دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

بررسی مقادیر ویژه فازی در گراف‌های فازی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

دانشجو

فاطمه فیاضی

دی ۹۲

به امید درک رازهای پنهانی قصیده ی آسمانی عشق

این پایان نامه را که ذره ای از تلاش آدمی

برای ورود به گوشه ای از منظومه ی پر رمز و راز هستی است را

به پیشگاه پاک اسطوره های صبر و وفاداری

که در عرصه ی زندگی ناملایمات، تلخی ها و سختی ها را بارها و بارها،

برای پیشرفت های بیشتر این حقیر،

به جان خریدند،

پدر و مادر مهربانم

تقدیم می کنم.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز هم خدا هست.

تو مهربان جاودان آسیب ناپذیر من، هستی. ای پناهگاه ابدی! تو می توانی جانشین همه ی بی پناهی ها شوی. این نگهبان سکوت، شمع جمعیت تنهایی ها، راهب معبد خاموشی ها، سالک راه فراموشی ها، حاجب درگه نومیدی، چشم به راه پیامی، پیکی، گرمی بازوی مهری نیست.

خدایا!

رحمتی کن تا ایمان، نام و نان برایم نیاورد. و قوتم بخش تا نانم و حتی نامم را در خطر ایمان افکنم، تا از آن ها باشم که پول دنیا را می گیرند و برای دین کار می کنند، نه از آن ها که پول دین را می گیرند و برای دنیا کار می کنند...

چرا روح های بلند و دل های عمیق، اندوه، پاییز، سکوت و غروب را دوست تر می دارند؟

مگر نه این است که در این لحظه هاست، که خود را به مرز پایان این عالم نزدیک تر احساس می کنند؟

از انسان ها غمی به دل نگیر؛ زیرا خود نیز غمگین اند؛ با آن که تنهایند ولی از خود می گریزند زیرا به خود و به عشق خود و به حقیقت خود شک دارند؛ پس دوستشان بدار اگر چه دوستت نداشته باشند...!

به من بگو، نگو نمی گویم

اما نگو نفهم، که من نمی توانم نفهمم.

من می فهمم!!![1]

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

سپاس گزاری

سپاس مخصوص خداوندی است که بر من مقدر کرد آن چه راکه شاید برای دیگری مقدر نکرده، مرا انتخاب کرد تا در این جایگاه، افتخار علم اندوزی داشته باشم که آن خود سعادت می خواهد. بارالها، خاشعانه بر درگاهت کرنش می کنم که بر من رقم زدی آن میزان توانایی را تا بتوانم در دریای بیکران معرفتت غور کنم. باشد که به تو نزدیک تر شوم. تکریم و تعزز فراوان محضر استاد ارجمندم جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف، سپاس اندیشه ی تابناکتان که مرا سهیم کردید در شناخت آن چه خود از نشانه های الوهیت و عظمت خداوند مهربان درک کرده اید و این مباهاتی است که نصیب هر کس نمی شود. پدرانه قدم برداشتن در دنیای ریاضیات را بر من آموختید. زبانم قاصر است و کلامم الکن تا سپاسی در خور تقدیمتان دارم. خدا را برایتان آرزو دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را که مشوقم بودند از کودکی تا بیابم تقرب به خداوند را با علم آموزی. امیدوارم با تقریر این مکتوب موجبات خوشنودی شان را مهیا کرده باشم. خاک پای تمامی کسانی که در این موفقیت همراه و یاری گرم بوده اند را طوطیای چشمانم می کنم. باشد که مو هبتشان را هیچ گاه از یاد نبرم.

فاطمه فیاضی

دی ۹۲

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه فیاضی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی مقادیر ویژه فازی در گراف‌های فازی** ، تحت راهنمایی **دکتر صادق رحیمی شعرباف** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه شاهرود" یا "Shahrood University" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه فیاضی
دی ۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه موضوع مقادیر ویژه فازی و کاربردهای آن بررسی شده است. برای یافتن مقادیر ویژه فازی از دو روش مختلف استفاده شده است. در یک روش از مفهوم α-برش برای محاسبه مقادیر ویژه‌ی فازی و متناظر با آن، بردارهای ویژه‌ی فازی از سیستم خطی کاملا فازی استفاده شده است و روش دیگر مبتنی بر مقدار تابع عضویت عدد فازی است که با استفاده از دترمینان به‌دست می‌آید. در فصل اول تاریخچه‌ای از موضوع بیان شده است. در فصل دوم مفاهیم مرتبط با مقادیر ویژه شامل طیف گراف، انرژی گراف و برخی کران‌ها برای انرژی گراف بررسی شده است. فصل‌های سوم و چهارم در بردارنده‌ی دو روش مختلف، برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی با استفاده از اعداد فازی در حالت پارامتری است. فصل پنجم شامل انرژی لاپلاسین گراف و برخی کران‌های مربوط به این نوع انرژی است. همچنین این انرژی به حالت فازی تعمیم داده شد. علاوه بر آن برخی کران‌ها مربوط به مقادیر ویژه و انرژی در گراف‌های فازی محاسبه گردید. برای فهم بهتر، در هر فصل ابتدا موضوع به‌صورت قطعی بیان و سپس حالت فازی آن بررسی شده است.

کلمات کلیدی:

گراف فازی، طیف گراف، انرژی گراف فازی، انرژی لاپلاسین فازی، سیستم خطی کاملا فازی

فهرست مطالب

۱ مقدمه و تعاریف اولیه ۱

۱.۱ تاریخچه موضوع مورد مطالعه ۱

۲.۱ تعاریف اولیه ۳

۳.۱ تعاریف اساسی فازی ۴

۱.۳.۱ برخی عملگرها روی اعداد فازی ۶

۲.۳.۱ عملگرهای بازه‌ای ۷

۳.۳.۱ عملگر روی عدد فازی مثلثی به وسیله‌ی α-برش ۸

۲ طیف گراف فازی ۹

۱.۲ معرفی طیف گراف ۹

۲.۲ انرژی گراف ۱۰

۱.۲.۲ تعیین برخی کران‌ها برای انرژی گراف ۱۱

۲.۲.۲ برخی روابط در انرژی گراف ۱۴

۳.۲ طیف گراف فازی ۱۴

۱.۳.۲ انرژی گراف فازی ۱۶

۲.۳.۲ کران‌هایی برای انرژی گراف فازی ۱۷

۳ روش اول برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از ماتریس فازی ۲۵

۱.۳ مقدمه ۲۵

۲.۳ تعاریف اولیه ۲۶

۳.۳ یافتن مقادیر ویژه فازی ۲۷

۱.۳.۳ حالت اول ۲۸

۲.۳.۳ حالت دوم ۲۹

۳.۳.۳ حالت سوم ۳۰

۴.۳.۳ مثال عددی ۳۲

۴.۳ یافتن بردارهای ویژه فازی ۳۳
۱.۴.۳ بردارهای ویژه‌ی فازی از سیستم کاملا فازی ۳۳
۲.۴.۳ بردارهای ویژه‌ی فازی از ماتریس حقیقی ۴۳

۴ روش دوم برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از ماتریس فازی ۴۷
۱.۴ یافتن مقدار ویژه متقارن از طریق جواب متقارن $FFLS$ ۴۷
۱.۱.۴ حالت الف ۴۸
۲.۱.۴ حالت ب ۵۴
۳.۱.۴ حالت ج ۵۷
۲.۴ مثال عددی ۶۱

۵ انرژی لاپلاسین گراف فازی ۶۵
۱.۵ انرژی لاپلاسین گراف ۶۵
۱.۱.۵ مقدمه و تعاریف اساسی ۶۵
۲.۱.۵ تعیین برخی کران‌ها برای انرژی لاپلاسین گراف ۶۶
۳.۱.۵ برخی روابط در انرژی لاپلاسین ۶۸
۲.۵ انرژی لاپلاسین گراف فازی ۶۹
۱.۲.۵ تعاریف ۶۹
۲.۲.۵ بررسی برخی روابط از مقادیر ویژه در گراف‌های فازی ۷۰
۳.۲.۵ انرژی لاپلاسین گراف فازی ۷۳
۳.۵ یافتن کران‌هایی برای انرژی لاپلاسین از گراف فازی ۷۶
۴.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۷۹

مراجع ۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۷

نمایه ۹۰

فصل ۱

مقدمه و تعاریف اولیه

۱.۱ تاریخچه موضوع مورد مطالعه

اعداد فازی یکی از راه‌های توضیح نادقیق بودن داده‌ها است. نظریه اعداد فازی بر پایه نظریه مجموعه‌های فازی پایه‌گذاری شده است که **لطفی زاده**[۱] در سال ۱۹۶۵ معرفی کرد [۴۱] . نظریه مجموعه‌های فازی، زمینه‌ی قوی و جدی از تحقیقات مختلف، شامل: پزشکی، علوم اجتماعی، علوم مدیریتی، آمار مهندسی، نظریه گراف، هوش مصنوعی، پردازش سیگنال، تشخیص الگو، رباتیک، شبکه‌های کامپیوتری، سیستم‌های تخصصی و ... را به وجود آورده است.

بسیاری از کاربردهای ماتریس‌ها در مهندسی و علوم کاربردی، مربوط به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است. نظریه کنترل، نظریه تجزیه و تحلیل ارتعاش، مدارهای الکترونیک، دینامیک‌های پیشرفته و مکانیک‌های کوانتوم فقط زمینه‌های مختصری از کاربردها هستند. مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه حقیقی نقش مهمی در مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی، فرآیند تبدیل ماتریس داده شده به ماتریس قطری یا یافتن ماتریس معکوس دارد [۱]. از دیگر کاربردهای مقادیر ویژه، روش‌هایی در ترکیبیات، نظریه گراف و بهینه‌سازی ترکیبیاتی است که قدمت زیادی دارد. برای مثال، کران‌های مقادیر ویژه برای عدد رنگی که توسط **ولف**[۲] و **هافمن**[۳] بررسی شده است [۱۸، ۳۸]. همین‌طور مقادیر ویژه‌ی گراف، ساختار توپولوژیکی گراف را مشخص می‌کند. به‌طور مثال در نظریه کدگذاری، می‌نیمم فاصله همینگ در یک کد خطی با دومین مقدار ویژه از نظر بزرگی، از یک گراف منتظم نشان داده می‌شود [۳۴]. برخی از این خواص توسط ولف، **ستکویچ**[۴] ، **بیگز**[۵]، **یانگ**[۶] بررسی شده است [۴۰، ۸، ۳۷]. همچنین حساب

---

[۱] Lotfi Zade

[۲] Wilf

[۳] Haffman

[۴] Cvetkovic

[۵] Biggs

[۶] Yong

اعداد فازی، کاربرد گسترده‌ای در محاسبه سیستم خطی دارد، که در آن پارامترها با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند و آن‌را **سیستم خطی فازی**[۷] می‌نامند. برای اولین‌بار یک روش کلی برای حل سیستم‌های خطی فازی $(n \times n)$، در سال ۱۹۹۸ توسط **فردمن**[۸] ارائه شد [۲۵]. در این سیستم‌ها، ضرایب ماتریس قطعی و طرف راست تساوی، ستونی از بردارهای فازی دلخواه است [۲۸]. علاوه بر این می‌توان به حالت‌های مهم دیگری از سیستم‌های خطی فازی اشاره کرد. در این سیستم‌ها تمام پارامترها، عددهای فازی هستند و آن‌را سیستم‌های خطی کاملا فازی $(FFLS)$ می‌نامند. دهقان و هاشمی در سال ۲۰۰۶ [۱۱] ، دهقان در سال ۲۰۰۷ [۲۴] ، به روش‌هایی برای یافتن جواب برداری فازی مثبت، از سیستم خطی کاملا فازی پرداخته‌اند. دهقان در سال ۲۰۰۶ برخی از روش‌های محاسباتی که بر اساس **قاعده کرامر**[۹]، **روش حذفی گاوس**[۱۰]، **روش تجزیه** LU[۱۱] و **روش برنامه‌ریزی خطی**[۱۲] برای یافتن **جواب تقریب‌زده شده**[۱۳] را از $FFLS$ بررسی کرد [۱۰].

در سال ۲۰۰۶ **مازیولی**[۱۴] الگوریتمی برای یافتن جواب برداری با تبدیل سیستم $A_1X+b_1 = A_2X+b_2$ به $(FFLS)$ $AX = b$ ، ارائه داد که در آن $A = A_1 - A_2$ و $b = b_1 - b_2$ است [۲۷] .

مصلح در سال ۲۰۰۷ روشی برای یافتن جواب سیستم خطی کاملا فازی از $AX + b = CX + d$ ارائه داد که در آن A و C ماتریس‌های مربعی با ضرایب فازی، b و d بردارهای فازی و X بردار مجهول شامل n عدد فازی است [۲۶] .

در سال ۲۰۰۸ **ناصری**[۱۵]، روش‌های تجزیه‌ای از ضرایب ماتریس را برای حل سیستم خطی کاملا فازی به‌کار برد. اله‌ویرانلو در سال ۲۰۰۸ روشی برای حل $FFLS$ ارائه داد که ضرایب ماتریس مثبت هستند. ناصری در سال ۲۰۰۹، بر اساس **روش گرویل**[۱۶] جواب مثبت $FFLS$ را یافت. همین‌طور ناصری و **زحمتکش**[۱۷] در سال ۲۰۱۰ روش جدیدی را برای تجزیه جواب نامنفی از $FFLS$ ارائه دادند [۲۹]. ناصری و **سهرابی**[۱۸] تجزیه اساسی از ضرایب ماتریس در $FFLS$ ارائه دادند و الگوریتم جدیدی را برای حل $FFLS$ بنا کردند [۳۱]. در سال ۲۰۱۰ **کومار**[۱۹] روش جدیدی را برای یافتن جواب تقریبی از $FFLS$ با پارامترهایی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای به‌دست آورد [۲۲، ۲۵]. بنابراین بسیار مهم است که به

[۷] Fuzzy Linear System (FLS)
[۸] Friedman
[۹] Cramer's Rule
[۱۰] Gauss Elimination Method
[۱۱] LU Decomposition Method
[۱۲] Linear Programming Approach
[۱۳] Approximated Solution
[۱۴] Muzzioli
[۱۵] Nasseri
[۱۶] Grevill's Method
[۱۷] Zahmatkesh
[۱۸] Sohrabi
[۱۹] Kumar

طور تخصصی در مورد توسعه روش‌های عددی بحث کنیم و مقادیر ویژه‌ی فازی و بردارهای ویژه‌ی فازی را بیابیم.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعاریف این بخش، برگرفته از مرجع [۵] است.

تعریف ۱.۲.۱. یک **گراف**[۲۰] سه‌تایی مرتب (V_G, E_G, ψ_G) است که در آن V_G مجموعه‌ای ناتهی از عناصر به‌نام رئوس و E_G مجموعه‌ای از یال‌ها و ψ_G تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب و نه لزوما متمایز از V_G را متناظر می‌کند. از این پس گراف را به‌صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.
هرگاه گراف G دارای n راس و m یال باشد، آن‌را (n, m)-گراف می‌نامیم و آن‌را به‌صورت $G = (n, m)$ نشان می‌دهیم. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف می‌نامند و آن‌را با $|V|$ یا n نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $A(G)$ ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه بردار ناصفر X را یک **بردار ویژه**[۲۱] A نامند، هرگاه AX مضربی از X باشد. به بیان دیگر برای بعضی از مقادیر λ داشته باشیم $AX = \lambda X$.
عدد λ را **مقدار ویژه**[۲۲] A و X را بردار ویژه A نظیر λ می‌نامند. برای یافتن مقادیر ویژه تساوی $AX = \lambda X$ را می‌توان به فرم $AX = \lambda IX$ نوشت. بنابراین داریم:

$$(\lambda I - A)X = 0$$

این دستگاه زمانی جواب ناصفر دارد که $det(\lambda I - A) = 0$ باشد. پس λ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر $det(A - \lambda I)X = 0$ باشد.
بسط دترمینان $A - \lambda I$ منجر به یک چندجمله‌ای از درجه n برحسب λ، موسوم به **چندجمله‌ای مشخصه**[۲۳] می‌شود، که صفرهای این چندجمله‌ای مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده، بدون جهت و بدون وزن با n راس $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ باشد. **ماتریس مجاورت**[۲۴] $A = [a_{ij}]$، ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های تعریف شده به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{یال باشد.} \quad v_i v_j, \\ 0, & \text{یال نباشد.} \quad v_i v_j. \end{cases}$$

قضیه ۴.۲.۱. [۹] بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس، **مستقل خطی**[۲۵] هستند.

[۲۰] Graph
[۲۱] Eigenvector
[۲۲] Eigenvalue
[۲۳] Polynomial Characteristic
[۲۴] Adjacency Matrix
[۲۵] Linear Independence

قضیه ۵.۲.۱. [۹] دو ماتریس مشابه دارای مقادیر ویژه یکسان هستند. یعنی مقادیر ویژه A و $TAT^{-۱}$ برای همه‌ی ماتریس‌های **نامنفرد**[۲۶] یکسان هستند.

قضیه ۶.۲.۱. [۹] ماتریس متقارن A **نیمه معین مثبت**[۲۷] است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

۳.۱ تعاریف اساسی فازی

مطالب این بخش از مراجع [۱] و [۲۳] در نظر گرفته شده است.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه فازی[۲۸] به مجموعه‌ای گفته می‌شود که به هر عضو آن مجموعه، درجه عضویت نسبت داده شود. به عبارت دیگر تابع μ_A نگاشت عناصر از مجموعه مرجع X به مجموعه $[۰, ۱]$ به‌صورت زیر است:

$$\mu_A : X \to [۰, ۱]$$

به‌طور متداول مجموعه فازی A را با $\tilde{A}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۳.۱. α**-برش**[۲۹] مجموعه فازی $\tilde{A}$ از عضوهایی ساخته شده است، که عضویت آن‌ها کمتر از α نباشد. به عبارت دیگر α-برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

توجه کنید که $\alpha \in (۰, ۱]$ دلخواه است و این مجموعه، مجموعه‌ای **قطعی**[۳۰] است و در حالتی که $\alpha = ۱$ باشد، ۱-برش از $\tilde{A}$ را **هسته**[۳۱] می‌نامند.

تعریف ۳.۳.۱. محمل[۳۲] مجموعه $\tilde{A}$ از عناصری ساخته شده است که تابع عضویت آن‌ها نامنفی باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$support(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \to [۰, ۱]$ است.

[۲۶] Non-Singular
[۲۷] Positive Semidefinite
[۲۸] Fuzzy Set
[۲۹] α-Cut
[۳۰] Crisp
[۳۱] Kernel
[۳۲] Support

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید A و B دو مجموعه (قطعی یا فازی) باشند. **رابطه‌ی فازی**[۳۳] R ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_R : A \times B \to [0, 1]$$

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid \mu_R(x, y) \geq 0, x \in A, y \in B\}$$

که در آن $\mu_R(x, y)$ **شدت رابطه**[۳۴] بین x و y را نمایش می‌دهد. هرگاه $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(x', y')$ باشد، گوییم (x, y) رابطه‌ی قوی‌تری نسبت به (x', y') دارد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید X مجموعه مرجع در $\mathbb{R}^n$ و A مجموعه‌ای فازی باشد. هرگاه تمام α-برش‌ها محدب باشند، مجموعه فازی را **محدب**[۳۵]، در غیر این‌صورت آن را **نامحدب**[۳۶] گویند. به عبارت دیگر داریم:

$$\mu_A(t) \geq Min[\mu_A(r), \mu_A(s)]$$

$$t = (\lambda)r + (1 - \lambda)s, \qquad r, s \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$$

تعریف ۶.۳.۱. هرگاه یک مجموعه فازی محدب، نرمال‌شده (یعنی حداقل در یک نقطه مقدار تابع عضویت برابر ۱ شود)، تابع عضویت روی $\mathbb{R}$ تعریف شده و به‌طور قطعه‌ای پیوسته باشد در این‌صورت آن‌را **عدد فازی**[۳۷] می‌نامند.
عدد فازی u در حالت پارامتری به‌صورت دوتایی $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ از توابع $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$ تعریف می‌شود که $0 \leq r \leq 1$ است و در روابط زیر صدق می‌کند:

- $\underline{u}(r)$ تابعی کران‌دار نانزولی و از چپ پیوسته در $(0, 1]$ و در 0 از راست پیوسته است.
- $\overline{u}(r)$ تابعی کران‌دار ناصعودی و از چپ پیوسته در $(0, 1]$ و در 0 از راست پیوسته است.
- همواره $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ که $0 \leq r \leq 1$ است.

از اعداد فازی متداول می‌توان به **عدد فازی مثلثی**[۳۸] و **عدد فازی ذوزنقه‌ای**[۳۹] اشاره کرد. عدد فازی مثلثی به‌صورت سه‌تایی مرتب $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ تعریف می‌شود که در آن $a_i : i = 1, 2, 3$ همگی اعداد حقیقی هستند. از طرفی تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

[۳۳] Fuzzy Relation
[۳۴] Strength of Relation
[۳۵] Convex
[۳۶] Non-Convex
[۳۷] Fuzzy Number
[۳۸] Triangular Fuzzy Number (TFN)
[۳۹] Trapezoidal Fuzzy Number

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3. \end{cases}$$

عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت چهارتایی مرتب $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ تعریف می‌شود که در آن a_i برای هر $i = 1, \ldots, 4$ اعداد حقیقی هستند. همچنین تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4. \end{cases}$$

۱.۳.۱ برخی عملگرها روی اعداد فازی

تعریف ۷.۳.۱. برای $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ و $\tilde{v} = (\underline{v}(r), \overline{v}(r))$ دلخواه که $0 \leq r \leq 1$ است و اسکالر دلخواه $k \in \mathbb{R}$، جمع، تفاضل، ضرب اسکالر با $k \in \mathbb{R}$ و ضرب را تعریف می‌کنیم که به ترتیب به‌صورت زیر است:

۱. جمع

$$\underline{u+v}(r) = \underline{u}(r) + \underline{v}(r), \quad \overline{u+v}(r) = \overline{u}(r) + \overline{v}(r)$$

۲. تفاضل

$$\underline{u-v}(r) = \underline{u}(r) - \overline{v}(r), \quad \overline{u-v}(r) = \overline{u}(r) - \underline{v}(r)$$

۳. ضرب اسکالر

$$k\tilde{u} = \begin{cases} (k\underline{u}(r), k\overline{u}(r)) & , k \geq 0 \\ (k\overline{u}(r), k\underline{u}(r)) & , k < 0 \end{cases}$$

۴. ضرب

$$\underline{uv}(r) = min\,\{\underline{u}(r)\underline{v}(r), \underline{u}(r)\overline{v}(r), \overline{u}(r)\underline{v}(r), \overline{u}(r)\overline{v}(r)\}$$

$$\overline{uv}(r) = max\{\underline{u}(r)\underline{v}(r), \underline{u}(r)\overline{v}(r), \overline{u}(r)\underline{v}(r), \overline{u}(r)\overline{v}(r)\}$$

برای ضرب دو عدد فازی، حالت‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

- هرگاه $0 \geq \tilde{u}$ و $0 \geq \tilde{v}$ باشد، بنابراین داریم:

$$\underline{uv}(r) = \underline{u}(r)\underline{v}(r),$$

$$\overline{uv}(r) = \overline{u}(r)\overline{v}(r).$$

- هرگاه $0 \leq \tilde{u}$ و $0 \leq \tilde{v}$ باشد، بنابراین داریم:

$$\underline{uv}(r) = \overline{u}(r)\overline{v}(r),$$

$$\overline{uv}(r) = \underline{u}(r)\underline{v}(r).$$

- هرگاه $0 \geq \tilde{u}$ و $0 \leq \tilde{v}$ باشد، بنابراین داریم:

$$\underline{uv}(r) = \overline{u}(r)\underline{v}(r),$$

$$\overline{uv}(r) = \underline{u}(r)\overline{v}(r).$$

- هرگاه $0 \leq \tilde{u}$ و $0 \geq \tilde{v}$ باشد، بنابراین داریم:

$$\underline{uv}(r) = \underline{u}(r)\overline{v}(r),$$

$$\overline{uv}(r) = \overline{u}(r)\underline{v}(r).$$

۲.۳.۱ عملگرهای بازه‌ای

فرض کنید $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ بازه‌های روی $\mathbb{R}$ باشند. عملگرهای بازه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱. جمع

$$[a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

۲. تفاضل

$$[a_1, a_2](-)[b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

۳. ضرب

$$[a_1, a_2](\bullet)[b_1, b_2] = [a_1 \bullet b_1 \wedge a_1 \bullet b_2 \wedge a_2 \bullet b_1 \wedge a_2 \bullet b_2, a_1 \bullet b_1 \vee a_1 \bullet b_2 \vee a_2 \bullet b_1 \vee a_2 \bullet b_2]$$

که در آن $\wedge$ و $\vee$ به ترتیب مینیمم و ماکسیمم هستند.

۴. تقسیم

$$[a_1, a_2](/)[b_1, b_2] = [a_1/b_1 \wedge a_1/b_2 \wedge a_2/b_1 \wedge a_2/b_2, a_1/b_1 \vee a_1/b_2 \vee a_2/b_1 \vee a_2/b_2]$$

به‌جز حالاتی که در آن $b_1 = 0$ یا $b_2 = 0$ باشند.

۵. بازه معکوس
$$[a_1, a_3]^{-1} = [\frac{1}{a_1} \wedge \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_1} \vee \frac{1}{a_3}]$$
به‌جز حالاتی که در آن $a_1 = 0$ یا $a_3 = 0$ باشند.

۳.۳.۱ عملگر روی عدد فازی مثلثی به وسیله‌ی α-برش

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. α-برش آن‌ها به ترتیب به‌صورت زیر است:
$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}], \forall\alpha \in [0, 1], a_1, a_3, a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$$
$$\tilde{B}_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}], \forall\alpha \in [0, 1], b_1, b_3, b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$$
که در آن $a_1^{(\alpha)} = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$، $a_3^{(\alpha)} = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$، $b_1^{(\alpha)} = (b_2 - b_1)\alpha + b_1$ و $b_3^{(\alpha)} = -(b_3 - b_2)\alpha + b_3$ است.
چون α-برش اعداد فازی، مجموعه‌ای قطعی است، بنابراین می‌توان عملگرهای بازه‌ای را برای آن‌ها به‌صورت زیر بکار برد.

- جمع
$$[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}](+)[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} + b_3^{(\alpha)}].$$

- تفاضل
$$[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}](-)[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} - b_3^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}].$$

جمع و تفاضل اعداد فازی مثلثی، عدد فازی مثلثی است ولی ضرب و تقسیم آن‌ها فازی مثلثی نیست.

ملاحظه ۸.۳.۱. لازم به توضیح است که همه‌ی گراف‌های در نظر گرفته شده در این پایان‌نامه ساده هستند.

فصل ۲

طیف گراف فازی

۱.۲ معرفی طیف گراف

تعریف ۱.۱.۲. طیف گراف [۱] G، مجموعه مقادیر ویژه حاصل از ماتریس مجاورت گراف همراه با مرتبه تکرار هر یک از این مقادیر ویژه می‌باشد. اگر مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ و مرتبه تکرار هریک به ترتیب $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ باشد، آنگاه طیف گراف G را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

خواص طیف گراف با خواص گراف رابطه دارد. این زمینه از نظریه‌ی گراف را نظریه‌ی طیفی گراف می‌نامند که توسط **کولاتز** [۲] و **سینکویتز** [۳] در سال ۱۹۵۷ مطرح گردید. طیف گراف در زمینه‌ی گسترده‌ای از فیزیک، آمار، مسائل مربوط به بهینه‌سازی، تشخیص چهره، مدل سازی انتشار ویروس در شبکه‌های کامپیوتری، تامین امنیت اطلاعات شخصی در پایگاه‌های داده، سایر شاخه‌های ریاضیات، همین‌طور در شیمی در نظریه‌ی مولکولی اشباع نشده‌ی هیدروکربن که نظریه اوربیتال مولکولی **هاکل** [۴] نامیده می‌شود، کاربرد دارد [۷].

هرگاه G گراف ساده با n راس و m یال و مقادیر ویژه‌ی آن به ترتیب نزولی $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ باشند، آنگاه همواره دو خاصیت مهم برای آن برقرار است [۶]:

لم ۲.۱.۲. فرض کنید G گراف ساده با n راس باشد، آنگاه:

الف)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,$$

[۱] Spectrum

[۲] Collatz

[۳] Sinogowitz

[۴] Huckel

ب)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m.$$

برهان. الف) از آن‌جایی که G گرافی ساده و فاقد حلقه است، بنابراین تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس مجاورت از گراف G صفر است. بنابر تعریف، **اثر**[5] ماتریس مربعی A مجموع عناصر قطری آن است. از طرفی مقادیر ویژه ماتریس‌های قطری، همان عناصر واقع بر قطر اصلی‌اند. زیرا اگر ماتریس $\lambda I - A$ را تشکیل دهیم، در این‌صورت این ماتریس نیز قطری است و اعضای این ماتریس $\lambda - a_{ii}$ می‌باشد. بنابراین

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

پس $\lambda_1 = a_{11}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}$ مقادیر ویژه ماتریس A است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0.$$

ب) هرگاه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند، آنگاه مقادیر ویژه A^k به ازای $k \in \mathbb{N}$، $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ است. بنابراین λ^2 مقدار ویژه ماتریس A^2 است. اما از آن‌جایی که $a_{i,i}^2$ درجه‌ی راس i است، بنابراین $tr(A^2)$ برابر با مجموع درجات است. پس خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2,$$

همچنین همواره مجموع درجات در یک گراف، دو برابر تعداد یال‌ها است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m.$$

□

۲.۲ انرژی گراف

یکی از مفاهیم مربوط به طیف گراف، انرژی است. همان‌طور که از نام آن مشخص است این‌که، از مفهوم انرژی در علم شیمی الهام گرفته شده است. مطالعه‌ی انرژی π–الکترون در شیمی از نظر قدمت به سال ۱۹۴۰ برمی‌گردد. در شیمی مقدار این انرژی با استفاده از انتگرال **کولسن**[6] محاسبه می‌شود. این فرمول در سال ۱۹۴۰ توسط کولسن معرفی شد و به انتگرال کولسون موسوم است [۴۲]. این انتگرال، به‌صورت قضیه در زیر بیان شده است.

[5] Trace

[6] Coulson

قضیه ۱.۲.۲. [۴۲] اگر G گرافی با n راس باشد، آنگاه :

$$E_\pi(G)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[n-\frac{\mathrm{i}x\varphi\prime(G,\mathrm{i}x)}{\varphi(G,\mathrm{i}x)}\right]\mathrm{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[n-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln\varphi(G,\mathrm{i}x)\right]\mathrm{dx}$$

که در آن $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ است.

اما از آن‌جایی که محاسبه‌ی این انتگرال پیچیده است، دانشمندان به دنبال رابطه‌ای ساده‌تر برای محاسبه‌ی این انرژی هستند [۱۲]. در سال ۱۹۷۸ توسط **ایوان گاتمن**[۷] رابطه‌ای برای محاسبه‌ی انرژی تعریف شده است. همچنین ثابت شده که این مقدار، برابر با مقدار انرژی است که با استفاده از انتگرال کولسن محاسبه می‌شد. همچنین انرژی برای **گراف علامت‌دار**[۸] و **گراف وزن‌دار**[۹] توسط ایوان گاتمن و **شائو**[۱۰] در سال ۲۰۱۱ ارائه شده است [۲۰].

تعریف ۲.۲.۲. **انرژی**[۱۱] گراف ساده $G=(V,E)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(G)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$$

که در آن $1\leq i\leq n$: λ_i، مقادیر ویژه حاصل از ماتریس مجاورت گراف G است [۴].

نتیجه ۳.۲.۲. انرژی گراف صفر است، اگر وتنها اگر گراف بدیهی باشد.

۱.۲.۲ تعیین برخی کران‌ها برای انرژی گراف

مطالب این زیربخش از مراجع [۱۶] و [۱۷] استخراج شد.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید G گراف ساده با n راس، m یال و A ماتریس مجاورت آن باشد، آنگاه:

$$\sqrt{2m+n(n-1)|detA|^{\frac{2}{n}}}\leq E(G)\leq\sqrt{2mn}.$$

برهان. طبق تعریف انرژی گراف داریم:

$$\begin{aligned}E(G)^2&=\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+2\sum_{i<k}|\lambda_i||\lambda_k|\\&=2m+n(n-1)AM\{|\lambda_i||\lambda_k|\},\end{aligned}\tag{۱.۲}$$

[۷] Ivan Gutman
[۸] Signed Graph
[۹] Weighted Graph
[۱۰] Shao
[۱۱] Energy

که در آن $AM\{|\lambda_i||\lambda_k|\}$، **میانگین حسابی**[۱۲] $\frac{n(n-1)}{2}$ جمله‌ی مجزا از $|\lambda_i||\lambda_k|$، $(i < k)$ است . از طرفی همواره **میانگین هندسی**[۱۳] اعداد نامنفی، از میانگین حسابی آن‌ها نمی‌تواند بیشتر باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
GM\{|\lambda_i||\lambda_k|\} &= \left(\prod_{i<k} |\lambda_i||\lambda_k|\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{(n-1)}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= |detA|^{\frac{2}{n}},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۱.۲) و (۲.۲) خواهیم داشت:

$$E(G) \geq \sqrt{2m + n(n-1)|detA|^{\frac{2}{n}}}, \tag{3.2}$$

برای طرف راست نامساوی، چون همواره واریانس اعداد نامنفی بزرگتر یا مساوی صفر است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
var\{|\lambda_i|\} &= AM\{|\lambda_i|^2\} - (AM\{|\lambda_i|\})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)^2 \\
&= \frac{2m}{n} - \left(\frac{E(G)}{n}\right)^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

بنابراین $E(G)^2 \leq 2mn$ و در نتیجه داریم:

$$E(G) \leq \sqrt{2mn}, \tag{5.2}$$

بنابراین از ترکیب روابط (۳.۲) و (۵.۲) قضیه اثبات می‌شود. □

نتیجه ۵.۲.۲. G گرافی منتظم از درجه صفر یا یک است اگر و تنها اگر $E(G) = \sqrt{2mn}$ باشد.

قضیه ۶.۲.۲. اگر گراف G دارای m یال باشد، آنگاه:

$$2\sqrt{m} \leq E(G) \leq 2m.$$

برهان. برای اثبات طرف راست نامساوی، چون برای هر گراف با n راس و m یال و بدون راس تنها، همواره $n \leq 2m$ است، با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) داریم:

$$E(G) \leq \sqrt{2mn} \leq \sqrt{2m(2m)} = 2m,$$

[۱۲] Arithmetic Mean (AM)

[۱۳] Geometric Mean (GM)

و بنابراین $E(G) \leq ۲m$ است.

برای اثبات طرف چپ نامساوی، با استفاده از لم (۲.۱.۲) داریم:

$$۲ \sum_{۱\leq i<j\leq n} \lambda_i\lambda_j = -۲m,$$

بنابراین با استفاده از تعریف انرژی گراف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(G)^۲ &= \left(\sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|\right)^۲ \\ &= ۲m + ۲\sum_{i<j} |\lambda_i||\lambda_j| \geq ۲m + ۲|\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j| \\ &= ۲m + |-۲m| = ۴m, \end{aligned}$$

در نتیجه $E(G) \geq ۲\sqrt{m}$ است و قضیه ثابت می‌شود. □

نتیجه ۷.۲.۲. در حالتی که G هیچ راس تنهایی نداشته باشد $E(G) = ۲\sqrt{m}$ است، اگر و تنها اگر G یک گراف دوبخشی کامل باشد و $E(G) = ۲m$ است، اگر و تنها اگر G منتظم از درجه‌ی یک باشد.

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید G گراف ساده با n راس و m یال و $\lambda_۱$ بزرگترین مقدار ویژه حاصل از ماتریس مجاورت آن باشد، آنگاه:

$$E(G) \leq \lambda_۱ + \sqrt{(n-۱)(۲m-\lambda_۱^۲)}$$

برهان. با استفاده از نامساوی **کوشی- شوارتز**[۱۴] برای $(۱,\ldots,۱)$ و $(|\lambda_۲|,\ldots,|\lambda_n|)$ داریم:

$$\left(|\sum_{i=۲}^{n} \lambda_i|\right)^۲ \leq (\sum_{i=۲}^{n} |\lambda_i|^۲)(n-۱), \qquad (۶.۲)$$

همچنین با استفاده از تعریف انرژی و رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} (E(G))^۲ &= \left(\sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|\right)^۲ \\ &\leq |\lambda_۱|^۲ + (n-۱)(۲m-\lambda_۱^۲), \end{aligned} \qquad (۷.۲)$$

و در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$E(G) \leq \lambda_۱ + \sqrt{(n-۱)(۲m-\lambda_۱^۲)}. \qquad (۸.۲)$$

□

قضیه‌ی (۸.۲.۲) را می‌توان به شکل دیگری بازنویسی کرد.

[۱۴] Cauchy- Schwarz

نتیجه ۹.۲.۲. هرگاه گراف G راس تنها نداشته باشد، $2m \geq n$ است.
از طرفی تابع $F(x) = x + \sqrt{(n-1)(2m - x^2)}$ به ازای $x \geq \frac{2m}{n}$ نزولی است.
بنابراین خواهیم داشت:

$$E(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)\left(2m - (\frac{2m}{n})^2\right)} \qquad (9.2)$$

نتیجه ۱۰.۲.۲. رابطه‌ی (۹.۲) به‌صورت تساوی برقرار است، اگر وتنها اگر G گرافی منتظم از درجه‌ی صفر، یک، $n-1$ یا گرافی به شدت منتظم همبند غیرکامل با دو مقدار ویژه غیربدیهی باشد، که هر دو، مقدار قدرمطلق زیر را دارند:

$$\sqrt{\frac{[2m - (\frac{2m}{n})^2]}{n-1}}.$$

۲.۲.۲ برخی روابط در انرژی گراف

هر یک از روابط زیر توسط گاتمن و ژئو[15] اثبات شده است [۱۷]:

نکته ۱۱.۲.۲. همواره $E(G) \geq 0$ است و تساوی برقرار است، اگر وتنها اگر $m = 0$ باشد.

نکته ۱۲.۲.۲. هرگاه گراف G شامل دو مولفه‌ی همبندی G_1 و G_2 باشد، آنگاه :

$$E(G) = E(G_1) + E(G_2).$$

نکته ۱۳.۲.۲. هرگاه G_1 یکی از مولفه‌های همبندی از گراف G بوده و سایر مولفه‌های آن رئوس تنها باشند، آنگاه:

$$E(G) = E(G_1).$$

۳.۲ طیف گراف فازی

تعریف ۱.۳.۲. یک **گراف فازی**[16] با مجموعه زمینه V، به‌صورت دوتایی مرتب $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ است، که $\sigma : V \to [0,1]$ یک زیر مجموعه فازی از مجموعه ناتهیV و $\mu : V \times V \to [0,1]$ رابطه‌ای فازی روی زیر مجموعه فازی σ است، به‌طوری که داشته باشیم:

$$\mu(x,y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y) \quad : \forall x, y \in V,$$

این گراف با $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ نشان داده می‌شود. گراف زمینه از $\tilde{G}$ را با $G^* = (\sigma^*, \mu^*)$ نشان می‌دهیم، که σ^* مجموعه‌ی ناتهی از رئوس و $\mu^* = E \subseteq V \times V$ است.

[15] Bo Zhou
[16] Fuzzy Graph

در سال ۱۹۷۵، **رزنفلد**[۱۷] به بحث در مورد گراف‌های فازی پرداخت. این مطلب بر پایه و اساس ایده **کافمن**[۱۸] در سال ۱۹۷۳، بنا شده بود. رابطه‌های فازی بین مجموعه‌های فازی توسط رزنفلد در نظر گرفته شد و وی ساختار گراف‌های فازی، شامل مقایسه برخی گراف‌ها و مفاهیم نظری را توسعه بخشید [۳۰، ۲۱].

ملاحظه ۲.۳.۲. در تعریف گراف فازی، مجموعه رئوس V می‌تواند مجموعه‌ای قطعی باشد که آن‌را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم [۲۳] :

$$\tilde{G} = (V, \tilde{E}).$$

تعریف ۳.۳.۲. گراف فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ را **گراف دوبخشی فازی**[۱۹] گویند، هرگاه دو مجموعه‌ی ناتهی $V_۱$ و $V_۲$ از رئوس وجود داشته، به‌طوری که برای هر u, v متعلق به $V_۱$ یا $V_۲$، $\mu(u, v) = ۰$ باشد [۳۳].

تعریف ۴.۳.۲. گراف فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ را **گراف فازی کامل**[۲۰] گویند، هرگاه داشته باشیم:

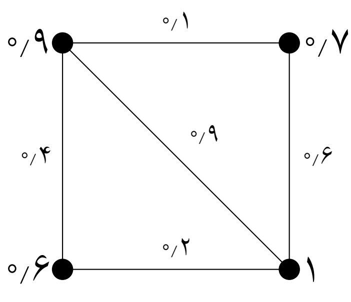
$$\forall u, v \in V : \mu(u, v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v),$$

که uv یال بین u و v است. به عبارت دیگر بین هر دو راس گراف، یالی به شرط بالا وجود داشته باشد [۱۵].

تعریف ۵.۳.۲. ماتریس مجاورت فازی[۲۱] از گراف فازی $\tilde{G}$، $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ در نظر گرفته می‌شود [۳].

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \mu(u_i, u_j), & \text{هرگاه } u_i \text{ و } u_j \text{ مجاورند}, \\ ۰, & \text{سایر موارد}. \end{cases}$$

مثال ۶.۳.۲. در شکل‌های (۱.۲) و (۲.۲) دو نمونه از گراف‌های فازی نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: گراف فازی $\tilde{G}_۱ = (\tilde{V}, \tilde{E})$

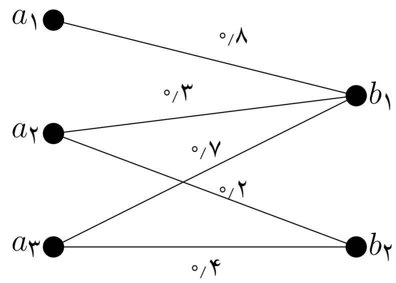
[۱۷] Rosenfeld

[۱۸] Kauffman

[۱۹] Bipartite Fuzzy Graph

[۲۰] Complete Fuzzy Graph

[۲۱] Fuzzy Adjacency Matrix



شکل ۲.۲: گراف فازی $\tilde{G}_۲ = (V, \tilde{E})$

مثال ۷.۳.۲. ماتریس مجاورت گراف فازی $\tilde{G}_۱$ به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱ & ۰/۹ & ۰/۴ \\ ۰/۱ & ۰ & ۰/۶ & ۰ \\ ۰/۹ & ۰/۶ & ۰ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰ & ۰/۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف ۸.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی و $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت آن باشد. مجموعه مقادیر ویژه حاصل از ماتریس مجاورت گراف همراه با مرتبه تکرار هر یک از این مقادیر ویژه، **طیف گراف فازی**[۲۲] تعریف می‌شود.

۱.۳.۲ انرژی گراف فازی

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی و $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت آن باشد. **انرژی فازی**[۲۳] از $\tilde{G}$، مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه از $\tilde{A}$ تعریف می‌شود [۱۹، ۳].

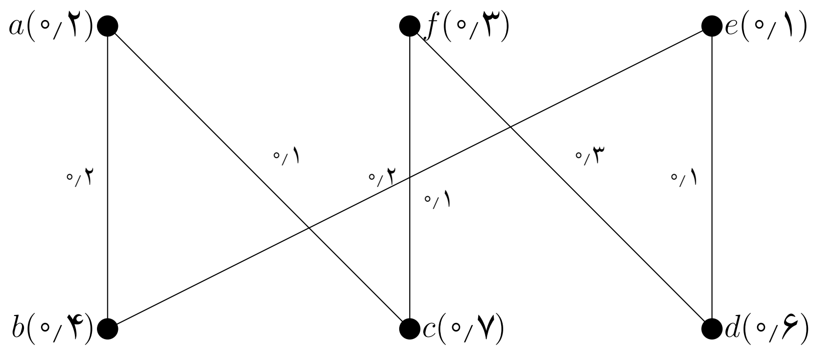
مثال ۱۰.۳.۲. گراف دوبخشی فازی $\tilde{G}$ در شکل (۳.۲) را در نظر بگیرید. طیف این گراف به‌صورت زیر است:

$$\{\tilde{\lambda}_۱ = ۰/۴۰۴۶, \tilde{\lambda}_۲ = ۰/۲۱۹۸, \tilde{\lambda}_۳ = ۰/۰۸۹۲, \tilde{\lambda}_۴ = -۰/۰۸۹۲, \tilde{\lambda}_۵ = -۰/۲۱۹۸, \tilde{\lambda}_۶ = -/۴۰۴۶\}$$

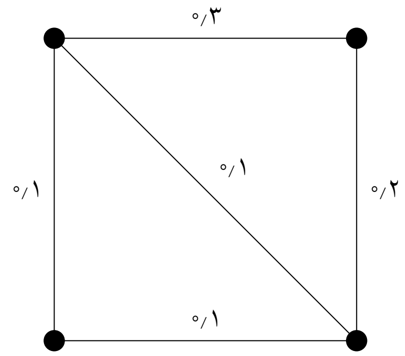
توجه می‌شود که مقادیر ویژه‌ی این گراف دو به دو قرینه هستند.
از طرفی انرژی آن، $E(\tilde{G}) = ۲\sum_{i=۱}^{۳} \tilde{\lambda}_i = ۱/۴۲۷۲$ است.

مثال ۱۱.۳.۲. گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۴.۲) را درنظر بگیرید. $\tilde{B}$ ماتریس مجاورت این گراف، به‌صورت زیر است.

[۲۲] Fuzzy Spectrum
[۲۳] Fuzzy Energy



شکل ۳.۲: گراف دوبخشی فازی $\tilde{G}$



شکل ۴.۲: گراف فازی $\tilde{G}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰٫۱ & ۰ & ۰٫۱ \\ ۰٫۱ & ۰ & ۰٫۲ & ۰٫۱ \\ ۰ & ۰٫۲ & ۰ & ۰٫۳ \\ ۰٫۱ & ۰٫۱ & ۰٫۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه به‌دست آمده از ماتریس مجاورت $\tilde{B}$، $\{-۰٫۳۴۴۲, -۰٫۱, ۰٫۰۰۶۶, ۰٫۴۳۷۶\}$ است. بنابراین طبق تعریف انرژی گراف $E(\tilde{G}) = ۰٫۸۸۸۴ < ۱$ خواهد شد.

نتیجه ۱۲.۳.۲. انرژی گراف ساده غیربدیهی (غیر وزن‌دار)، همیشه بیشتر از ۱ است [۴]. اما این نتیجه برای گراف‌های فازی همواره درست نیست.

۲.۳.۲ کران‌هایی برای انرژی گراف فازی

ابتدا چند حکم در مورد انرژی گراف‌های وزن‌دار بیان و سپس به بحث در مورد انرژی گراف‌های فازی پرداخته می‌شود.

لم ۲.۳.۱۳. [۱۹] فرض کنید G گراف وزن‌دار همبند از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ و e یالی از G با $w(e) \neq ۰$ باشد، آنگاه:

$$E(G) < E(G-e) + ۲|w(e)|.$$

قضیه ۲.۳.۱۴. [۱۹] فرض کنید $G=(n,m)$ گرافی وزن‌دار و $w(e_i)$ وزن یال $e_i : i = ۱\dots, m$ و ناصفر باشد، آنگاه:

$$E(G) \leq ۲\sum_{i=۱}^{m}|w(e_i)|,$$

که در آن تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر هریک از مولفه‌های همبندی G دارای حداکثر دو راس باشد.

برهان. فرض کنید G_e **زیرگراف فراگیر**[۲۴] (وزن‌دار) از G شامل یال تنهای e باشد، بنابراین:

$$A(G) = \sum_{i=۱}^{m} A(G_{e_i}),$$

با استفاده از **نامساوی کی فان**[۲۵] داریم [۲]:

$$E(G) = \sigma(A(G)) \leq \sum_{i=۱}^{m}\sigma(A(G_{e_i})) = ۲\sum_{i=۱}^{m}|w(e_i)|,$$

که در آن $\sigma(A(G))$ انرژی منفرد است. در ادامه حالت تساوی را اثبات می‌کنیم .

فرض کنید G_i مولفه‌ای از G شامل یال تنهای e_i باشد، آنگاه:

$$E(G) = \sum_{i=۱}^{m} E(G_i) = ۲\sum_{i=۱}^{m}|w(e_i)|.$$

برای اثبات قسمت لزوم، فرض کنید مولفه‌ی $H_۱$ از G شامل حداقل سه راس (یا حداقل دو یال)، $e_۱$ یالی از این مولفه و $H_۲, \dots, H_r$ سایر مولفه‌های G باشند، آنگاه با استفاده از لم (۲.۳.۱۳) داریم:

$$E(H_۱) < E(H_۱ - e_۱) + ۲|w(e_۱)|, \tag{۲.۱۰}$$

بنابراین با استفاده از تعریف انرژی و به‌کار بردن رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{i=۲}^{r} E(H_i) + E(H_۱) \\ &< \sum_{i=۲}^{r} E(H_i) + E(H_۱ - e_۱) + ۲|w(e_۱)| \\ &= E(G - e_۱) + ۲|w(e_۱)| \leq ۲\sum_{i=۲}^{m}|w(e_i)| + ۲|w(e_۱)| \\ &= ۲\sum_{i=۱}^{m}|w(e_i)|. \end{aligned}$$

□

[۲۴] Spanning Subgraph

[۲۵] Ky Fan Inequality

در قضیه‌ی قبل کران بالایی برای انرژی گراف وزن‌دار به‌دست آمده است. گراف فازی، گراف وزن‌دار با وزن‌های در بازه‌ی $[۰, ۱]$ است. بنابراین قضیه‌ی قبل را می‌توان به‌صورت زیر تعبیر کرد[۳]:

قضیه ۱۵.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد، آنگاه:

$$E(\tilde{G}) \leq ۲\sum_{i=۱}^{m} \mu(e_i).$$

هرگاه در گراف فازی، رئوس فازی در نظر گرفته شوند، بنابراین می‌توان کران بالایی بر اساس درجه عضویت رئوس داشته باشیم.

گزاره ۱۶.۳.۲. [۳] فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد، آنگاه:

$$E(\tilde{G}) \leq (n-۱)\sum_{i=۱}^{n} \sigma(v_i).$$

برهان. با استفاده از قضیه‌ی (۱۵.۳.۲) داریم:

$$E(\tilde{G}) \leq ۲\sum_{i=۱}^{m} \mu(e_i) \leq ۲\sum_{i=۱}^{\frac{n(n-۱)}{۲}} \mu(e_i),$$

از طرفی همواره $\mu(e_i) \leq min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$ و $\forall i > m : \mu(e_i) = ۰$ است.
بنابراین برای هر $v_i v_j \in V (i \neq j)$ داریم:

$$\begin{aligned} E(\tilde{G}) &\leq \sum_{i=۱}^{\frac{n(n-۱)}{۲}} \mu(e_i) + \mu(e_i) \\ &\leq \sum_{۱\leq i<j\leq n} \sigma(v_i) + \sigma(v_j) \\ &= (n-۱)\sum_{i=۱}^{n} \sigma(v_i). \end{aligned}$$

□

گزاره ۱۷.۳.۲. [۳] فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و G^* دور و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشند، آنگاه:

$$E(\tilde{G}) \leq ۲\sum_{i=۱}^{n} \sigma(v_i),$$

که $v_i \in V : i = ۱, \ldots, n$ است.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی (۱۵.۳.۲) داریم:

$$E(\tilde{G}) \leq ۲\sum_{i=۱}^{n} \mu(e_i), \tag{۱۱.۲}$$

که در آن e_i به‌صورت زیر است:

$$e_i = \begin{cases} v_iv_{i+1} & ,i = 1, \dots, n-1, \\ v_nv_1 & ,i = n, \end{cases}$$

نگاشت f را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد، که هر یال e_i را به راس v_i می‌نگارد:

$$f(e_i) = v_i : i = 1, \dots, n,$$

از آن‌جایی که $\mu(e_i) \le \sigma(v_i) : i = 1, \dots, n$ است، بنابراین با استفاده از (۱۱.۲) داریم:

$$E(\tilde{G}) \le 2 \sum_{i=1}^{n} \sigma(v_i).$$

□

قضیه ۱۸.۳.۲. [۳] فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_1, \dots, e_m\}$ باشد، و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i−امین یال باشد، آنگاه:

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{m} m_i^2 + n(n-1)|det\tilde{A}|^{\frac{2}{n}}} \le E(\tilde{G}) \le \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{m} m_i^2\right)n}.$$

برهان. برای طرف راست نامساوی، با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز برای $(1, \dots, 1)$ و $(|\tilde{\lambda}_1|, \dots, |\tilde{\lambda}_n|)$ رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i| \le \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^2)n}, \tag{۱۲.۲}$$

بنابراین داریم:

$$(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j, \tag{۱۳.۲}$$

از طرفی همواره رابطه‌های زیر را داریم:

$$\sum_{1\le i<j\le n} \tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{m} m_i^2, \tag{۱۴.۲}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^2 = 2\sum_{i=1}^{m} m_i^2, \tag{۱۵.۲}$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۱۲.۲) و (۱۵.۲) ، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i| \le \sqrt{2(\sum_{i=1}^{m} m_i^2)n}, \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین به رابطه‌ی زیر دست می‌یابیم:

$$E(\tilde{G}) \le \sqrt{2(\sum_{i=1}^{m} m_i^2)n}. \tag{۱۷.۲}$$

برای اثبات طرف چپ نامساوی، با استفاده از تعریف انرژی گراف داریم:

$$\begin{aligned}\left(E(\tilde{G})\right)^{۲} &= \left(\sum_{i=۱}^{n}|\tilde{\lambda}_i|\right)^{۲} \\ &= \sum_{i=۱}^{n}|\tilde{\lambda}_i|^{۲} + ۲\sum_{۱\leq i<j\leq n}|\tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j| \\ &= ۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲} + ۲\frac{n(n-۱)}{۲}AM\{|\tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j|\},\end{aligned} \tag{۱۸.۲}$$

از طرفی چون همواره میانگین هندسی از اعداد نامنفی از میانگین حسابی آن‌ها کمتر است، بنابراین رابطه‌ی (۱۸.۲) به‌صورت زیر خواهد شد:

$$E(\tilde{G}) \geq \sqrt{۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲} + n(n-۱)GM(|\tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j|)}, \tag{۱۹.۲}$$

اما میانگین هندسی در رابطه‌ی بالا به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}GM\{|\tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j|\} &= \left(\prod_{۱\leq i<j\leq n}|\tilde{\lambda}_i\tilde{\lambda}_j|\right)^{\frac{۲}{n(n-۱)}} \\ &= \left(\prod_{i=۱}^{n}|\tilde{\lambda}_i|^{n-۱}\right)^{\frac{۲}{n(n-۱)}} \\ &= \left(\prod_{i=۱}^{n}|\tilde{\lambda}_i|\right)^{\frac{۲}{n}} \\ &= |det\tilde{A}|^{\frac{۲}{n}},\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

بنابراین رابطه‌ی (۱۹.۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل خواهد شد:

$$E(\tilde{G}) \geq \sqrt{۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲} + n(n-۱)|det\tilde{A}|^{\frac{۲}{n}}}, \tag{۲۱.۲}$$

در نتیجه با ترکیب روابط (۱۷.۲) و (۲۱.۲) خواهیم داشت:

$$\sqrt{۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲} + n(n-۱)|det\tilde{A}|^{\frac{۲}{n}}} \leq E(\tilde{G}) \leq \sqrt{۲(\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲})n}. \tag{۲۲.۲}$$

□

در این‌جا قضیه‌ی دیگری برای کران بالای انرژی گراف‌های فازی، بررسی می‌شود.

قضیه ۱۹.۳.۲. [۳] فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد، و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i–امین یال و $n \leq ۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲}$ باشند، آنگاه:

$$E(\tilde{G}) \leq \frac{۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲}}{n} + \sqrt{(n-۱)\left(۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲} - \left(\frac{۲\sum_{i=۱}^{m}m_i^{۲}}{n}\right)^{۲}\right)}.$$

برهان. فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس متقارن با قطر اصلی صفر باشد ، آنگاه:

$$\lambda_{max} \geq \frac{۲\sum_{۱\leq i<j\leq n} a_{ij}}{n},$$

از طرفی هرگاه مقادیر ویژه به‌دست آمده از ماتریس مجاورت گراف فازی $\tilde{G}$ به ترتیب نزولی، $\tilde{\lambda}_۱,\dots,\tilde{\lambda}_n$ باشند، آنگاه:

$$\tilde{\lambda}_۱ \geq \frac{(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i)}{n}, \tag{۲۳.۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^۲ = ۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲, \tag{۲۴.۲}$$

پس داریم:

$$\sum_{i=۲}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^۲ = ۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - \tilde{\lambda}_۱^۲, \tag{۲۵.۲}$$

با به کار بردن نامساوی کوشی- شوارتز رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E(\tilde{G}) - \tilde{\lambda}_۱ = \sum_{i=۲}^{n} |\tilde{\lambda}_i| \leq \sqrt{(n-۱)\sum_{i=۲}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^۲}, \tag{۲۶.۲}$$

حال با استفاده از روابط (۲۵.۲) و (۲۶.۲) داریم:

$$E(\tilde{G}) \leq \tilde{\lambda}_۱ + \sqrt{(n-۱)\left(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - \tilde{\lambda}_۱^۲\right)}, \tag{۲۷.۲}$$

از آن‌جایی که تابع $F(x)=x+\sqrt{(n-۱)(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - x^۲)}$ در بازه‌ی $\left(\sqrt{\frac{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n}}, \sqrt{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}\right]$ نزولی است، و از طرفی چون $n \leq ۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲$ و $\frac{(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲)}{n} \geq ۱$ برقرار است، آنگاه داریم:

$$\sqrt{\frac{(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲)}{n}} \leq \frac{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n} \leq \frac{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i}{n} \leq \tilde{\lambda}_۱ \leq \sqrt{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}, \tag{۲۸.۲}$$

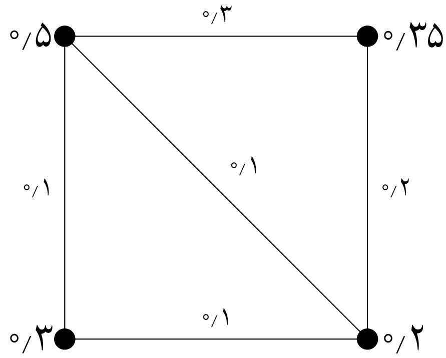
در نتیجه با استفاده از روابط (۲۷.۲) و (۲۸.۲) داریم:

$$E(\tilde{G}) \leq \frac{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n} + \sqrt{(n-۱)\left(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - \left(\frac{۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n}\right)^۲\right)}. \tag{۲۹.۲}$$

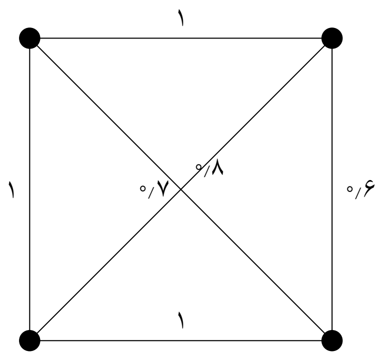
□

مثال ۲۰.۳.۲. گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۵.۲) را در نظر بگیرید.
مقادیر ویژه‌ی آن $\{-۰/۳۴۴۲, -۰/۱, ۰/۰۰۶۶, ۰/۴۳۷۶\}$ است. با استفاده از قضیه‌ی (۱۸.۳.۲) کران بالایی برای انرژی این گراف، به‌دست می‌آید:

$$E(\tilde{G}) \leq \sqrt{۲\times ۰/۱۶ \times ۴} = ۱/۱۳۱۳, E(\tilde{G}) \geq \sqrt{۲\times ۰/۱۶ + ۱۲\times ۰/۰۰۰۱} = ۰/۵۶۶۷.$$



شکل ۲.۵: گراف فازی $\tilde{G}$ با ۴ راس



شکل ۲.۶: گراف فازی $\tilde{G}$

مثال ۲.۳.۲۱. گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۲.۶) را در نظر بگیرید.
با استفاده از قضیه‌ی (۲.۳.۱۹) کران بالایی برای انرژی این گراف، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:
$$E(\tilde{G}) \leq \frac{۲(۴/۴۹)}{۴} + \sqrt{۳(۴/۴۹ - (\frac{۴/۴۹}{۴})^{۲})} = ۶/۰۳۴.$$

فصل ۳

روش اول برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از ماتریس فازی

۱.۳ مقدمه

در این فصل روشی برای یافتن **مقادیر ویژه فازی**[۱] و **بردارهای ویژه فازی**[۲] به کار برده می‌شود. برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی، باید سیستم معادلات خطی $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X}$ را حل کنیم. $\tilde{a}_{ij}$ برای هر $i, j = ۱, \dots, n$، درایه ماتریس $\tilde{A}$ است و $\tilde{\lambda}$ عددی فازی است که آن‌را مقدار ویژه فازی می‌نامند.

سیستم $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X}$، را یک **سیستم خطی کاملا فازی**[۳] گویند. **مازیولی**[۴] و **رینرتز**[۵] به بررسی این سیستم پرداخته‌اند. واضح است که وقتی n بزرگ باشد به دست آوردن جواب، دشوار و به‌صورت تخمینی است [۲۷] .

در ماتریس حقیقی، مقادیر ویژه به وسیله‌ی دترمینان از سیستم قطعی $AX = \lambda X$ به‌دست می‌آید. اما روشی برای پیدا کردن دترمینان ماتریس فازی $\tilde{A}$ وجود ندارد. بنابراین نیاز به استفاده از روش‌های غیرمستقیم برای یافتن مقادیر ویژه‌ی فازی است.

روش نشان داده شده در این فصل، به این صورت است که ابتدا سیستم با ماتریس ۱-برش حل می‌شود. بنابراین سیستم قطعی به‌دست می‌آید. سپس برخی از **گستره‌های**[۶] مجهول، به هر سطر از سیستم ۱-برش اختصاص داده می‌شود. در نتیجه سیستم اصلی که معادل با $۲n$ معادله است، حل می‌شود [۱].

[۱] Fuzzy Eigenvalues

[۲] Fuzzy Eigenvectors

[۳] Fully Fuzzy Linear System (FFLS)

[۴] Muzzioli

[۵] Reynaerts

[۶] Spreads

۲.۳ تعاریف اولیه

تعاریف این بخش از مرجع [۳۲] استخراج شد.
فرض کنید $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ ماتریسی فازی باشد. عدد فازی λ و بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^t$، که در آن $\tilde{x}_i(r) = [\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)], (1 \leq i \leq n, 0 \leq r \leq 1)$ به ترتیب مقادیرویژه و بردارهای ویژه از ماتریس $\tilde{A}$ می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم:

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{\tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j} = \underline{\lambda\tilde{x}_i}, \quad \overline{\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j} = \overline{\lambda\tilde{x}_i}.$$

تعریف ۱.۲.۳. مجموعه جواب متحد[۷](USS)، **مجموعه جواب نسبتا خوب**[۸](TSS) و **مجموعه جواب قابل کنترل**[۹](CSS) برای یک سیستم کاملا فازی $AX = b$، به ترتیب مجموعه‌های زیر است:

$$X_{\exists\exists} = \{x' \in \mathbb{R}^n : (\exists A' \in A)(\exists b' \in b) : A'x' = b'\} = \{x' \in \mathbb{R}^n : Ax' \cap b \neq \emptyset\},$$

$$X_{\forall\exists} = \{x' \in \mathbb{R}^n : (\forall A' \in A)(\exists b\prime \in b) : A'x' = b'\} = \{x' \in \mathbb{R}^n : Ax' \subseteq b\},$$

$$X_{\exists\forall} = \{x' \in \mathbb{R}^n : (\forall b' \in b)(\exists A' \in A) : A'x' = b'\} = \{x' \in \mathbb{R}^n : Ax' \supseteq b\}.$$

تعریف ۲.۲.۳. بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^t$ را **جواب متقارن مینیمال**[۱۰] از سیستم کاملا فازی $AX = b$ می‌نامند، که در آن $\tilde{x}_i(r) = [\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)]$ برای هر $1 \leq i \leq n, 0 \leq r \leq 1$ است. این جواب در مجموعه جواب قابل کنترل واقع شده است . برای هر جواب متقارن دلخواه $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)^t$ که در مجموعه جواب قابل کنترل قرار دارد به طوری که $\tilde{X}(1) = \tilde{Y}(1)$ باشد، داریم:

$$\tilde{Y} \supseteq \tilde{X}, \quad i.e., (\tilde{y}_i \supseteq \tilde{x}_i), \quad (\delta_{\tilde{y}_i} \geq \delta_{\tilde{x}_i}), \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

که $\delta_{\tilde{y}_i}$ و $\delta_{\tilde{x}_i}$ به ترتیب گستره های متقارن از $\tilde{y}_i$ و $\tilde{x}_i$ می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۳. بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^t$ با $\tilde{x}_i(r) = [\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)]$ برای $1 \leq i \leq n, 0 \leq r \leq 1$ را **جواب متقارن ماکسیمال**[۱۱] از سیستم کاملا فازی $AX = b$ می‌نامند. این جواب در مجموعه جواب قابل کنترل واقع شده است. برای هر بردار دلخواه متقارن $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)^t$ که $\tilde{X}(1) = \tilde{Z}(1)$ باشد، داریم:

$$\tilde{X} \supseteq \tilde{Z}, \quad i.e., (\tilde{x}_i \supseteq \tilde{z}_i), \quad (\delta_{\tilde{x}_i} \geq \delta_{\tilde{z}_i}), \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

که $\delta_{\tilde{x}_i}$ و $\delta_{\tilde{z}_i}$ به ترتیب گستره‌های متقارن از $\tilde{x}_i$ و $\tilde{z}_i$ می نامند.

[۷] United Solution Set (USS)
[۸] Tolerable Solution Set (TSS)
[۹] Controllable Solution Set (CSS)
[۱۰] Minimal Symmetric Solution
[۱۱] Maximal Symmetric Solution

تعریف ۴.۲.۳. عدد فازی $\tilde{\lambda}$ و بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_n})^t$ که به ترتیب به‌صورت $\tilde{x}_i(r) = [\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)]$ و $\tilde{\lambda}(r) = [\underline{\lambda}(r), \overline{\lambda}(r)]$ برای $1 \leq i \leq n, 0 \leq r \leq 1$ نشان داده می‌شوند را مقدار ویژه و بردار ویژه مینیمال از $\tilde{A}$ می‌نامند. برای مقدار ویژه و بردار ویژه متقارن $\tilde{\mu}$ و $\tilde{Y} = (\tilde{y_1}, \dots, \tilde{y_n})^t$ با $\tilde{\mu}(1) = \tilde{\lambda}(1)$ و $\tilde{Y}(1) = \tilde{Z}(1)$ ، داریم:

$$\tilde{\mu} \supseteq \tilde{\lambda}, i.e., (\delta_{\tilde{\mu}} \geq \delta_{\tilde{\lambda}}),$$

$$\tilde{Y} \supseteq \tilde{X}, \quad i.e., (\tilde{y}_i \supseteq \tilde{x}_i) \quad (\delta_{\tilde{y}_i} \geq \delta_{\tilde{x}_i}), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

که $\delta_{\tilde{\mu}}$، $\delta_{\tilde{\lambda}}$ ، $\delta_{\tilde{y}_i}$ و $\delta_{\tilde{x}_i}$ به ترتیب گستره‌های متقارن $\tilde{\mu}$، $\tilde{\lambda}$ ، $\tilde{y}_i$ و $\tilde{x}_i$ است.

تعریف ۵.۲.۳. عدد فازی $\tilde{\lambda}$ و بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_n})^t$ که به ترتیب به‌صورت $\tilde{x}_i(r) = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ و $\tilde{\lambda}(r) = [\underline{\lambda}(r), \overline{\lambda}(r)]$ برای $1 \leq i \leq n, 0 \leq r \leq 1$ نشان داده می‌شوند را مقدار ویژه و بردار ویژه ماکسیمال از $\tilde{A}$ می‌نامند. برای مقدار ویژه و بردار ویژه متقارن $\tilde{\nu}$ و $\tilde{Z} = (\tilde{z_1}, \dots, \tilde{z_n})^t$ با $\tilde{\nu}(1) = \tilde{\lambda}(1)$ و $\tilde{Z}(1) = \tilde{X}(1)$ ، داریم:

$$\tilde{\lambda} \supseteq \tilde{\nu}, \quad i.e., (\delta_{\tilde{\lambda}} \geq \delta_{\tilde{\nu}}),$$

$$\tilde{X} \supseteq \tilde{Z}, i.e., \quad (\tilde{x}_i \supseteq \tilde{z}_i) \quad i.e., (\delta_{\tilde{x}_i} \geq \delta_{\tilde{z}_i}), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

که $\delta_{\tilde{\nu}}$، $\delta_{\tilde{\lambda}}$، $\delta_{\tilde{x}_i}$ و $\delta_{\tilde{z}_i}$ به ترتیب گستره های متقارن از $\tilde{\nu}, \tilde{\lambda}, \tilde{x}_i$ و $\tilde{z}_i$ هستند.

۳.۳ یافتن مقادیر ویژه فازی

مطالب این بخش از مرجع [۱] استخراج شده است.
فرض کنید $\tilde{A}$ ماتریسی $n \times n$ فازی با عناصر عددهای فازی و $\tilde{\lambda}$ عددی فازی باشند. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X} \tag{۱.۳}$$

حال ۱-برش از سیستم (۱.۳) که در زیر نمایش داده شده است را حل می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(1)\tilde{x}_j(1) = \tilde{\lambda}(1)\tilde{x}_j(1) \tag{۲.۳}$$

$\tilde{\lambda}(1)$ با حل سیستم (۲.۳) به‌دست می‌آید و آنرا هسته‌ی عدد نامجهول $\tilde{\lambda}$ می‌نامند و از رابطه زیر به‌دست آمده است :

$$det(\tilde{A}(1) - \tilde{\lambda}(1)I) = 0$$

$\tilde{A}(1)$ ، ۱-برش از $\tilde{A}$ و شامل عناصر $\tilde{a}_{ij}(1) : i, j = 1, 2, \dots, n$ است و I ماتریس همانی $n \times n$ است. با حل این دترمینان، حداکثر تعداد مقادیر ویژه n خواهد بود، زیرا معادله مشخصه‌ی آن از درجه n است. $\lambda(1)$ به دو گستره نیاز دارد که آنرا به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\tilde{\lambda} = [\underline{\lambda}(r) - \alpha(r), \overline{\lambda}(r) + \beta(r).] \tag{۳.۳}$$

$\alpha(r)$ و $\beta(r)$ که $r \in [\circ, ۱]$ است، به ترتیب گستره‌های چپ و راست هستند. هرگاه بتوانیم $\alpha(r)$ و $\beta(r)$ را بیابیم، آنگاه $\tilde{\lambda}$ پیدا خواهد شد.

ابتدا فرض می‌کنیم $\tilde{\lambda}_j(۱)$ که از حل سیستم (۲.۳) به‌دست آمده است، معلوم باشد و $\tilde{x}_j$ به ازای $j = ۱, ۲, \dots, n$ را j امین عنصر $\tilde{X}$ در نظر می‌گیریم. سیستم (۱.۳) برقرار است، هرگاه بردار $\tilde{X}(۱)$ وجود داشته باشد با عناصر $\tilde{x}_j : j = ۱, ۲, \dots, n$ که در سیستم (۱.۳) صدق کند. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sum_{j=۱}^{n} [\underline{a}_{ij}(r), \overline{a}_{ij}(r)] \tilde{x}_j(۱) = [\underline{\lambda}(r), \overline{\lambda}(r)] \tilde{x}_i(۱) \qquad (۴.۳)$$

سیستم (۴.۳) به حالت قطعی اصلاح می‌شود. سعی می‌کنیم که گستره‌های هر $\tilde{\lambda}$ را بیابیم. برای پیدا کردن گستره‌ها سه ویژگی زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم :

- برای هر $\{j \in \mathbb{N} : ۱ \leq i \leq n\}$، $\tilde{x_j}(۱)$ مثبت باشد.
- برای هر $\{j \in \mathbb{N} : ۱ \leq i \leq n\}$، $\tilde{x_j}(۱)$ منفی باشد.
- برای هر $\{j \in \mathbb{N} : ۱ \leq i \leq k\}$، $\tilde{x_j}(۱)$ مثبت و برای هر $\{j \in \mathbb{N} : k + ۱ \leq i \leq n\}$، $\tilde{x_j}$ منفی باشد.

۱.۳.۳ حالت اول

فرض کنید که $\tilde{x}_j(۱)$ بردار مثبتی باشد، بنابراین سیستم (۴.۳) به دو سیستم زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r) \tilde{x}_j(۱) = (\tilde{\lambda}_i(۱) - \alpha_i(r)) \tilde{x}_i(۱), \qquad (۵.۳)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) \tilde{x}_j(۱) = (\tilde{\lambda}_i(۱) + \beta_i(r)) \tilde{x}_i(۱). \qquad (۶.۳)$$

اگر دو سیستم (۵.۳) و (۶.۳) را حل کنیم می‌توان $\alpha(r)$ و $\beta(r)$ را به ترتیب از i–امین سیستم (۴.۳) پیدا کرد. بنابراین داریم :

$$\alpha_i(r) = \tilde{\lambda}_i(۱) - \frac{\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r) \tilde{x}_j(۱)}{\tilde{x}_i(۱)}, \qquad (۷.۳)$$

$$\beta_i(r) = \frac{\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) \tilde{x}_j(۱)}{\tilde{x}_i(۱)} - \tilde{\lambda}_i(۱), \qquad (۸.۳)$$

آنگاه برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$، از قراردادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\alpha_i^۱ = min(\alpha_i(r)), \alpha_i^۲ = max(\alpha_i(r)), \qquad (۹.۳)$$

$$\beta_i^۱ = min(\beta_i(r)), \beta_i^۲ = max(\beta_i(r)). \qquad (۱۰.۳)$$

که در آن ماکسیمم و مینیمم به ازای $\circ \leq r \leq ۱$ است. لذا ماکسیمم و مینیمم $\tilde{\lambda}$ به‌صورت رابطه‌های زیر است:

$$\tilde{\lambda}_i^{min} = [\tilde{\lambda}_i(۱) - \alpha_i^۲(r), \tilde{\lambda}_i(۱) + \beta_i^۲(r)], \quad (۱۱.۳)$$

$$\tilde{\lambda}_i^{max} = [\tilde{\lambda}_i(۱) - \alpha_i^۱(r), \tilde{\lambda}_i(۱) + \beta_i^۱(r)]. \quad (۱۲.۳)$$

ملاحظه ۱.۳.۳. در (۱۱.۳) و (۱۲.۳) این حقیقت را در نظر می‌گیریم که $\tilde{a}$ عدد فازی بزرگتری از عدد فازی $\tilde{b}$ است ، هرگاه گستره‌های $\tilde{a}$ کمتر از گستره‌های $\tilde{b}$ باشد .

در حالت کلی $\tilde{\lambda}_i : ۱ \leq i \leq n$ برای تمام ξ که $\circ \leq \xi \leq ۱$ است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\lambda}_i \in (\xi \tilde{\lambda}_i^{min} + (۱-\xi)\tilde{\lambda}_i^{max}), \quad (۱۳.۳)$$

بنابراین مقادیر ویژه فازی کلی برای هر i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda}_i(r) = (\tilde{\lambda}_i(۱) - \gamma_i(r), \tilde{\lambda}_i(۱), \tilde{\lambda}_i(۱) + \delta_i(r)),$$

که در آن $\gamma_i = (۱-\xi)\alpha_i^۱ + \xi\alpha_i^۲$ و $\delta_i = (۱-\xi)\beta_i^۱ + \xi\beta_i^۲$ است.

رابطه (۱۳.۳) را می‌توان به‌صورت زیر تفسیر کرد:

هرگاه $\xi = \circ$ باشد، آنگاه $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_i^{max}$ است و هرگاه $\xi = ۱$ باشد، آنگاه $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_i^{min}$ است. به این معنا که هرگاه ξ به یک نزدیکتر باشد، آنگاه $\tilde{\lambda}$ به $\tilde{\lambda}_i^{min}$ نزدیکتر است و هرگاه ξ به صفر نزدیکتر باشد، آنگاه $\tilde{\lambda}$ به $\tilde{\lambda}_i^{max}$ نزدیکتر است.

۲.۳.۳ حالت دوم

در این زیر بخش، فرض می‌کنیم که برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, n$ ، $\tilde{x}_j(۱)$ بردارها منفی باشد. با در نظرگرفتن این فرض، سیستم (۴.۳) را می‌توان به دو سیستم زیر تبدیل کرد:

$$\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(۱) = (\tilde{\lambda}_i(۱) - \alpha_i(r))\tilde{x}_i(۱), \quad (۱۴.۳)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(۱) = (\tilde{\lambda}_i(۱) + \beta_i(r))\tilde{x}_i(۱). \quad (۱۵.۳)$$

$\alpha(r)$ و $\beta(r)$ با حل سیستم‌های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در i–امین سطر این سیستم‌ها به‌دست آمده‌اند و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم :

$$\alpha_i(r) = \tilde{\lambda}_i(۱) - \frac{\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(۱)}{\tilde{x}_i(۱)}, \quad (۱۶.۳)$$

$$\beta_i(r) = \frac{\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(۱)}{\tilde{x}_i(۱)} - \tilde{\lambda}_i(۱), \quad (۱۷.۳)$$

قراردادهای زیر را برای ماکسیمم و مینیمم $\alpha_i(r)$ و $\beta_i(r)$، به ازای $\circ \leq r \leq ۱$ به کار می‌بریم:

$$\alpha_i^۱(r) = min(\alpha_i(r)), \alpha_i^۲(r) = max(\alpha_i(r)), \quad (۱۸.۳)$$

$$\beta_i^{1}(r) = min(\beta_i(r)), \beta_i^{2}(r) = max(\beta_i(r)). \tag{۱۹.۳}$$

با به کار بردن قراردادهای (۱۸.۳) و (۱۹.۳) و ملاحظه (۱.۳.۳)، ماکسیمم و مینیمم $\tilde{\lambda}$ در دو رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda}_i^{max} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^{2}(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^{2}(r)], \tag{۲۰.۳}$$

$$\tilde{\lambda}_i^{min} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^{1}, \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^{1}(r)], \tag{۲۱.۳}$$

در حالت کلی $\tilde{\lambda}$ برای هر ξ، که $0 \leq \xi \leq 1$ است، به‌صورت ترکیب محدب زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{\lambda} = \xi\tilde{\lambda}^{min} + (1-\xi)\tilde{\lambda}^{max}. \tag{۲۲.۳}$$

رابطه (۲۲.۳) را می‌توان به‌صورت زیر تفسیر کرد:
هرگاه $\xi = 0$ باشد، آنگاه $\tilde{\lambda}$ به مقدار $\tilde{\lambda}^{max}$ نزدیکتر و هرگاه $\xi = 1$ باشد، آنگاه $\tilde{\lambda}$ به مقدار $\tilde{\lambda}^{min}$ نزدیکتر است. در حالت کلی $\tilde{\lambda}_i : 1 \leq i \leq n$ و برای هر $0 \leq \xi \leq 1$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\lambda}_i = \xi\tilde{\lambda}^{min} + (1-\xi)\tilde{\lambda}^{max}, \tag{۲۳.۳}$$

مقدار ویژه فازی کلی برای هر i که $i = 1, 2, \ldots, n$، به‌صورت زیر است :

$$\tilde{\lambda}_i = (\tilde{\lambda}_i(1) - \zeta_i, \tilde{\lambda}_i(1), \tilde{\lambda}_i(1) + \eta_i(r)),$$

که در آن $\zeta_i = (1-\xi)\alpha_i^{2} + \xi\alpha_i^{1}$ و $\eta_i = (1-\xi)\beta_i^{2} + \xi\beta_i^{1}$ است.

۳.۳.۳ حالت سوم

فرض کنید $\tilde{x}_j$ برای هر $\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k\}$ مثبت و برای هر $\{j \in \mathbb{N} : k+1 \leq i \leq n\}$ منفی باشد، به طوری که $k = 0, \ldots, n$ است . بنابراین با در نظر گرفتن شرط بالا سیستم (۴.۳) را می‌توان به‌صورت دو سیستم زیر در نظر گرفت:

$$\sum_{j=1}^{k} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) = (\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i(r))\tilde{x}_i(1), \tag{۲۴.۳}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) = (\tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i(r))\tilde{x}_i(1). \tag{۲۵.۳}$$

و برای هر i که $k+1 \leq i \leq n$ برقرار باشد می‌توان سیستم (۴.۳) را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\sum_{j=1}^{k} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) = (\tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i(r))\tilde{x}_i(1), \tag{۲۶.۳}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) = (\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i(r))\tilde{x}_i(1). \tag{۲۷.۳}$$

در نتیجه $\alpha_i(r)$ و $\beta_i(r)$ برای هر i که $1 \leq i \leq k$ یا $k+1 \leq i \leq n$ باشد، به‌صورت زیر خواهد شد:
هرگاه $1 \leq i \leq k$ باشد، داریم:

$$\alpha_i(r) = \tilde{\lambda}_i(1) - \frac{\sum_{j=1}^{k} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1)}{\tilde{x}_i(1)}, \tag{۲۸.۳}$$

$$\beta_i(r) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1)}{\tilde{x}_i(1)} - \tilde{\lambda}_i(1). \tag{۲۹.۳}$$

و هرگاه $k+1 \leq i \leq n$ باشد، داریم:

$$\alpha_i(r) = \tilde{\lambda}_i(1) - \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1)}{\tilde{x}_i(1)}, \tag{۳۰.۳}$$

$$\beta_i(r) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \underline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1) + \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)\tilde{x}_j(1)}{\tilde{x}_i(1)} - \tilde{\lambda}_i(1). \tag{۳۱.۳}$$

حال برای هر i که $i = 1, 2, \ldots, k$ باشد، قراردادهای زیر را به ازای $0 \leq r \leq 1$ به‌کار می‌بریم:

$$\alpha_i^1(r) = min(\alpha_i(r)), \alpha_i^2(r) = max(\alpha_i(r)), \tag{۳۲.۳}$$

$$\beta_i^1(r) = min(\beta_i(r)), \beta_i^2(r) = max(\beta_i(r)). \tag{۳۳.۳}$$

همچنین برای هر i که $i = k+1, k+2, \ldots, n$ باشد، قراردادهای زیر را به ازای $0 \leq r \leq 1$ به‌کار می‌بریم:

$$\alpha_i^3(r) = min(\alpha_i(r)), \alpha_i^4(r) = max(\alpha_i(r)), \tag{۳۴.۳}$$

$$\beta_i^3(r) = min(\beta_i(r)), \beta_i^4(r) = max(\beta_i(r)). \tag{۳۵.۳}$$

بنابراین ماکسیمم و مینیمم $\tilde{\lambda}$ به ترتیب در عبارات زیر ظاهر می‌شود:
برای هر $i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k$ داریم:

$$\tilde{\lambda}_i^{max} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^2(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^2(r)] \tag{۳۶.۳}$$

$$\tilde{\lambda}_i^{min} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^1(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^1(r)] \tag{۳۷.۳}$$

و برای هر $\{i \in \mathbb{N} : k+1 \leq i \leq n\}$ داریم:

$$\tilde{\lambda}_i^{max} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^4(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^4(r)] \tag{۳۸.۳}$$

$$\tilde{\lambda}_i^{min} = [\tilde{\lambda}_i(1) - \alpha_i^3(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \beta_i^3(r)] \tag{۳۹.۳}$$

برای هر i که $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k\}$ باشد، $\tilde{\lambda}$ در حالت کلی به‌صورت ترکیب محدبی از $\tilde{\lambda}_i^{min}$ و $\tilde{\lambda}_i^{max}$ برای $\xi \in [0, 1]$ خواهد بود که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{\lambda}_i = \xi\tilde{\lambda}_i^{min} + (1-\xi)\tilde{\lambda}_i^{max}, \quad 1 \leq i \leq k \tag{۴۰.۳}$$

همین‌طور برای هر $\{i \in \mathbb{N} : k+1 \leq i \leq n\}$ ، $\tilde{\lambda}$ در حالت کلی به‌صورت ترکیب محدبی از $\tilde{\lambda}_i^{min}$ و $\tilde{\lambda}_i^{max}$ برای $\xi \in [0, 1]$ خواهد بود که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{\lambda}_i = \xi\tilde{\lambda}_i^{min} + (1-\xi)\tilde{\lambda}_i^{max}, \quad k+1 \leq i \leq n \tag{۴۱.۳}$$

بنابراین مقادیر ویژه فازی کلی برای هر i که $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k\}$ باشد، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\lambda}_i = (\tilde{\lambda}_i(1) - \gamma_i(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \delta_i(r))$$

که در آن $\gamma_i = (1-\xi)\alpha_i^1(r) + \xi\alpha_i^2(r)$ و $\delta_i = (1-\xi)\beta_i^1(r) + \xi\beta_i^2(r)$ خواهد بود.
لذا مقادیر ویژه فازی کلی برای هر i که $\{i \in \mathbb{N} : k+1 \leq i \leq n\}$ باشد، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\lambda}_i = (\tilde{\lambda}_i(1) - \mu_i(r), \tilde{\lambda}_i(1) + \nu_i(r))$$

که در آن $\mu_i = (1-\xi)\alpha_i^3(r) + \xi\alpha_i^4(r)$ و $\nu_i = (1-\xi)\beta_i^3(r) + \xi\beta_i^4(r)$ خواهد بود.

قضیه ۲.۳.۳. [۱] هر ماتریس فازی حداقل دارای یک مقدار ویژه فازی است.

برهان. هرگاه $\tilde{A}$ ماتریس فازی $n \times n$ باشد، ۱-برش از $\tilde{A}$ ماتریسی قطعی است و معادله مشخصه آن از مرتبه n است. بنابراین حداقل دارای یک ریشه حقیقی یا مختلط است. از طرفی با به کاربردن گستره‌ها و روش ذکر شده در این فصل، حداقل یک مقدار ویژه فازی به‌دست می‌آید. □

۴.۳.۳ مثال عددی

در بخش قبل روشی برای یافتن مقادیر ویژه فازی بیان شد. در این‌جا برای روشن شدن مطلب، به حل مثالی پرداخته شده است.

مثال ۳.۳.۳. ماتریس فازی $\tilde{B}$ با عناصر عددهای فازی در حالت پارامتری را در نظر بگیرید.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} (2+r, 4-r) & (-1, 4-5r) \\ (r-4, -r-2) & (r, 2-r) \end{bmatrix}$$

برای یافتن مقادیر ویژه فازی ماتریس $\tilde{B}$، ابتدا ۱-برش از این ماتریس را به‌دست می‌آوریم که ماتریس قطعی B حاصل می‌شود.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

طبق رابطه‌ی $BX = \lambda X$ مقادیر ویژه را می‌یابیم. لذا مقادیر ویژه $\tilde{\lambda}(1) = 0$ و $\tilde{\lambda}(1) = 4$ خواهد شد.
در حالتی که $\tilde{\lambda}(1) = 4$ باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

لذا بردار $X = (x_1, x_2)^t = (1, -1)$ به راحتی محاسبه می‌شود. بنابراین از روش محاسباتی بیان شده در حالت سوم استفاده می‌کنیم. برای عناصر مثبت B ، مقادیر $\alpha_1(r) = 6 - 6r$ و $\beta_1(r) = 1 - r$ به‌دست می‌آید. پس $\tilde{\lambda} = [6r - 2, 5 - r]$ خواهد شد.
همین‌طور $\alpha_2(r) = 2 - 2r$ و $\beta_2(r) = 2 - 2r$ به‌دست می‌آید. پس $\tilde{\lambda} = [2r + 2, 6 - 2r]$ خواهد شد.

برای عناصر منفی از ماتریس B، $\tilde{\lambda}_1 = [3+r, 6r-2]$ و $\tilde{\lambda}_2 = [2r-6, -2-2r]$ خواهد شد.
از طرفی $\alpha^{min} = 6-6r$ و $\alpha^{max} = 2-2r$ ، $\beta^{min} = 2-2r$ و $\beta^{max} = 1-r$ است. بنابراین
برای عناصر مثبت، $\tilde{\lambda}^{min} = [2r+2, 6-2r]$ و $\tilde{\lambda}^{max} = [6r-2, 5-r]$ خواهد شد. در نتیجه $\tilde{\lambda}$
در حالت کلی به‌صورت زیر است که در آن $1 \le \xi \le 0$ و $1 \le r \le 0$ است:

$$\tilde{\lambda} \in [(2-4r)\xi + 6r - 2, (-7-r)\xi + 5 - r].$$

۴.۳ یافتن بردارهای ویژه فازی

۱.۴.۳ بردارهای ویژه‌ی فازی از سیستم کاملا فازی

در این بخش روشی برای یافتن بردارهای ویژه فازی توضیح داده شده است [۱]. با به‌کار بردن حساب بازه‌ای معادله‌ی (۱.۳) به سیستم زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij}(r), \overline{a}_{ij}(r)][x_j - \alpha_i(r), x_j + \alpha_i(r)] = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}][x_j - \alpha_i(r), x_j + \alpha_i(r)] \qquad (۴۲.۳)$$

که در آن $\alpha_i(r) \ge 0 : i = 1, 2, \ldots, n$ است. به عبارت دیگر می‌توانیم بردارهای ویژه فازی متقارن را بیابیم که $x_j - \alpha_i(r)$ و $x_j + \alpha_i(r)$ مثبت در نظر گرفته شده‌اند.
برای حل معادله‌ی (۱.۳) ابتدا ۱-برش از سیستم (۴۲.۳) حل می‌شود که جواب قطعی به دست می‌آید.
در این‌جا شش حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود:
حالت اول) هرگاه $\forall(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \tilde{a}_{ij} > 0, \lambda > 0$ باشد.
حالت دوم) هرگاه $\forall(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \tilde{a}_{ij} < 0, \lambda < 0$ باشد.
حالت سوم) هرگاه $\forall(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \tilde{a}_{ij} < 0, \lambda > 0$ باشد.
حالت چهارم) هرگاه $\forall(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \tilde{a}_{ij} > 0, \lambda < 0$ باشد.
حالت پنجم) هرگاه برای برخی $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$، $\tilde{a_{ij}} > 0$ و $\lambda > 0$ باشد.
حالت ششم) هرگاه برای برخی $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$، $\tilde{a_{ij}} < 0$ و $\lambda < 0$ باشد.
در هر یک از حالت‌ها گستره‌های متقارن به‌دست آورده می‌شود.

حالت اول

فرض کنید $\tilde{a}_{ij} > 0$ و $\lambda > 0$ باشند. بنابراین i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \underline{\lambda}(x_i - \alpha_i(r)), \qquad (۴۳.۳)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \overline{\lambda}(x_i + \alpha_i(r)). \qquad (۴۴.۳)$$

از حل سیستم‌های (۴۳.۳) و (۴۴.۳) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ حاصل می‌شوند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r) - \underline{\lambda}(r)}, \tag{۴۵.۳}$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\overline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)}. \tag{۴۶.۳}$$

حال ماکسیمم و مینیمم $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$ مورد نیاز است. از آن‌جایی که معادلات غیرخطی (۴۵.۳) و (۴۶.۳) به راحتی حل نمی‌شوند، بنابراین ماکسیمم و مینیمم مخرج‌ها از (۴۵.۳) و (۴۶.۳) برای هر $i = 1, \dots, n$ به‌صورت زیر به دست آمده است:

$$Min\left\{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r) - \underline{\lambda}(r)\right\} = \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0) - \underline{\lambda}(1), \tag{۴۷.۳}$$

$$Max\left\{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r) - \underline{\lambda}(r)\right\} = \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) - \underline{\lambda}(0), \tag{۴۸.۳}$$

زیرا $\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) \leq \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)$ و $\underline{\lambda}(1) \leq \underline{\lambda}(0)$ است. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0) - \underline{\lambda}(1) \leq \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) - \underline{\lambda}(0)$$

همچنین $\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0) \leq \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)$ و $\overline{\lambda}(0) \leq \overline{\lambda}(1)$ است. بنابراین

$$\overline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0) \leq \overline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)$$

پس داریم:

$$Max\left\{\overline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)\right\} = \overline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1), \tag{۴۹.۳}$$

$$Min\left\{\overline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)\right\} = \overline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0). \tag{۵۰.۳}$$

با جایگذاری روابط (۴۷.۳)-(۵۰.۳) در روابط (۴۵.۳) و (۴۶.۳) برای $i = 1, \dots, n$ چهار معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) - \underline{\lambda}(0)}, \tag{۵۱.۳}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0) - \underline{\lambda}(1)}, \tag{۵۲.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\overline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)}, \tag{۵۳.۳}$$

$$\alpha^u_{i2}(r) = \frac{\sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\overline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(0)}. \qquad (۵۴.۳)$$

برخی قراردادها برای به‌کار بردن گستره‌های متقارن خطی وجود دارد. بنابراین برای هر $i = 1, \ldots, n$، خواهیم داشت :

$$\alpha_s^{-,l} = Min_{0\leq r\leq 1}\left\{|\alpha^l_{i,1}(r)|, |\alpha^l_{i,2}(r)|\right\}, \qquad (۵۵.۳)$$

$$\alpha_s^{-,u} = Min_{0\leq r\leq 1}\left\{|\alpha^u_{i,1}(r)|, |\alpha^u_{i,2}(r)|\right\}, \qquad (۵۶.۳)$$

$$\alpha_s^{+,l} = Max_{0\leq r\leq 1}\left\{|\alpha^l_{i,1}(r)|, |\alpha^l_{i,2}(r)|\right\}, \qquad (۵۷.۳)$$

$$\alpha_s^{+,u} = Max_{0\leq r\leq 1}\left\{|\alpha^u_{i,1}(r)|, |\alpha^u_{i,2}(r)|\right\}. \qquad (۵۸.۳)$$

سپس با به‌کار بردن گستره‌های متقارن، بردارهای ویژه به‌صورت زیر است:

$$X^{-,l}(r) = (x^l_1(r), \ldots, x^l_n(r))^t \qquad (۵۹.۳)$$

که در آن $x^l_j(r) = [x_i - \alpha_s^{-,l}, x_j + \alpha_s^{-,l}(r)]$ است.

$$X^{-,u}(r) = (x^u_1(r), \ldots, x^u_n(r))^t \qquad (۶۰.۳)$$

که در آن $x^u_j(r) = [x_i - \alpha_s^{-,u}, x_j + \alpha_s^{-,u}(r)]$ است.

$$X^{+,l}(r) = (x^l_1(r), \ldots, x^l_n(r))^t \qquad (۶۱.۳)$$

که در آن $x^l_j(r) = [x_i - \alpha_s^{+,l}, x_j + \alpha_s^{+,l}(r)]$ است.

$$X^{+,u}(r) = (x^u_1(r), \ldots, x^u_n(r))^t \qquad (۶۲.۳)$$

که در آن $x^u_j(r) = [x_i - \alpha_s^{+,u}, x_j + \alpha_s^{+,u}(r)]$ است.

حالت دوم

فرض کنید $\tilde{a}_{ij} < 0$ و $\lambda < 0$ باشند. بنابراین i–امین سطر از سیستم (۴۲.۳) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \underline{\lambda}(x_i + \alpha_i(r)), \qquad (۶۳.۳)$$

$$\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \overline{\lambda}(x_i - \alpha_i(r)). \qquad (۶۴.۳)$$

با حل کردن سیستم‌های (۶۳.۳) و (۶۴.۳) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای $i = 1, 2, \ldots, n$ حاصل می‌شوند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(r)x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(r)}, \qquad (۶۵.۳)$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(r)x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(r) - \overline{\lambda}(r)}. \qquad (۶۶.۳)$$

از طرفی $\underline{\lambda}(1) \leq \underline{\lambda}(0)$ و $\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(0) \leq \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(1)$ است. بنابراین

$$\underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(1) \leq \underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(0).$$

همچنین $\overline{\lambda}(1) \leq \overline{\lambda}(0)$ و $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(0)$ است. پس داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) - \overline{\lambda}(0) \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) - \overline{\lambda}(1).$$

بنابراین مشابه روابط (۳.۵۰)-(۳.۴۷) و به کارگیری در روابط (۳.۶۵) و (۳.۶۶) برای $i = 1, \ldots, n$ چهار معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(0)}, \qquad (۳.۶۷)$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(1)}, \qquad (۳.۶۸)$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) - \overline{\lambda}(1)}, \qquad (۳.۶۹)$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j) - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) - \overline{\lambda}(0)}. \qquad (۳.۷۰)$$

با استفاده از قراردادهای به‌کار برده شده در روابط (۳.۵۸)-(۳.۵۵) و مشابه روابط (۳.۶۲)-(۳.۵۹) بردارهای ویژه به‌دست می‌آیند.

حالت سوم

فرض کنید $\tilde{a}_{ij} < 0$ و $\lambda > 0$ باشند، بنابراین i-امین سطر از سیستم (۳.۴۲) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \underline{\lambda}(x_i - \alpha_i(r)), \qquad (۳.۷۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \overline{\lambda}(x_i + \alpha_i(r)). \qquad (۳.۷۲)$$

با حل کردن سیستم‌های (۳.۷۱) و (۳.۷۲) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای $i = 1, 2, \ldots, n$ حاصل می‌شوند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j)}{\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + \underline{\lambda}(r)}, \qquad (۳.۷۳)$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j) - \overline{\lambda}(r)(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + \overline{\lambda}(r)}. \qquad (۳.۷۴)$$

حال ماکسیمم و مینیمم $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$ مورد نیاز است. اما از آن‌جایی که معادلات غیرخطی (۳.۷۳) و (۳.۷۴) به راحتی حل نمی‌شوند، بنابراین ماکسیمم و مینیمم مخرج‌ها از (۳.۷۳) و (۳.۷۴) برای هر

$i=1,\dots,n$ به‌صورت زیر به دست آمده است. زیرا $\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) \le \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)$ و $\underline{\lambda}(1)\le\underline{\lambda}(0)$ و همچنین $\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0) \le \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)$ و $\overline{\lambda}(0)\le\overline{\lambda}(1)$ است.

$$Min\left\{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)+\underline{\lambda}(r)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)+\underline{\lambda}(0), \tag{۷۵.۳}$$

$$Max\left\{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)+\underline{\lambda}(r)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+\underline{\lambda}(1), \tag{۷۶.۳}$$

$$Max\left\{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)+\overline{\lambda}(r)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0)+\overline{\lambda}(0), \tag{۷۷.۳}$$

$$Min\left\{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)+\overline{\lambda}(r)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+\overline{\lambda}(1). \tag{۷۸.۳}$$

با جایگذاری روابط (۷۸.۳)-(۷۵.۳) در روابط (۷۳.۳) و (۷۴.۳) برای $i=1,\dots,n$ می‌توان چهار معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{i1}^{l}(r)=\frac{\underline{\lambda}(r)x_i-\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j)}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+\underline{\lambda}(1)}, \tag{۷۹.۳}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r)=\frac{\underline{\lambda}(r)x_i-\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j)}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)+\underline{\lambda}(0)}, \tag{۸۰.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j)-\overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0)+\overline{\lambda}(0)}, \tag{۸۱.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j)-\overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+\overline{\lambda}(1)}. \tag{۸۲.۳}$$

حال قراردادهای موجود در روابط (۵۸.۳)-(۵۵.۳)، برای گستره‌های متقارن خطی را برای هر $i=1,\dots,n$ به‌کار می‌بریم. بنابراین بردارهای ویژه فازی مشابه روابط (۶۲.۳)-(۵۹.۳) حاصل می‌شوند.

حالت چهارم

فرض کنید $\tilde{a}_{ij}>0$ و $\lambda<0$ باشند. بنابراین i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(x_j-\alpha_i(r))=\underline{\lambda}(x_i+\alpha_i(r)), \tag{۸۳.۳}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(x_j+\alpha_i(r))=\overline{\lambda}(x_i-\alpha_i(r)). \tag{۸۴.۳}$$

با حل کردن سیستم‌های (۸۳.۳) و (۸۴.۳) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای $\alpha_i(r) : i = 1, 2, \dots, n$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}x_j) - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r) + \underline{\lambda}(r)}, \tag{۸۵.۳}$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\overline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}x_j)}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r) + \overline{\lambda}(r)}. \tag{۸۶.۳}$$

با جایگذاری روابط (۷۸.۳)-(۷۵.۳) در روابط (۸۵.۳) و (۸۶.۳) برای $i = 1, \dots, n$ چهار معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)x_j - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1) + \underline{\lambda}(1)}, \tag{۸۷.۳}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)x_j - \underline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(0) + \underline{\lambda}(0)}, \tag{۸۸.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{\overline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(0) + \overline{\lambda}(0)}, \tag{۸۹.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{\overline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1) + \overline{\lambda}(1)}. \tag{۹۰.۳}$$

حال قراردادهای موجود برای گستره‌های متقارن خطی، که در روابط (۵۸.۳)-(۵۵.۳) گنجانده شده است را برای هر $i = 1, \dots, n$ به‌کار می‌بریم. بنابراین بردارهای ویژه فازی مشابه روابط (۶۲.۳)-(۵۹.۳) حاصل می‌شوند.

حالت پنجم

فرض کنید در i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳) ، s عنصر از $\tilde{A}$ مثبت و بقیه منفی باشند. به عبارت دیگر برای هر $1 \leq j \leq s$ ، $\tilde{a}_{ij} > 0$ و سایر عناصر $\tilde{a}_{ij} < 0$ و $\lambda > 0$ باشند. بنابراین i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \underline{\lambda}(x_i - \alpha_i(r)), \tag{۹۱.۳}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\overline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \overline{\lambda}(x_i + \alpha_i(r)). \tag{۹۲.۳}$$

با حل کردن سیستم‌های (۹۱.۳) و (۹۲.۳) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای $i = 1, 2, \dots, n$ به‌دست می‌آیند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j)}{\underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)}, \tag{۹۳.۳}$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\overline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j)}{\sum_{j=1}^{s}\overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n}\overline{a}_{ij}(r) - \overline{\lambda}(r)}. \tag{۹۴.۳}$$

حال ماکسیمم و مینیمم $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$ مورد نیاز است. اما از آن‌جایی که معادلات غیرخطی (۹۳.۳) و (۹۴.۳) به راحتی حل نمی‌شوند، بنابراین برای هر $i = 1, \dots, n$ روابط زیر به‌کار برده شده است:

$$Min \left\{ \underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) \right\} = \underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(1) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(0), \quad (۹۵.۳)$$

$$Max \left\{ \underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) \right\} = \underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(0) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(1), \quad (۹۶.۳)$$

$$Min \left\{ \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - \overline{\lambda}(r) \right\} = \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) - \overline{\lambda}(0), \quad (۹۷.۳)$$

$$Max \left\{ \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - \overline{\lambda}(r) \right\} = \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) - \overline{\lambda}(1). \quad (۹۸.۳)$$

با جایگذاری روابط (۹۵.۳)-(۹۸.۳) در روابط (۹۳.۳) و (۹۴.۳) برای $i = 1, \dots, n$ می‌توان چهار معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j}{\underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(0) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(1)}, \quad (۹۹.۳)$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j}{\underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(1) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(0)}, \quad (۱۰۰.۳)$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) - \overline{\lambda}(1)}, \quad (۱۰۱.۳)$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) - \overline{\lambda}(0)}. \quad (۱۰۲.۳)$$

حال قراردادهای موجود برای گستره‌های متقارن خطی، که در روابط (۵۵.۳)-(۵۸.۳) گنجانده شده است را برای هر $i = 1, \dots, n$ به‌کار می‌بریم. بنابراین بردارهای ویژه فازی مشابه روابط (۵۹.۳)-(۶۲.۳) حاصل می‌شوند.

حالت ششم

هرگاه در i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳)، s عنصر از $\tilde{A}$ مثبت و بقیه منفی باشند. به عبارت دیگر برای هر $1 \leq j \leq s$، $\tilde{a}_{ij} > 0$ و سایر عناصر $\tilde{a}_{ij} < 0$ و $\lambda < 0$ باشند. بنابراین i-امین سطر از سیستم (۴۲.۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \underline{\lambda}(x_i + \alpha_i(r)), \quad (۱۰۳.۳)$$

$$\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \overline{\lambda}(x_i - \alpha_i(r)). \tag{۱۰۴.۳}$$

با حل کردن سیستم‌های (۱۰۳.۳) و (۱۰۴.۳) به ترتیب $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$، برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ حاصل می‌شوند:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(r)x_j)}{-\underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)}, \tag{۱۰۵.۳}$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{\overline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(r)x_j)}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + \overline{\lambda}(r)}. \tag{۱۰۶.۳}$$

حال ماکسیمم و مینیمم $\alpha_{i1}(r)$ و $\alpha_{i2}(r)$ مورد نیاز است. اما از آن‌جایی که معادلات غیرخطی (۱۰۵.۳) و (۱۰۶.۳) به راحتی حل نمی‌شوند، بنابراین برای هر $i = 1, \ldots, n$ روابط زیر به‌کار برده شده است:

$$Min\left\{-\underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\right\} = -\underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(1) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(0), \tag{۱۰۷.۳}$$

$$Max\left\{-\underline{\lambda}(r) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)\right\} = -\underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(0) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(1), \tag{۱۰۸.۳}$$

$$Max\left\{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + \overline{\lambda}(r)\right\} = \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) + \overline{\lambda}(0), \tag{۱۰۹.۳}$$

$$Min\left\{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + \overline{\lambda}(r)\right\} = \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) + \overline{\lambda}(1). \tag{۱۱۰.۳}$$

با جایگذاری روابط (۱۱۰.۳)-(۱۰۷.۳) در روابط (۱۰۶.۳) و (۱۰۵.۳) برای $i = 1, \ldots, n$ چهار معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j}{-\underline{\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(0) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(1)}, \tag{۱۱۱.۳}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{\underline{\lambda}(r)x_i - \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j}{-\underline{\lambda}(1) - \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(1) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(0)}, \tag{۱۱۲.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) + \overline{\lambda}(0)}, \tag{۱۱۳.۳}$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \overline{\lambda}(r)x_i}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(0) + \overline{\lambda}(1)}. \tag{۱۱۴.۳}$$

حال قراردادهای موجود برای گستره‌های متقارن خطی، که در روابط (۵۸.۳)-(۵۵.۳) گنجانده شده است را برای هر $i = 1, \ldots, n$ به‌کار می‌بریم. بنابراین بردارهای ویژه فازی مشابه روابط (۶۲.۳)-(۵۹.۳) حاصل می‌شوند.

مثال عددی

مثال ۱.۴.۳. فرض کنید $\tilde{A}$ ماتریسی فازی باشد. در این مثال مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از این ماتریس را می یابیم.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (۱+r, ۳-r) & (r, ۳-۲r) \\ (۵r+۷, ۱۴-۲r) & (۱+۲r, ۸-۵r) \end{bmatrix}$$

- برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه فازی با توجه به روش توضیح داده شده در این فصل، ابتدا ۱-برش هریک از عناصر ماتریس بالا را محاسبه می‌کنیم. ماتریس قطعی زیر حاصل می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه ماتریس A را به‌دست می‌آوریم. بنابراین $\tilde{\lambda}(۱) = ۶$ و $\tilde{\lambda}(۱) = -۱$ به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن $\tilde{\lambda}(۱) = ۶$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۶ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه $X = (x_۱, x_۲)^t = (x_۱, ۴x_۱)^t$ به سادگی محاسبه می‌شود. از طرفی چون تمام عناصر ماتریس $\tilde{A}$ مثبت هستند، بنابراین با استفاده از روش محاسباتی بیان شده در حالت اول خواهیم داشت:

$$\alpha_۱(r) = ۶ - \frac{(۱+r)x_۱ + r(۴x_۱)}{x_۱} = ۵ - ۵r, \alpha_۲(r) = ۶ - \frac{(۵r+۷)\frac{۱}{۴}x_۲ + (۱+۲r)x_۲}{x_۲}$$

و

$$\beta_۱(r) = \frac{(۳-r)x_۱ + (۳-۲r)x_۱}{x_۱} - ۶, \beta_۲(r) = \frac{(۱۴-۲r)x_۲ + (۸-۵r)x_۲}{x_۲} - ۶$$

بنابراین ماکسیمم و مینیمم $\alpha(r)$ و $\beta(r)$ را به ازای $۰ \leq r \leq ۱$ به‌دست می‌آیند:

$$\beta^{min}(r) = \frac{۲۲-۲۲r}{۴}, \beta^{max}(r) = ۹ - ۹r,$$

$$\alpha^{min}(r) = \frac{۱۳-۱۳r}{۴}, \alpha^{max}(r) = ۵ - ۵r,$$

از طرفی با توجه به روابط (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به ترتیب مقادیر $\tilde{\lambda}^{min}$ و $\tilde{\lambda}^{max}$ محاسبه می‌شود. بنابراین داریم:

$$\tilde{\lambda}^{min} = [۵r+۱, ۱۵-۹r], \tilde{\lambda}^{max} = \left[\frac{۱۳r+۱۱}{۴}, \frac{۴۶-۲۲r}{۴}\right],$$

آنگاه مقدار ویژه کلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda} \in \frac{۱}{۴}\left[(۷r-۷)\xi + ۱۳r + ۱۱, (۱۴-۱۴r)\xi + ۴۶ - ۲۲r\right].$$

• برای محاسبه‌ی بردارهای ویژه از ماتریس $\tilde{A}$، چون همه‌ی دارایه‌های ماتریس مثبت هستند و با در نظر گرفتن $\lambda = ۶$ ، با استفاده از روابط (۴۵.۳) و (۴۶.۳) خواهیم داشت:

$$\alpha_{۱۱} = \frac{۲۶r + ۱۶ - (۷r - ۷)\xi}{۳۰r - ۴۲ - (۷r - ۷)\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۱} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۷r - ۷)\xi}{۴۱r + ۴۳ - (۷r - ۷)\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۱۲} = \frac{۴۲r - ۴۲ - (۱۴ - ۱۴r)\xi}{۳۰r - ۴۲ - (۱۴ - ۱۴r)\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۲} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۱۴r - ۱۴)\xi}{۴۱r + ۴۳ - (۱۴r - ۱۴)\xi}x_۱.$$

حال با ماکسیمم و مینیمم کردن عبارت‌های بالا، خواهیم داشت:

$$\alpha_{۱۱}^{l} = \frac{۲۶r + ۱۶ - (۷r - ۷)\xi}{-۱۲ + ۷\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۱۱}^{u} = \frac{۲۶r + ۱۶ - (۷r - ۷)\xi}{-۴۲}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۱}^{l} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۷r - ۷)\xi}{۸۴ + ۱۴\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۱}^{u} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۷r - ۷)\xi}{-۴۲}x_۱,$$

$$\alpha_{۱۲}^{l} = \frac{۴۲r + ۴۲ + (۱۴ + ۱۴r)\xi}{-۱۲ + ۷\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۱۲}^{u} = \frac{۴۲r + ۴۲ + (۱۴ + ۱۴r)\xi}{-۴۲}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۲}^{l} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۱۴r - ۱۴)\xi}{۸۴ + ۱۴\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{۲۲}^{u} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۱۴r - ۱۴)\xi}{-۴۲}x_۱.$$

بنابراین می‌توانیم عبارت‌های زیر را مشابه روابط (۵۸.۳) -(۵۵.۳) در نظر بگیریم:

$$\alpha_{s}^{-,l} = \frac{۴۲r + ۴۲ + (۱۴ + ۱۴r)\xi}{-۱۲ + ۷\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{s}^{+,l} = \frac{۲۶r + ۱۶ - (۷r - ۷)\xi}{-۱۲ + ۷\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{s}^{-,u} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۱۴r - ۱۴)\xi}{۸۴ + ۱۴\xi}x_۱,$$

$$\alpha_{s}^{+,u} = \frac{۶۵r + ۴۵ - (۷r - ۷)\xi}{۸۴ + ۱۴\xi}x_۱.$$

آنگاه بردارهای ویژه فازی مشابه روابط (۶۲.۳)-(۵۹.۳) محاسبه می‌شود.

۲.۴.۳ بردارهای ویژه‌ی فازی از ماتریس حقیقی

تعریف ۲.۴.۳. برای ماتریس حقیقی A هرگاه عدد حقیقی λ و بردار حقیقی ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$AX = \lambda X \tag{۱۱۵.۳}$$

بنابراین λ را مقدار ویژه از A و x را بردار ویژه از A متناظر با λ گویند.

تعریف ۳.۴.۳. هرگاه عدد حقیقی λ و بردار فازی ناصفر $\tilde{X} \in \Im^n$ در معادله‌ی (۱۱۵.۳) برقرار باشد، گوییم λ مقدار ویژه‌ی حقیقی متناظر با بردارهای ویژه‌ی فازی از ماتریس A و $\tilde{X}$ بردار ویژه‌ی فازی از A متناظر با λ است، که در آن $\Im^n$ خانواده‌ی تمام بردارهای n بعدی با اعداد فازی است [۳۶].

معادله‌ی (۱۱۵.۳) دوگان سیستم خطی فازی است که آنرا می‌توان به‌صورت سیستم خطی زیر نوشت:

$$\begin{cases} \underline{\lambda x_i} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j}, \\ \overline{\lambda x_i} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{۱۱۶.۳}$$

که در آن $x_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$ است.

سیستم (۱۱۶.۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix}, \quad \text{اگر } \lambda \geq 0, \tag{۱۱۷.۳}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda I_n \\ -\lambda I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix}, \quad \text{اگر } \lambda < 0, \tag{۱۱۸.۳}$$

که در آن $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n)^T = (\underline{X}^T, \overline{X}^T)^T$ و درایه‌های ماتریس $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 \Rightarrow s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, \\ a_{ij} < 0 \Rightarrow s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}. \end{cases}$$

S_1 ماتریسی $n \times n$، شامل درایه‌های نامنفی از A و S_2 از قدرمطلق درایه‌های منفی A حاصل شده است. همچنین $A = S_1 - S_2$ و $|A| = [|a_{ij}|]_{n\times n} = S_1 + S_2$ است.

قضیه ۴.۴.۳. هرگاه λ یک مقدار ویژه از ماتریس A یا یک مقدار ویژه از مقادیر ویژه‌ی مثبت $|A|$ یا یکی از اعداد مخالف با مقادیر ویژه‌ی مثبت از ماتریس $|A|$ باشد، آنگاه عدد حقیقی λ و بردار فازی ناصفر $\tilde{x}$ در (۱۱۵.۳) صدق می‌کند [۳۶].

برهان. هرگاه λ یک مقدار ویژه از A باشد، حکم به وضوح برقرار است. در ادامه فرض می‌کنیم که $det(\lambda I_n - A) \neq ۰$ باشد.

هرگاه λ و بردار تابعی ناصفر $X = (\underline{x}_۱, \dots, \underline{x}_n, -\overline{x}_۱, \dots, -\overline{x}_n)^T \in \Im^{۲n}[۰,۱]$ در (۱۱۷.۳) یا (۱۱۸.۳) صدق کند، آنگاه عدد حقیقی λ و بردار فازی ناصفر $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, \dots, \tilde{x}_n)^T$ در (۱۱۵.۳) برقرار است.

هرگاه $\lambda > ۰$ و $det(\lambda I_{۲n} - S) = ۰$ باشد، آنگاه سیستم معادلات خطی (۱۱۷.۳) در $\Im^{۲n}[۰,۱]$ جواب‌های ناصفر دارد. زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$det(\lambda I_{۲n} - S) = det(\lambda I_n - A) det(\lambda I_n - |A|)$$

بنابراین λ مقدار ویژه مثبتی از $|A|$ است.

هرگاه $\lambda = ۰$ باشد، مقدار ویژه‌ی A نیست و مقدار ویژه‌ای از $|A|$ است، بنابراین $Ax = ۰$ جواب بدیهی دارد.

هرگاه $\lambda < ۰$ و $det\left(\begin{bmatrix} -S_۱ & -\lambda I_n - S_۲ \\ -\lambda I_n - S_۲ & -S_۱ \end{bmatrix}\right) = ۰$ باشد، آنگاه سیستم معادلات خطی (۱۱۸.۳) در $\Im^{۲n}[۰,۱]$ جواب‌های ناصفر دارد. زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$det\left(\begin{bmatrix} -S_۱ & -\lambda I_n - S_۲ \\ -\lambda I_n - S_۲ & -S_۱ \end{bmatrix}\right) = det(A - \lambda I_n) det(|A| - \lambda I_n) = ۰.$$

بنابراین λ یک مقدار ویژه به غیر از مقادیر ویژه‌ی مثبت $|A|$ خواهد بود. $\square$

مثال ۵.۴.۳. ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

عدد ۳ مقدار ویژه‌ی وابسته به بردارهای ویژه‌ی حقیقی نیست و یک مقدار ویژه از $|B|$ است. بنابراین به سادگی می‌توان بردارهای ویژه‌ی فازی را به‌دست آورد.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \tilde{u} = ۳\tilde{u}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۱۷.۳) داریم:

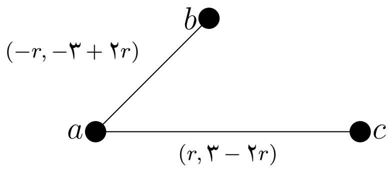
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_۱ \\ \underline{u}_۲ \\ -\overline{u}_۱ \\ -\underline{u}_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & ۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_۱ \\ \underline{u}_۲ \\ -\overline{u}_۱ \\ -\underline{u}_۲ \end{bmatrix}$$

که از حل آن، بردار $\tilde{u} = [\underline{u}_۱, \underline{u}_۲, -\overline{u}_۱, -\overline{u}_۲]$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$\tilde{u} = \left[۰/۵r - ۰/۵, ۰/۵r - ۰/۵, ۰/۵ - ۰/۵r, ۰/۵ - ۰/۵r\right]$ به عبارت دیگر $\tilde{u}$ بردار ویژه‌ی فازی متناظر با مقدار ویژه‌ی ۳ از ماتریس B است.

در مثال زیر به بررسی مقادیر ویژه‌ی فازی با استفاده از روش توضیح داده شده در این فصل، در گرافی فازی با یال‌های فازی (عدد فازی در حالت پارامتری) می‌پردازیم.

مثال ۶.۴.۳. گراف فازی $\tilde{G}$، با یال‌های فازی (عدد فازی در حالت پارامتری) و ماتریس مجاورت آن را در نظر بگیرید.



شکل ۱.۳: گراف فازی $\tilde{G}$ با یال‌های فازی (عدد فازی پارامتری)

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (\circ,\circ) & (-r,-۳+۲r) & (r,۳-۲r) \\ (-r,-۳+۲r) & (\circ,\circ) & (\circ,\circ) \\ (r,۳-۲r) & (\circ,\circ) & (\circ,\circ) \end{bmatrix}$$

ابتدا ۱-برش از این ماتریس را محاسبه می‌کنیم و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌دست می‌آوریم. ماتریس قطعی C به‌دست می‌آید.

$$C = \begin{bmatrix} \circ & -۱ & ۱ \\ -۱ & \circ & \circ \\ ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی آن $\{\sqrt{۲}, \circ, -\sqrt{۲}\}$ است. مقدار ویژه $\sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید. بردار ویژه‌ی متناظر با آن $X^c = ((\sqrt{۲})x_۳, -x_۳, x_۳)^t = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲})^t$ به‌دست می‌آید. چون برخی از درایه‌ها در ماتریس C مثبت و برخی منفی هستند، بنابراین از حالت سوم در این فصل، برای یافتن مقادیر ویژه‌ی فازی استفاده می‌کنیم. با استفاده از معادلات (۲۴.۳) و (۲۵.۳) به ترتیب، عبارات زیر حاصل می‌شود:

$$-r(\frac{۱}{۲}) + (۳-۲r)(\frac{-۱}{۲}) = (\sqrt{۲} - \alpha_۱(r))(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}), \tag{۱۱۹.۳}$$

$$(-۳+۲r)(\frac{۱}{۲}) + r(\frac{-۱}{۲}) = (\sqrt{۲} + \beta_۱(r))(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}), \tag{۱۲۰.۳}$$

$$(-۳+۲r)(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = (\sqrt{۲} - \alpha_۲(r))(\frac{۱}{۲}), \tag{۱۲۱.۳}$$

$$(-r)(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = (\sqrt{۲} + \beta_۲(r))(\frac{۱}{۲}), \tag{۱۲۲.۳}$$

$$(۳-۲r)(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = (\sqrt{۲} + \beta_۳(r))(\frac{-۱}{۲}), \tag{۱۲۳.۳}$$

$$(r)(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = (\sqrt{۲} - \alpha_۳(r))(\frac{-۱}{۲}). \tag{۱۲۴.۳}$$

با حل هریک از معادلات بالا، به ترتیب $\alpha_۱(r) = \frac{r-۱}{\sqrt{۲}}$، $\beta_۱(r) = \frac{۱-r}{\sqrt{۲}}$، $\alpha_۲(r) = ۲\sqrt{۲}(r-۱)$، $\beta_۲(r) = \sqrt{۲}(r-۱)$ ، $\alpha_۳(r) = \sqrt{۲}(۱-r)$ و $\beta_۳(r) = -۲\sqrt{۲}(r-۱)$ حاصل می‌شوند. از طرفی

مقدار مینیمم و ماکسیمم $\alpha_i(r)$ و $\beta_i(r)$ به ازای $i = ۱, ۲, ۳$ و $۰ \leq r \leq ۱$ مورد نیاز است. پس مقادیر $max(\alpha_i(r)) = \sqrt{۲}(۱ - r)$، $min(\alpha_i(r)) = ۲\sqrt{۲}(r - ۱)$، $max(\beta_i(r)) = -۲\sqrt{۲}(r - ۱)$ و $min(\beta_i(r)) = \sqrt{۲}(r - ۱)$ به ازای $۰ \leq r \leq ۱$ برای $i = ۱, ۲, ۳$ حاصل می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\tilde{\lambda}^{max} = [\sqrt{۲} - \sqrt{۲}(۱ - r), \sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}(۱ - r)], \qquad (۱۲۵.۳)$$

$$\tilde{\lambda}^{min} = [\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}(r - ۱), \sqrt{۲} + \sqrt{۲}(r - ۱)]. \qquad (۱۲۶.۳)$$

در نتیجه مقدار ویژه فازی در حالت کلی به‌صورت ترکیب محدب $\tilde{\lambda}^{min}$ و $\tilde{\lambda}^{max}$ خواهد شد، پس داریم:

$$\tilde{\lambda} = [۳\sqrt{۲}(۱ - r)\xi + r\sqrt{۲}, -۲\sqrt{۲}\xi(۱ - r) + ۳\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}(r)], \qquad (۱۲۷.۳)$$

که در آن $۰ \leq \xi \leq ۱$ و $۰ \leq r \leq ۱$ است.

همچنین هرگاه $\lambda = -\sqrt{۲}$ باشد، بردار ویژه $X^c = (-\sqrt{۲}x_۳, -x_۳, x_۳) = (\sqrt{۲}, ۱, -۱)^t$ است. بنابراین از حالت سوم در این فصل، برای یافتن مقادیر ویژه‌ی فازی استفاده می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$-r(۱) + (۳ - ۲r)(-۱) = (-\sqrt{۲} - \alpha_۱(r))(\sqrt{۲}), \qquad (۱۲۸.۳)$$

$$(-۳ + ۲r)(۱) + r(-۱) = (-\sqrt{۲} + \beta_۱(r))(\sqrt{۲}), \qquad (۱۲۹.۳)$$

$$-r(\sqrt{۲}) = (-\sqrt{۲} - \alpha_۲(r))(۱), \qquad (۱۳۰.۳)$$

$$(-۳ + ۲r)(\sqrt{۲}) = (-\sqrt{۲} + \beta_۲(r))(۱), \qquad (۱۳۱.۳)$$

$$r(\sqrt{۲}) = (-\sqrt{۲} - \alpha_۳(r))(-۱), \qquad (۱۳۲.۳)$$

$$(۳ - ۲r)(\sqrt{۲}) = (-\sqrt{۲} + \beta_۳(r))(-۱). \qquad (۱۳۳.۳)$$

با حل هریک از معادلات بالا، به ترتیب مقادیر $\alpha_۱(r) = \frac{۱-r}{\sqrt{۲}}$، $\beta_۱(r) = \frac{r-۱}{\sqrt{۲}}$، $\alpha_۲(r) = \sqrt{۲}(r - ۱)$، $\beta_۲(r) = ۲\sqrt{۲}(r - ۱)$ ، $\alpha_۳(r) = ۲\sqrt{۲}(۱ - r)$ و $\beta_۳(r) = -\sqrt{۲}(r + ۱)$ حاصل می‌شوند. از طرفی مقدار مینیمم و ماکسیمم $\alpha_i(r)$ و $\beta_i(r)$ به ازای $i = ۱, ۲, ۳$ و $۰ \leq r \leq ۱$ مورد نیاز است. پس $max(\alpha_i(r)) = ۲\sqrt{۲}(۱ - r)$، $min(\alpha_i(r)) = \sqrt{۲}(r - ۱)$، $max(\beta_i(r)) = ۲\sqrt{۲}(r - ۱)$ و $min(\beta_i(r)) = -\sqrt{۲}(r + ۱)$ به ازای $۰ \leq r \leq ۱$ برای $i = ۱, ۲, ۳$ حاصل می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\tilde{\lambda}^{min} = [-\sqrt{۲} - \sqrt{۲}(r - ۱), -\sqrt{۲} - \sqrt{۲}(r + ۱)], \qquad (۱۳۴.۳)$$

$$\tilde{\lambda}^{max} = [-\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}(۱ - r), -\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}(r - ۱)]. \qquad (۱۳۵.۳)$$

در نتیجه مقدار ویژه فازی در حالت کلی به‌صورت ترکیب محدب $\tilde{\lambda}^{min}$ و $\tilde{\lambda}^{max}$ خواهد شد، پس داریم:

$$\tilde{\lambda} = [۳\sqrt{۲}(۱ - r)\xi - ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}r, (\sqrt{۲}r - ۳\sqrt{۲})\xi + ۲\sqrt{۲}r - ۳\sqrt{۲}]. \qquad (۱۳۶.۳)$$

فصل ۴

روش دوم برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از ماتریس فازی

در فصل قبل روشی برای یافتن مقادیر ویژه فازی از ماتریس فازی بیان شد. این روش برای حل سیستم‌های خطی کاملا فازی که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود، به کار می‌رود.

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X} \qquad (۱.۴)$$

در این روش با به‌کار بردن گستره‌های متقارن مینیمم و ماکسیمم، به محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی فازی و بردارهای ویژه‌ی فازی می‌پردازد. در این فصل روش دیگری برای یافتن مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی از ماتریس‌های فازی بیان می‌شود که مشابه روش بیان شده در فصل قبل است [۳۲]. با این تفاوت که در فصل قبل، $\alpha(r)$ و $\beta(r)$ که $r \in [۰, ۱]$ است، به ترتیب گستره‌های چپ و راست برای یافتن مقادیر ویژه فازی در نظر گرفته شد.

۱.۴ یافتن مقدار ویژه متقارن از طریق جواب متقارن $FFLS$

مطالب این بخش از مرجع [۳۲] استخراج شده است.
بررسی خود را با حل ۱-برش از FFLS شروع می‌کنیم. به عبارت دیگر، جواب قطعی از معادله‌ی (۱.۴) به دست آورده می‌شود. در این سیستم قطعی

$$\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}(۱)x_j = \lambda x_i, \quad i = ۱, \ldots, n. \qquad (۲.۴)$$

$\tilde{a_{ij}}(۱), \lambda \in \mathbb{R}$ است. $x_j : j = ۱, \ldots, n$ متغییرهای قطعی مجهول هستند که از طریق حل سیستم (۲.۴) به دست خواهند آمد. ابتدا جواب سیستم قطعی (۲.۴) را به دست می‌آوریم، سپس جواب فازی شده را با اختصاص دادن گستره‌های متقارن مجهول به هر سطر از سیستم (۲.۴) می‌سازیم. واضح است که برای حل معادله (۱.۴)، لازم است که $۲n$ معادله خطی حل شود. بنابراین به سادگی می‌توانیم

گستره‌های جواب را محاسبه کنیم. بنابراین سیستم معادلات قطعی (۲.۴) را به شکل سیستم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} [\underline{a}_{11}(r),\overline{a}_{11}(r)][x_1-\alpha_1(r),x_1+\alpha_1(r)]+\ldots+[\underline{a}_{1n}(r),\overline{a}_{1n}(r)][x_n-\alpha_1(r),x_n+\alpha_1(r)] \\ =[\lambda-\alpha_1(r),\lambda+\alpha_1(r)][x_1-\alpha_1(r),x_1+\alpha_1(r)], \\ [\underline{a}_{21}(r),\overline{a}_{21}(r)][x_1-\alpha_2(r),x_1+\alpha_2(r)]+\ldots+[\underline{a}_{2n}(r),\overline{a}_{2n}(r)][x_n-\alpha_2(r),x_n+\alpha_2(r)] \\ =[\lambda-\alpha_2(r),\lambda+\alpha_2(r)][x_2-\alpha_2(r),x_2+\alpha_2(r)], \\ \vdots \\ [\underline{a}_{n1}(r),\overline{a}_{n1}(r)][x_1-\alpha_n(r),x_1+\alpha_n(r)]+\ldots+[\underline{a}_{nn}(r),\overline{a}_{nn}(r)][x_n-\alpha_n(r),x_n+\alpha_n(r)] \\ =[\lambda-\alpha_n(r),\lambda+\alpha_n(r)][x_n-\alpha_n(r),x_n+\alpha_n(r)]. \end{cases} \tag{۳.۴}$$

که در آن به ازای هر $i=1,2,\ldots,n$، $\alpha_i(r)>0$ گستره‌های مجهول هستند و از حل $2n$ معادله‌های بالا محاسبه می‌شوند. λ مقدارویژه و $x_j : j=1,2,\ldots,n$ مولفه‌های به دست آمده از جواب برداری سیستم (۲.۴) هستند. توجه کنید که برای هرسطر، گستره‌های یکسانی برای مقدارویژه و مولفه متناظر جواب برداری درنظر می‌گیریم.
سپس مجموعه‌های اندیس دار را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، که مربوط به عناصر ماتریس $\tilde{A}$ هستند:

الف)

$$I_1=\{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_n:\tilde{a}_{ij}>0\}$$

ب)

$$I_2=\{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_n:\tilde{a}_{ij}<0\}$$

ج)

$$I_3=I_1\cup I_2$$

که در آن $\mathbb{N}_n=\{1,\ldots,n\}$ است.

ملاحظه ۱.۱.۴. در زیر برای سادگی $x_j-\alpha_i(r),\lambda+\alpha_i(r),\lambda-\alpha_i(r)$ و $x_j+\alpha_i(r)$ مثبت در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین ضرایب در معادله بالا، ساده‌تر به‌دست می‌آیند. توجه کنید در گستره‌های قبلی، فقط حالاتی درنظر گرفته می‌شود که صفر در محمل عناصر ماتریس فازی، مقادیرویژه و بردارهای ویژه وجود نداشته باشند . در این‌جا سه حالت مختلف را در نظر می‌گیریم.

۱.۱.۴ حالت الف

$$I_1=\{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_n:\tilde{a}_{ij}>0\},|I_1|=n^2.$$

در این حالت برای هر $i, j = ۱, \dots, n$، $\tilde{a}_{ij} > ۰$ در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر ماتریس فازی $\tilde{A}$ مثبت است. i-امین سطر از سیستم (۳.۴) به‌صورت زیر است:

$$[\underline{a}_{i۱}(r), \overline{a}_{i۱}(r)][x_۱ - \alpha_i(r), x_۱ + \alpha_i(r)] + \dots + [\underline{a}_{in}(r), \overline{a}_{in}(r)][x_n - \alpha_i(r), x_n + \alpha_i(r)]$$
$$= [\lambda - \alpha_i(r), \lambda + \alpha_i(r)][x_i - \alpha_i(r), x_i + \alpha_i(r)]$$

از طرفی می‌توان سیستم (۳.۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_i(r)) = \lambda x_i - (\lambda + x_i)\alpha_i(r) + \alpha_i^۲(r) \Rightarrow$$
$$\alpha_i(r) = f_۱(x_۱, \dots, x_n, \underline{a}_{i۱}(r), \dots, \underline{a}_{in}(r), \lambda), \tag{۴.۴}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_i(r)) = \lambda x_i + (\lambda + x_i)\alpha_i(r) + \alpha_i^۲(r) \Rightarrow$$
$$\alpha_i(r) = f_۲(x_۱, \dots, x_n, \overline{a}_{i۱}(r), \dots, \overline{a}_{in}(r), \lambda), \tag{۵.۴}$$

به جای $\alpha_i(r)$ در معادله (۴.۴) و (۵.۴) به ترتیب $\alpha_{i۱}(r)$ و $\alpha_{i۲}(r)$ جایگزین می‌کنیم. بنابراین برای هر $i = ۱, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}(r) &= f_۱(x_۱, \dots, x_n, \underline{a}_{i۱}(r), \dots, \underline{a}_{in}(r), \lambda), \\ \alpha_{i۲}(r) &= f_۲(x_۱, \dots, x_n, \overline{a}_{i۱}(r), \dots, \overline{a}_{in}(r), \lambda). \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

به عبارت دیگر $۲n$ معادله از درجه دوم بر حسب $\alpha_{i۱}(r)$ و $\alpha_{i۲}(r)$ به‌صورت زیر موجود است:

$$\alpha_{i۱}^۲(r) + \left[\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)\right] \alpha_{i۱}(r) - \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j + \lambda x_i = ۰, \tag{۷.۴}$$

$$\alpha_{i۲}^۲(r) + \left[\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)\right] \alpha_{i۲}(r) - \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) x_j + \lambda x_i = ۰. \tag{۸.۴}$$

در ادامه دو روش کلی برای به‌دست آوردن گستره‌های متقارن از مقدار ویژه و بردار ویژه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_s^-(r) = min_{i=۱,\dots,n} \{|\alpha_{i۱}(r)|, |\alpha_{i۲}(r)|\}, ۰ \leq r \leq ۱, \tag{۹.۴}$$

$$\alpha_s^+(r) = max_{i=۱,\dots,n} \{|\alpha_{i۱}(r)|, |\alpha_{i۲}(r)|\}, ۰ \leq r \leq ۱, \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین $\tilde{\lambda}$ و $\tilde{X} = (\tilde{x_۱}, \dots, \tilde{x_n})^t$ برای هر $۰ \leq r \leq ۱$ و $i = ۱, \dots, n$، به ترتیب با به کاربردن (۹.۴) و (۱۰.۴) به‌دست می‌آید. این مقادیر به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{\lambda}(r) = [\lambda - \alpha_s^-(r), \lambda + \alpha_s^-(r)], \tag{۱۱.۴}$$

$$\tilde{\lambda}(r) = [\lambda - \alpha_s^+(r), \lambda + \alpha_s^+(r)], \tag{۱۲.۴}$$

$$\tilde{x}_i(r) = [x_i - \alpha_s^-(r), x_i + \alpha_s^-(r)], \tag{۱۳.۴}$$

$$\tilde{x}_i(r) = [x_i - \alpha_s^+(r), x_i + \alpha_s^+(r)]. \tag{۱۴.۴}$$

که در آن $0 \leq r \leq 1$ و $i = 1, \ldots, n$ است. در این‌جا نتیجه می‌گیریم که گستره‌های نهایی برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $\{\alpha_s^-(r), \alpha_s^+(r)\}$ هستند، که می‌توانند غیرخطی باشند. اما گاهی برخی از توابع به‌طور قطعه‌ای پیوسته هستند. بنابراین گستره‌ها را با حل معادلات (۷.۴) و (۸.۴) به دست می‌آوریم، که لازم نیست این معادلات خطی باشد.

در حالت کلی دو جواب متفاوت از حل هر معادله داریم. از آن‌جایی که جواب‌ها از معادله درجه دوم حاصل می‌شود، لذا نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم توابعی که در (۹.۴) و (۱۰.۴) تعریف شده‌اند، توابع خطی باشند. در حالت کلی، مسئله زمانی جالب‌تر خواهد شد که بتوان با تغییراتی در ساختار برخی از گستره‌ها، گستره‌های خطی دیگری را ساخت [۳۵] .

با حل معادلات (۷.۴) و (۸.۴) گستره‌های متقارن، برای مقادیرویژه متقارن فازی و بردارهای ویژه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] \pm \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}, \quad (15.4)$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] \pm \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}. \quad (16.4)$$

از معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) مقادیر به‌دست آمده را با توجه به کران بالا و پایین آن‌ها می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد. بنابراین منجر به چهار معادله خواهد شد:

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] - \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}, \quad (17.4)$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] + \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}, \quad (18.4)$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] - \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}, \quad (19.4)$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i)] + \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) - (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) x_j - \lambda x_i)}}{2}, \quad (20.4)$$

هدف از به کار بردن گستره‌های متقارن برای جواب‌های معادله (۱.۴)، به‌دست آوردن گستره‌های متقارن برای مقادیرویژه و بردارهای ویژه از $\tilde{A}$ است.

در این‌جا قراردادهای زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\alpha_s^{-,l}(r) = min_{i=1,\ldots,n} \left\{ |\alpha_{i1}^{l}(r)|, |\alpha_{i2}^{l}(r)| \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (21.4)$$

$$\alpha_s^{-,u}(r) = min_{i=1,\ldots,n} \left\{ |\alpha_{i1}^{u}(r)|, |\alpha_{i2}^{u}(r)| \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (22.4)$$

$$\alpha_s^{+,l}(r) = max_{i=1,\ldots,n} \left\{ |\alpha_{i1}^{l}(r)|, |\alpha_{i2}^{l}(r)| \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (23.4)$$

$$\alpha_s^{+,u}(r) = max_{i=1,\ldots,n} \left\{ |\alpha_{i1}^{u}(r)|, |\alpha_{i2}^{u}(r)| \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (24.4)$$

و در ادامه برای هر $i=۱,\dots,n$ و $j=۱,۲$، $\alpha_{ij}^{l}(r)\le\alpha_{ij}^{u}(r)$ به‌دست می‌آید. اما نمی‌دانیم کدام یک از مقادیر $|\alpha_{ij}^{l}(r)|$ یا $|\alpha_{ij}^{u}(r)|$ ، بزرگتر هستند. از طرفی فقط مطمئن هستیم که $\alpha_s^{-,u}(r)\le\alpha_s^{+,u}(r)$ و $\alpha_s^{-,l}(r)\le\alpha_s^{+,l}(r)$ است.
در هر حالت هرگاه گستره‌های متقارن مختلفی را به کار ببریم، متناظرا مقادیرویژه و بردارهای ویژه مختلفی به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda}^{-,l}(r)=[\lambda-\alpha_s^{-,l}(r),\lambda+\alpha_s^{-,l}(r)], \quad (۲۵.۴)$$

$$\tilde{\lambda}^{-,u}(r)=[\lambda-\alpha_s^{-,u}(r),\lambda+\alpha_s^{-,u}(r)], \quad (۲۶.۴)$$

$$\tilde{\lambda}^{+,l}(r)=[\lambda-\alpha_s^{+,l}(r),\lambda+\alpha_s^{+,l}(r)], \quad (۲۷.۴)$$

$$\tilde{\lambda}^{+,u}(r)=[\lambda-\alpha_s^{+,u}(r),\lambda+\alpha_s^{+,u}(r)]. \quad (۲۸.۴)$$

$$\tilde{X}^{-,l}(r)=(\tilde{x}_۱^{-,l}(r),\dots,\tilde{x}_n^{-,l}(r))^t,\tilde{x}_i^{-,l}(r)=[x_i-\alpha_s^{-,l}(r),x_i+\alpha_s^{-,l}(r)], \quad (۲۹.۴)$$

$$\tilde{X}^{-,u}(r)=(\tilde{x}_۱^{-,u}(r),\dots,\tilde{x}_n^{-,u}(r))^t,\tilde{x}_i^{-,u}(r)=[x_i-\alpha_s^{-,u}(r),x_i+\alpha_s^{-,u}(r)], \quad (۳۰.۴)$$

$$\tilde{X}^{+,l}(r)=(\tilde{x}_۱^{+,l}(r),\dots,\tilde{x}_n^{+,l}(r))^t,\tilde{x}_i^{+,l}(r)=[x_i-\alpha_s^{+,l}(r),x_i+\alpha_s^{+,l}(r)], \quad (۳۱.۴)$$

$$\tilde{X}^{+,u}(r)=(\tilde{x}_۱^{+,u}(r),\dots,\tilde{x}_n^{+,u}(r))^t,\tilde{x}_i^{+,u}(r)=[x_i-\alpha_s^{+,u}(r),x_i+\alpha_s^{+,u}(r)]. \quad (۳۲.۴)$$

گزاره ۲.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c=\lambda$ و $X^c=(x_۱,\dots,x_n)^t$ و گستره های متقارن از جواب‌های معادله (مقادیرویژه و بردارهای ویژه) که از معادلات (۲۴.۴)-(۲۱.۴) حاصل شده را در حالت $|I_۱|=n^۲$ درنظر بگیرید.

الف) هرگاه وجود داشته باشد $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$، به‌طوری‌که $\sum_{j=۱}^{n}\underline{a}_{ij}(۱)-(\lambda+x_i)\le ۰$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{-,l}(۱)=۰$، $\tilde{X}^{-,l}(۱)=X^c$ و $\tilde{\lambda}^{-,l}(۱)=\lambda^c$ است .

ب) هرگاه وجود داشته باشد $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$ به‌طوری‌که $\sum_{j=۱}^{n}\overline{a}_{ij}(۱)-(\lambda+x_i)\ge ۰$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{-,u}(۱)=۰$، $\tilde{X}^{-,u}(۱)=X^c$ و $\tilde{\lambda}^{-,u}(۱)=\lambda^c$ است.

ج) هرگاه برای هر $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$، $\sum_{j=۱}^{n}\overline{a}_{ij}(۱)-(\lambda+x_i)\le ۰$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{+,l}(۱)=۰$، $\tilde{X}^{+,l}(۱)=X^c$ و $\tilde{\lambda}^{+,l}(۱)=\lambda^c$ است .

د) هرگاه برای هر $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$، $\sum_{j=۱}^{n}\overline{a}_{ij}(۱)-(\lambda+x_i)\ge ۰$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{+,u}(۱)=۰$، $\tilde{X}^{+,u}(۱)=X^c$ و $\tilde{\lambda}^{+,u}(۱)=\lambda^c$ است.

برهان. هرگاه λ^c و $X^c = (x_۱, \dots, x_n)^t$ جواب سیستم قطعی (۲.۴) باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}^{l}(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right] - \left|\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -max\left\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right\}, \end{aligned} \tag{۳۳.۴}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}^{u}(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right] + \left|\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -min\left\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right\}, \end{aligned} \tag{۳۴.۴}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i۲}^{l}(r) &= \frac{\left[\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right] - \left|\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -max\left\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right\}, \end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i۲}^{u}(r) &= \frac{\left[\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right] + \left|\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -min\left\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\right\}. \end{aligned} \tag{۳۶.۴}$$

بنابراین در حالت (الف) داریم:

$$\alpha_s^{-,l}(۱) = min_{i=۱,\dots,n}\{|max\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|, |max\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|\} = \circ, \tag{۳۷.۴}$$

در حالت (ب) داریم:

$$\alpha_s^{-,u}(۱) = min_{i=۱,\dots,n}\{|min\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|, |min\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|\} = \circ, \tag{۳۸.۴}$$

در حالت (ج) داریم:

$$\alpha_s^{+,l}(۱) = max_{i=۱,\dots,n}\{|max\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|, |max\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|\} = \circ, \tag{۳۹.۴}$$

و در نهایت در حالت (د) داریم:

$$\alpha_s^{+,u}(۱) = min_{i=۱,\dots,n}\{|min\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|, |min\{\circ, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i)\}|\} = \circ. \tag{۴۰.۴}$$

□

چون $\alpha_s^{-,l}(r) \leq \alpha_s^{+,l}(r)$ و $\alpha_s^{-,l}(r) \leq \alpha_s^{+,l}(r)$ و $\circ \leq r \leq ۱$ است، بنابراین [۳۵]:

$$\alpha_s^L(r) = min\{\alpha_s^{-,l}(r), \alpha_s^{-,u}(r)\}, \circ \leq r \leq ۱. \quad (۴۱.۴)$$

$$\alpha_s^U(r) = max\{\alpha_s^{+,l}(r), \alpha_s^{+,u}(r)\}, \circ \leq r \leq ۱. \quad (۴۲.۴)$$

فرض کنید:

$$\tilde{\lambda}^L(r) = [\lambda - \alpha_s^L(r), \lambda + \alpha_s^L(r)], \quad (۴۳.۴)$$

$$\tilde{\lambda}^U(r) = [\lambda - \alpha_s^U(r), \lambda + \alpha_s^U(r)], \quad (۴۴.۴)$$

$\tilde{X}^L = (\tilde{x}_۱^L, \tilde{x}_۲^L, \ldots, \tilde{x}_n^L)^t$ و $\tilde{X}^U = (\tilde{x}_۱^U, \tilde{x}_۲^U, \ldots, \tilde{x}_n^U)^t$ برقرار باشد. به عبارت دیگر داریم:

$$\tilde{x}_i^L(r) = [x_i - \alpha_s^L(r), x_i + \alpha_s^L(r)], r \in [\circ, ۱], i = ۱, \ldots, n, \quad (۴۵.۴)$$

$$\tilde{x}_i^U(r) = [x_i - \alpha_s^U(r), x_i + \alpha_s^U(r)], r \in [\circ, ۱], i = ۱, \ldots, n. \quad (۴۶.۴)$$

گزاره ۳.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c = \lambda$ و $X^c = (x_۱, \ldots, x_n)^t$ و گستره‌های متقارن از جواب‌های معادله (مقادیرویژه و بردارهای ویژه) که از روابط (۲۴.۴)-(۲۱.۴) و (۴۲.۴)-(۴۱.۴) حاصل شده را در حالت $|I_۱| = n^۲$ درنظر بگیرید، بنابراین داریم:

الف)

$$\alpha_s^L(۱) = \circ, \tilde{X}^L = X^c, \tilde{\lambda}^L(۱) = \lambda^c.$$

ب) هرگاه برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، داشته باشیم $\sum_{j=۱}^n \underline{a}_{ij}(۱) = \sum_{j=۱}^n \overline{a}_{ij}(۱) = \lambda + x_i$ ، آنگاه $\alpha_s^U(۱) = \circ$ ، $\tilde{X}^U(۱) = X^c$ و $\tilde{\lambda}^U(۱) = \lambda^c$ برقرار است.

برهان. هرگاه برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $\sum_{j=۱}^n \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i) \geq \circ$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{-,u}(۱) = \circ$ برقرار است.

هرگاه وجود نداشته باشد $i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ ، به‌طوری‌که $\sum_{j=۱}^n \overline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i) < \circ$ باشد، آنگاه $\sum_{j=۱}^n \underline{a}_{ij}(۱) - (\lambda + x_i) < \circ$ است. بنابراین $\alpha_s^{-,l}(۱) = \circ$ است و در ادامه $\alpha_s^L(۱) = \circ$ خواهد شد. برای قسمت (ب)، با استفاده از گزاره‌ی (۲.۱.۴) (قسمت‌های (ج) و (د))، $\alpha_s^U(۱) = \circ$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید که فرضیات موجود در گزاره‌های (۲.۱.۴) و (۳.۱.۴) بهینه هستند در حالتی که شرایط لازم، صفر بودن گستره‌های متناظر است. همین‌طور شرط (ب) در گزاره (۳.۱.۴) را می‌توان یادآوری کرد.

$$\sum_{j=۱}^n \underline{a}_{ij}(۱) = \sum_{j=۱}^n \overline{a}_{ij}(۱) = \lambda + x_i, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n \quad (۴۷.۴)$$

برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $\underline{a}_{ij}(۱) = \overline{a}_{ij}(۱)$ نتیجه می‌دهد. بنابراین (۴۷.۴) برای $\tilde{a}_{ij}$ با اعداد فازی مثلثی برقرار است.

$$\sum_{j=۱}^n \tilde{a}_{ij}(۱) = \lambda + x_i, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

□

۲.۱.۴ حالت ب

$$I_2 = \{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n : \tilde{a}_{ij} < 0\}, |I_2| = n^2$$

در این حالت درایه‌های ماتریس فازی $\tilde{A}$ منفی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین i-امین سطر از سیستم (۳.۴) را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j + a_{i1}(r)) = \lambda x_i - (\lambda + x_i)\alpha_{i1}(r) + \alpha_{i1}^2(r), \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j - a_{i2}(r)) = \lambda x_i + (\lambda + x_i)\alpha_{i2}(r) + \alpha_{i2}^2(r). \end{cases}$$

بنابراین هریک از ریشه‌های دو معادله‌ی بالا را به‌دست خواهیم آورد.

$$\alpha_{i1}(r) = \frac{[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] \pm \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2}, \tag{۴۸.۴}$$

$$\alpha_{i2}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] \pm \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2} \tag{۴۹.۴}$$

مشابه حالت (الف)، شکل‌های دیگر گستره‌ها را در نظر می‌گیریم. حالت‌های زیر، گستره‌های متفاوت از جواب معادله برای هر سطر $i = 1, \dots, n$ است.

$$\alpha_{i1}^{l}(r) = \frac{[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2} \tag{۵۰.۴}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(r) = \frac{[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] + \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2} \tag{۵۱.۴}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] - \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2} \tag{۵۲.۴}$$

$$\alpha_{i2}^{u}(r) = \frac{-[\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)] + \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i))^2 + 4(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{2} \tag{۵۳.۴}$$

دوباره حالت‌های متفاوتی را که در معادلات (۲۴.۴) -(۲۱.۴) و (۴۲.۴)-(۴۱.۴) گنجانده شده بود را در نظر می‌گیریم، که $\alpha_{i1}^{l}(r)$ ، $\alpha_{i1}^{u}(r)$، $\alpha_{i2}^{l}(r)$ و $\alpha_{i2}^{u}(r)$ به ترتیب در روابط (۵۰.۴)، (۵۱.۴)،(۵۲.۴) و (۵۳.۴) قرار داشت.

گزاره ۴.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c = \lambda$ و $X^c = (x_1, \dots, x_n)$ و گستره‌های متقارن از جواب‌های معادله (مقادیر ویژه و بردارهای ویژه) به‌دست آمده از (۵۳.۴)-(۵۰.۴) و (۲۴.۴)-(۲۱.۴) در حالت $| I_2 |= n^2$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) هرگاه وجود داشته باشد $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ به‌طوری که $\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(1) + (\lambda + x_i) \geq 0$ یا $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(1) + (\lambda + x_i) \leq 0$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{-,l}(1) = 0$ ، $\tilde{X}^{-,l}(1) = X^c$ و $\tilde{\lambda}^{-,l}(1) = \lambda^c$

است.

ب) هرگاه وجود داشته باشد $i \in \{۱,۲,\dots,n\}$ به‌طوری که $\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i) \leq ۰$ باشد یا $\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i) \geq ۰$ ، آنگاه $\alpha_s^{-,u}(۱) = ۰$، $\tilde{X}^{-,u}(۱) = X^c$ و $\tilde{\lambda}^{-,u}(۱) = \lambda^c$ است.

ج) هرگاه برای هر $i = ۱,۲,\dots,n$، $\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) = -(\lambda + x_i) = \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱)$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{+,l}(۱) = ۰$، $\tilde{X}^{+,l}(۱) = X^c$ و $\tilde{\lambda}^{+,l}(۱) = \lambda^c$ است.

د) هرگاه برای هر $i = ۱,۲,\dots,n$، $\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱)+(\lambda+x_i) \leq ۰ \leq \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱)+(\lambda+x_i)$ باشد، آنگاه $\alpha_s^{+,u}(۱) = ۰$، $\tilde{X}^{+,u}(۱) = X^c$ و $\tilde{\lambda}^{+,u}(۱) = \lambda^c$ است.

برهان. هرگاه λ^c و $X^c = (x_۱,\dots,x_n)$ جواب سیستم قطعی (۲.۴) باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}\alpha_{i۱}^{l}(r) &= \frac{\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i) - \left|\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= min\left\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right\},\end{aligned} \tag{۵۴.۴}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{i۱}^{u}(r) &= \frac{\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i) + \left|\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= max\left\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right\},\end{aligned} \tag{۵۵.۴}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{i۲}^{l}(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right] - \left|\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -max\left\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)\right\},\end{aligned} \tag{۵۶.۴}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{i۲}^{u}(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right] + \left|\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r) + (\lambda + x_i)\right|}{۲} \\ &= -min\left\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱) + (\lambda + x_i)\right\}.\end{aligned} \tag{۵۷.۴}$$

بنابراین در قسمت (الف) از گزاره داریم:

$$\alpha_s^{-,l}(۱) = min_{i=۱,\dots,n}\{|min\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(۱)+(\lambda+x_i)\}|, |max\{۰, \sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(۱)+(\lambda+x_i)\}|\} = ۰, \tag{۵۸.۴}$$

زیرا در این حالت $\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\geq 0$ یا $\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\leq 0$ را در نظر گرفتیم.
در قسمت (ب) از گزاره داریم:

$$\alpha_s^{-,u}(1)=min_{i=1,\dots,n}\{|max\{0,\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|,|min\{0,\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|\}=0, \quad (۵۹.۴)$$

زیرا در این حالت $\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\leq 0$ یا $\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\geq 0$ را در نظر گرفتیم.
در قسمت (ج) از گزاره، برای هر $i=1,2,\dots,n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)=0,$$

و بنابراین داریم:

$$\alpha_s^{+,l}(1)=max_{i=1,\dots,n}\{|min\{0,\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|,|max\{0,\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|\}=0. \quad (۶۰.۴)$$

و در نهایت در قسمت (د) از گزاره داریم:

$$\alpha_s^{+,u}(1)=max_{i=1,\dots,n}\{|max\{0,\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|,|min\{0,\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)+(\lambda+x_i)\}|\}=0. \quad (۶۱.۴)$$

□

لازم به توضیح است که، در گزاره (۴.۱.۴) ضرایب برای هر $i,j=1,2,\dots,n$، $\underline{a}_{ij}(1)=\overline{a}_{ij}(1)$ است. بنابراین می‌توانیم قرار دهیم:

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)=-(\lambda+x_i),\quad \underline{a}_{ij}(1)=\overline{a}_{ij}(1),\forall i,j=1,2,\dots,n.$$

گزاره ۵.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c=\lambda$ و $X^c=(x_1,\dots,x_n)$ و گستره‌های متقارن از جواب‌های معادله (مقادیرویژه و بردار ویژه)، حاصل شده از روابط (۲۴.۴) -(۲۱.۴) و همینطور روابط (۴۲.۴)-(۴۱.۴) در حالت $|I_2|=n^2$ را در نظر بگیرید، آنگاه:

الف)

$$\alpha_s^L(1)=0,\tilde{X}^L=X^c,\tilde{\lambda}^L(1)=\lambda^c.$$

ب) اگر برای هر $i=1,2,\dots,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)=-(\lambda+x_i)=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(1)$$

باشد، آنگاه $\alpha_s^U(1)=0$، $\tilde{X}^U(1)=X^c$ و $\tilde{\lambda}^U(1)=\lambda^c$ است.

برهان. ازگزاره (۴.۱.۴) قسمت‌های (الف) و (ب) واضح است که در هر حالت $\alpha_s^{-,u} = ۰$ یا $\alpha_s^{-,l} = ۰$ در نتیجه $\alpha_s^L(۱) = ۰$ است. قسمت (ب) این گزاره با استفاده از گزاره‌ی (۴.۱.۴) قسمت‌های (ب) و (ج) به‌دست می‌آید. □

۳.۱.۴ حالت ج

در این حالت در نظر می‌گیریم که برخی از درایه‌های ماتریس ضرایب $\tilde{A}$ مثبت و بقیه منفی باشند.

$$I_۳ = I_۱ \cup I_۲, |I_۱| = s_۱, |I_۲| = s_۲, s.t. \quad |I_۳| = s_۱ + s_۲ = n^۲.$$

در این حالت یافتن جواب مسئله را نشان می‌دهیم. فرض کنید عناصر i–امین سطر از $\tilde{A}$ طوری باشند که به ازای هر j عضو $\mathbb{N}_s$ ، $\tilde{a}_{ij} > ۰$ و به ازای هر j عضو $\mathbb{N}_n - \mathbb{N}_s$ ، $\tilde{a}_{ij} < ۰$ باشد. بنابراین داریم:

$$\sum_{j=۱}^{s} \underline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_{i۱}(r)) + \sum_{j=s+۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_{i۱}(r)) = \lambda x_i - (\lambda + x_i)\alpha_{i۱}(r) + \alpha_{i۱}^۲(r), \tag{۶۲.۴}$$

$$\sum_{j=۱}^{s} \overline{a}_{ij}(r)(x_j + \alpha_{i۲}(r)) + \sum_{j=s+۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j - \alpha_{i۲}(r)) = \lambda x_i - (\lambda + x_i)\alpha_{i۲}(r) + \alpha_{i۲}^۲(r). \tag{۶۳.۴}$$

از حل دو معادله‌ی بالا، به ترتیب $\alpha_{i۱}(r)$ و $\alpha_{i۲}(r)$، برای هر $i = ۱, \ldots, n$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i)\right]}{۲} \\ &\pm \frac{\sqrt{-(\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i))^۲ + ۴(\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{۲}, \end{aligned} \tag{۶۴.۴}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i۲}(r) &= \frac{[\sum_{j=۱}^{n} |\overline{a}_{ij}(r)| - (\lambda + x_i)]}{۲} \\ &\pm \frac{\sqrt{(\sum_{j=۱}^{n} |\overline{a}_{ij}(r)| - (\lambda + x_i))^۲ + ۴(\sum_{j=۱}^{n} \overline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{۲}, \end{aligned} \tag{۶۵.۴}$$

در نتیجه با استفاده از جواب‌های حاصل در بالا، گستره‌های متفاوتی را برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}^l(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i)\right]}{۲} \\ &- \frac{\sqrt{-(\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i))^۲ + ۴(\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{۲}, \end{aligned} \tag{۶۶.۴}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i۱}^u(r) &= \frac{-\left[\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i)\right]}{۲} \\ &+ \frac{\sqrt{-(\sum_{j=۱}^{n} |\underline{a}_{ij}(r)| + (\lambda + x_i))^۲ + ۴(\sum_{j=۱}^{n} \underline{a}_{ij}(r)x_j - \lambda x_i)}}{۲}, \end{aligned} \tag{۶۷.۴}$$

$$\alpha_{i۲}^{l}(r)=\frac{\left[\sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(r)|-(\lambda+x_i)\right]}{۲}-\frac{\sqrt{(\sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(r)|-(\lambda+x_i))^{۲}+۴(\sum_{j=۱}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j-\lambda x_i)}}{۲}, \tag{۶۸.۴}$$

$$\alpha_{i۲}^{u}(r)=\frac{\left[\sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(r)|-(\lambda+x_i)\right]}{۲}+\frac{\sqrt{(\sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(r)|-(\lambda+x_i))^{۲}+۴(\sum_{j=۱}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j-\lambda x_i)}}{۲}. \tag{۶۹.۴}$$

حال مشابه معادلات (۲۴.۴)-(۲۱.۴) می‌توان گستره‌های متفاوتی را برای مقادیر ویژه و همین‌طور مشابه گستره‌هایی که در معادلات (۴۲.۴)-(۴۱.۴) قرارداد شده است، برای بردارهای ویژه به دست آورده می‌شود.

گزاره ۶.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۳.۴) با $\lambda^c=\lambda$ و $X^c=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)^t$ و گستره‌های متقارن از جواب‌های معادله (مقادیرویژه و بردارهای ویژه) که از روابط (۶۹.۴)-(۶۶.۴) و (۲۴.۴)-(۲۱.۴) حاصل شده را در حالت $I_۳=I_۱\cup I_۲$ در نظر بگیرید، بنابراین داریم:

الف) هرگاه وجود داشته باشد $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$ به‌طوری که

$$\sum_{j=۱}^{n}|\underline{a}_{ij}(۱)|\le\lambda+x_i \quad \text{یا} \quad \sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(۱)|\ge\lambda+x_i$$

برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha_s^{-,l}(۱)=\circ,\tilde{X}^{-,l}(۱)=X^c,\tilde{\lambda}^{-,l}(۱)=\lambda^c.$$

ب) هرگاه وجود داشته باشد $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$ به‌طوری که

$$\sum_{j=۱}^{n}|\underline{a}_{ij}(۱)|\ge\lambda+x_i \quad \text{یا} \quad \sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(۱)|\le\lambda+x_i$$

برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha_s^{-,u}(۱)=\circ,\tilde{X}^{-,u}(۱)=X^c,\tilde{\lambda}^{-,u}(۱)=\lambda^c.$$

ج) هرگاه برای هر $i\in\{۱,۲,\dots,n\}$ به‌طوری که

$$\sum_{j=۱}^{n}|\underline{a}_{ij}(۱)|\le\lambda+x_i\le\sum_{j=۱}^{n}|\overline{a}_{ij}(۱)|$$

برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha_s^{+,l}(۱)=\circ,\tilde{X}^{+,l}(۱)=X^c,\tilde{\lambda}^{+,l}(۱)=\lambda^c.$$

د) هرگاه برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ به‌طوری که

$$\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| \leq \lambda + x_i \leq \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)|$$

برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha_s^{+,u}(1) = 0, \tilde{X}^{+,u}(1) = X^c, \tilde{\lambda}^{+,u}(1) = \lambda^c.$$

برهان. فرض کنید: λ^c و $X^c = (x_1, \ldots, x_n)$ جواب سیستم قطعی (۲.۴) باشد، آنگاه در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_{i1}^{l}(1) = \frac{\left[-\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| + (\lambda + x_i)\right] - \left|-\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| + (\lambda + x_i)\right|}{2}$$
$$= min\left\{0, (\lambda + x_i) - \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)|\right\} = -max\left\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right\}, \tag{۷۰.۴}$$

$$\alpha_{i1}^{u}(1) = \frac{\left[-\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| + (\lambda + x_i)\right] + \left|-\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| + (\lambda + x_i)\right|}{2}$$
$$= max\left\{0, (\lambda + x_i) - \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)|\right\} = -min\left\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right\}, \tag{۷۱.۴}$$

$$\alpha_{i2}^{l}(1) = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right] - \left|\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right|}{2}$$
$$= min\left\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right\}, \tag{۷۲.۴}$$

$$\alpha_{i2}^{u}(1) = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right] + \left|\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right|}{2}$$
$$= max\left\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\right\}. \tag{۷۳.۴}$$

برای حالت (الف) در این گزاره، چون $\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| \leq \lambda + x_i$ یا $\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| \geq \lambda + x_i$ برقرار است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha_s^{-,l}(1) = min_{1,2,\ldots,n}\{|max\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|, |min\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|\} = 0. \tag{۷۴.۴}$$

در حالت (ب) در این گزاره، چون $\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| \leq \lambda + x_i$ یا $\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| \geq \lambda + x_i,$ برقرار است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha_s^{-,u}(1) = min_{1,2,\ldots,n}\{|min\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|, |max\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|\} = 0. \quad (۷۵.۴)$$

در حالت (ج) در این گزاره، چون برای هر $i \in 1, 2, \ldots, n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i) \leq 0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha_s^{+,l}(1) = max_{1,2,\ldots,n}\{|min\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|, |min\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|\} = 0. \quad (۷۶.۴)$$

و در نهایت در حالت (د) در این گزاره ، چون برای حالت $i \in 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| \leq \lambda + x_i \leq \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)|$$

خواهد بود، داریم:

$$\alpha_s^{+,u}(1) = max_{1,2,\ldots,n}\{|min\{0, \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|, |max\{0, \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| - (\lambda + x_i)\}|\} = 0. \quad (۷۷.۴)$$

□

گزاره ۷.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c = \lambda$ ، $X^c = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و گستره‌های متقارن (برای مقادیرویژه و بردارهای ویژه) که از روابط (۶۹.۴)-(۶۶.۴) و (۲۴.۴)-(۲۱.۴) به‌دست آمده را در حالت $I_3 = I_1 \cup I_2$ درنظر بگیرید، آنگاه :

(الف)

$$\alpha_s^L(1) = 0, \tilde{X}^L(1) = X^c, \tilde{\lambda}^L(1) = \lambda^c.$$

ب) هرگاه برای هر $i \in 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)| = \lambda + x_i = \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)|$$

آنگاه $\alpha_s^U(1) = 0, \tilde{X}^U(1) = X^c, \tilde{\lambda}^U(1) = \lambda^c$.

برهان. طبق رابطه (۴۱.۴)، چون $\alpha_s^L(r) = min\{\alpha_s^{-,l}(r), \alpha_s^{-,u}(r)\}$، $0 \leq r \leq 1$ است. از طرفی طبق گزاره (۶.۱.۴) قسمت‌های (الف) و (ب)، مشابه اثبات قبل به‌دست می‌آید. برای اثبات قسمت (ب) در این گزاره، طبق رابطه‌ی (۴۲.۴) چون $\alpha_s^U(r) = max\{\alpha_s^{+,l}(r), \alpha_s^{+,u}(r)\}$، $0 \leq r \leq 1$ است و اثبات آن مشابه با در نظر گرفتن حالات (ج) و (د) درگزاره‌ی (۶.۱.۴) می‌باشد. □

گزاره ۸.۱.۴. جواب سیستم قطعی (۲.۴) با $\lambda^c = \lambda$ و $X^c = (x_1, \dots, x_n)^t$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قراردادهای (۴۶.۴)-(۴۳.۴) داریم:

الف) عدد فازی $\tilde{\lambda}^L$ و بردار فازی $\tilde{X}^L$ ، مقدار ویژه و بردار ویژه متقارن مینیمال از $\tilde{A}$ را تشکیل می‌دهد.

ب) فرض کنید برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(1)| = \lambda + x_i = \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(1)|$ باشد، آنگاه عدد فازی $\tilde{\lambda}^U$ و بردار فازی $\tilde{X}^U$ ، مقدار ویژه و بردار ویژه متقارن ماکسیمال از $\tilde{A}$ را تشکیل می‌دهد.

برهان. اثبات قست (الف) که به وضوح مشخص است. برای اثبات قسمت (ب) توجه کنید که بنابر قسمت‌های (ب) از گزاره‌های (۳.۱.۴)،(۵.۱.۴) و (۷.۱.۴) ، در هریک از حالات $\alpha^U = 0$ خواهد شد و مقدار ویژه و بردار ویژه ماکسیمال به‌دست می‌آید. □

۲.۴ مثال عددی

در بخش‌های قبل نحوه‌ی محاسبه‌ی مقادیر ویژه فازی و بردارهای ویژه فازی بررسی شد. حال در این‌جا برای شفاف‌تر شدن موضوع به مثالی عددی می‌پردازیم. ماتریس فازی $\tilde{A}$ را درنظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (4+r, 6-r) & (5+r, 8-2r) \\ (6+r, 7) & (4, 5-r) \end{bmatrix}$$

ابتدا ۱-برش از ماتریس بالا را محاسبه می‌کنیم و ماتریس قطعی زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه آن ۱۱ و ۲− خواهند شد. جواب قطعی λ^c و بردار $X^c = (x_1, x_2)^t$ با در نظر گرفتن مقدار ویژه $\lambda^c = 11$ ، به‌صورت $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$ خواهد شد. با توجه به سیستم قطعی (۲.۴)، فازی سازی را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} [4+r, 6-r][1-\alpha_1(r), 1+\alpha_1(r)] + [5+r, 8-2r][1-\alpha_1(r), 1+\alpha_1(r)] \\ = [11-\alpha_1(r), 11+\alpha_1(r)][1-\alpha_1(r), 1+\alpha_1(r)], \\ [6+r, 7][1-\alpha_2(r), 1+\alpha_2(r)] + [4, 5-r][1-\alpha_2(r), 1+\alpha_2(r)] \\ = [11-\alpha_2(r), 11+\alpha_2(r)][1-\alpha_2(r), 1+\alpha_2(r)]. \end{cases}$$

و با حل چهار معادله‌ی زیر گستره‌های مقدار ویژه و بردار ویژه را به‌دست می‌آوریم:

$$(4+r)(1-\alpha_1(r)) + (5+r)(1-\alpha_1(r)) = (11-\alpha_1(r))(1-\alpha_1(r)), \tag{۷۸.۴}$$

$$(6-r)(1+\alpha_1(r)) + (8-2r)(1+\alpha_1(r)) = (11-\alpha_1(r))(1+\alpha_1(r)), \tag{۷۹.۴}$$

$$(6+r)(1-\alpha_2(r)) + 4(1-\alpha_2(r)) = (11-\alpha_2(r))(1-\alpha_2(r)), \tag{۸۰.۴}$$

$$7(1+\alpha_2(r))+(5-r)(1+\alpha_2(r))=(11+\alpha_2(r))(1+\alpha_2(r)), \qquad (81.4)$$

که $1 \le \alpha_1(r) \le 0$ و $1 \le \alpha_2(r) \le 0$ است. جواب‌های معادلات (۸۱.۴)-(۷۸.۴) به ترتیب به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\alpha_{11}(r)=\frac{(3-2r)\pm\sqrt{(3-2r)^2+4(2r-2)}}{2}=\frac{3}{2}-r\pm\frac{|2r-1|}{2},$$

$$\alpha_{12}(r)=\frac{(2-3r)\pm\sqrt{(2-3r)^2+4(3-3r)}}{2}=1-\frac{3}{2}-r\pm\frac{4-3r}{2}=\begin{cases}3-3r\\-1\end{cases},$$

$$\alpha_{21}(r)=\frac{(2-r)\pm\sqrt{(2-r)^2+4(r-1)}}{2}=\frac{2-r\pm r}{2}=\begin{cases}1\\1-r\end{cases},$$

$$\alpha_{22}(r)=\frac{-r\pm\sqrt{r^2+4(1-r)}}{2}=\begin{cases}1-r\\-1\end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha^l_{11}(r)=\frac{3}{2}-r-\frac{|2r-1|}{2},\alpha^u_{11}(r)=\frac{3}{2}-r+\frac{|2r-1|}{2},0\le r\le 1,$$

$$\alpha^l_{12}(r)=-1,\alpha^u_{12}(r)=3-3r,0\le r\le 1,$$

$$\alpha^l_{21}(r)=1-r,\alpha^u_{21}(r)=1,0\le r\le 1,$$

$$\alpha^l_{22}(r)=-1,\alpha^u_{22}(r)=1-r,0\le r\le 1,$$

علاوه بر این با استفاده از عبارت‌های (۲۴.۴)-(۲۱.۴) حالت‌های متفاوتی از گستره‌ها را برای مقدار ویژه و بردار ویژه به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\alpha_s^{-,l}(r)=1-r,\\ \alpha_s^{-,u}(r)=1-r,\\ \alpha_s^{+,l}(r)=1,\\ \alpha_s^{+,u}(r)=max\begin{cases}3(1-r), & r\in[0,\frac{2}{3}] \quad \text{اگر},\\ 1, & r\in[\frac{2}{3},1] \quad \text{اگر}.\end{cases}\end{cases}$$

هرگاه توابعی را با مقادیر در بازه $[0,1]$ در نظر بگیریم، باید برای $\alpha_s^{+,u}(r)$ مقدار ۱ را انتخاب کنیم. در ادامه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه که از گستره‌های قبلی محاسبه می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\lambda}^{-,l}(r)=[11-(1-r),11+(1-r)]=[10+r,12-r], \qquad (82.4)$$

$$\tilde{\lambda}^{-,u}(r)=[11-(1-r),11+(1-r)]=[10+r,12-r], \qquad (83.4)$$

$$\tilde{\lambda}^{+,l}(r)=[11-1,11+1]=[10,12], \qquad (84.4)$$

$$\tilde{\lambda}^{+,u}(r) = [۱۱ - max\{۳(۱-r), ۱\}, ۱۱ + max\{۳(۱-r), ۱\}]$$
$$= \begin{cases} [۸ + ۳r, ۱۴ - ۳r], r \in [۰, \frac{۲}{۳}] & \text{اگر}, \\ [۱۰, ۱۲], r \in [\frac{۲}{۳}, ۱] & \text{اگر}, \end{cases} \quad (۸۵.۴)$$

و همچنین برای بردارهای ویژه به ترتیب داریم:

$$\tilde{X}^{-,l}(r) = ([۱-(۱-r), ۱+(۱-r)], [۱-(۱-r), ۱+(۱-r)])^t = ([r, ۲-r], [r, ۲-r])^t, \quad (۸۶.۴)$$

$$\tilde{X}^{-,U}(r) = ([۱-(۱-r), ۱+(۱-r)], [۱-(۱-r), ۱+(۱-r)])^t = ([r, ۲-r], [r, ۲-r])^t, \quad (۸۷.۴)$$

$$\tilde{X}^{+,l}(r) = ([۱-۱, ۱+۱], [۱-۱, ۱+۱])^t = ([۰, ۲], [۰, ۲])^t, \quad (۸۸.۴)$$

$$\tilde{X}^{+,U}(r) = ([(۱ - max\{۳(۱-r), ۱\}, ۱ + max\{۳(۱-r), ۱\})],$$
$$([۱ - max\{۳(۱-r), ۱\}, ۱ + max\{۳(۱-r), ۱\})])^t$$
$$= \begin{cases} (-۲ + ۳r, ۴ - ۳r], [-۲ + ۳r, ۴ - ۳r])^t, r \in [۰, \frac{۲}{۳}] & \text{اگر} \\ ([۰, ۲], [۰, ۲])^t, \quad r \in [\frac{۲}{۳}, ۱] & \text{اگر}. \end{cases} \quad (۸۹.۴)$$

توجه کنید که با انتخاب $\alpha_s^{+,u}(r) = ۱$ ، بردار ویژه $\tilde{X}^{+,U}(r) = \tilde{X}^{+,l}(r) = ([۰, ۲], [۰, ۲])^t$ و در نهایت با α_s^L و α_s^U ، $\tilde{\lambda}^L = \tilde{\lambda}^{-,l} = \tilde{\lambda}^{+,l}, \tilde{\lambda}^U = \tilde{\lambda}^{+,u}$ و $\tilde{X}^L = \tilde{X}^{-,l} = \tilde{X}^{-,u}, \tilde{X}^U = \tilde{X}^{+,u}$ خواهد بود.

هرگاه $\tilde{\alpha}_s^{+,u}(r) = ۱$ باشد، آنگاه $\tilde{X}^U = \tilde{X}^{+,u} = \tilde{\lambda}^{+,l}$ است.

فصل ۵

انرژی لاپلاسین گراف فازی

۱.۵ انرژی لاپلاسین گراف

۱.۱.۵ مقدمه و تعاریف اساسی

در فصل دوم مفهوم انرژی گراف مطرح و برخی کران‌ها برای آن در گراف‌های قطعی و فازی بررسی شد. انواع مشابهی از انرژی گراف در برخی مقالات مشاهده می‌شود. برخی از این انرژی‌ها با استفاده از ماتریس‌های مرتبط با گراف، یا غیرمرتبط با گراف تعریف شده‌اند. به‌طور مثال انرژی با استفاده از ماتریس مجاورت، **ماتریس وقوع**[۱] و **ماتریس فاصله**[۲] مرتبط با گراف هستند. گاتمن و **ژئو**[۳] انرژی لاپلاسین از گراف را، مجموع قدرمطلق فاصله‌ی مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین از میانگین درجات تعریف کردند[۱۷] . فرمول‌ها و کران‌های به‌دست آمده از انرژی، برای شیمیدانان نظری مفید است. برای آن‌ها این مقدار می‌تواند ویژگی‌های فیزیکی از ترکیبات شیمیایی را مشخص کند.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ ماتریس مجاورت گراف ساده $G=(V,E)$ با n راس و m یال باشد. هرگاه به جای درایه‌های قطر اصلی در ماتریس A مقدار درجه راس متناظر را قرار دهیم و سایر عناصر را صفر در نظر بگیریم، ماتریس حاصل را **ماتریس درجه**[۴] می‌نامند و آن‌را با D نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۵. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ ماتریس مجاورت و D ماتریس درجه از گراف ساده G با n راس و m یال باشد. ماتریس حاصل از رابطه $L=D-A$ را **ماتریس لاپلاسین**[۵] گراف G می‌نامند.

[۱] Incidence Matrix

[۲] Distance Matrix

[۳] Zhou

[۴] Degree Matrix

[۵] Laplacian Matrix

بنابراین ماتریس لاپلاسین $L = [l_{ij}]$، ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های تعریف شده به‌صورت زیر است:

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & i = j, \\ -۱, & \text{یال باشد } v_iv_j, \\ ۰, & \text{یال نباشد } v_iv_j. \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۵. فرض کنید G گرافی ساده با n راس، m یال و $\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \ldots \geq \mu_n$ مقادیر ویژه لاپلاسین از G باشد. **انرژی لاپلاسین**[۶] از G به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$LE(G) = \sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|$$

که در آن $\frac{۲m}{n}$ میانگین درجه‌ی رئوس است.

نکته ۴.۱.۵. برای مقادیر ویژه لاپلاسین گراف G روابط زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲m, \quad \sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = ۲m + \sum_{i=۱}^{n} d_i^۲. \tag{۱.۵}$$

هرگاه $\gamma_i = \mu_i - \frac{۲m}{n}$ در نظر بگیریم، می‌توان رابطه‌ی (۱.۵) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{i=۱}^{n} \gamma_i = ۰, \quad \sum_{i=۱}^{n} \gamma_i^۲ = ۲M, \tag{۲.۵}$$

که در آن $M = m + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left(d_i - \frac{۲m}{n}\right)^۲$ است.

نتیجه ۵.۱.۵. به وضوح برای هر گراف G، $M \geq m$ است و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر G گراف منتظم باشد [۱۷].

نکته ۶.۱.۵. ماتریس لاپلاسین، نیمه معین مثبت است و مقادیر ویژه آن بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد.

۲.۱.۵ تعیین برخی کران‌ها برای انرژی لاپلاسین گراف

مشابه کران‌های به‌دست آمده برای انرژی گراف، می‌توان کران‌هایی را برای انرژی لاپلاسین گراف به‌دست آورد [۱۷]. فرض کنید G گرافی ساده با n راس و m یال باشد، آنگاه قضیه‌های زیر برقرار است.

.۱

$$LE(G) \leq \sqrt{۲Mn}.$$

برهان. با استفاده از تعریف واریانس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} var(|\gamma_i|) &= AM(|\gamma_i|^۲) - [AM(|\gamma_i|)]^۲ \\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|^۲ - \left(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|\right)^۲ \\ &= \frac{۲M}{n} - \frac{۱}{n^۲}(LE(G))^۲ \end{aligned} \tag{۳.۵}$$

[۶] Laplacian Energy

مقدار این واریانس همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. در نتیجه داریم:

$$LE(G) \leq \sqrt{۲Mn}. \qquad (۴.۵)$$

□

۲.

$$LE(G) \leq \frac{۲m}{n} + \sqrt{(n-۱)\left[۲M - (\frac{۲m}{n})^۲\right]}. \qquad (۵.۵)$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز برای $(۱, \dots, ۱)$ و $(|\gamma_۲|, \dots, |\gamma_n|)$ و تعریف انرژی لاپلاسین (مشابه رابطه‌ی به‌دست آمده برای انرژی گراف (۹.۲)) اثبات می‌شود. □

۳.

$$۲\sqrt{M} \leq LE(G) \leq ۲M.$$

برهان. برای اثبات طرف راست نامساوی، چون برای هر گراف با n راس و m یال و بدون راس تنها، همواره $n \leq ۲m$ است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۴.۵) داریم:

$$LE(G) \leq \sqrt{۲Mn} \leq \sqrt{۲M(۲m)} = ۲\sqrt{Mm}, \qquad (۶.۵)$$

از طرفی $m \geq M$ است. در نتیجه $LE(G) \leq ۲M$ خواهد شد.

برای اثبات طرف چپ نامساوی، با استفاده از تعریف انرژی لاپلاسین داریم:

$$\begin{aligned} LE(G)^۲ &= ۲M + ۲\sum_{i<j} |\gamma_i||\gamma_j| \\ &\geq ۲M + ۲|\sum_{i<j} \gamma_i\gamma_j| \qquad (۷.۵) \\ &= ۲M + ۲M = ۴M, \end{aligned}$$

در نتیجه $LE(G) \geq ۲\sqrt{M}$ است. □

قضیه ۷.۱.۵. [۱۷] فرض کنید G گرافی با n راس و m یال و p مولفه‌ی همبندی $(p \geq ۱)$ باشد، آنگاه:

$$LE(G) \leq \frac{۲m}{n}p + \sqrt{(n-p)\left[۲M - p\left(\frac{۲m}{n}\right)^۲\right]}.$$

در حالت‌های خاص، هریک از این قضیه‌ها می‌تواند به‌صورت تساوی ظاهر شوند، که در قالب نتایج زیر گنجانده شده است [۱۷].

نتیجه ۸.۱.۵. $LE(G) = \sqrt{۲Mn}$ است، اگر و تنها اگر G گراف منتظم از درجه‌ی صفر بوده، یا شامل α مولفه از گراف‌های کامل از درجه‌ی k و $\alpha(k-۲)$ راس تنها باشد، به‌طوری که $\alpha \geq ۱$ و $k \geq ۲$ است. (لازم به توضیح است که در حالت $k = ۲$، G گراف منتظم از درجه‌ی یک است.)

نتیجه ۵.۱.۹. $LE(G) = 2\sqrt{M}$ است، اگر و تنها اگر G گراف کامل دوبخشی $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ باشد.

نتیجه ۵.۱.۱۰. $LE(G) = 2M$ است، اگر و تنها اگر G گراف منتظم از درجه‌ی یک و بدون راس تنها باشد.

نتیجه ۵.۱.۱۱. برای هر p قضیه (۵.۱.۷) به صورت تساوی ظاهر می‌شود، اگر و تنها اگر G شامل α مولفه از گراف‌های کامل از درجه‌ی k و $\alpha(k-2)$ راس تنها باشد، به‌طوری که $\alpha \geq 1$ و $k \geq 2$ است.

۵.۱.۳ برخی روابط در انرژی لاپلاسین

مطالب این زیربخش از مرجع [۱۷] استخراج شده است.

لم ۵.۱.۱۲. [۱۷] اگر G گرافی منتظم باشد، آنگاه:

$$LE(G) = E(G).$$

ملاحظه ۵.۱.۱۳. با استفاده از تعریف انرژی لاپلاسین گراف، $LE(G) \geq 0$ است. همچنین اگر $m = 0$ باشد، آنگاه $LE(G) = 0$ است. زیرا اگر G حداقل یک یال داشته باشد، آنگاه $\gamma_n = \frac{-2m}{n}$ غیرصفر و در نتیجه $LE(G) > 0$ است.

ملاحظه ۵.۱.۱۴. هرگاه G گرافی ناهمبند، شامل مولفه‌های $G_1 = (n_1, m_1)$ و $G_2 = (n_2, m_2)$ باشد ، که G_1 و G_2 دارای میانگین درجه‌ی راسی یکسانی هستند، آنگاه:

$$LE(G) = LE(G_1) + LE(G_2).$$

اگر شرط $\frac{2m_2}{n_2} = \frac{2m_1}{n_1}$ برقرار نباشد، آنگاه یکی از روابط زیر برقرار است:

۱.
$$LE(G) > LE(G_1) + LE(G_2),$$

۲.
$$LE(G) < LE(G_1) + LE(G_2),$$

۳.
$$LE(G) = LE(G_1) + LE(G_2).$$

ملاحظه ۵.۱.۱۵. فرض کنید گراف G شامل مولفه‌ی G_1 با n_1 راس و m یال باشد (ممکن است دارای $p \geq 1$ مولفه باشد) که n_2 راس تنها به آن اضافه شده است، آنگاه:

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n_1-p} \left|\mu_i(G_1) - \frac{2m}{n_1+n_2}\right| + (p+n_2)\frac{2m}{n_1+n_2}. \tag{۵.۸}$$

اگر n_2 به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، آنگاه:

$$LE(G) = 4m\frac{p+n_2}{n_1+n_2} < 4m. \qquad (۹.۵)$$

بنابراین در این حالت، انرژی لاپلاسین مستقل از هر ساختار اصلی گراف G است. علاوه بر این داریم:

$$\lim_{n_2\to\infty} LE(G) = 4m. \qquad (۱۰.۵)$$

۲.۵ انرژی لاپلاسین گراف فازی

۱.۲.۵ تعاریف

تعاریف این بخش از مراجع [۱۴] و [۱۵] استخراج شد.

تعریف ۱.۲.۵ (درجه در گراف فازی[۷]). فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گرافی فازی باشد. درجه راس u_i در گراف فازی $\tilde{G}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{\tilde{G}}(u_i) = \sum_{u_i \neq u_j} \mu(u_i u_j).$$

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گرافی فازی باشد. **درجه‌ی کلی**[۸] راس u_i در گراف فازی G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$td_{\tilde{G}}(u_i) = \sum_{u_i \neq u_j} \mu(u_i u_j) + \sigma(u_i) = d_{\tilde{G}}(u_i) + \sigma(u_i).$$

تعریف ۳.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی روی گراف زمینه‌ی $G^* = (V, E)$ باشد. هرگاه برای هر راس $v \in V$، $d_{\tilde{G}}(v) = k$ باشد، $\tilde{G}$ را گراف فازی منتظم از درجه k یا **گراف فازی** k **-منتظم**[۹] گویند.

تعریف ۴.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' = (\sigma', \mu')$ دو گراف فازی، به ترتیب با مجموعه‌های زمینه‌ی V و V' باشند. **همریختی**[۱۰] دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ تعریف می‌شود، هرگاه نگاشت h وجود داشته باشد که $h : V \longrightarrow V'$ باشد و شرایط زیر برقرار باشند:

$$\sigma(x) \leq \sigma'(h(x)) \quad , \forall x \in V,$$

$$\mu(x, y) \leq \mu'(h(x), h(y)) \quad , \forall x, y \in V.$$

تعریف ۵.۲.۵. یکریختی ضعیف[۱۱] دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ تعریف می‌شود، هرگاه نگاشت h وجود داشته باشد که $h : V \longrightarrow V'$ یک همریختی دوسویی با شرط $\sigma(x) = \sigma'(h(x)), \forall x \in V$ باشد.

[۷] Degree in Fuzzy Graph

[۸] Total Degree

[۹] K-regular Fuzzy Graph

[۱۰] Homomorphism

[۱۱] Weak Isomorphism

تعریف ۶.۲.۵. یکریختی هم‌ضعیف[۱۲] دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ تعریف می‌شود، هرگاه نگاشت h وجود داشته باشد، که $h : V \longrightarrow V'$ یک همریختی دوسویی بوده و شرط زیر برقرار باشد:

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)), \forall x, y \in V.$$

تعریف ۷.۲.۵. یکریختی[۱۳] دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ تعریف می‌شود، هرگاه نگاشت $h : V \longrightarrow V'$ وجود داشته باشد، که یک دوسویی است و شرایط زیر برقرار باشند:

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)), \forall x \in V,$$

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)), \forall x, y \in V.$$

و آن‌را با $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$ نشان می‌دهیم.

۲.۲.۵ بررسی برخی روابط از مقادیر ویژه در گراف‌های فازی

۱. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با n راس و $\mu^* = \{e_1, \ldots, e_m\}$ باشد و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i-امین یال و $\tilde{\lambda}_1 \geq \ldots \geq \tilde{\lambda}_n$ مقادیر ویژه به‌دست آمده از ماتریس مجاورت آن باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است [۱۳]:

(الف)

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i = 0,$$

(ب)

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} m_i^2.$$

برهان. برای اثبات (الف)، چون گراف $\tilde{G}$ ساده و فاقد حلقه است، پس عناصر روی قطر اصلی ماتریس مجاورت آن صفر می‌باشد. طبق تعریف اثر ماتریس برای ماتریس قطری $\tilde{A}$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i = tr(\tilde{A}) = 0. \tag{۱۱.۵}$$

و برای اثبات (ب)، با توجه به یکی از خواص اثر ماتریس، همواره مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{A}^2$، $\tilde{\lambda}_i^2$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ است. از طرفی این ماتریس قطری است و مجموع مقادیر ویژه آن با مجموع عناصر روی قطر اصلی برابر است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i^2 = tr(\tilde{A}^2) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,i}^2,$$

---

[۱۲] Co-weak Isomorphism

[۱۳] Isomorphism

از طرفی ماتریس مجاورت این گراف، متقارن و به‌صورت زیر است:

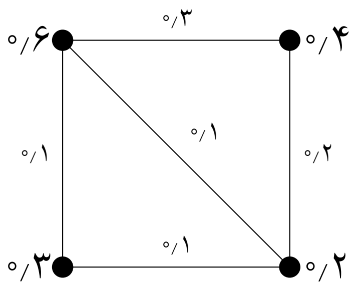
$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & \mu(u_1,u_2) & \dots & \mu(u_1,u_n)\\ \mu(u_2,u_1) & 0 & \dots & \mu(u_2,u_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu(u_n,u_1) & \mu(u_n,u_2) & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{i,i}^2 &= (0+\mu^2(u_1,u_2)+\mu^2(u_1,u_3)+\ldots+\mu^2(u_1,u_n))\\ &\quad+(\mu^2(u_2,u_1)+0+\mu^2(u_2,u_3)+\ldots\mu^2(u_2,u_n))\\ &\quad\vdots\\ &\quad+(\mu^2(u_n,u_1)+\mu^2(u_n,u_2)+\ldots+0)\\ &\quad=2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu^2(u_i,u_j)=2\sum_{i=1}^{m}m_i^2.\end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

□

مثال ۸.۲.۵. گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۱.۵) را در نظر بگیرید. ماتریس مجاورت برای این گراف به‌صورت زیر است.



شکل ۱.۵: گراف فازی $\tilde{G}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0/1 & 0 & 0/1\\ 0/1 & 0 & 0/2 & 0/1\\ 0 & 0/2 & 0 & 0/3\\ 0/1 & 0/1 & 0/3 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این گراف مقادیر ویژه، $\{-0/34, -0/1, 0, 0/44\}$ است. طبق روابط (الف) و (ب) برای مقادیر ویژه گراف فازی داریم:

$$\sum_{i=1}^{4}\tilde{\lambda}_i=0,$$

$$\sum_{i=۱}^{۴} \tilde{\lambda}_i^۲ = ۰/۱۱۵۶ + ۰/۰۱ + ۰ + ۰/۱۹۳۶ = ۲\sum_{i=۱}^{۵} m_i^۲ = ۰/۳۲.$$

۲. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i−امین یال و $\tilde{\lambda}_۱ \geq \ldots \geq \tilde{\lambda}_n$ مقادیر ویژه به‌دست آمده از ماتریس مجاورت آن باشند، آنگاه:

$$\tilde{\lambda}_۱(\tilde{G}) \leq \sqrt{\frac{(n-۱)۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n}}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز برای $(۱, \ldots, ۱)$ و $(\tilde{\lambda}_۲, \ldots, \tilde{\lambda}_n)$ خواهیم داشت:

$$|\sum_{i=۲}^{n} \tilde{\lambda}_i|^۲ \leq (\sum_{i=۲}^{n} |\tilde{\lambda}_i|^۲)(n-۱), \tag{۱۳.۵}$$

از طرفی چون مجموع مقادیر ویژه برابر صفر است، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$|\tilde{\lambda}_۱|^۲ \leq (n-۱)(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - |\tilde{\lambda}_۱|^۲), \tag{۱۴.۵}$$

و در نتیجه داریم:

$$\tilde{\lambda}_۱(\tilde{G}) \leq \sqrt{\frac{(n-۱)۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲}{n}}.$$

□

۳. در گراف‌های فازی k−منتظم، بزرگترین مقدار ویژه به‌صورت زیر است:

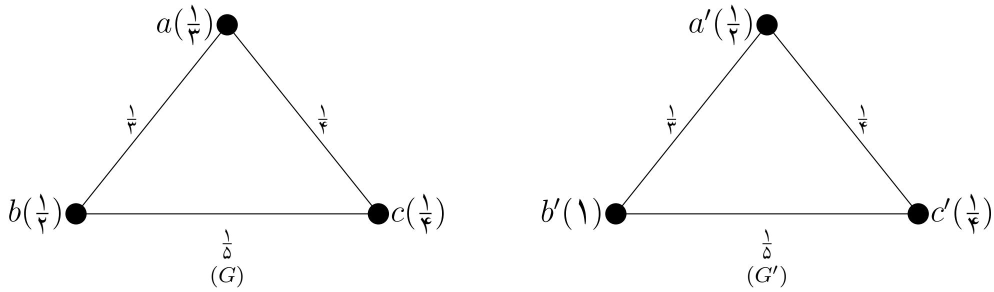
$$\tilde{\lambda}_۱ = k = \frac{۲\sum_{۱\leq i<j\leq n} \mu(u_i, u_j)}{n}. \tag{۱۵.۵}$$

۴. در گراف‌های قطعی، دو گراف یکریخت دارای طیف یکسان می‌باشند ولی عکس آن برقرار نیست [۳۹]. این مطلب در مورد گراف‌های فازی نیز برقرار است.

نکته ۹.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی k−منتظم با $|V| = n$ و $\mu^* = \{e_۱, \ldots, e_m\}$ باشد و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i−امین یال باشند، آنگاه یک کران بالا برای این انرژی، به‌صورت زیر است:

$$E(\tilde{G}) \leq k + \sqrt{(n-۱)(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - k^۲)}. \tag{۱۶.۵}$$

برهان. با استفاده از رابطه‌های (۲۷.۲) و (۱۵.۵)، به سادگی اثبات می‌شود. □

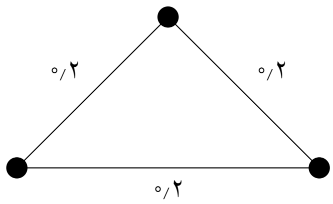


شکل ۲.۵: گراف‌های فازی یکریخت هم‌ضعیف $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$

مثال ۱۰.۲.۵. دو گراف $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ در شکل (۲.۵) را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان بررسی کرد که این دو گراف، یکریخت هم‌ضعیف هستند.

مقادیر ویژه‌ی به‌دست آمده از این دو گراف، یکسان و برابر $\{-۰/۳۳۹۹, -۰/۱۸۶۳, ۰/۵۲۶۳\}$ است. بنابراین اگرچه دارای طیف یکسانی هستند، اما یکریخت نیستند.

مثال ۱۱.۲.۵. گراف فازی $\tilde{G}_۱$ در شکل (۳.۵) را در نظر بگیرید.



شکل ۳.۵: گراف فازی ۰/۴-منتظم $\tilde{G}_۱$ با ۳ راس

درجه‌ی هر راس در این گراف، $k = ۰/۴$ و مقادیر ویژه آن $\{-۰/۲, -۰/۲, ۰/۴\}$ است.
انرژی این گراف برابر با $E(\tilde{G}) = ۰/۲ + ۰/۲ + ۰/۴ = ۰/۸$ است. از طرفی بنابر نکته‌ی (۹.۲.۵) کران بالایی برای این انرژی، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$E(\tilde{G}_۱) \leq ۰/۴ + \sqrt{(۳-۱)(۲ \times ۰/۱۲ - ۰/۱۶)} = ۰/۸.$$

۳.۲.۵ انرژی لاپلاسین گراف فازی

مشابه انرژی لاپلاسین برای گراف‌های قطعی، می‌توانیم انرژی لاپلاسین برای گراف‌های فازی داشته باشیم.

تعریف ۱۲.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گرافی فازی باشد. **ماتریس لاپلاسین فازی**[۱۴] $\tilde{L} = [\tilde{l_{ij}}]$

[۱۴] Fuzzy Laplacian Matrix

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{l}_{ij} = \begin{cases} d_{\tilde{G}}(u_i), & i = j, \\ -\mu(u_i, u_j), & \text{یال باشد } u_iu_j, \\ ۰, & \text{یال نباشد } u_iu_j. \end{cases}$$

مقادیر ویژه به‌دست آمده از این ماتریس را **مقادیر ویژه لاپلاسین فازی**[۱۵] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گرافی فازی با n راس و $\tilde{\mu}_۱ \geq \tilde{\mu}_۲ \geq \ldots \geq \tilde{\mu}_n$ مقادیر ویژه لاپلاسین آن باشند، آنگاه **انرژی لاپلاسین فازی**[۱۶] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LE(\tilde{G}) = \sum_{i=۱}^{n} \left| \tilde{\mu}_i - \frac{۲\sum_{۱\leq i<j\leq n} \mu(u_i, u_j)}{n} \right|.$$

قضیه ۱۴.۲.۵. فرض کنید $\tilde{G}$ گراف فازی با n راس و $\tilde{\mu}_۱ \geq \tilde{\mu}_۲ \geq \ldots \geq \tilde{\mu}_n$ مقادیر ویژه لاپلاسین آن باشند، آنگاه:

الف)

$$\sum_{i=۱}^{n} \tilde{\mu}_i = ۲ \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mu(u_i, u_j),$$

ب)

$$\sum_{i=۱}^{n} \tilde{\mu}_i^۲ = ۲ \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mu^۲(u_i, u_j) + \sum_{i=۱}^{n} d_{\tilde{G}}^۲(u_i).$$

برهان. برای اثبات (الف)، با استفاده از تعریف ماتریس لاپلاسین، عناصر روی قطر اصلی این ماتریس $d_{\tilde{G}}(u_i)$ است. از طرفی $tr(\tilde{L}) = tr(\tilde{D}) - tr(\tilde{A})$ است. همچنین در گراف فازی مجموع درجات، دو برابر مجموع درجه تعلق هر یال است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \tilde{\mu}_i = tr(\tilde{L}) = \sum_{i=۱}^{n} d_{\tilde{G}}(u_i) = ۲ \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mu(u_i, u_j). \tag{۱۷.۵}$$

برای اثبات (ب)، با توجه به یکی از خواص اثر ماتریس، همواره مقادیر ویژه $\tilde{L}^۲$ به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $\tilde{\mu}^۲$ است. داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \tilde{\mu}_i^۲ = tr(\tilde{L}^۲) = \sum_{i=۱}^{n} \tilde{l}_{i,i}^۲,$$

از طرفی ماتریس لاپلاسین این گراف، متقارن و به‌صورت زیر است:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} d_{\tilde{G}}(u_۱) & -\mu(u_۱, u_۲) & \ldots & -\mu(u_۱, u_n) \\ -\mu(u_۲, u_۱) & d_{\tilde{G}}(u_۲) & \ldots & -\mu(u_۲, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu(u_n, u_۱) & -\mu(u_n, u_۲) & \ldots & d_{\tilde{G}}(u_n) \end{bmatrix},$$

[۱۵] Fuzzy Laplacian Eigenvalue

[۱۶] Fuzzy Laplacin Energy

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{l}_{i,i}^{2} = \left(d_{\tilde{G}}^{2}(u_1)+\mu^{2}(u_1,u_2)+\mu^{2}(u_1,u_3)+\ldots+\mu^{2}(u_1,u_n)\right)$$
$$+\left(\mu^{2}(u_2,u_1)+d_{\tilde{G}}^{2}(u_2)+\mu^{2}(u_2,u_3)+\ldots\mu^{2}(u_2,u_n)\right)$$
$$\vdots \tag{۱۸.۵}$$
$$+\left(\mu^{2}(u_n,u_1)+\mu^{2}(u_n,u_2)+\ldots+d_{\tilde{G}}^{n}(u_n)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}d_{\tilde{G}}^{2}(u_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mu^{2}(u_i,u_j).$$

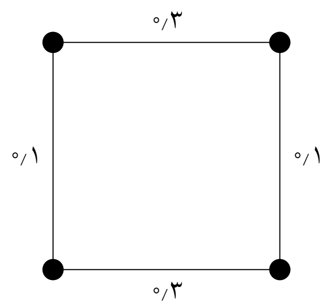
□

نتیجه ۱۵.۲.۵. در قضیه‌ی (۱۴.۲.۵) هرگاه $\tilde{\gamma}_i=\tilde{\mu}_i-\left(\frac{2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)$ در نظر گرفته شود، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\gamma}_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\gamma}_i^{2}=2M,\end{cases}$$

که در آن $M=\sum_{1\le i<j\le n}\mu^{2}(u_i,u_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i)-\frac{2\sum_{1\le i<j\le n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^{2}$ در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۱۶.۲.۵. گراف فازی $\tilde{G}_2$ در شکل (۴.۵) با ۴ راس را در نظر بگیرید. هر راس از درجه‌ی ۰/۴ و



شکل ۴.۵: گراف فازی ۰/۴-منتظم $\tilde{G}_2$ با ۴ راس

مقادیر ویژه‌ی آن $\{-0/4,-0/2,0/4,0/2\}$ است.
انرژی این گراف برابر با $E(\tilde{G}_2)=0/4+0/2+0/2+0/4=1/2$ می‌باشد. از طرفی بنابر نکته‌ی (۹.۲.۵) کران بالایی برای این انرژی، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(\tilde{G}_2)\le 0/4+\sqrt{(4-1)(2\times 0/2-0/16)}=1/24.$$

همچنین $\{\tilde{\mu}_1 = 0/8, \tilde{\mu}_2 = 0/6, \tilde{\mu}_3 = 0/2, \tilde{\mu}_4 = 0\}$ مقادیر ویژه لاپلاسین به‌دست آمده از این گراف است و انرژی لاپلاسین به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$LE(\tilde{G}_2) = |0 - 0/4| + |0/2 - 0/4| + |0/6 - 0/4| + |0/8 - 0/4| = 1/2.$$

مثال ۱۷.۲.۵. دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ در شکل (۲.۵) را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین در هر دو گراف $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ برابر $\{0, 0/6667, 0/9\}$ است. اما اگر از تعریف درجه‌ی کلی، این مقدار را محاسبه کنیم به ترتیب از گراف $\tilde{G}$ مقادیر ویژه‌ی $\{0/3466, 0/9898, 1/3135\}$ و از گراف $\tilde{G}'$ مقادیر ویژه‌ی $\{0/4701, 1/1321, 1/7144\}$ به‌دست می‌آید.
بنابراین مقدار انرژی لاپلاسین فازی برای این دو گراف به‌صورت زیر است:

$$LE(\tilde{G}) = LE(\tilde{G}') = |0 - 0/5222| + |0/6667 - 0/5222| + |0/9 - 0/5222| = 1/0445.$$

همچنین مقدار انرژی لاپلاسین فازی برای گراف $\tilde{G}$ با در نظر گرفتن درجه‌ی کلی برابر ۱/۴۳۴۵ و برای گراف $\tilde{G}'$ برابر ۱/۸۵۴۲ خواهد شد.

۳.۵ یافتن کران‌هایی برای انرژی لاپلاسین از گراف فازی

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی با $|V| = n$، $\mu^* = \{e_1, \dots, e_m\}$ و $m_i = \mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i-امین یال باشد، آنگاه:

$$LE(\tilde{G}) \leq \sqrt{\left(2\sum_{i=1}^{m} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2\right)n}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز برای $(1, \dots, 1)$ و $(|\tilde{\gamma}_1|, \dots, |\tilde{\gamma}_n|)$ خواهیم داشت:

$$|\sum_{i=1}^{n}\tilde{\gamma}_i|^2 \leq n\sum_{i=1}^{n}|\tilde{\gamma}_i|^2, \tag{۱۹.۵}$$

از طرفی با استفاده از تعریف انرژی لاپلاسین فازی و رابطه‌ی (۱۹.۵) داریم:

$$LE(\tilde{G}) \leq \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}|\tilde{\gamma}_i|^2} = \sqrt{2Mn}, \tag{۲۰.۵}$$

بنابراین طبق تعریف، $M = \sum_{i=1}^{m} {m_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2$ است.
در نتیجه رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$LE(\tilde{G}) \leq \sqrt{\left(2\sum_{i=1}^{m} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2\right)n}. \tag{۲۱.۵}$$

□

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ گراف فازی با $|V|=n$، $\mu^*=\{e_1,\dots,e_m\}$ و $m_i=\mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i–امین یال باشد، آنگاه:

$$LE(\tilde{G}) \geq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} {m_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2}.$$

برهان. با استفاده از تعریف انرژی لاپلاسین داریم:

$$\begin{aligned}(LE(\tilde{G}))^2 &= (\sum_{i=1}^{n}|\tilde{\gamma}_i|)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}|\tilde{\gamma}_i|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}|\tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j|\\ &\geq 4M,\end{aligned} \tag{۲۲.۵}$$

بنابراین با توجه به مقدار $M=\sum_{i=1}^{m}{m_i}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i)-\frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2$ خواهیم داشت:

$$LE(\tilde{G}) \geq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} {m_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2}. \tag{۲۳.۵}$$

□

قضیه ۳.۳.۵. فرض کنید $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ گراف فازی با $|V|=n$ ، $\mu^*=\{e_1,\dots,e_m\}$ و $m_i=\mu(e_i)$ شدت رابطه مربوط به i–امین یال باشد، آنگاه:

$$LE(\tilde{G}) \leq \tilde{\gamma}_1 + \sqrt{(n-1)\left(2\sum_{i=1}^{m} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i) - \frac{2\sum_{i\neq j}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2 - \tilde{\gamma}_1^2\right)}$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز برای $(1,\dots,1)$ و $(|\tilde{\gamma}_2|,\dots,|\tilde{\gamma}_n|)$ خواهیم داشت:

$$|\sum_{i=2}^{n}\tilde{\gamma}_i|^2 \leq \left(|\tilde{\gamma}_2|^2+\dots+|\tilde{\gamma}_n|^2\right)(n-1), \tag{۲۴.۵}$$

از طرفی با توجه به تعریف انرژی لاپلاسین و رابطه‌ی (۲۴.۵) داریم:

$$LE(\tilde{G}) - \tilde{\gamma}_1 \leq \sqrt{(n-1)(2M-\tilde{\gamma}_1^2)}, \tag{۲۵.۵}$$

همچنین طبق تعریف، $M=\sum_{i=1}^{m}{m_i}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_{\tilde{G}}(u_i)-\frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2$ است.
در نتیجه داریم:

$$LE(\tilde{G}) \leq \tilde{\gamma}_1 + \sqrt{(n-1)\left(2\sum_{i=1}^{m} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(d_i\tilde{G}(u_i) - \frac{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}\right)^2 - \tilde{\gamma}_1^2\right)}. \tag{۲۶.۵}$$

□

نتیجه ۴.۳.۵. هرگاه گراف فازی $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ منتظم از درجه‌ی k باشد، آنگاه:
$$LE(\tilde{G}) \leq \tilde{\gamma}_۱ + \sqrt{(n-۱)\left(۲\sum_{i=۱}^{m} m_i^۲ - \tilde{\gamma}_۱^۲\right)}.$$

برهان. چون $\tilde{G}$ گرافی منتظم است، بنابراین هر راس u_i ($i=۱,\ldots,n$) از درجه‌ی k می‌باشد و همچنین $k=d_i(\tilde{G})=\frac{۲\sum_{۱\leq i<j\leq n}\mu(u_i,u_j)}{n}$ است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۲۶.۵) به سادگی اثبات می‌شود. □

مثال ۵.۳.۵. گراف فازی منتظم $\tilde{G}_۱$ در شکل (۴.۵) را درنظر بگیرید. $\tilde{\mu}_۱=۰/۸$ و $\tilde{\gamma}_۱=۰/۴$ است. بنابراین طبق نتیجه (۴.۳.۵)، یک کران بالا برای انرژی لاپلاسین این گراف به‌صورت زیر است:
$$LE(\tilde{G}_۱) \leq ۰/۴ + \sqrt{(۴-۱)(۲(۰/۲)-۰/۱۶)} = ۱/۲۴۸۵.$$

۴.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

مطالب این پایان‌نامه شامل دو بخش اصلی است. یک بخش مربوط به نحوه‌ی محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی فازی از گراف‌های فازی و بخش دیگر مربوط به بررسی انرژی در این گراف‌ها و برخی روابط و کران‌های مربوط به آن می‌باشد. هرگاه اعداد فازی به‌صورت پارامتری به‌کار برده شود، برای به‌دست آوردن مقادیر ویژه‌ی فازی از سیستم کاملا فازی $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X}$ ، نمی‌توان به‌طور مستقیم از دترمینان (مشابه حالت قطعی) استفاده کرد. در این پایان‌نامه به دو روش مختلف با استفاده از مفهوم α-برش، برای یافتن مقادیر ویژه‌ی فازی و متناظر با آن بردارهای ویژه‌ی فازی از سیستم کاملا فازی پرداخته شد. همچنین به عنوان یکی از کاربردهای مقادیر ویژه می‌توان به انرژی گراف اشاره کرد. در این پایان‌نامه برخی از کران‌ها برای مقادیر ویژه و انرژی گراف در گراف‌های فازی بررسی شده است. علاوه بر آن روابطی از مقادیر ویژه در گراف‌های فازی محاسبه گردید. همچنین انرژی لاپلاسین برای گراف‌های فازی تعمیم داده و کران‌هایی برای این انرژی از گراف فازی محاسبه شد. برخی از این کران‌های اشاره شده در گراف‌های فازی خاص، تاکنون به دست نیامده است. از طرفی استفاده از اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای در گراف‌های فازی و بررسی سایر خواص طیفی آن‌ها، می‌تواند به عنوان چشم‌انداز کار در آینده باشد.

مراجع

[1] T. Allahviranloo and L. Hooshangian, *A method to find fuzzy eigenvalues and fuzzy eigenvectors of fuzzy matrix*, Neural Computing and Applications, 23:pages (1159–1167), 2013.

[2] H. Alzer, *The inequality of Ky Fan and related results*, Acta Applicandae Mathematicae, 38:pages (305–354), 1995.

[3] N. Anjali and S. Mathew, *Energy of a fuzzy graph*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 6(3):pages (455–465), 2013.

[4] R. Balakrishnan, *The energy of a graph*, Linear Algebra and it's Applications, 387:pages (287–295), 2004.

[5] N. Biggs, *"Algebraic graph theory"*, Cambridge University Press, 2012.

[6] R.A. Brualdi, *Energy of a graph*, Notes AIM Workshop "Spectra of families of matrices described by graphs, digraphs and sign patterns", Palo Alto, 2006.

[7] D.M. Cvetkovic and I. Gutman, *Applications of graph spectra*, Mathematical Institute of the Belgrade, 2009.

[8] P. Rowlinson, D. Cvetkovic and S. Simic, *Eigenspaces of a graphs*, Cambridge University Press, 1997.

[9] B. Data, *"Numerical Linear Algebra and Applications"*, Brooks, Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA, 1995.

[10] M. Dehghan and B. Hashemi, *Computational methods for solving fully fuzzy linear systems* Applications Math Comput, 179:pages (328–343), 2006.

[11] M. Dehghan and B. Hashemi, *Solution of the fully fuzzy linear system using the decomposition procedure*, Applications Math Comput, 182:pages (1568–1580), 2006.

[12] M. Doob, D.M. Cvetkovic and H. Sachs, *An application of matching theory to edge-colourings*, Academic Press, New York, 1980.

[13] F. Fayazi and S. Rahimi, *Evaluation of spectrum properties of fuzzy graph by triangular fuzzy numbers*, 13-th Iranian Conference on Fuzzy Systems (IFSC), Islamic Azad University of Qazvin, 2013.

[14] A.N. Gani and J. Malarvizhi, *Isomorphism on fuzzy graphs*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 2:pages (200–206), 2008.

[15] A.N. Gani and K. Radha, *On regular fuzzy graphs*, Journal of Physical Sciences, 12:pages (33–40), 2008.

[16] I. Gutman, *The energy of a graph: old and new results*, Algebraic Combinatorics and Applications Berlin, 2001.

[17] I. Gutman and B. Zhou, *Laplacian energy of graph*, Linear Algebra and it's Applications, 414:pages (29–37), 2006.

[18] A.J. Hoffman, *On eigenvalues and coloring of graphs*, Graph Theory and It's Applications, 175:(238–242), 1970.

[19] F. Gongb, J.Y. Shaoa and Z.B. Duc, *Extremal energies of weighted trees and forests with fixed total weight sum*, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 66:pages (879–890), 2011.

[20] S. Hameed, K.A. Germina and T. Zaslavsky, *On products and line graphs of signed graphs their eigenvaluse and energy* ,Linear Algebra and it's Applications, 435:pages (2432–2450), 2011.

[21] A. Kauffman, *Introduction à la Théorie des Sous-emsembles Flous*, Eléments Théoriques de Base, Masson Paris, 1973.

[22] A. Kumar and N. Bansal, *A new method to solve fully fuzzy linear system with trapezoidal fuuzy numbers*, Canadian Journal Science and Engineering Mathematics, 1:pages (45–56), 2010.

[23] K.H. Lee, *"First Course on Fuzzy Theory and Applications"*, Advanced Institute of Science and Technology, KAIST Taejon Republic of South Korea, 2005.

[24] B. Hashemi M. Dehghan and M. Ghatee, *Solution of the fully fuzzy linear system using iterative techniques*, Chaos Solitons Fractals, 34:pages (316–336), 2007.

[25] M. Ming, M. Friedman and A. Kandel, *Fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets System, 96:pages (201–209), 1998.

[26] S. Abbasbandy, M. Mosleh and S. Otadi, *Fully fuzzy linear systems of the form* $Ax + b = Cx + d$, In: First joint congress on fuzzy and intelligent systems, Ferdowsi University of Mashhad, Iran, pages pages (135–142), 2007.

[27] S. Muzzioli and H. Reynaerts, *Fuzzy linear systems of the form* $A_۱x+b_۱ = A_۲x+b_۲$, Fuzzy Sets System, 157:pages (939–951), 2006.

[28] A. Kumar, N. Babbar and A. Bansal, ,*Solving fully fuzzy linear system with arbitrary triangular fuzzy numbers* (m,α,β), Soft Comput, 17(4):pages (691–702), 2013.

[29] S. Nasseri and F. Zahmatkesh, *Huang method for solving fully fuzzy linear system of equations*, International Applied Mathematics and Computer Science, 1:pages (1–5), 2010.

[30] A. Rosenfeld, *Fuzzy graphs in: L.A. Zadeh, K.S. Fu and M. Shimura*, Fuzzy Sets and their Applications, Academic Press, New York, 1975.

[31] M. Sohrabi, S. Nasseri and E. Ardil, *Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix*, International Journal of Mathematical Science and Engineering, 2(7):pages (140–142), 2008.

[32] F. Karimi, S. Salahshour, R. Rodríguez-López and A. Kumar, *Computing the eigenvalues and eigenvectors of a fuzzy matrix*, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 2012:pages (1–18), 2012.

[33] M.M.Q. Shubatah, *Domination in product fuzzy graphs* Advances in Computational Mathematics and it's Applications (ACMA), 1(3), 2012.

[34] D. Spielman, *Constructing error- correcting codes from expander graphs*, Mathematics and it's Applications, 109:pages (591–600), 1999.

[35] S. Salahshour, T. Allahviranloo and M. Khezerloo, *Maximal and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235:pages (4652–4662), 2011.

[36] Z. Tian, *Fuzzy eigenvectors of real matrix*, Journal of Mathematics Research, 2(3):pages (103–108), 2010.

[37] H. Wilf, *The number of independent sets in a grid graph*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 11:pages (54–60), 1998.

[38] H.S. Wilf, *The eigenvalues of a graph and it's chromatic number*, J. London Math, 42:pages (330–332), 1967.

[39] R.C. Wilson and Ping Zhu, *A study of graph spectra for comparing graphs and trees*, Pattern Recognition, 41:pages (2833–2841), 2008.

[40] X. Yong, *The distribution of eigenvalues of simple undirected graph*, Linear Algebra Applications, 295:pages (73–80), 1999.

[41] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, 8:pages (338–353), 1965.

[42] F. Zhang and H. Li, *On acyclic conjugated molecules with minimal energies*, Discrete Applied Mathematics, 92:pages (71–84), 2002.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

انرژی .... Energy

ب

بردار ویژه .... Eigenvector

برش .... Cut

ت

تابع عضویت .... Membership function

تقریبی .... Approximate

چ

چندجمله‌ای مشخصه .... Polynomial characteristic

خ

خطی .... Linear

د

دترمینان .... Determinant

درجه .... Degree

درجه عضویت .... Membership degree

درجه کلی .... Total degree

دوبخشی .... Bipartite

دوتایی مرتب .... Ordered pair

ذ

ذوزنقه‌ای .... Trapezoidal

ر

رابطه .... Relation

راس .... Vertex

ز

زیرگراف .... Subgraph

س

سیستم .... System

ش

شدت رابطه .... Strength of relation

ط

طیف .... Spectrum

ع

علامت‌دار .... Signed

عملگر .... Operator

غ

غیر جهت‌دار .... Undirected

غیرخطی .... Nonlinear

ف

فازی .... Fuzzy

فراگیر .... Spanning

ق

قطعی .... Crisp

قوی‌تر .... Stronger

ک

کوشی- شوارتز .... Cauchy- Schwarz

کولسن .... Coulson

کی فان .... Ky Fan

گ

گراف .... Graph

گراف فازی .... Fuzzy graph

گستره .... Spread

ل

لاپلاسین .... Laplacian

م

ماتریس مجاورت .... Adjacency matrix

متقارن .... Symmetric

مثلثی .... Triangular
مجموعه جواب قابل کنترل .... CSS
مجموعه جواب متحد .... USS
مجموعه جواب نسبتا خوب .... TSS
محدب .... Convex
محمل .... Support
مستقل خطی .... Linear independence
مشابه .... Similar
مقدار ویژه .... Eigenvalue
منتظم .... Regular
منفرد .... Singular
میانگین حسابی .... Arithmetic mean
میانگین هندسی .... Geometric mean

ن

نامحدب .... Non-convex
نامنفرد .... Nonsingular
نرمال شده .... Normalized
نیمه معین مثبت .... Positive semidefinite

و

وزن‌دار .... Weighted

ه

هسته .... Kernel
همبند .... Connected
همریختی .... Homomorphism

ی

یال .... Edge
یکریختی .... Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Adjacency matrix .... ماتریس مجاورت

Approximate .... تقریبی

Arithmetic mean .... میانگین حسابی

B

Bipartite .... دوبخشی

C

Connected .... همبند

Couchy- Schwarz .... کوشی- شوارتز

Convex .... محدب

Crisp .... قطعی

CSS .... مجموعه جواب قابل کنترل

Cut .... برش

D

Degree .... درجه

Determinant .... دترمینان

E

Edge .... یال

Eigenvalue .... مقدار ویژه

Eigenvector .... بردار ویژه

Element .... عنصر

Energy .... انرژی

F

Fuzzy .... فازی

Fuzzy graph .... گراف فازی

G

Geometric mean .... میانگین هندسی

Graph .... گراف

H

Homomorphism .... همریختی

I

Inequality .... نامساوی

Isomorphism .... یکریختی

K

Kernel .... هسته

Ky Fan .... کی فان

L

Laplacian .... لاپلاسین

Linear .... خطی

Linear independence .... مستقل خطی

M

Membership function .... تابع عضویت

Membership degree .... درجه عضویت

N

Non- convex .... نامحدب

Non- empty .... ناتهی

Nonlinear .... غیرخطی

Normalized .... نرمال‌شده

Nonsingular .... نامنفرد

O

Operator .... عملگر

Ordered pair .... دوتایی مرتب

P

Polynomial characteristic .... چندجمله‌ای مشخصه

Positive semidefinite .... نیمه معین مثبت

R

Regular .... منتظم

رابطه .... Relation

S

علامت‌دار .... Signed

مشابه .... Similar

ساده .... Simple

منفرد .... Singular

فراگیر .... Spanning

طیف .... Spectrum

محمل .... Support

گستره .... Spread

شدت رابطه .... Strength of relation

قوی‌تر .... Stronger

زیرگراف .... Subgraph

متقارن .... Symmetric

سیستم .... System

T

درجه کلی .... Total degree

ذوزنقه‌ای .... Trapezoidal

مثلثی .... Triangular

مجموعه جواب نسبتا خوب .... TSS

U

غیرجهت‌دار .... Undirected

مجموعه جواب متحد .... USS

V

راس .... Vertex

W

وزن‌دار .... Weighted

نمایه

α-برش، ۴

اثر، ۱۱
انرژی، ۱۲
انرژی فازی، ۱۷
انرژی لاپلاسین، ۶۵
انرژی لاپلاسین فازی، ۷۳
بردار ویژه، ۳
بردارهای ویژه فازی، ۲۵
جواب تقریب‌زده شده، ۲
جواب متقارن ماکسیمال، ۲۶
جواب متقارن مینیمال، ۲۶
چندجمله‌ای مشخصه، ۳
درجه در گراف فازی، ۶۸
درجه‌ی کلی، ۶۸
رابطه‌ی فازی، ۵
روش برنامه‌ریزی خطی، ۲
روش تجزیه LU، ۲
روش حذفی گاوس، ۲
زیرگراف فراگیر، ۱۹
سیستم خطی فازی، ۲
سیستم خطی کاملا فازی، ۲۵
طیف گراف، ۱۰
طیف گراف فازی، ۱۷
عدد فازی، ۵
عدد فازی ذوزنقه‌ای، ۵
عدد فازی مثلثی، ۵
قاعده کرامر، ۲
قطعی، ۴
کوشی- شوارتز، ۱۴
کولسن، ۱۱
گراف، ۳
گراف دوبخشی فازی، ۱۶
گراف علامت‌دار، ۱۲
گراف فازی، ۱۵
گراف فازی k -منتظم، ۶۸
گراف فازی کامل، ۱۶
گراف وزن‌دار، ۱۲
ماتریس درجه، ۶۴
ماتریس فاصله، ۶۴
ماتریس لاپلاسین، ۶۴
ماتریس لاپلاسین فازی، ۷۳
ماتریس مجاورت، ۳
ماتریس مجاورت فازی، ۱۶
ماتریس وقوع، ۶۴
مجموعه جواب قابل کنترل، ۲۶
مجموعه جواب متحد، ۲۶
مجموعه جواب نسبتا خوب ، ۲۶
مجموعه فازی، ۴
محدب، ۵
محمل، ۴
مستقل خطی، ۳
مقادیر ویژه فازی، ۲۵
مقادیر ویژه لاپلاسین فازی، ۷۳

مقدار ویژه، ۳
میانگین حسابی، ۱۲
میانگین هندسی، ۱۲
نامحدب، ۵
نامساوی کی فان، ۱۹
نامنفرد، ۴
نیمه معین مثبت، ۴
هسته، ۴
همریختی، ۶۸

یکریختی، ۶۹
یکریختی ضعیف، ۶۸
یکریختی هم‌ضعیف، ۶۸

Abstract

The subject of this thesis is evaluate the fuzzy eigenvalues and it's applications. To find the fuzzy eigenvalues of the two different methods are used. On a method of using the α-cut, fuzzy eigenvalues and corresponding fuzzy eigenvectors are calculated by fully fuzzy linear system and Another method is based on fuzzy number that is assigned the membership function is obtained by using the determinant. In the first chapter the history of the subject is expressed. The second chapter contains a variety of concepts related to the eigenvalues of the graph and some bounds for the energy graphs is investigated. The third and fourth chapters contain two different methods for finding fuzzy eigenvalues and fuzzy eigenvectors of fuzzy numbers using the parameter mode. Chapter five contains the graph Laplacian energy and some bounds of this type of energy. This energy is also extended to the fuzzy case. Moreover, some bounds of eigenvalues and energy of fuzzy graphs are calculated. For further understanding in each section, in first of each of these subjects in crisp mode and then fuzzy mode is expressed.
Keywords:
Fuzzy graph, Spectrum, Energy of fuzzy graph, Laplacian energy of fuzzy graph, Fully fuzzy linear system.

Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in

Applied Mathematics

Study of fuzzy eigenvalues in fuzzy graphs

Supervisor

Dr.Sadegh Rahimi Sharbaf

Advisor

Dr.Hojjat Ahsani Tehrani

by

Fatemeh Fayazi

December, 2013