j=۱}^{n} B_j - \sum_{k=۱}^{p-۱} G_{i_k}) - (\sum_{j=۱}^{n} B_j - \sum_{k=۱}^{p} G_{i_k}) = G_{i_p}$$

همچنین، فرض کرد بزرگترین سودهای فاصله p با یکدیگر برابر است.

$$G_{i_۱} = G_{i_۲} = ... = G_{i_p}$$

در این‌صورت:

$$S(V^p) = \sum_{j=۱}^{n} B_j - pG_{i_p}$$

بنابراین با توجه به روابط بالا داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} B_j = S(V^p) + p(S(V^{p-۱}) - S(V^p)) \tag{۷.۳}$$

حال می‌توان نتیجه گرفت، مقادیر اولیه متغیرهای B_j به گونه ای تعیین می‌شوند که در شرط (۷.۳) صدق کنند.

اکنون با توجه به تعریف $S(V^p)$ ، از رابطه (۱.۳) داریم:

$$S(V^p) = \sum_{j=۱}^{n} \min_{i \in V^p}\{D_{ij}\}$$

زمانی‌که مقادیر ستونی ماتریس D_{ij} با یکدیگر مقایسه می‌شوند، تعیین متغیرهای B_j به مقادیر D_{ij} (که بزرگ یا کوچک هستند) در ستون‌های متناظر بستگی دارد. لذا تعیین یک کران پایین خوب، یک جستجوی موضعی خوب روی متغیرهای B_j را شامل می‌شود.
به این ترتیب که از $B_۱$ شروع می‌کنیم، افزایش یا کاهش $B_۱$ به بزرگی و کوچکی D_{ij} ها بستگی دارد. به عنوان مثال متناسب با D_{ij} ، $B_۱$ را افزایش (یا کاهش) می‌دهیم، اگر با این افزایش (یا کاهش)، تغییری در بهینه بودن کران پایین بوجود آمد، سراغ $B_۲, B_۳, ..., B_n$ می‌رویم. به این صورت الگوریتم تا زمانی‌که امکان بهتر شدن B_j وجود دارد ادامه پیدا می‌کند.
همچنین دیهر [۱۱]متوجه شد، با بدست آمدن یک بهینگی موضعی، بهبودهای بعدی نیز ممکن است، اگر یک B_j که به طور تصادفی انتخاب شده است، افزایش (یا کاهش) D_{ij} بالایی یا پایینی بعدی در ستونش را نتیجه دهد، الگوریتم به جستجوی موضعی به صورت چرخشی روی کل ستون می‌پردازد.
الگوریتم در دو صورت خاتمه می‌یابد:

۱. زمانی‌که دنباله‌ای از n انتخاب تصادفی متغیرهای تصادفی B_j را انتخاب کرده‌ایم، ولی مقدار کران پایین بهتر نشده است.

۲. زمانی‌که مقدار کران پایین بدست آمده با مقدار بدست آمده از روش ابتکاری اولیه در هر مرحله از جستجو معادل است.

در نهایت دیهر، با استفاده از این روش، روشی را برای یافتن کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده پیشنهاد کرد. او حدس زد کران پایین مساله مکان‌یابی انبار ساده به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{j=۱}^{n} B_j - \sum_{i=۱}^{m} \max(۰, G_i - F_i) \tag{۸.۳}$$

این عبارت هر زمان سود G_i از هزینه‌های ثابت F_i آن بزرگتر بود کران پایین را محاسبه می‌کند. (f_i هزینه تاسیس سرویس‌دهنده در مساله مکان‌یابی انبار ساده است).
اگر چه، دیهربرای اثبات پیشنهاد خود اقدامی را انجام نداد، ولی ما می‌توانیم قابل اجرا بودن این پیشنهاد در مورد آزاد سازی لاگرانژ مساله مکان‌یابی انبار ساده را با در نظر گرفتن محدودیت $\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq ۱$ به عنوان محدودیت سخت برآورد کنیم.

فرمول مساله مکان‌یابی انبار ساده را در نظر بگیرید.

$$Z_{SPLP} = \min \quad \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
$$subject \ \ to$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \tag{9.3}$$
$$y_i - x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i,j$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i,j$$
$$y_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i$$

اولا می‌دانیم محدودیت‌های $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ با $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1$ معادل هستند و می‌توان با یکدیگر جایگزین کرد. اکنون با در نظر گرفتن متغیرهای $B_j \geq 0$ به عنوان ضریبگرهای لاگرانژ متناظر با محدودیت $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1$، این محدودیت را به روش معمول لاگرانژ دوگان سازی می‌کنیم.

$$Z_{LR2-SPLP_B} = \min \{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} B_j(1 - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}) \}$$
$$\equiv \{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - B_j)x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} B_j \}$$
$$subject \ \ to \tag{10.3}$$
$$y_i - x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j$$
$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i$$

این مساله لاگرانژ برای مقادیر ثابتی از متغیرهای B_j قابل تحلیل کردن است، لذا با ثابت در نظر گرفتن B_j، مساله لاگرانژ بیان شده را تحلیل می‌کنیم.
اولا با توجه به شکل تابع هدف و محدودیت‌های متناظر و مقدار $(c_{ij} - B_j)$ ، x_{ij} دو مقدار متفاوت را به خود اختصاص می‌دهد.
اگر $(c_{ij} - B_j)$ منفی باشد، در این‌صورت چون $y_i - x_{ij} \geq 0$ ($x_{ij} \leq y_i$ لذا، حداکثر مقداری که x_{ij} می‌گیرد، y_i است. (زیرا کل عبارت می‌بایست مثبت باشد و بیشترین مقدار مثبت مقدار y_i است.) لذا x_{ij} در این حالت مقدار y_i را می‌گیرد.
اگر$(c_{ij} - B_j)$ مثبت باشد، در این‌صورت x_{ij} مقدار صفر را می‌گیرد یعنی:

$$x_{ij} = \begin{cases} y_i & c_{ij} - B_j \leq 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ثانیا با در نظر گرفتن مقادیر ثابتی از متغیرهای B_j ، $\sum_{j=1}^{n} B_j$ در تابع هدف از بین می‌رود (به دلیل این‌که B_j را ثابت در نظر گرفته‌ایم و مجموع روی آن بی معنی است) .

اکنون با در نظر گرفتن یک بردار ثابت $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ تابع زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\chi(B) = \sum_{j=1}^{n} \min(0, c_{ij} - B_j) + f_i$$

دراین‌صورت مقدار بهینه متغیرهای y_i را با حل مساله کاهش یافته زیر می‌توان بدست آورد:

$$\begin{aligned} Z_{LR2-SPLP_B} = \min \quad & \sum_{i=1}^{m} \chi_i(B) y_i \\ subject\ \ to & \\ & y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

با در نظر گرفتن y_i به صورت زیر حل خواهد شد.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \chi_i(B) \leq 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

بهترین روش بدست آوردن بردار B، استفاده از دوگان لاگرانژ تابع فوق است که در اینجا فقط صورت دوگان لاگرانژ را بیان می‌کنیم (روش بهینه سازی زیر گرادیان در حل آن به کار می‌رود).

$$\begin{aligned} Z_{LD} = \max_{B \geq 0} \quad & Z_{LR2-SPLP_B} \\ subject\ \ to & \\ & y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

اکنون به فرمول (۸.۳) که دیهر آن‌را به عنوان کران پایین برای مساله مکان‌یابی انبار ساده پیشنهاد کرد بر می‌گردیم.

می‌دانیم:

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} (0, B_j - D_{ij})$$

با جایگزین کردن D_{ij} با c_{ij} داریم:

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} (0, B_j - c_{ij})$$

لذا با جایگذاری در(۸.۳) داریم.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} \max(0, G_i - f_i) &= \sum_{j=1}^{n} B_j + \sum_{i=1}^{m} \min(0, f_i - G_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} B_j + \sum_{i=1}^{m} \min(0, \{f_i - \sum_{j=1}^{n} \max(0, B_j - c_{ij})\}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} B_j + \sum_{i=1}^{m} \min\{0, \chi_i(B)\} \end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

حال با در نظر گرفتن بردار $B = \{B_۱, ..., B_n\}$، (۱۳.۳) با (۱۱.۳) معادل است (زیرا $y_i = ۱$ اگر $\chi_i \leq ۰$ و در غیر این‌صورت $y_i = ۰$.)
از طرفی اگر در (۱۳.۳) بردار B را ثابت در نظر بگیریم، مجموع خود به خود ازبین می‌رود و عبارت زیر را داریم:

$$\sum_{i=۱}^{m} \min(۰, \chi_i(B))$$

اگر $\chi_i(B) \leq ۰$ لذا کران پایین $\sum_{i=۱}^{m} \chi_i(B)$ خواهد بود و اگر $\chi_i(B) \geq ۰$ کران پایین صفر خواهد بود. لذا به صورت مشابه می‌توان بیان کرد که با حل دوگان لاگرانژ (۱۲.۳) می‌توان بردار B ای که کران پایین را ماکسیمم می‌کند بدست آورد.
مجموع نشان داده شده نه تنها حدس دیهر را ثابت کرد، بلکه نشان می‌دهد که او علاقمند بود، آزاد سازی لاگرانژ مساله مکانیابی انبار ساده را مطرح کند. اگرچه کران پیشنهادی با کرانی که بیلد و کرارپ [۱۱] برای مساله مکان‌یابی انبار ساده بدست آوردند متفاوت است (چون در این مورد $\forall i, j \quad y_i, x_{ij} \geq ۰$).
یک نتیجه گیری از کار دیهر در مورد مساله p-میانه این نکته است که دوگان ابتکاری مساله p-میانه، با آزادسازی لاگرانژ آن مساله مرتبط است.

۴.۳ سایر کارهای مرتبط

برخلاف مساله مکان‌یابی انبار ساده، برای مساله p-میانه چندین طرح آزادسازی لاگرانژ موفقیت آمیز تعمیم داده شد (که در مقدمه بیان شده است). همچنین فرآیندهایی بر اساس دوگان برای این مساله توسط افرادی مثل ماورید[۴][۳۳] و گالوا[۱۳] در سال ۱۹۸۰ بیان شد.
گالوا الگوریتم کران‌دار دوگانی را برای حل مسائل p-میانه مشابه اقدامات دیهر تعمیم داد .الگوریتم گالوا شامل یک الگوریتم دوگان صعودی است که دوگان آزادسازی برنامه ریزی خطی مساله p-میانه را حل می‌کند. این فرآیند در حقیقت کران‌های پایین کوچک برای مساله p-میانه پیدا می‌کند.
گالوا از روابط(۷.۳) برای بدست آوردن مقادیر آغازین متغیرهای B_j که نقش مهمی در این فرآیند دارند استفاده کرد. فرمول زیر از مساله p-میانه را درنظر بگیرید. (متغیرهای داخل پرانتز،

[۴] Mavrides

متغیرهای دوگان مربوط به هر مجموعه از محدودیت‌ها هستند).

$$
\begin{aligned}
Z_{P-MP} = \min \quad & \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
subject\ \ to \quad & \\
& \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \geq ۱, && \forall j && (B_j) \\
& y_i - x_{ij} \geq ۰, && \forall i,j && (\Delta_{ij}) \\
& \sum_{i=۱}^{m} y_i = p, && && (\Omega) \\
& x_{ij} \in \{۰,۱\}, && \forall i,j && \\
& y_i \in \{۰,۱\}, && \forall i &&
\end{aligned}
$$

اگر محدودیت‌های $\sum_{i=۱}^{m} y_i = p$ و $\forall j$ $\sum x_{ij} \geq ۱$ به صورت همزمان در تابع هدف دوگان سازی شوند. (با نشان دادن متغیرهای دوگان همچون ضربگرهای لاگرانژ). الگوریتم دوگان گالوا را می‌توان به آزادسازی لاگرانژ مساله p- میانه مربوط کرد.

فصل ۴

روش‌های ابتکاری جایگزینی لاگرانژ برای مسائل p- میانه

۱.۴ مقدمه

همانطور که در بخش(۲.۱) بیان شد، یکی از روش‌های حل مساله p- میانه، استفاده از روش‌های ابتکاری لاگرانژ است. اساس این روش‌های ابتکاری آزادسازی لاگرانژ و بهینه سازی زیر گرادیان است. روش جایگزینی لاگرانژ آزادسازی پیشنهادی دیگری است که رفتار جابه جا شونده زیر گرادیان را شبیه روش‌های به کار رفته در حل دوگان لاگرانژ به کار می‌برد. در این فصل روش ابتکاری جایگزینی لاگرانژ برای حل مساله p- میانه را مورد بررسی قرار می دهیم.
آزادسازی‌های جایگزینی و لاگرانژ، ترکیبی از آزادکردن محدودیت‌های تخصیصی در فرمول‌بندی مساله p- میانه هستند. آزاد سازی جایگزینی لاگرانژ با حداقل نوسان خیلی پایا است و در حداقل زمان محاسباتی، به همان نتایج خوب روش‌های ابتکاری لاگرانژ می‌رسد.
دو نوع از روش‌های ابتکاری آزمایش شده عبارتند از:

۱. روش ابتکاری جایگزینی.

۲. روش ابتکاری براساس مکان‌یابی تخصیصی.

جستجو برای یافتن راس‌های روی یک شبکه، یک مساله مکان‌یابی کلاسیک است. هدف مکان‌یابی p سرویس دهنده (میانه‌ها) در می‌نیمم کردن مجموع فاصله از هر نقطه تقاضا به نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده است.
حکیمی [1][۲۱، ۲۲] اولین فردی بود که مساله مکان‌یابی یک میانه‌ای و چندین میانه‌ای را فرمول‌بندی کرد، همچنین او یک فرآیند شمارشی برای حل مساله پیشنهاد کرد. گری[2] و جانسون[3][۱۸] این مساله را به عنوان یک مساله NP - سخت معرفی کردند.
چندین روش ابتکاری برای حل مسایل p- میانه تعمیم داده شدند که برخی از آنها در بدست آوردن جواب‌های اولیه خوب هستند. تیتز و بارت [4][۴۷] در سال ۱۹۶۸ روش‌های ابتکاری جایگزینی ساده‌ای را پیشنهاد کردند.
در سال ۱۹۹۳ بیزلی[5][۲] روش‌های ابتکاری کارایی را برای یک طبقه از مسایل مکان‌یابی توصیف کرد، این روش‌ها، روش‌های ابتکاری لاگرانژ نامیده می‌شوند که از آزاد سازی لاگرانژ و بهینه سازی زیر گرادیان در آن استفاده می‌شود. در هر تکرار زیر گرادیان، جواب‌های لاگرانژ جواب شدنی اولیه را می‌سازند که مجموعه میانه‌ها را ثابت نگه‌می‌دارد و راس غیر میانه ای را به نزدیک‌ترین راس میانه‌ای مکان‌یابی می کند.
لورنا و نارسیسو[6][۳۳]در سال ۱۹۹۶ آزادسازی‌ای را برای مسائل تعمیم یافته و تخصیصی با

[1] Hakimi

[2] Gray

[3] Johnson

[4] Titz & Bart

[5] Beasley

[6] Lorena & Narciso

استفاده از الگوریتم تعمیمی زیر گرادیان بیان کردند. آزادسازی جدید آزادسازی جایگزینی لاگرانژ نامیده می‌شود که با در نظر گرفتن سه نوع از محدودیت‌های آزادسازی شده، روش تجزیه لاگرانژ رابه کار می‌برد.
در این فصل در دوبخش، آزادسازی جایگزینی - لاگرانژ برای حل مسایل p- میانه و روش ابتکاری زیر گرادیان را بیان می‌کنیم. در بخش بعدی با بیان چندین مساله محاسباتی تایید می‌کنیم که روش ابتکاری لاگرانژ قادر به بدست آوردن نتایج خوبی برای تعدادی از مثال‌های p- میانه است.

۲.۴ آزادسازی جایگزینی لاگرانژ

در این بخش ابتدا مدل‌بندی مساله p- میانه را بیان می‌کنیم. این مدل‌بندی همانند مساله برنامه ریزی عدد صحیح صفر و یک است، با این تفاوت که وزن w_i ها یک در نظر گرفته شده است.

$$V(P) = \min \qquad \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}x_{ij} \tag{۱.۴}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \qquad j \in N \tag{۲.۴}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ii} = P \tag{۳.۴}$$

$$x_{ij} \le x_{ii}, \qquad i,j \in N \tag{۴.۴}$$

$$x_{ij} \in \{۰, ۱\}, \qquad i,j \in N \tag{۵.۴}$$

که در آن:

$[d_{ij}]$ ماتریس متقارن فاصله است و $\forall i \qquad d_{ii} = ۰$.

$[x_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس تخصیص است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } i \text{ به راس } j \text{ وصل باشد .} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$x_{ii} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } i \text{ یک میانه باشد .} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

همچنین

p : تعداد سرویس دهنده‌ها (میانه‌ها) و

n : تعداد رئوس شبکه است.$N = \{۱, \ldots, n\}$

محدودیت (۲.۴) و (۴.۴) بیان می‌کنند هر راس j باید تنها به یک راس i اختصاص داشته باشد که باید یک میانه باشد.

محدودیت (۳.۴) تعداد دقیق میانه‌ها (p) را تعیین می‌کند.
محدودیت (۵.۴) شرایط صحیح بودن را بیان می‌کند.
در ادامه روش‌های ابتکاری آزدسازی برای حل مساله اولیه $V(P)$ را بیان می‌کنیم.
بنا به پیشنهاد گلور[۷] [۲۰] $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ را به عنوان ضریب لاگرانژ متناظر با محدودیت سخت $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N$ در نظر گرفته و آزادسازی جایگزینی مساله اولیه $V(P)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j \in N$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1 & j = 1 \qquad \lambda_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = 1 & j = 2 \qquad \lambda_2 \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1 & j = n \qquad \lambda_n \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_1 x_{21} + \ldots + \lambda_1 x_{n1} = \lambda_1 & j = 1 \\ \lambda_2 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \ldots + \lambda_2 x_{n2} = \lambda_2 & j = 2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_{1n} + \lambda_n x_{2n} + \ldots + \lambda_n x_{nn} = \lambda_n & j = n \end{cases}$$

لذا با جمع طرفین n معادله فوق داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

و در نتیجه آزادسازی جایگزینی مساله اولیه $V(P)$ به صورت زیر است:

$$V(SP^{\lambda}) = \min \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{۶.۴}$$

$$subject\ \ to$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \qquad j \in N \tag{۷.۴}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = P \tag{۸.۴}$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \qquad i, j \in N \tag{۹.۴}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j \in N \tag{۱۰.۴}$$

[۷] Glover

مقدار جواب بهینه $V(SP^{\lambda})$ کمتر یا مساوی با مقدار جواب بهینه $V(P)$ است و بهترین مقدار $V(SP^{\lambda})$ با حل دوگان جایگزینی $max \quad V(SP^{\lambda})$ بدست می‌آید.
از آنجایی‌که تابع جایگزینی $s : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $(\lambda, V(SP^{\lambda})$ چند ویژگی دارد که پیداکردن جواب دوگان را سخت می کند، از این رو پیشنهاد می‌کنیم بار دیگر مساله را به روش لاگرانژ با در نظر گرفتن ضریبگر لاگرانژ $t \geq ۰$ متناظر با محدودیت (۷.۴) آزاد کنیم و در ادامه با بدست آوردن ضربگر لاگرانژ t، از روش زیر گرادیان برای حل آن استفاده کنیم داریم:

$$\begin{aligned} V(L_tSP^{\lambda}) &= \min \quad \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}x_{ij} - t\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_{ij} + t\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j \\ &= \min \quad \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij} + t\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

به عبارت بهتر آزادسازی جایگزینی لاگرانژ مساله اولیه$V(P)$ به صورت زیر است:

$$V(L_tSP^{\lambda}) = \min \quad \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij} + t\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j \tag{۱۲.۴}$$

$$subject \;\; to$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ii} = P \tag{۱۳.۴}$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \qquad i, j \in N \tag{۱۴.۴}$$

$$x_{ij} \in \{۰, ۱\}, \qquad i, j \in N \tag{۱۵.۴}$$

با در نظر گرفتن $t \geq ۰$ و $\lambda \in \mathbb{R}_n^+$ داریم:

$$V(L_tSP^{\lambda}) \leq V(SP^{\lambda}) \leq V(P)$$

مساله (L_TSP^{λ}) با در نظر گرفتن محدودیت (۳.۴) به عنوان محدودیت ضمنی و تجزیه آن به اندیس i، قابل حل است که n تا زیر مساله زیر بدست می‌آید:

$$\min \quad \sum_{j=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(d_{ij} - t\lambda_j)$$

$$subject \;\; to$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \qquad i, j \in N$$

$$x_{ij} \in \{۰, ۱\}, \qquad i, j \in N$$

آزادسازی جایگزینی لاگرانژ $V(L_tSP^{\lambda})$ به صورت زیر است.

$$V(L_tSP^{\lambda}) = \min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij} + t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$
$$subject\ \ to$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = P$$
$$x_{ij} \le x_{ii} \qquad i,j \in N$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j \in N$$

با توجه به مجموع تجزیه شده به اندیس i می‌توانیم به کمک روش تجزیه، تابع هدف را ساده‌تر بنویسیم.

$$V(L_tSP^{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\lambda) + t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

که در آن:

$$v_i(\lambda) = \min \quad \sum_{j=1}^{n}(d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij}$$

اکنون β_i را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n}\{\ \min(0, d_{ij} - t\lambda_j)\ \} \tag{۱۶.۴}$$

I : مجموعه اندیس p تا از کوچکترین β_i ها است.

در حقیقت روش تجزیه تابع هدف را به صورت ساده‌تر زیر تجزیه می‌کند:

$$(L_tSP^{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{ij} + t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \tag{۱۷.۴}$$

از طرفی x_{ij}^{λ} و x_{ii}^{λ} برای مساله (L_tSP^{λ}) به صورت است.

$$x_{ii}^{\lambda} = \begin{cases} 1 & i \in I \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به ازای $i \neq j$

$$x_{ij}^{\lambda} = \begin{cases} 1 & i \in I, d_{ij} - t\lambda_j < 0 \\ 0 & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

یک ویژگی خوب آزادسازی (L_tSP^{λ}) این است که برای $t = 1$ با استفاده از ضربگر لاگرانژ λ آزاد سازی لاگرانژ مفیدی داریم.

برای ضربگر ثابت λ بهترین مقدار t با حل دوگان لاگرانژ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(D_t^{\lambda}) \qquad V(D_t^{\lambda}) = \max_{t \ge 0} \quad V(L_tSP^{\lambda})$$

تابع لاگرانژ $l : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ و $(t, V(L_tSP^\lambda))$ واگرا و به طور قطعه ای خطی [۴۱] است و بهترین مقدار آزادسازی جایگزینی لاگرانژ کران بهبود یافته‌ای برای آزادسازی لاگرانژ نتیجه می‌دهد.

از طرفی یک جواب دقیق (D_t^λ) مستلزم جستجویی دقیق روی مقادیر متفاوت t است[۳۸، ۲۵] لذا به منظور بدست آوردن کرانی مناسب، کافیست یک مقدار T را بیابیم که $t_0 \le T \le t_1$.

برای پیدا کردن تقریبی بهترین ضربگر جایگزینی لاگرانژ T از روند جستجوی ابتکاری[۸] که در ادامه توضیح داده می‌شود، استفاده می‌کنیم.

الگوریتم روش جستجوی ابتکاری به همراه یک مثال عددی در بخش بعدی بیان می‌شود. (این الگوریتم با نرم افزار متلب نیز نوشته شده و به پیوست ارائه می‌شود.)

الگوریتم روش جستجوی ابتکاری

فرضیات

s : طول گام اولیه.

k: عدد هر تکرار.

$k_{\max}$: ماکسیمم تعداد تکرار.

t_0 :مقداراولیه ضربگر جایگزینی لاگرانژ.

t : مقدار جاری ضربگر لاگرانژ.

T :مقدار ضربگر جایگزینی لاگرانژ.

z :ماکسیمم مقدار (L_TSP^λ).

قرار می‌دهیم:

$$s = 0/5 \quad , t = t_0 = 0 \quad , T = t \quad , k_{\max} = 10 \quad , \lambda_j = \min_{j \in N}\{d_{ij}\}$$

در هر تکرار $k = k + 1$ و $t = t + s$ و (L_TSP^λ) را حل کرده و مقدار x_λ را حساب می‌کنیم.

۱. اگر $V(L_TSP^\lambda) > z$ آنگاه قرار می‌دهیم $T = t$ و $z = V(L_TSP^\lambda)$ و مقدار w^λ را به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$w^\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_{ij}$$

اگر $w^\lambda < 0$، آنگاه (L_TSP_λ) را حل کرده و قرار می‌دهیم $T = t - \frac{s}{2}$ و الگوریتم را متوقف می‌کنیم.

۲. اگر $V(L_TSP^\lambda) < z$ نیاز نیست w_λ را حساب کنیم و کافیست $(L_{t-\frac{s}{2}}SP^\lambda)$ را محاسبه کرده و قرار دهیم $T = t - \frac{s}{2}$ و الگوریتم را متوقف می‌کنیم.

شروط توقف الگوریتم به شرح زیر می‌باشد:

۱. اگر $k > k_{\max}$ آنگاه الگوریتم متوقف می‌شود. در غیر اینصورت (L_TSP^λ) را حل می‌کنیم.

[۸] Search Heuristic

۲. اگر $k < \lceil k_{\max} \rceil$ الگوریتم را متوقف می‌کنیم.

برای روشن شدن روند الگوریتم فوق، آن را در مورد شبکه زیر پیاده سازی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۴. شبکه ای با چهار راس و سه یال را در نظر بگیرید،رئوس دو و چهار میانه و ماتریس D به صورت زیر است.

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۰ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۰ & ۲ \\ ۶ & ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

جهت پیاده سازی الگوریتم ابتدا مسائل $V(P)$ و $V(SP^{\lambda})$ و $V(L_tSP^{\lambda})$ را نوشته و در ادامه با محاسبه β_i و استفاده از روند الگوریتم، مقدار $V(L_tSP^{\lambda})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} V(P) = \min \quad & ۳x_{۱۲} + ۵x_{۱۳} + ۶x_{۱۴} + ۳x_{۲۱} + ۴x_{۲۳} + x_{۲۴} + ۵x_{۳۱} \\ & + ۴x_{۳۲} + ۲x_{۳۴} + ۶x_{۴۱} + x_{۴۲} + ۲x_{۴۳} \\ subject\ \ to & \\ & x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} + x_{۴۱} = ۱ \quad j = ۱ \quad (\lambda_۱) \\ & x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} + x_{۴۲} = ۱ \quad j = ۲ \quad (\lambda_۲) \\ & x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} + x_{۴۳} = ۱ \quad j = ۳ \quad (\lambda_۳) \\ & x_{۱۴} + x_{۲۴} + x_{۳۴} + x_{۴۴} = ۱ \quad j = ۴ \quad (\lambda_۴) \\ & x_{۱۱} + x_{۲۲} + x_{۳۳} + x_{۴۴} = ۲ \\ & x_{ij} \leq x_{ii} \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \\ & x_{ij} \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \end{aligned}$$

اکنون با در نظر گرفتن λ_j ها (متغرهای داخل پرانتز در فرمول بالا) به عنوان ضربگر لاگرانژ

متناظر با محدودیت‌های فوق، مساله آزادسازی آن را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} V(SP^{\lambda}) = \min \quad & ۳x_{۱۲} + ۵x_{۱۳} + ۶x_{۱۴} + ۳x_{۲۱} + ۴x_{۲۳} + x_{۲۴} + ۵x_{۳۱} \\ & + ۴x_{۳۲} + ۲x_{۳۴} + ۶x_{۴۱} + x_{۴۲} + ۲x_{۴۳} \\ subject\ \ to & \\ & \lambda_{۱}(x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} + x_{۴۱}) = \lambda_{۱} \quad j = ۱ \\ & \lambda_{۲}(x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} + x_{۴۲}) = \lambda_{۲} \quad j = ۲ \\ & \lambda_{۳}(x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} + x_{۴۳}) = \lambda_{۳} \quad j = ۳ \\ & \lambda_{۴}(x_{۱۴} + x_{۲۴} + x_{۳۴} + x_{۴۴}) = \lambda_{۴} \quad j = ۴ \\ & x_{۱۱} + x_{۲۲} + x_{۳۳} + x_{۴۴} = ۲ \\ & x_{ij} \leq x_{ii} \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \\ & x_{ij} \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \end{aligned}$$

حال بنابر تعاریف β_i در رابطه (۱۶.۴) و فرمول‌بندی (۱۷.۴) داریم:

$$\begin{aligned} V(L_T SP^{\lambda}) = \min \quad & -t\lambda_{۱}x_{۱۱} + (۳ - t\lambda_{۲})x_{۱۲} + (۵ - t\lambda_{۳})x_{۱۳} + (۶ - t\lambda_{۴})x_{۱۴} \\ & + (۳ - t\lambda_{۱})x_{۲۱} - t\lambda_{۲}x_{۲۲} + (۴ - t\lambda_{۳})x_{۲۳} + (۱ - t\lambda_{۴})x_{۲۴} \\ & + (۵ - t\lambda_{۱})x_{۳۱} + (۴ - t\lambda_{۲})x_{۳۲} - t\lambda_{۳}x_{۳۳} + (۲ - t\lambda_{۴})x_{۳۴} \\ & + (۶ - t\lambda_{۱})x_{۴۱} + (۱ - t\lambda_{۲})x_{۴۲} + (۲ - t\lambda_{۳})x_{۴۳} + t\lambda_{۴}x_{۴۴} \\ & + t\lambda_{۱} + t\lambda_{۲} + t\lambda_{۳} + t\lambda_{۴} \\ subject\ \ to & \\ & x_{ij} \leq x_{ii}, \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \\ & x_{ij} \in \{۰, ۱\}, \qquad i = ۱, ..., ۴, j = ۱, ..., ۴ \end{aligned}$$

قبل از شروع اولین گام الگوریتم، باید مقادیر λ_j ها را محاسبه کنیم.

$$\lambda_{۱} = \min\{d_{۲۱}, d_{۳۱}, d_{۴۱}\} = \min\{۳, ۵, ۶\} = ۳$$

$$\lambda_{۲} = \min\{d_{۱۲}, d_{۳۲}, d_{۴۲}\} = \min\{۳, ۴, ۱\} = ۱$$

$$\lambda_{۳} = \min\{d_{۱۳}, d_{۲۳}, d_{۴۳}\} = \min\{۵, ۴, ۲\} = ۲$$

$$\lambda_{۴} = \min\{d_{۱۴}, d_{۲۴}, d_{۳۴}\} = \min\{۶, ۱, ۲\} = ۱$$

تکرار اول: $k = ۱$ و $t = ۰$.

با قرار دادن t در فرمول (۱۸.۴) داریم $\beta_{۱} = \beta_{۲} = \beta_{۳} = \beta_{۴} = ۰$ و $V(LSP^{\lambda}) = ۰$ لذا الگوریتم قابل اجرا نیست.

تکرار دوم: $k = ۲$ و $t = ۰/۵$.

$$\beta_{۱} = \min(۰, -۱/۵) + \min(۰, ۲/۵) + \min(۰, ۴) + \min(۰, ۵/۵) = -۱/۵$$

$$\beta_۲ = min(۰, ۱/۵) + \min(۰, -۰/۵) + \min(۰, ۳) + \min(۰, ۰/۵) = -۰/۵$$

$$\beta_۳ = \min(۰, ۳/۵) + \min(۰, ۳/۵) + \min(۰, -۱) + \min(۰, ۱/۵) = -۱$$

$$\beta_۴ = \min(۰, ۴/۵) + \min(۰, ۰/۵) + \min(۰, ۱) + \min(۰, -۰/۵) = -۰/۵$$

مجموعه اندیس‌های I را می‌بایست تعیین کرده و بر اساس آن x_{ij} ها را تعیین کنیم.

$$I = \{۱, ۳\} \longrightarrow x_{۱۱} = ۱\ , x_{۳۳} = ۱$$

با جایگذاری در فرمول اصلی$V(L_{۰/۵}SP^{\lambda})$ داریم:

$$V(L_{۰/۵}SP^{\lambda}) = (-۱/۵)(۱) + (-۱)(۱) + ۰/۵(۳ + ۱ + ۲ + ۱) = ۱$$

بنابراین شرط اول الگوریتم برقرار است، یعنی: $V(L_TSP^{\lambda}) > z$ لذا الگوریتم قابل اجرا می‌باشد. قرار می‌دهیم:

$$T = t = ۰/۵\ , z = V(L_{۰/۵}SP^{\lambda}) = ۱$$

$$w^{\lambda} = \sum_{j=۱}^{۴} \lambda_j + \sum_{j=۱}^{۴}\sum_{i=۱}^{۴} \lambda_j x_{ij}$$
$$= ۷ + (\lambda_۱ x_{۱۱} + \lambda_۳ x_{۳۳}) = ۷ + ۳ + ۲ = ۱۲$$

تکرار سوم: $k = ۳$ و $t = ۱$.

$$\beta_۱ = \min(۰, -۳) + \min(۰, ۲) + \min(۰, ۳) + \min(۰, ۵) = -۳$$

$$\beta_۲ = \min(۰, ۰) + \min(۰, -۱) + \min(۰, ۲) + \min(۰, ۰) = -۱$$

$$\beta_۳ = \min(۰, ۲) + \min(۰, ۳) + \min(۰, -۲) + \min(۰, ۱) = -۲$$

$$\beta_۴ = \min(۰, ۳) + \min(۰, ۰) + \min(۰, ۰) + \min(۰, -۱) = -۱$$

مجموعه اندیس‌های I را می‌بایست تعیین کرده و بر اساس آن x_{ij} ها را تعیین کنیم.

$$I = \{۱, ۳\} \longrightarrow x_{۱۱} = ۱\ , x_{۳۳} = ۱$$

با جایگذاری در فرمول اصلی$V(L_۱SP^{\lambda})$ داریم:

$$V(L_۱SP^{\lambda}) = (-۳)(۱) + (-۲)(۱) + ۱(۳ + ۱ + ۲ + ۱) = ۲$$

بنابراین شرط اول الگوریتم برقرار است، یعنی: $V(L_۱SP^{\lambda}) = ۲ > z = ۱$ لذا الگوریتم قابل اجرا می‌باشد. داریم:

$$T = t = ۱\ , z = V(L_۱SP^{\lambda}) = ۲$$

$$w^{\lambda} = \sum_{j=۱}^{۴} \lambda_j + \sum_{j=۱}^{۴}\sum_{i=۱}^{۴} \lambda_j x_{ij}$$
$$= ۷ + (\lambda_۱ x_{۱۱} + \lambda_۳ x_{۳۳}) = ۷ + ۳ + ۲ = ۱۲$$

تکرار چهارم : $k = ۴$ و $t = ۱/۵$

$$\beta_۱ = \min(۰, -۴/۵) + \min(۰, ۱/۵) + \min(۰, ۲) + \min(۰, ۴/۵) = -۴/۵$$

$$\beta_۲ = \min(۰, -۱/۵) + \min(۰, -۱/۵) + \min(۰, ۱) + \min(۰, -۰/۵) = -۳/۵$$

$$\beta_۳ = \min(۰, ۰/۵) + \min(۰, ۲/۵) + \min(۰, -۳) + \min(۰, ۰/۵) = -۳$$

$$\beta_۴ = \min(۰, ۱/۵) + \min(۰, -۰/۵) + \min(۰, -۱) + \min(۰, -۱/۵) = -۳$$

مجموعه اندیس‌های I را می‌بایست تعیین کرده و بر اساس آن x_{ij} ها را تعیین کنیم.

$$I = \{۱, ۲\} \longrightarrow x_{۱۱} = ۱ \ , x_{۲۲} = ۱$$

از طرفی بنا به تعریف x_{ij} ها می‌بایست مقدار $d_{ij} - t\lambda_j$ و x_{ij} ها را $\forall i \in I, j = ۱, ..., ۴$ حساب کنیم.

$$۲ \in I, d_{۲۱} - t\lambda_۱ < ۰ \longrightarrow x_{۲۱} = ۱$$

$$۲ \in I, d_{۲۴} - t\lambda_۱ < ۰ \longrightarrow x_{۲۴} = ۱$$

و بقیه مقادیر x_{ij} $\forall i \in I, j = ۱, ..., ۴$ مقدار صفر را می گیرند چون در شرط صدق نمی کنند. با جایگذاری در فرمول اصلی $V(L_{۱/۵}SP^{\lambda})$ داریم:

$$V(L_{۱/۵}SP^{\lambda}) = (-۴/۵)(۱) + (-۳/۵)(۱ + ۱) + ۱/۵(۳ + ۱ + ۲ + ۱) = -۱$$

بنابراین شرط اول الگوریتم برقرار نیست، یعنی: $V(L_{۱/۵}SP^{\lambda}) = -۱ \not> z = ۲$
لذا الگوریتم قابل اجرا نیست و باید $(L_{t-\frac{s}{۴}}SP^{\lambda})$ را محاسبه کنیم یعنی $t = ۱/۲۵$.

$$\beta_۱ = \min(۰, -۳/۷۵) + \min(۰, ۱/۷۵) + \min(۰, ۲/۵) + \min(۰, ۴/۷۵) = -۳/۷۵$$

$$\beta_۲ = \min(۰, -۰/۷۵) + \min(۰, -۱/۲۵) + \min(۰, ۱/۵) + \min(۰, -۰/۲۵) = -۲/۲۵$$

$$\beta_۳ = \min(۰, ۱/۲۵) + \min(۰, ۲/۷۵) + \min(۰, -۲/۵) + \min(۰, ۰/۷۵) = -۲/۵$$

$$\beta_۴ = \min(۰, ۲/۲۵) + \min(۰, -۰/۲۵) + \min(۰, -۰/۵) + \min(۰, -۱/۲۵) = -۲$$

مجموعه اندیس‌های I را می‌بایست تعیین کرده و بر اساس آن x_{ij} ها را تعیین کنیم.

$$I = \{۱, ۳\} \longrightarrow x_{۱۱} = ۱ \ , x_{۳۳} = ۱$$

از طرفی بنا به تعریف x_{ij} ها می‌بایست مقدار $d_{ij} - t\lambda_j$ و x_{ij} ها را $\forall i \in I, j = ۱, ..., ۴$ حساب کنیم.
و با محاسبه $d_{ij} - t\lambda_j$ بقیه مقادیر x_{ij}، $\forall i \in I, j = ۱, ..., n$ مقدار صفر را می گیرند چون در شرط صدق نمی کنند.
با جایگذاری در فرمول اصلی $V(L_{۱/۲۵}SP^{\lambda})$ داریم:

$$V(L_{۱/۲۵}SP^{\lambda}) = (-۳/۷۵)(۱) + (-۲/۵)(۱) + ۱/۲۵(۳ + ۱ + ۲ + ۱) = ۲/۵$$

بنابراین شرط اول الگوریتم برقرار می باشد، یعنی: $V(L_{۱/۲۵}SP^{\lambda}) = ۲/۵ > z = ۲$
لذا الگوریتم قابل اجرا می باشد. قرار می‌دهیم:

$$T = t = ۱/۲۵ \ , z = V(L_T SP^{\lambda}) = ۲/۵$$

$$w^{\lambda}=\sum_{j=1}^{4}\lambda_j+\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\lambda_j x_{ij}$$
$$=7+(\lambda_1x_{11}+\lambda_3x_{33})=7+3+2=12$$

تکرار پنجم: $k=5$ و $t=1/75$.

$$\beta_1=\min(0,-6/25)+\min(0,1/25)+\min(0,1/5)+\min(0,4/25)=-6/25$$

$$\beta_2=\min(0,-3/25)+\min(0,-1/75)+\min(0,0/5)+\min(0,-0/75)=-6/25$$

$$\beta_3=\min(0,-1/25)+\min(0,2/25)+\min(0,-3/5)+\min(0,0/25)=-4/75$$

$$\beta_4=\min(0,-1/25)+\min(0,-0/75)+\min(0,-1/5)+\min(0,-1/75)=-4$$

مجموعه اندیس‌های I را می‌بایست تعیین کرده و بر اساس آن x_{ij} ها را تعیین کنیم.

$$I=\{1,2\}\longrightarrow x_{11}=1\ ,x_{22}=1$$

و با محاسبه $d_{ij}-t\lambda_j$ بقیه مقادیر x_{ij}، $\forall i\in I, j=1,...,n$ مقدار صفر را می گیرند چون در شرط صدق نمی کنند.

$$2\in I, d_{21}-t\lambda_1<0\longrightarrow x_{21}=1$$

$$2\in I, d_{24}-t\lambda_1<0\longrightarrow x_{24}=1$$

با جایگذاری در فرمول اصلی$V(L_{1/75}SP^{\lambda})$ داریم:

$$V(L_{1/75}SP^{\lambda})=(-6/25)(1)+(-6/25)(1)+(-6/25)(1)+1/75(3+1+2+1)=-6/5$$

لذا شرط اول الگوریتم برقرار نیست، یعنی: $V(L_{1/25}SP^{\lambda})=-6/5\not> z=2/5$

لذا الگوریتم قابل اجرا نیست و باید $(L_{t-\frac{s}{2}}SP^{\lambda})$ را محاسبه کنیم یعنی $t=T=1/5$ که این مقدار قبلا حساب شده است و لذا $t=1/25$ ومقدار $V(L_{1/25}SP^{\lambda})=z=2/5$ جواب الگوریتم است.

۳.۴ روش ابتکاری زیر گرادیان

در این بخش الگوریتم زیر گرادیان عمومی براساس روش‌های ابتکاری آزادسازی پیشنهاد شده بیان می‌شود. در این الگوریتم $C=\{i\ \ ; x_{ii}=1\}$ مجموعه رئوس ثابت میانه‌ای است.

الگوریتم روش ابتکاری زیر گرادیان

فرضیات:

$$\lambda\geq 0\quad ,\lambda\neq 0\quad ,Ib=-\infty,\quad ,ub=+\infty\quad ,C=\emptyset$$

$$\theta=\frac{\pi(ub-lb)}{\|g^{\lambda}\|^{2}}$$

$$\lambda_j = \max\{۰, \lambda_j + \theta g_j^{\lambda}\}_{j\in N}$$

$$g_j^{\lambda} = ۱ - \sum_{i=۱}^{n} x_{ij}^{\lambda} \quad j \in N$$

در هر تکرار گام‌های زیر به ترتیب انجام می‌شود:

۱. به کمک روش ابتکاری SH، $(L_T SP^{\lambda})$ را حل کرد و مقدار x^{λ} و $V(L_T SP^{\lambda})$ را حساب کنید.

۲. x^{λ} ای که شدنی بود را x_f نامیده و مقدار v_f را به صورت زیر بیابید.
$$v_f = \sum_{j=۱}^{n} (\min_{i\in I} d_{ij})$$

۳. کران پایین را به روز کنید.$[lb = \max[lb, L_T SP^{\lambda}]$.

۴. کران بالا را به روز کنید.$[ub = \min[ub, v_f]$.

۵. اگر به ازای $V(L_T SP^{\lambda} \ \ |x_{ii} = ۰) \geq ub \ ; \ i \in N - C$ قرار دهید $x_{ii} = ۱$.

۶. مجموعه C را به روز کنید(اندیس i هایی که $x_{ii} = ۱$ هست را داخل C قرار بده).

در هر گام طول گام‌های θ را به روز کنید.
الگوریتم ادامه می‌یابد تازمانی‌که یکی از شروط توقف برقرار شود.

۱. $\pi \leq ۰/۰۰۵$؛

۲. $ub - lb < ۱$ ؛

۳. $\|g^{\lambda}\|^{۲} = ۰$

۴. مکان هر میانه ثابت شده باشد .

در این الگوریتم تقریباT بهترین مقدار برای t^* ، هست، که با استفاده از روند SH (که در بخش قبل توضیح داده شد) بدست می‌آید. T در روند SH به عنوان یک ضربگر در آزادسازی جایگزینی لاگرانژ استفاده می‌شود .
به هر حال اگر روند جستجوی SH همان ضربگر T را برای n - تایی متوالی از تکرارهای زیر گرادیان به کار ببرد، پس آزادسازی‌های جایگزینی لاگرانژ بعدی این مقدار ثابت T را به عنوان ضربگر استفاده خواهند کرد و لذا این جستجو خیلی قابل اجرا نیست.
کنترل π کنترل اولیه است که می‌بایست $۲ \leq \pi \leq ۰$ باشد، با $\pi = ۲$ شروع شود و هر زمانی‌که lb در ۳۰ تکرا پیاپی زیاد نشد، π نصف شود.

نکته‌ای که در اینجا حایز اهمیت است، این است که لازم نیست جواب x^{λ} برای مساله $V(P)$ شدنی باشد ولی مجموعه I (بنا به تعریف در ابتدای بخش) راس‌های میانه شناخته شده ای هستند که در تولید جواب‌های شدنی مساله $V(P)$ استفاده می‌شوند. راس غیر میانه‌ای که به نزدیک‌ترین میانه‌اش اختصاص دارد، x_f اولیه را تولید می‌کند.

$$x^{\lambda}_{f_{ij}} = \begin{cases} ۱ & i \in I \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به ازای همه $i \neq k$:

$$x^{\lambda}_{f_{ik}} = \begin{cases} ۱ & i \in I, k = \min\limits_{i \in I}\{d_{ij}\} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و همچنین:

$$v_f = \sum_{j=۱}^{n} \min_{i \in I} d_{ij}$$

۴.۴ مثال‌های محاسباتی

روش‌های جایگزینی لاگرانژ که بحث شد، در نرم افزار متلب برنامه ریزی شده است. در این بخش چند مجموعه از مثال‌هایی در این زمینه که الگوریتم‌های فوق در مورد آن‌ها اجرا شده است را بیان می‌کنیم (در غالب جداولی آورده شده است).

هدف از بیان این جداول و مقایسه آنها نشان‌دادن این است که روش‌های ابتکاری لاگرانژ عملکرد خوبی در کاهش زمان محاسبه دارند. و همچنین این‌که روش‌های ابتکاری جایگزینی لاگرانژ به همان نتایج خوب روش‌های ابتکاری لاگرانژ می‌رسند و همچنین تعیین کردن نواقص روندهای پیشنهاد شده.

نتایج این بررسی‌ها در جداول زیرین نشان داده شده است. لازم به توضیح است که در این جداول در محاسبه زمان‌های کامپیوتری زمان نیاز به تنظیم مساله در نظر گرفته نشده است.)

هر جدول شامل:

۱. n : تعداد رئوس.

۲. p : تعداد میانه.

۳. $optimal$: بهترین جواب برای مثال یا جواب بهینه.

۴. $gab - ub = \dfrac{(۱۰۰ \times [ub - \text{جواب بهینه}])}{\text{جواب بهینه}}$ ؛ درصد انحراف از بهینگی . بهترین مقدار جواب شدنی که با روند روش ابتکاری متناظر پیدا می‌شود.

۵. $gab - lb = \dfrac{(۱۰۰ \times [\text{جواب بهینه} - lb])}{\text{جواب بهینه}}$ ؛ درصد انحراف از بهینگی . بهترین مقدار آزادسازی که با روند روش ابتکاری متناظر پیدا می‌شود.

۶. nLr = تعداد آزادسازی‌های لاگرانژ حل شده .(عدد اول نشان دهنده تعداد دفعات آزادسازی لاگرانژ و عدد دوم تعداد دفعاتی که آزادسازی جایگزینی لاگرانژ انجام شده است را نشان می‌دهد) . این نکته مهم است که یک روش ابتکاری لاگرانژ چه تعداد آزادسازی لاگرانژ را با چه تعداد تکرار زیر گرادیان انجام داده است .

۷. زمان کل محاسبه(عدد اول زمان کل محاسبه آزادسازی لاگرانژ و عدد دوم زمان کل محاسبه آزادسازی جایگزینی لاگرانژ در ثانیه را نشان می‌دهد).

به منظور جلوگیری از درصد خطا و نشان‌دادن این‌که دنباله‌های جایگزینی لاگرانژ نسبت به لاگرانژ همتایشان پایاتر هستند زمان‌های محاسباتی لازم برای رسیدن به چند درصد انحراف از بهینگی کران پایین برای هر مثال، با روش ابتکاری جایگزینی لاگرانژ و روش ابتکاری لاگرانژ گردآوری شده است.

در ادامه در دو جدول نتایج محاسباتی از مثال‌هایی که با هر دو روش آزادسازی لاگرانژ و جایگزینی لاگرانژ حل شده‌اند بیان شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جدول ۱.۴: نتایج محاسباتی مثال‌های بیزلی

n	p	optimal	g-u	g-l	nL	Total time
۱۰۰	۳۳	۱۳۵۵	(-) -	(-) -	(۲۲۶)۲۳۷	(۰.۶۶) ۰.۵۸
۲۰۰	۶۷	۱۲۵۵	(-)-	(-) -	(۲۵۳)۲۷۴	(۴.۰۰) ۴.۰۰
۳۰۰	۱۰۰	۱۷۲۹	(-) -	(-) -	(۳۱۶) ۲۵۲	(۲۰.۳۷) ۱۶.۷۸
۴۰۰	۱۳۳	۱۷۸۹	(-) -	(-) -	(۳۴۸) ۲۴۴	(۶۰.۳۵) ۵۱.۸۰
۵۰۰	۱۶۷	۱۸۲۸	(-) -	(-) -	(۳۱۲) ۲۷۲	(۱۷۱.۲۰) ۱۲۷.۶۰
۶۰۰	۲۰۰	۱۹۸۹	(-) -	(-)-	(۳۰۶) ۲۸۶	(۳۰۲.۱۶) ۲۵۷.۰۲
۷۰۰	۲۳۳	۱۸۴۷	(-) -	(-) -	(۲۴۰) ۲۳۹	(۴۸۸.۰۹) ۴۸۲.۹۷
۸۰۰	۲۶۷	۲۰۲۶	(-) -	(-) -	(۳۱۰) ۳۶۷	(۱۳۸۷.۷۱) ۱۳۷۴.۷۴
۹۰۰	۳۰۰	(۰.۰۴۷)۰.۰۴۷	۲۱۰۶	(۰.۰۰۱)۰.۰۰۴	(۳۹۱) ۴۴۶	(۳۲۱۲.۴۶) ۳۰۵۸.۶۵

جدول ۱.۴، نشان دهنده نتایج محاسباتی حاصل از مثال‌هایی است که توسط بیزلی [۹] [۱] در سال ۱۹۹۰ کتابخانه تحقیق در عملیات گردآوری شده است.

هدف از بیان جدول ۱.۴ مقایسه زمان محاسبه دو روش آزادسازی لاگرانژ و جایگزینی لاگرانژ بوده است، چراکه همانطور که در ابتدای فصل بیان شد زمان محاسبه جواب بهینه یک روش یا الگوریتم ابتکاری در بهینه بودن آن روش مهم است.بیزلی تعداد رئوس را نزدیک به هم در نظر گرفت.

[۹] Beasley

جدول ۲.۴: نتایج محاسباتی مثال‌های گالوا و ریول

n	p	optimal	g-u	g-l	nL	Total time
۱۰۰	۵	۵۷۰۳	(-) -	(۰.۴۴۷) ۰.۳۴۲	(۴۸۵) ۴۹۶	(۰.۴۲) ۰.۴۳
	۱۰	۴۴۲۶	(۳.۷۳۰) ۳.۷۲۵	(۲.۵۵۳) ۲.۶۴۳	(۴۷۲) ۵۰۰	(۰.۵۰) ۰.۵۳
	۱۵	۳۸۹۳	(۰.۸۹۹) ۰.۸۹۴	(۰.۷۴۵) ۰.۷۴۵	(۴۳۳) ۴۴۴	(۰.۶۴) ۰.۶۵
	۲۰	۳۵۶۵	(۰.۰۸۳) ۰.۰۸۴	(۰.۰۸۴) -	(۴۴۳) ۴۳۲	(۰.۸۳) ۰.۸۱
	۲۵	۳۲۹۱	(-) -	(۰.۰۶۰) ۰.۰۵۹	(۳۹۴)۴۲۶	(۰.۹۴) ۰.۹۹
	۳۰	۳۰۳۲	(۰.۰۶۶) ۰.۰۶۶	(۰.۰۶۰) ۰.۰۶۳	(۴۴۳) ۴۴۴	(۱.۲۰) ۱.۱۸
	۴۰	۲۵۴۲	(-) -	(-) -	(۱۹۴) ۱۹۶	(۰.۶۲) ۰.۵۹
	۵۰	۲۰۸۳	(-) -	(-) -	(۱۸۴) ۱۶۶	(۰.۶۹) ۰.۴۴
۱۵۰	۵	۱۰۸۳۹	(-) -	(۱.۴۰۱) ۱.۴۰۴	(۴۸۹) ۴۸۲	(۰.۸۶) ۰.۸۵
	۱۰	۸۷۲۹	(۰.۲۵۲) ۰.۶۴۲	(۳.۱۵۱) ۳.۱۶۳	(۴۸۴) ۵۲۹	(۱.۰۶) ۱.۱۴
	۱۵	۷۳۹۰	(۰.۷۳۱) ۱.۳۵۳	(۴.۹۰۰) ۴.۸۹۵	(۵۸۸) ۶۰۲	(۱.۵۱) ۱.۵۲
	۲۰	۶۴۵۴	(۳.۵۹۵) ۳.۴۲۴	(۲.۹۶۹) ۲.۹۶۷	(۵۰۹) ۴۶۰	(۱.۶۶) ۱.۶۰
	۲۵	۵۸۷۵	(۲.۰۶۰) ۱.۴۹۸	(۱.۰۱۳) ۱.۰۱۰	(۴۵۵) ۴۵۸	(۱.۹۲) ۱.۹۲
	۳۰	۵۴۹۵	(۰.۵۶۴) ۱.۲۰۱	(۰.۲۰۹) ۰.۲۰۹	(۵۰۲) ۴۲۵	(۲.۴۱) ۲.۲۸
	۴۰	۴۹۰۷	(۰.۱۴۳) ۰.۰۶۱	(۰.۰۷۱) ۰.۰۶۸	(۳۹۹) ۴۱۸	(۳.۰۲) ۳.۰۸
	۵۰	۴۳۷۴	(-) -	(۰.۰۷۰) ۰.۰۶۳	(۴۱۳) ۴۵۶	(۳.۸۴) ۳.۹۳

دومین مجموعه از جداول نتایج کاری گالوا[۱۰] و ریول[۱۱][۱۷] در سال ۱۹۹۶ می‌باشد که اگر چه n را کوچک در نظر گرفتند $(n = ۱۰۰, n = ۱۵۰)$ فاصله‌های دوگان این مثال‌ها (برای تعدادی از میانه‌ها) از یک درصد بزرگتر است. این مثال‌ها از نظر لاگرانژ با فاصله‌های دوگان، مثال‌های سختی در نظر گرفته می‌شوند.

۱۰ Galvao

۱۱ Revelle

۵.۴ نتایج

روش ابتکاری جایگزینی- لاگرانژ قادر به تولید جواب‌های تقریبی به همان خوبی روش لاگرانژ هست. همچنین ترکیب آزادسازی و روش ابتکاری جایگزینی- لاگرانژ خصوصا در مثال‌های بزرگ مسایل p - میانه، به سمت کاهش زمان محاسبه میل می‌کند.
بهینه سازی موضعی روش ابتکاری جایگزینی- لاگرانژ ضمن این‌که طول گام‌های غلط را تصحیح می‌کند، همچنان شرایط همگرایی در روش زیر گرادیان را ثابت نگه می‌دارد.
روش‌های دیگر زیر گرادیان روی مفاهیم آزادسازی لاگرانژ که از نظر جایگزینی- لاگرانژ می‌توانند بهتر شوند کاربردی در نظر گرفته می‌شوند.
همچنین نتیجه گیری می‌شود استفاده از روش‌های ابتکاری جایگزینی- لاگرانژ و مکانیابی تخصیصی مفید هستند و برای یافتن جواب شدنی اولیه به کمک جواب‌های دوگان میانی سریع و انعطاف پذیر هستند.

پیوست آ

کد Matlab

آ.۱ کد

```
clc;clear all;close all;
%% tarife motaghayerha
s =0.5; t=0;t0=0;T=t;kmax=10;
k=1;VLtSP=0;z=-inf;c=0;
syms tt
d=[ 0 3 5 6; 3 0 4 1; 5 4 0 2; 6 1 2 0];
for j=1:size(d,2)
    d1=d(:,j);
    d1(j)=[];
    landa(j)=min(d1);
end
for i=1:size(d,1)
    i1=num2str(i);
    for j=1:size(d,2)
        j1=num2str(j);
        name= strcat('x',i1,j1);
        arg(i,j) = sym(name);
    end
end
 Vp=sum(sum(arg.*d));
```

```
while k<kmax
    k,t
    B=Bij(t,d,landa)
    if sum (B==0)~=size(d,1)
    [T,v,c,z,t]=condition(z,c,landa,t,d,arg,B);
    end
    if c==1
        break
    end
     k=k+1;
    t=t+s;
end
```

```
function [T,v,c,z,t]=condition(z,c,landa,t,d,arg,B)
s=.5;p=2;
[v,w,I]= V_LTSP(B,arg,landa,p,t,d) ;
v
if v>z
        z=v;
        W=sum(landa)+sum(w);
        if W<0
        t1=t-(s/2);
        B=Bij(t1,d,landa)
        [v,w,I]= V_LTSP(B,arg,landa,p,t1,d);
        v
        T=t1
        c=1;
        t=t1;
        else
            c=0;
```

```
          T=t;
        end
elseif  v<z;
        t1=t-(s/2);
        B=Bij(t1,d,landa)
        [v,w,I]= V_LTSP(B,arg,landa,p,t1,d);
        v
        T=t1
        t=t1;
        c=0;
        [T,v,c,z,t]=condition(z,c,landa,t,d,arg,B);
        elseif  v==z
            T=t
            c=1;

    end
end


function y=Bij(t,d,landa)
syms tt
for i=1:size(d,1)
     y(i)=0;
     for j=1:size(d,2)
     a=[0,d(i,j)-subs((tt*landa(j)),t)];
     y(i)=min(a)+y(i);
     end
    end



function [Y,X,I]= V_LTSP(B,arg,landa,p,t,d)
syms tt
```

```
 b=B;b=sort(b);Y=0;X=0;o=1;
    for i=1:p
        for j=1:size(B,2)
            if b(i)==B(j)&& o<=p
                I(o)=j;
                arg(j,j)=subs( arg(j,j),1);
                Y=(B(j)*1)+Y;
                X(j)=arg(j,j)*landa(j);
                o=o+1;
            end
        end
    end
    for is=1:size(I,2)
        i=I(is);
       for js=1:size(d,2)
        if   (d(i,js)-(t*landa(js)))<0 && (i~=js)
            arg(i,js)=subs( arg(i,js),1);
            Y=(B(i)*1)+Y;
        end
       end
   end
    Y=subs(t*sum(landa),t)+Y;
end
```

مراجع

[1] Beasley, J.E. OR-Library *" Distributing test problems by electronic mail "* , Journal of Operational Research Society, vol. 41, no. 11 (1990), pp. 1069-1072.

[2] Beasley, J.E.*" Lagrangean heuristics for location problems "*, European Journal of Operational Research, vol. 65 (1993) , pp. 383-399.

[3] Bilde O. , Krarup J. *"Bestemmelse of optimal beliggenhed af produktionssteder"* . Research Report IMSOR . Technical University Of Denmark (1967).

[4] Bilde O . , Krarup J. *"Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem"* . Annals Discrete Math 1:79-97 (1977) .

[5] Campell J.F. *" Integer programming formulation of discrete hub location problems "*. European Journal Operation Research 72 : 387-405 (1994) .

[6] Canovas L. , Garcia S E , Marin A . *" Solving the uncapaciated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique ."* Annals Operation Research Vol.130 : 163-178 (2006)

[7] Cooper, L . *" Location-allocation problems"*, Operations Research, Vol. 11(1963), pp. 331- 343.

[8] Diher G .*" An algorithm for the p-median problem ."* Working paper No . 191 , Westen Management Science Institue , University of California , LosAngeles (1972)

[9] Drezner Z. and Hamacher, H.*" Facility location: Application and Theory. Springer-Verlage, Berlin"*(2002)

[10] Dyer, M.E. *" Calculating surrogate constraints "*, Mathematical Programming, vol. 19,(1980) pp. 255-278.

[11] Eieselt,H.A.V. Marianov. *"Foundation Of Location Analysis. "* ,springer , (2011).

[12] Erlenkotter D. *" A dual-based procedure for uncapacitated facility location ."* Operation Research 26:992-1009 (1978).

[13] Francis,R. Jr. L.F." Mcginnis and J. A. White, Facility Layout and Location: an Analytical Approach." Prentice Hall,(1992.)

[14] Galvão, R.D.*" A dual-bounded algorithm for the p-median promlem."* Operation Research ,Vol. 28:1112-1121 (1980).

[15] Galvão, R.D. and Raggi, L.A. *" A method for solving to optimality uncapacitated location problems"*, Annals of Operations Research, Vol. 18 (1989), pp. 225-244.

[16] Galvao,R. D.*"The use of lagrangean relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems."* Location Science 1: 57-79, (1993).

[17] Galvão, R.D. and ReVelle, C.S. *" A Lagrangean heuristic for the maximal covering location problem"* , European Journal of Operational Research, Vol. 18 (1996) , pp. 114-123.

[18] Garey, M.R. and Johnson, D.S. *" Computers and intractability"*: a guide to the theory of NP-completeness (1979).

[19] Geofferion AM .*"Lagrangean Relaxation for integer programming ."* Math program Study 2:82-114 (1974).

[20] Glover, F. *" Surrogate constraints"* , Operations Research, vol. 16, no. 4 (1968) , pp. 741-749.

[21] Hakimi, S. L. *" Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph"*, Operations Research, vol. 12 (1964), pp. 450-459.

[22] Hakimi, S. L. *" Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems"*, Operations Research, vol. 13 (1965), pp. 462-475.

[23] Hale, T.*" Trevor Hale's Location Science References.* http:// www.ent.ohiou.edu 2004.

[24] Handler Y. G and Mirchandani,P. B. *" Location on Networks Theory and Algorithms, "*The MIT Press, Cambridge, Mass 1979.

[25] Handler, G. and Zang, I. *" A dual algorithm for the constrained shortest path problem"*, Networks, Vol. 10 (1980) , pp. 293-310.

[26] Hansen,P. Labbe,M. D. Peeters and J. F. Thisse, *"Single facility location on networks."* Annals of Discrete Math. ,31: 113-146, (1987).

[27] Held, M. and Karp, R.M. *" The traveling-salesman problem and minimum spanning trees ."*Opereation Research 18:1138-1162 (1970) .

[28] Held, M. and Karp, R.M. *" The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II"*, Mathematical Programming, Vol. 1 (1971), pp. 6-25.

[29] Klincewicz JG. *" A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem ."* Location Sci 4:173-184 (1996).

[30] Korkel M . *" On the exact solution of large-scale simple plant location problems . "* Eur J Operation Research 39:157-173 (1989) .

[31] Krarup J. and Pruzan,P. M.*"The simple plant location problem: Survey and synthesis."* EJOR, 12: 36-81, (1983).

[32] Kuehn A. A. and Hamburger M. J.*"A heuristic program for locating warehouses."* Management Science. 9: 643-666, (1963.)

[33] Lorena, L.A.N. and Narciso, M G. *" Relaxation heuristics for a generalized assignment problem"*, European Journal of Operational Research, vol. 91 (1996), pp. 600-610.

[34] Maranzana, F.E.*"On the location of supply points to minimize transport costs."* Operational Research Quarterly, 15: 261-270, (1964).

[35] Marsten R.E . *" An algorithm for finding almost all of the median of a network ."* Discussion Paper No ,23, Northwestern University , Evasnston,Illinois (1972).

[36] Mavrids L.P. *" An indirect method for the generalized k-median problem applied to lock box location ."*Manage Sci Vol. 25:990-996 (1979)

[37] Mayer G, Wanger B . ,*" Hub locator : an exact solution method for the multiple allocation allocation hub location problem ."* Compt Operation Research, Vol. 29:715-739 (2002).

[38] Minoux, M. *" Plus courts chemins avec constraints: Algorithmes et applications"*, Annals of Telecommunications, Vol. 30 (1975) , pp. 383-394.

[39] Mirchandani P.B. and Francis, R. *"Discrete Location Theory "*, J. Wiley, (1990).

[40] Owen S.H. and Daskin M.S. *"Strategic facility location: A review."* Vol. 111: 423-447, (1998).

[41] Parker, R.G. and Rardin R.L. *" Discrete Optimization"*, Academic Press, New York (1988) .

[42] Revelle C.S.and Swain,R.W. *"Centeral facilities lo cation"* . Geographical Analysis 2: 30-42, 1970.

[43] Scaparra M.P. and Scutella M.G. *"Facilities, locations, customers: Building blocks of lo cation mo dels: A survey."* Thechnical Report: tr-01-18, University of Piza, Italy, (2001).

[44] Senne L.F.E. and Lorena A.N.L. *"Lagrangean /Surogate heuristic for p-median problems."* Chapter 6 In Laguna and Gonzales-Velarde eds.Computing tools for modeling and simulation : interfaces in computer science and operations research(2000) ,pp.115-130,Kluwer Academic Publisher .

[45] Sung C.S .Jin H.W . *" Dual-based approach for a hub network design problem under nonrestrictive policy ."* European Journal Research Vol. 132:88-105 (2001).

[46] Taillard, E.D. *"Heuristic methods for large centroid clustering problems "*, Technical report IDSIA96-96, IDSIA (1996).

[47] Teitz, M.B. and Bart P. *" Heuristic methods for estimating the vertex median of a weighted graph"*, Operations Research, Vol. 16 (1968), pp. 955-961.

[48] Weber, A., "*Uber den standort der industrient."* Tubingen, 1909, English trans: Theory of lo cation of industries, (G. J. Friedrich, ed. and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois, (1929).

[49] Wolsey, L.A."*Integer programming. "* John Wiley and Sonsinc, (1998).

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تخصیص	Allocation
دلخواه	Arbitrary
صعودی	Ascending
تخصیص دادن	Assign
تخصیص	Assignment
وابسته به	Associated
افزایش	Augmentation
متغیر عددی	Auxillary variable
اریبی	Biased
ارزیابی	Bound
روند کرانداری	Bounding procedure
ظرفیت	Capacity
مشخصه	Characteristic
معادل- هم ارز	Coincides
روش ابتکاری کلاسیک	Classical Heuristic
مکانیابی کلاسیک	Classical Location
ترکیبات	Combination
محدودیت پیچیده	Complicating Constraints
شرط	Condition
متوالی	Consecutive
محدودیت	Constraint
مصرف	Consumption
متناظر	Corresponding
همگرایی	Convinent
همگرایی	Convergence

نقطه مقابل .... Counterpart
مشتری .... Customer
دانتزیک .... Dantzig
انحراف .... Deviation
تعیین .... Determination
توزیع شده .... Distributed
جهت .... Direction
الگوریتم مکان‌یابی بی ظرفیت دوگان .... Dual uncapacitated algotithm location
یال .... Edge
کاملا .... Entirely
معادله .... Equality
معادل .... Equivalent
جابه جاشونده .... Erratic
به صورت آشکارا .... Evidently
مستثنی کردن .... Exclude
عبارت .... Experssion
سرویس دهنده .... Facility
شدنی .... Feasible
مالی .... Financial
فرمولبندی .... Formulation
بیشتر .... Further
حریصانه .... Greedy
روش ابتکاری جایگزینی حریصانه .... Greedy-Interchange Heuristic
ابتکاری .... Heuristic
توضیح دادن .... Illustrate
فراهم کردن .... Imply
الزامی .... Implicity
بهبودی .... Improvement
مستقل .... Independently
اولیه .... Initial
شروع شدن .... Initiated
بررسی .... Inspection

Interval	فاصله
Integrality	صحیحح
Iteration	تکرار
Knapsack	کوله پشتی
Lagrangean Decomposition Approach	روش تجزیه لاگرانژ
Lagrangean Dual	آزاد سازی لاگرانژ
Lagrangean Multiplier	ضربگر لاگرانژ
Lagrangean/Surrogate Heuristic	روش ابتکاری تجزیه لاگرانژ
Lagrangean Relaxation	دوگان لاگرانژ
Level	سطح
Linear Programming Rrlaxation(RLP)	آزادسازی برنامه ریزی خطی
Linear Program(LP)	برنامه خطی
Local Search	جستجوی موضعی
Location	مکانیابی
Lower Bound	کران پایین
Meta Heuristic (MH)	فرا ابتکاری
Modeling	مدلبندی
Modification	اصلاحی
Multiplier	ضربگر
Nature	خاصیت
Network	شبکه
Node	گره
Objective Function	تابع هدف
Occurrences	رخداد
Optimal	بهینه
Optimization	بهینه سازی
OR-Library	کتابخانه تحقیق در عملیات
Overall	روی هم رفته- سرتاسر
Parameter	پارامتر
Partitioning	افراز بندی
Path	مسیر
Primal Problem	مساله اولیه

Principle .... اهمیت
P-Median .... میانه - P
Ratio .... نسبت
Reformulated .... دوباره فرمولبندی کردن
Relax .... آزاد کردن
Relaxation .... آزادسازی
Relaxation Lagrangean .... آزادسازی لاگرانژ
Remove .... حذف شدن
Satisfy .... صدق کردن
Seek .... جستجو کردن
Set .... مجموعه - قراردادن
Simple Plant Location Problem (SPLP) .... مساله مکان‌یابی انبار ساده
Simultaneously .... معادل بودن
Single .... تک منبعی
Slack Variable .... متغیرکمکی
Slope .... شیب
Specialization .... تخصص
Stable .... پایدار
Stage .... مرحله
Strictly .... اکیدا
Subgradient Optimization .... بهینه سازی زیر گرادیان
Subset .... زیر مجموعه
Subtracting .... کم کردن
Successive .... پشت سرهم
Support .... پشتیبانی
Symetric .... متقارن
Terminate .... خاتمه می یابد
Traditional .... سنتی
Transportation Cost .... هزینه حمل و نقل
Traveling Salseman Problem .... مساله فروشنده دوره گرد
Throughtout .... سرتاسر
Variable .... متغیر

Vertex .... راس
Vertex Subsituation .... جابه جایی راسی
Vertices .... رئوس
Weighted .... وزن دار

Aabstract

In the network location problem the aim is to determine the optimum location facilities on the Network. This work will be done by providing algorithms for solving these problems. the proposed algorithms, the algorithm that with less time and less cost is more applicable.
The P-median problem is one of important problem in location theory and have many applications in various fields such as locating distribution centers, office centers.
Lagrangean Relaxation is one of the first methods for solving location problems. Lagrangean relaxation is in fact a way to solve problems in operations research. In this thesis, we analyze the implications of the theory of location problem.
In the first chapter, a series of basic concepts and definitions and theorems of the concept of Relaxation is expressed.
In Second chapter, we define the problem of simple plant location problem, We provide lower bound for the optimal solution to this problem.
In chapter three, the lower bound p-median problem gain with expresion a heuristic algorithm.
In the final chapter, Lagrangean methods, and heuristic Surrogate-Lagrangean examined to solve the p-median problem and compared their results.

keywords: Lagrangean Relaxation , Location , P-Median Problem , Simple Plant Location Problem.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Lagrangean relaxation for location problems

Supervisor
Dr.Jafr Fathali

Advisor
Dr.Barat Ghaznavi

by

Zeinab Sarkardeh

2013