



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی در سیستم‌های کنترل خطی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

پژوهشگر

مرضیه حدیری

آذر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: حیدری

نام: مرضیه

عنوان: مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی در سیستم‌های کنترل خطی

استاد راهنما: دکتر حجت احسنی طهرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: آذر ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۳

واژگان کلیدی: مقادیر ویژه جزیی، پایداری، سیستم کنترل خطی، تجزیه شور جزیی، تبدیلات تشابهی، گراف انتقال حالت

چکیده

در این پایان‌نامه، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای سیستم‌های کنترل خطی شرح می‌دهیم. این مساله برای سیستم‌هایی به کار می‌رود که نزدیک به پایداری هستند. به عبارت دیگر، تعداد کمی از مقادیر ویژه حلقه باز سیستم، در ناحیه پایداری قرار ندارد و تنها همین تعداد کم نیاز به تخصیص دوباره دارند. با توجه به اهمیت این مساله در نظریه کنترل و بهینه سازی، روش‌های مختلفی برای حل آن ارایه شده است مانند: روش روابط متعامد و روش آرنولد و ... که ما در ابتدا به بررسی این روش‌ها پرداخته و سپس با استفاده از روش تجزیه شور جزیی و تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، روش جدیدی را معرفی می‌کنیم که در مقایسه با روش‌های دیگر به محاسبات ساده‌تری نیاز دارد. برای حل مساله با این روش، ابتدا با استفاده از تجزیه شور جزیی یک پایه متعامد روی زیرفضای ناوردای وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار سیستم را پیدا می‌کنیم. سپس با کاربرد تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، ماتریس پس‌خورد حالتی را محاسبه می‌کنیم که مقادیر ویژه موردنظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد.

با توجه به اهمیت مینیمم‌سازی نرم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه سازی سیستم کنترل خطی، با استفاده از روش پیشنهادی و مفهوم گراف انتقال حالت، ماتریس پس‌خورد حالتی را به دست می‌آوریم که دارای نرم کمینه است. در انتها نیز مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی، با روش جدید حل می‌کنیم. در انتهای هر بحث، برای شرح بیش‌تر مثال عددی نیز آورده شده است.

تقدیم به همه‌ی کسانی که

می‌خوانند، بیشتر بدانند.

پروردگار!...

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیق ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

سپاس‌گزاری

سپاس می‌گویم خدای مهربانم را که زیباترین راه زندگی را به من آموخت و با گرفتن دستان ناتوانم قدم‌های مرا در این راه محکم کرد، مشکلات و سختی‌ها را برایم آسان نمود و درهای بسته دانش را با نور وجودش به رویم گشود.

بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که من را در نوشتن این پایان‌نامه یاری کردند، قدردانی و تشکر نمایم. تشکر می‌کنم از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که با خلوص نیت و در کمال صبر و آرامش پاسخ‌گوی تمام سوالات من بودند. هم‌چنین تشکر می‌کنم از جناب آقای دکتر علی مس‌فروش و جناب آقای دکتر محمد مهدی فاتح که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند.

مرضیه حدادی
آذر ۱۳۹۲

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. حیدری. م و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۲)، ”مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی در سیستم‌های کنترل خطی“، چهل و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۱۳۴-۱۳۱، مشهد.
۲. حیدری. م و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۲)، ”تخصیص مقادیر ویژه جزیی پارامتری در کنترل پس‌خورد حالت“، پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران، ص ۱۱۳-۱۱۰، همدان.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۴	تعاریف مقدماتی	۲
۴	۱.۲ ماتریس	
۴	۱.۱.۲ دترمینان ماتریس	
۵	۲.۱.۲ برد و فضای پوچ	
۵	۲.۲ فضای برداری	
۷	۱.۲.۲ رتبه یک ماتریس	
۷	۲.۲.۲ برخی ماتریس‌های خاص	
۸	۳.۲ بردار ویژه و مقدار ویژه	
۸	۱.۳.۲ یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه	
۹	۴.۲ سیستم کنترل خطی	
۹	۱.۴.۲ سیستم یک بعدی	
۱۰	۲.۴.۲ کنترل پذیری	
۱۰	۳.۴.۲ ماتریس کنترل پذیری	
۱۱	۵.۲ پایداری	
۱۳	۳ مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی	
۱۳	۱.۳ تخصیص مقادیر ویژه جزئی	
۱۵	۲.۳ وجود و یکتایی جواب مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی	
۱۸	۳.۳ بررسی روش‌های اولیه ارایه شده برای حل مساله	
۱۹	۱.۳.۳ روش روابط متعامد	
۲۴	۲.۳.۳ روش آرنولد به‌طور ضمنی دوباره آغاز شده	

۳۲	حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی	۴
۳۲	تجزیه شور	۱۰۴
۳۴	تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی	۲۰۴
۳۷	ناوردهای کرونکر	۱۰۲۰۴
۳۸	فرم همدم برداری	۲۰۲۰۴
۴۱	مساله تصویر تخصیص مقادیر ویژه جزئی	۳۰۴
۴۳	محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت S	۴۰۴
۴۴	الگوریتم تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی	۱۰۴۰۴
۴۵	مثال عددی	۵۰۴
۵۰	محاسبه مینیمم نورم ماتریس پس‌خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه جزئی	۵
۵۰	نورم ماتریس	۱۰۵
۵۲	ماتریس و گراف	۲۰۵
۵۲	گراف مربوط به ماتریس $A - BF^T$	۱۰۲۰۵
۵۳	استفاده از نظریه گراف برای تعیین پارامترهای خطی	۲۰۲۰۵
۵۵	پارامتری‌سازی ماتریس پس‌خورد حالت	۳۰۵
۵۷	محاسبه مینیمم نورم ماتریس پس‌خورد حالت	۴۰۵
۶۰	الگوریتم نورم کمینه ماتریس پس‌خورد حالت	۵۰۵
۶۳	مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم‌های خطی دوبعدی	۶
۶۳	سیستم‌های خطی دوبعدی مدل راسر	۱۰۶
۶۴	مدل راسر	۱۰۱۰۶
۶۵	پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی مدل راسر	۲۰۱۰۶
۶۸	سیستم‌های دوبعدی با تاخیر	۲۰۶
۶۹	مدل راسر	۱۰۲۰۶
۷۱	تخصیص مقادیر ویژه جزئی	۳۰۶
۷۸	نتیجه‌گیری	۷
۸۰	برنامه‌های کامپیوتری	آ
۸۰	کد متلب مساله تخصیص مقدار ویژه جزئی در سیستم‌های کنترل خطی	۱۰آ

۸۸

مراجع

۹۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۹۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۹۹

نمایه

فصل ۱

مقدمه

مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی^۱، یکی از مسایل اساسی در نظریه کنترل و بهینه سازی می باشد که از دیرباز مورد توجه نویسندگان و محققان بوده است. این مساله برای سیستم های کنترل خطی به کار می رود که نزدیک به پایداری هستند. به عبارت دیگر سیستم هایی که طیف ماتریس حلقه باز به طور کامل در ناحیه پایداری قرار ندارد و لازم است که برای پایدارسازی سیستم بخشی از طیف ماتریس حلقه باز آن را تغییر داد.

بسیاری از کاربردهای عملی مانند سیستم های قدرت، شبکه های کامپیوتری، خطوط نیرو و باعث ایجاد ماتریس های بزرگ و اسپارس می شوند که از طریق روش های معمول عددی (مانند QR و شور حقیقی) نمی توان آن ها را حل نمود. به علاوه در بسیاری از این مسایل تنها تعداد کمی از مقادیر ویژه سیستم، عامل ناپایداری هستند و در نتیجه همین تعداد کم نیاز به تخصیص دوباره دارند، از این رو نیاز به روش های دیگری برای حل این مساله است.

در چند دهه اخیر روش های مختلفی برای حل این مساله پیشنهاد شده است. یک روش پیشنهادی برای حل این مساله استفاده از الگوریتم آرنولدی است که توسط سعد^۲ و داتا^۳ [۸] ارایه شده است و به حل معادله سیلوستر^۴ سیستم کنترل خطی با استفاده از الگوریتم آرنولدی می پردازد و در ادامه مساله تخصیص مقدار ویژه جزئی را توسط جواب این معادله حل می نماید. سعد [۲۱] نیز با استفاده از تجزیه شور جزئی برای ماتریس A^T و کاربرد مساله معکوس مقدار ویژه، به حل این مساله پرداخت. د. کالواتی^۵ و ب. لوییز^۶ [۳] از روش فرایند آرنولدی به طور ضمنی دوباره آغاز شده برای حل این مساله استفاده نمودند. این روش، پایه ای روی همان روش آرنولدی است که داتا و سعد آن را به کار بردند، با این تفاوت که در فرایند آرنولدی به طور ضمنی دوباره آغاز شده

^۱Partial eigenvalue assignment problem

^۲Yousef Saad

^۳B. N.Datta

^۴Silvester equation

^۵D.Calvetti

^۶B.Lewis

بعد از اجرای $2m$ مرحله چنانچه m مقدار ویژه به دست آمده ماتریس دارای قسمت حقیقی مثبت باشند، فرایند از $l = \min\{k, m\}$ (تعداد مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس A) دوباره با تعریف بردار آغازین انجام می شود. گرچه این روش کاراتر از روش آرنولدی است اما محاسبات آن بسیار طولانی است. محمد. رمضان^۷ و اهاب ال-سعید^۸ [۱۹] الگوریتمی را ارائه دادند که در آن با تعریف $f^T = \beta Y^H A$ (ماتریس بردار ویژه های چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$) و محاسبه پارامتر β ، بردار پس خورد حالت را می توان به صورتی به دست آورد که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم اختصاص می دهد، در ادامه نیز نشان دادند که بردار پس خورد حالت حقیقی است. در این پایان نامه نیز روشی جدید را برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی شرح می دهیم. این روش با استفاده از تجزیه شور جزئی و روش تبدیلات تشابهی در سیستم های کنترل خطی مساله را حل می کند. ساختار کلی پایان نامه به صورت زیر است:

- در فصل دوم، تعاریف اولیه مورد نیاز را شرح می دهیم.
- در فصل سوم، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را به طور کامل در سیستم های کنترل خطی مورد بررسی قرار داده ایم و برخی روش های موجود برای حل این مساله با مثال ارائه شده است.
- در فصل چهارم، با استفاده از روش تجزیه شور جزئی ماتریس حلقه باز سیستم را به ماتریس هایی با ابعاد کوچک تر تجزیه کرده و سپس توسط ماتریس های جدید ماتریس افزوده ای تشکیل داده، با استفاده از عملیات تشابهی ماتریس افزوده را به فرم استاندارد اشلون و سپس به فرم هدم برداری تبدیل می کنیم. با استفاده از این مفاهیم، ماتریس پس خورد حالتی را به دست می آوریم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم اختصاص دهد. در ادامه نیز مثال هایی برای شرح روش می آوریم.
- در فصل پنجم، مینیم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت را بررسی می کنیم. بدین منظور، ابتدا به پارامتری سازی ماتریس پس خورد حالت می پردازیم، زیرا پارامتری سازی در بهینه سازی ماتریس پس خورد حالت موثر است. بنابراین در این فصل ابتدا با استفاده از روش تجزیه شور جزئی و روش تبدیلات تشابهی و گراف انتقال حالت، ماتریس پس خورد حالت پارامتری را که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم اختصاص دهد، به دست می آوریم. سپس ماتریس پس خورد حالتی را به دست می آوریم که نرم کمینه داشته باشد.
- در فصل شش ابتدا سیستم های دوبعدی^۹ مدل راسر^{۱۰} را شرح داده، سپس با استفاده از روش بردارهای افزوده، یک سیستم با تاخیر زمانی را به یک سیستم بدون تاخیر تبدیل می کنیم. در ادامه با توجه به قضایایی که در فصل بیان می شود نتیجه می گیریم که پایداری یک سیستم با تاخیر هم ارز پایداری سیستم بدون تاخیر

^۷Mohamed.A.Ramadan

^۸EhabA. El - Sayed

^۹2D systems

^{۱۰}Rosser model

است. از این نتیجه استفاده کرده و مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای سیستم با تاخیر شرح می‌دهیم. برای شرح بیشتر روش مثال عددی نیز در انتهای فصل آورده شده است.

فصل ۲

تعاریف مقدماتی

۱.۲ ماتریس

برای توضیحات بیشتر این بخش به [۱۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲. ماتریس $m \times n$ به نام A روی میدان F ($\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$) آرایه‌ای مستطیلی از m سطر و n ستون با درایه‌هایی متعلق به F و به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

چنین ماتریسی که به صورت $A = (a_{ij})$ نیز نوشته می‌شود، از اندازه $m \times n$ می‌نامیم. ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابر باشد را ماتریس مربعی می‌نامند.

۱.۱.۲ دترمینان ماتریس

برای هر ماتریس مربعی A اسکالری منحصربه فرد وابسته به ماتریس یافت می‌شود که دترمینان A نامیده می‌شود و توسط $\det(A)$ نمایش داده می‌شود. برای ماتریس A از مرتبه 2×2 ، $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ، برای ماتریس A از مرتبه 3×3 ، $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$ ، که در آن A_{1i} زیرماتریس 2×2 است که از حذف سطر اول و ستون i ام به دست آمده است. این تعریف به آسانی می‌تواند تعمیم داده شود، بنابراین برای ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه $n \times n$ داریم:

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}),$$

که در آن A_{ij} زیرماتریس A از مرتبه $(n-1)$ می باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید.

قضیه ۱.۲. خواص ساده زیر برای دترمینان برقرار است:

$$1. \det(A) = \det(A)^T$$

$$2. \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \text{ که در آن } \alpha \text{ یک اسکالر است.}$$

$$3. \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$4. \text{ اگر دو سطر یا ستون } A \text{ یکسان باشند آن گاه } \det(A) = 0$$

$$5. \text{ اگر } B \text{ ماتریس به دست آمده از } A \text{ با تعویض دو سطر یا دو ستون باشد آن گاه } \det(B) = -\det(A)$$

$$6. \text{ دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه های قطری آن می باشد.}$$

۲.۱.۲ برد و فضای پوچ

برای هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ دو زیرفضای وابسته مهم وجود دارد: برد A که توسط $R(A)$ و فضای پوچ A که توسط $N(A)$ نمایش داده می شود.

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax, x \in \mathbb{R}^n \text{ مانند برداری}\},$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

۲.۲ فضای برداری

برای توضیحات بیشتر این بخش به [۱۸] مراجعه کنید.

فضای برداری V روی میدان F عبارت است از مجموعه V از اشیا که بردار نامیده می شوند همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به ترتیب به هر دو عضو x و y از V عضو منحصر به فرد $x+y$ از V و به ازای هر عضو $a \in F$ و $x \in V$ عضو منحصر به فرد $ax \in V$ را نسبت می دهند، یا به عبارتی نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۲.۲. زیرمجموعه W از فضای برداری V روی میدان F زیرفضای V نامیده می شود هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف ۳.۲. فرض کنید S یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ باشد، آنگاه زیرفضای $S^\perp$ که به صورت

$$S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = 0, \quad x \in S\}$$

تعریف می‌شود متمم متعامد S نامیده می‌شود.
می‌توان نشان داد که:

۱.

$$N(A) = R(A^T)^\perp.$$

۲.

$$N(A^T) = R(A)^\perp.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنیم V فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوئیم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_1, \dots, u_n$ و اسکالرهایی $a_1, \dots, a_n$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\nu = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

قضیه ۲.۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.

تعریف ۵.۲. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۲. زیرمجموعه S از فضای V را وابسته خطی گوئیم هرگاه تعداد متناهی از بردارهای $u_1, \dots, u_n$ در S و اسکالرهایی $a_1, \dots, a_n$ که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0.$$

همچنین در این صورت می‌گوئیم که اعضای S وابسته خطی‌اند.

مجموعه S را که وابسته خطی نباشد مستقل خطی گویند.

تعریف ۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را پایه V گوئیم هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی V باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۸.۲. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد تعداد بردارهای پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

۱.۲.۲ رتبه یک ماتریس

فرض کنید A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ باشد. آن‌گاه زیرفضای بوجود آمده توسط بردارهای سطری A فضای سطری نامیده می‌شود. زیرفضای بوجود آمده توسط ستون‌های A فضای ستونی A نامیده می‌شود. برد A همان فضای ستونی A می‌باشد. رتبه یک ماتریس، بعد فضای ستونی A می‌باشد و با $\text{rank}(A)$ نمایش داده می‌شود. ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامنفرد نامیده می‌شود هرگاه $\text{rank}(A) = n$ ، در غیر این صورت منفرد نامیده می‌شود.

تذکر ۱.۲. A دارای رتبه ستونی کامل است اگر ستون‌های A مستقل خطی باشد. A رتبه کامل است اگر دارای رتبه سطری یا ستونی کامل باشد.

تعریف ۹.۲. معکوس ماتریس. ماتریس A از مرتبه $n \times n$ معکوس‌پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد که

$$AB = BA = I,$$

و توسط A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصربه فرد است و ماتریس معکوس‌پذیر اغلب ماتریس نامنفرد نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲. ماتریس‌های متشابه. دو ماتریس A و B متشابه نامیده می‌شوند اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته به قسمی که

$$T^{-1}AT = B,$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

متعامد بودن و تصویرها

مجموعه بردارهای $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر $\nu_i^T \nu_j = 0$ به علاوه اگر $\nu_i^T \nu_j = 1$ به ازای هر i ، آن‌گاه آن‌ها یکامتعامد هستند. یک پایه برای زیرفضا که یکامتعامد نیز باشد پایه یکامتعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

۲.۲.۲ برخی ماتریس‌های خاص

تعریف ۱۱.۲. ماتریس‌های مثلثی و قطری. ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه $m \times n$ یک ماتریس قطری است اگر $a_{ij} = 0$ به ازای $i \neq j$ می‌نویسیم $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{ss})$ که در آن $s = \min(m, n)$. ماتریس

$A = (a_{ij})$ یک ماتریس بالامثلثی است اگر $a_{ij} = 0$ برای $i > j$. ترانهاده یک ماتریس بالامثلثی یک ماتریس پایین مثلثی است.

تعریف ۱۲.۲. ماتریس متعامد. ماتریس مربعی U متعامد است اگر

$$U^T U = U U^T = I.$$

تعریف ۱۳.۲. ماتریس هسنبرگی (تقریباً مثلثی). ماتریس مربعی A بالاهسنبرگی است هرگاه $a_{ij} = 0$ به ازای $i > j + 1$. ترانهاده یک ماتریس بالاهسنبرگی پایین هسنبرگی است، یعنی ماتریس $A = (a_{ij})$ پایین هسنبرگی است اگر $a_{ij} = 0$ به ازای $j > i + 1$. یک ماتریس مربعی که هم بالاهسنبرگی و هم پایین هسنبرگی باشد، سه قطری است.

۳.۲ بردار ویژه و مقدار ویژه

برای توضیحات بیشتر این بخش [۷] مراجعه شود.

تعریف ۱۴.۲. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد، بردار ناصفر x بردار ویژه راست (یا فقط بردار ویژه) A است هرگاه Ax مضربی از x باشد. و یا

$$\forall \lambda \quad Ax = \lambda x.$$

و عدد λ را مقدار ویژه A می‌نامیم و زوج (λ, x) جفت ویژه نامیده می‌شود. بردار y ارایه شده توسط $y^T A = \lambda y^T$ را بردار ویژه چپ ماتریس A می‌گویند. مجموعه مقادیر ویژه یک ماتریس را طیف ماتریس گویند.

۱.۳.۲ یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه

با نوشتن تساوی $Ax = \lambda x$ به فرم $Ax = \lambda Ix$ و فاکتورگیری از x داریم:

$$(\lambda I - A)x = 0,$$

دستگاه فوق زمانی دارای جواب است که

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

چندجمله‌ای به‌دست آمده از بسط دترمینان فوق را چندجمله‌ای مشخصه می‌نامند و با $P(\lambda)$ نشان می‌دهند.

چند جمله‌ای مشخصه به فرم زیر است:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0,$$

که در آن

$$c_1 = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -\text{tr}(A).$$

ریشه‌های این معادله مقادیر ویژه ماتریس هستند.

با داشتن مقدار ویژه λ و حل دستگاه $(\lambda I - A)x = 0$ بردارهای ویژه A نظیر λ محاسبه می‌گردند. برای ماتریس A مقادیر دیگری نیز تعریف می‌شود که مقادیر ریس^۱ نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۵.۲. تقریب‌های مقدار ویژه از یک زیرفضا مقادیر ریس نامیده می‌شود، مجموعه‌ای از تمام مقادیر ریس ممکن، برد عددی یا میدان مقادیر یک ماتریس نامیده می‌شود. برد عددی $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ برابر است با:

$$W(A) = \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}. \quad (۱.۳.۲)$$

بنابراین برد عددی مجموعه تمام معادلات ریلی یک ماتریس است. یک مقدار ریس وابسته به ν اسکالر θ است به طوری که $A\nu - \theta\nu$ نسبت به فضای تولید شده توسط ν متعامد باشد، یعنی

$$\nu^*(A\nu - \theta\nu) = 0. \quad (۲.۳.۲)$$

برای توضیحات بیشتر به [۴] مراجعه کنید.

۴.۲ سیستم کنترل خطی

تعاریف و قضایای این بخش از [۶] انتخاب شده است.

۱.۴.۲ سیستم یک بعدی

برای بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، معادله دیفرانسیل آن را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

^۱Ritz value

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{۳.۴.۲}$$

که در آن

• t متغیر زمان،

• $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،

• $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل،

• $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به نام بردار خروجی،

می باشد.

ماتریس های A و B و C و D ماتریس هایی هستند با اندازه هایی که با معادلات فوق سازگار باشند و می توانند متغیر با زمان باشند اما در این جا ثابت فرض می شوند.
معادله (۳.۴.۲) را معادله سیستم گویند.

۲.۴.۲ کنترل پذیری

سیستم توصیف شده با معادله (۳.۴.۲) را کنترل پذیر گویند اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(0)$ (حالت اولیه در لحظه t) به بردار دلخواه دیگری مانند $x(v)$ (حالت تعادل در لحظه t_v) رساند. معمولاً $x(v)$ را برابر صفر در نظر می گیرند.

۳.۴.۲ ماتریس کنترل پذیری

برای سیستم توصیف شده با معادله تفاضلی (۳.۴.۲) ماتریس کنترل پذیری را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \tag{۴.۴.۲}$$

قضیه ۳.۲. سیستم خطی پیوسته زمانی (۱۵.۲.۶) کاملاً کنترل پذیر است اگر و فقط اگر ستون های ماتریس کنترل پذیری سیستم فضای R^n را تولید کند. ($rank(Q) = n$)

به عبارتی اگر هر حالت اولیه $x(0)$ را بتوان در تعداد متناهی گام (زمان متناهی) به حالت صفر انتقال داد.

تعریف ۱۶.۲. یک سیستم مشاهده پذیر (رویت پذیر) است اگر برای هر متغیر حالت یک عنصر خروجی وجود داشته باشد، یعنی در ترسیم گراف بین هر متغیر حالت و خروجی یک مسیر وجود داشته باشد یا به شکل ماتریسی $Q = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]$ ، رتبه کامل باشد.

۵.۲ پایداری

تعاریف و قضایای این بخش از [۶] انتخاب شده است.

تعریف ۱۷.۲. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), \circ, t], \quad (5.5.2)$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیپانوف پایدار گوئیم اگر به ازای t_0 و $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta_\epsilon > 0$ که به ازای هر $t \geq t_0$ برای کلیه $\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon)$

$$\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon,$$

تعریف ۱۸.۲. معادله دیفرانسیل (۵.۵.۲) پایدار مجانبی است اگر

الف) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

ب) برای کلیه مقادیر t_0 :

$$\exists \rho(t_0) > 0; \forall \|x(t_0) - x_e\| < \rho \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$$

لذا پایداری مجانبی علاوه بر پایداری به مفهوم لیپانوف، به شرط آنکه حالت اولیه سیستم در محدوده تعریف شده در همسایگی نقطه تعادل باشد، همگرایی پاسخ تعادل سیستم به نقطه تعادل را تضمین می کند. اگر انحرافات اولیه حالت سیستم از نقطه تعادل زیاد باشد آنگاه پایداری مجانبی اطلاع زیادی از رفتار پاسخ نخواهد داد.

تعریف ۱۹.۲. نقطه تعادل معادله دیفرانسیل (۵.۵.۲) را پایدار مجانبی فراگیر گویند اگر:

الف) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

ب) برای هر $x(t_0)$ و هر t_0 داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

تذکر ۲.۲. اگر سیستم پایدار مجانبی یا لیاپانوف نباشد آن‌گاه پایدار نیست.

تعریف ۲.۰۲. سیستم بدون شرط اولیه $(x(t_0))$ را پایدار (ورودی-کراندار، خروجی-کراندار) گویند اگر و فقط اگر برای هر ورودی کراندار، خروجی آن کراندار باشد.

قضیه ۴.۲. سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (۶.۵.۲)$$

این سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر و فقط اگر

الف) کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشد.

ب) آن دسته از مقادیر ویژه A که قسمت‌های حقیقی صفر دارند صفرهای ساده چندجمله‌ای مشخصه باشند به عبارت دیگر در تبدیل A به فرم جردن مرتبه بلوک‌های جردن متناظر با مقادیر ویژه‌ای که قسمت‌های حقیقی آن صفر است، یک باشد.

قضیه ۵.۲. سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (۶.۵.۲) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر پایدار مجانبی فراگیر باشد.

قضیه ۶.۲. سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (۶.۵.۲) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی اکیدا منفی داشته باشند.

فصل ۳

مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی

در این فصل ابتدا مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را در سیستم‌های کنترل خطی شرح می‌دهیم. سپس قضایایی درباره وجود و یکتایی جواب را برای این مساله بیان می‌کنیم. در ادامه به بررسی روش‌های موجود برای حل این مساله می‌پردازیم و با ارایه مثالی این روش‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

۱.۳ تخصیص مقادیر ویژه جزئی

سیستم کنترل خطی تک ورودی متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1.3)$$

که در آن A یک ماتریس $(n \times n)$ بزرگ نامتقارن حقیقی، $b \in \mathbb{R}^n$ و u تابعی از زمان است. با توجه به قانون کنترل $u(t) = -f^T x(t)$ ، اگر زوج (A, b) کنترل‌پذیر باشد، می‌توانیم بردار پس‌خورد f را پیدا کنیم به‌صورتی که سیستم حلقه بسته

$$\dot{x}(t) = (A - bf^T)x(t), \quad (2.1.3)$$

دارای مقادیر ویژه موردنظر باشد. چنین مساله‌ای، مساله تخصیص مقادیر ویژه تک ورودی نامیده می‌شود و اهمیت ویژه‌ای در کاربردهای نظریه کنترل دارد. این مساله از طریق روش‌های عددی معمولی مانند QR و شور حقیقی بررسی می‌شود. برای مسایل بزرگ بهتر است تعداد کمی از مقادیر ویژه حلقه باز را که باعث ناپایداری سیستم هستند، تخصیص دهیم و بقیه بدون تغییر باقی بماند که تخصیص مقادیر ویژه جزئی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳. مساله تخصیص یک مجموعه از طیف حلقه باز سیستم کنترل خطی، توسط کنترل پس‌خورد حالت و بدون تغییر باقی گذاشتن بقیه طیف را مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی می‌نامند [۱۰].

فرض می‌کنیم $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ طیف حلقه باز (ماتریس A) سیستم و $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ یک مجموعه دلخواه باشد که هر دو تحت مزدوج مختلط بسته هستند. Λ را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه می‌کنیم که در آن $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و $\Lambda_2 = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ است. هدف محاسبه بردار پس‌خورد حالت f است به صورتی که مجموعه K جایگزین مجموعه Λ_1 شود.

لازم به توضیح است که مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ دارای قسمت حقیقی مثبت اند. ولیکن از آنجایی که برای پایداری سیستم پیوسته لازم است تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (۲.۱.۳) سمت چپ صفحه مختلط قرار بگیرد، به همین دلیل مجموعه K که دارای قسمت حقیقی منفی هستند را توسط کنترل پس‌خورد حالت جایگزین مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ می‌کنیم. به طوری که طیف حلقه بسته $A - bf^T$ به صورت $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

در واقع با در نظر گرفتن سیستم (۱.۱.۳) و با فرض $u = 0$ (ورودی صفر) داریم:

$$\dot{x} = Ax(t),$$

بنابراین

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),$$

پس

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = A dt,$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\ln x(t) = At,$$

در نتیجه

$$x(t) = (e^{At})x(0), \quad (3.1.3)$$

با حدگیری از طرفین رابطه بالا، زمانی که t افزایش می‌یابد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{At})x(0) = \infty. \quad (4.1.3)$$

به دست می‌آید. پس در حالت ورودی صفر سیستم ناپایدار است.

اگر قانون کنترل $u = -f^T x(t)$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) = (A - bf^T)x(t),$$

بنابراین با توجه به روند بالا و مشابه قبل به رابطه

$$x(t) = \exp(A - bf^T)x_0, \quad (5.1.3)$$

می‌رسیم. می‌خواهیم بردار پس‌خورد حالت f را طوری به‌دست بیاوریم که جواب سیستم حلقه بسته در

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (6.1.3)$$

صدق کند که این همان تعریف پایداری سیستم است. بدین منظور مجموعه $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ که در آن μ_j ها دارای قسمت حقیقی منفی هستند را جایگزین Λ_1 می‌کنیم. در نتیجه، رابطه (۶.۱.۳) برای هر بردار اولیه $x(0)$ برقرار است.

۲.۳ وجود ویکتایی جواب مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی

در این بخش به بررسی وجود و ویکتایی جواب مساله می‌پردازیم. مفهوم کنترل‌پذیری برای این بررسی بسیار مهم است. سیستم کنترل خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (7.2.3)$$

را در نظر بگیرید.

قضیه ۱.۳. (معیار کنترل‌پذیری سیستم پیوسته زمانی)

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. عبارات زیر هم‌ارزند:

۱. سیستم کنترل‌پذیر است.

۲. ماتریس $n \times nm$

$$Q = (B, AB, \dots, A^{n-1}B), \quad (8.2.3)$$

دارای رتبه کامل n است. (شرط کنترل‌پذیری کالمن)

۳. اگر (λ, x) زوج ویژه A^T باشد، یعنی $x^T A = \lambda x^T$ آن‌گاه $x^T B \neq 0$.

۴. رتبه $(A - \lambda I, B)$ برای هر مقدار ویژه λ از A برابر n است.

۵. مقادیر ویژه ماتریس $A - BF^T$ را می‌توانیم به‌طور دلخواه با انتخاب مناسب F^T تخصیص دهیم (با فرض

این‌که مقادیر ویژه مختلط به‌صورت زوج‌های مزدوج باشند).

برهان. بدون از کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $x(\circ) = \circ$ ، $t_\circ = \circ$ را در نظر می‌گیریم. در این جا ما فقط شرایط $۲ \rightarrow ۳$ و برعکس را اثبات می‌کنیم. برای اثبات بقیه هم‌ارزی‌ها به [۶] مراجعه شود.

$$۳ \rightarrow ۲: x \text{ را بردار ویژه } A^T \text{ متناظر با مقدار ویژه } \lambda \text{ در نظر می‌گیریم، یعنی}$$

$$x^T A = \lambda x^T.$$

به برهان خلف فرض می‌کنیم $x^T B = \circ$ آن‌گاه

$$x^T Q = [x^T B, \lambda x^T B, \lambda^2 x^T B, \dots, \lambda^{n-1} x^T B] = \circ. \quad (۹.۲.۳)$$

چون ماتریس Q ، رتبه کامل است پس، $x = \circ$ خواهد بود که این یک تناقض است.
 $۲ \rightarrow ۳$: فرض کنید هیچ‌یک از بردارهای ویژه A با ستون‌های B متعامد نباشد. اما رتبه Q برابر $k < n$ باشد. بنابراین ماتریس نامنفرد T وجود دارد [۶] به‌طوری‌که

$$\bar{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \circ & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \circ \end{bmatrix}, \quad (۱۰.۲.۳)$$

به‌طوری‌که $\bar{A}_{22}$ از مرتبه $(n - k)$ است و $k = \text{rank}(Q)$.

v_2 را بردار ویژه $(\bar{A}_{22})^T$ متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، آن‌گاه

$$(\bar{A})^T \begin{bmatrix} \circ \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^T & \circ \\ \bar{A}_{21}^T & \bar{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \bar{A}_{22}^T v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \circ \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

به‌علاوه

$$\begin{bmatrix} \circ, v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \circ \end{bmatrix} = \circ.$$

یعنی، بردار ویژه $\begin{bmatrix} \circ \\ v_2 \end{bmatrix}$ از $(\bar{A})^T$ وجود دارد که با ستون‌های B متعامد است. بنابراین زوج $(\bar{A}, \bar{B})$ کنترل‌پذیر نیست که تناقض است زیرا تبدیل تشابهی کنترل‌پذیری را تغییر نمی‌دهد. $\square$

قضیه ۲.۳. (تعریف کنترل‌پذیری با استفاده از بردار ویژه)

سیستم (۷.۲.۳) یا به طور معادل زوج ماتریسی (A, B) نسبت به مقدار ویژه λ از A کنترل‌پذیر است هرگاه برای تمام $y \neq \circ$ که $y^H A = \lambda y^H$ داشته باشیم $y^H B \neq \circ$. [۱۰]

$\square$

برهان. با توجه به قضیه قبل به‌دست می‌آید.

تعریف ۲.۳. سیستم (۷.۲.۳) یا زوج (A, B) نسبت به زیرمجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ از طیف A به طور جزیی کنترل‌پذیر است اگر نسبت به هر یک از مقادیر ویژه λ_j برای $j = 1, \dots, k$ کنترل‌پذیر باشد.

تعریف ۳.۳. سیستم (۷.۲.۳) یا به طور معادل زوج (A, B) به طور کامل کنترل پذیر است هرگاه نسبت به همه مقادیر ویژه A کنترل پذیر باشد.

قضیه ۳.۳. (وجود و یکتایی مساله تخصیص مقادیر ویژه)

مساله تخصیص مقادیر ویژه زوج (A, B) برای هر مجموعه دلخواه K حل پذیر است اگر و تنها اگر زوج (A, B) به طور کامل کنترل پذیر باشد. جواب یکتاست اگر و تنها اگر سیستم یک سیستم تک ورودی باشد (یا به عبارتی B یک بردار باشد). در حالت چند ورودی در صورت وجود جواب تعداد نامتناهی جواب دارد [۱۰].

□

برهان. برای اثبات به مراجع [۵] و [۶] می توانید مراجعه کنید.

قضیه ۴.۳. (وجود و یکتایی مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی)

مجموعه Λ طیف ماتریس A و $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بتوان $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ را به K تغییر داد و بقیه مقادیر ویژه بدون تغییر باقی بمانند. پس مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی برای زوج (A, B) به ازای هر انتخاب مقدار ویژه حلقه بسته $\mu_1, \dots, \mu_k$ دارای جواب است اگر و فقط اگر زوج (A, B) به طور جزیی نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ کنترل پذیر باشد، جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر سیستم یک سیستم به طور کامل کنترل پذیر تک ورودی باشد. در حالت چندین ورودی و در حالت تک ورودی زمانی که زوج (A, B) کامل کنترل پذیر نیست، در صورت وجود جواب تعداد نامتناهی جواب دارد [۱۰].

برهان. لزوم: فرض کنید زوج (A, B) نسبت به برخی از λ_j ها که $1 \leq j \leq k$ است، کنترل پذیر نباشد (برهان خلف) پس بردار $y \neq 0$ وجود دارد به طوری که $y^H(A - \lambda_j I) = 0$ و $y^H B = 0$ ، بدین معنی که برای هر F داریم $y^H(A - BF^T - \lambda_j I) = 0$. در نتیجه، با این فرض که λ_j مقدار ویژه $A - BF^T$ است، نمی تواند دوباره تخصیص داده شود.

کفایت: دو ماتریس قطری $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ و $\Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ را تعریف می کنیم. ثابت می کنیم ماتریس پس خورد F^T وجود دارد که مقادیر ویژه Λ_1 را به طور دلخواه تعیین می کند درحالی که بقیه بدون تغییر می ماند. فرض کنید $X = (x_1, \dots, x_n)$ و $Y = (y_1, \dots, y_n)$ متناظر ماتریس های بردار ویژه راست و چپ A باشد و فرض کنید $Y_1 = (y_1, \dots, y_k)$ ، چون $Y^H A X = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ و $Y^H X = I$ ، پس کنترل پذیری جزیی زوج ماتریسی (A, B) نسبت به مقادیر ویژه Λ_1 نتیجه می دهد که زوج $(\text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), Y^H B)$ نسبت به مقادیر ویژه مشابه به طور جزیی کنترل پذیر است. چون $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \cap \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$ ، بنابراین زوج $(\Lambda_1, Y_1^H B)$ به طور کامل کنترل پذیر است.

با استفاده از قضیه (۳.۳) ماتریس پس خورد Φ وجود دارد به طوری که ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 - Y_1^H B \Phi$ مقادیر ویژه مطلوب $\mu_1, \dots, \mu_k$ را دارد. F^T را به صورت

$$F^T = \Phi Y_1^H. \quad (11.2.3)$$

تعریف می‌کنیم. پس مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته همان‌طور که مورد نیاز است به‌دست می‌آید، به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} \{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} &= \Omega(\text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2) - Y^H B(\Phi, \circ)) \\ &= \Omega(Y^H (A - B((\Phi, \circ) Y^H)) X) \\ &= \Omega(A - B(\Phi Y_1^H)). \end{aligned} \quad (12.2.3)$$

منحصر به فردی جواب در حالت تک ورودی زمانی که کنترل پذیری کامل است و وجود تعداد نامتناهی جواب در حالت چند ورودی به‌طور مستقیم از قضیه (۳.۳) به‌دست می‌آید. برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم زمانی که B یک بردار است (در حالت تک‌ورودی) و یک مقدار ویژه کنترل ناپذیر λ_p برای برخی $p > k$ وجود دارد (معادلا p امین بردار ویژه راست وابسته y_p به‌طوری که $y_p^H A = \lambda_p y_p^H$ و $y_p^H B = 0$)، مساله تخصیص مقدار ویژه جزیی تعداد نامتناهی جواب دارد.

فرض کنید F^T جواب مساله تخصیص مقدار ویژه جزیی باشد. بردارهای ویژه راست و چپ ماتریس حلقه بسته $A_c = A - BF^T$ را با Y_c و X_c نشان می‌دهیم. به‌وضوح $y_p^H A_c = y_p^H (A - BF^T) = \lambda_p y_p^H$ و در نتیجه y_p ، p امین ستون Y_c نیز هست. فرض کنید $F_\alpha^T = \alpha y_p^H$ به‌طوری که α یک اسکالر دلخواه است. مانند (۱۲.۲.۳) می‌توانیم نشان دهیم که مقادیر ویژه $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ و $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{p-1}$ و $\mu_1, \dots, \mu_k$ از A_c با به‌کاربردن ماتریس پس‌خورد F_α بدون تغییر باقی می‌ماند. به‌علاوه مقدار ویژه λ_p از A_c نیز با به‌کاربردن F_α بدون تغییر باقی می‌ماند چون زوج (A_c, B) نسبت به λ_p با توجه به بخش لزوم همین قضیه کنترل پذیر نیست. در نتیجه

$$\Omega(A - BF^T) = \Omega(A_c - BF_\alpha^T) = \Omega(A - B(F^T + \alpha y_p^H)),$$

□ پس با نشان دادن این که F جواب است، $F + \alpha y_p^H$ برای هر α دلخواه نیز جواب است.

۳.۳ بررسی روش‌های اولیه ارایه شده برای حل مساله

در این بخش به بررسی روش‌های عددی موجود برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی می‌پردازیم.

۱.۳.۳ روش روابط متعامد

روش روابط متعامد در سال ۲۰۰۶ توسط محمد.ا. رمضان^۱ و اهاب.ا.ال-سعید^۲ [۱۹] مطرح شده است. این روش از روابط متعامد میان بردارهای ویژه ماتریس A استفاده می‌کند. داتا [۷] و سارکیسیان [۲۴] روابط متعامد میان بردار ویژه‌های راست و چپ ماتریس A را به صورت قضیه زیر بیان نمودند.

قضیه ۵.۳. (تعامد ویژه بردارهای ماتریس A)

فرض کنید λ_1 و $\dots$ و λ_k مقادیر ویژه A ، X و Y بردارهای ویژه راست و چپ باشند و فرض کنید $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \cap \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$. افراز $X = (X_1, X_2)$ و $Y = (Y_1, Y_2)$ را در نظر می‌گیریم. پس $Y_1^H X_2 = 0$ و $Y_1^H A X_2 = 0$ و چنانچه A متقارن حقیقی باشد $X_1^T X_2 = 0$ و $X_1^T A X_2 = 0$ [۱۹].

برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی با استفاده از این روش، ابتدا فرض می‌کنیم که A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی و نامتقارن باشد. مساله مقادیر ویژه

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad (13.3.3)$$

را در نظر می‌گیریم که به صورت ماتریسی

$$AX - \Lambda X = 0, \quad (14.3.3)$$

نوشته می‌شود که در آن $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، λ_i ها مجزا می‌باشند. می‌خواهیم $f \in \mathbb{R}^n$ را طوری پیدا کنیم که ماتریس حلقه بسته $A - bf^T$ دارای طیف $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ باشد.

ماتریس $n \times n$ بردار ویژه راست X ، ماتریس $n \times n$ بردار ویژه چپ Y^H و ماتریس $n \times n$ مقادیر ویژه Λ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$X = (X_1, X_2), \quad Y^H = \begin{bmatrix} Y_1^H \\ Y_2^H \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2).$$

به طوری که $X_1 = (x_1, \dots, x_k)$ ، $X_2 = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ ، $Y_1 = (y_1, \dots, y_k)$ ، $Y_2 = (y_{k+1}, \dots, y_n)$ و $\Lambda_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ و $\Lambda_2 = (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ می‌باشد.

قضیه ۶.۳. اگر $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \cap \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$ و بردار پس خورد f به صورت

^۱Mohamed.A.Ramadan

^۲EhabA. El - Sayed

$$f^T = \beta Y_1^H A, \quad (15.3.3)$$

برای هر انتخاب β تعریف شود. آنگاه $(n - k)$ مقدار ویژه انتهایی ماتریس $(A - bf^T)$ مشابه همان تعداد مقادیر ویژه A است [۱۹].

برهان. فرض کنید (X, Λ) زوج ماتریسی بردار ویژه-مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه

$$AX - \Lambda X = 0,$$

هدف اثبات

$$(A - bf^T)X_2 - X_2\Lambda_2 = 0, \quad (16.3.3)$$

است. با جایگذاری

$$f^T = \beta Y_1^H A$$

در سمت چپ (۱۶.۳.۳) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} (A - bf^T)X_2 - X_2\Lambda_2 &= AX_2 - bf^T X_2 - X_2\Lambda_2 = \\ AX_2 - X_2\Lambda_2 - b\beta(Y_1^H AX_2) &= 0. \end{aligned}$$

چون $AX_2 - X_2\Lambda_2 = 0$ و با توجه به قضیه ۵.۳، $Y_1^H AX_2 = 0$ ، در نتیجه

$$(A - bf^T)X_2 - X_2\Lambda_2 = 0,$$

□

برای استفاده از قضیه فوق نیاز به پیدا کردن پارامتر β داریم که مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ از A را به $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ از $A - bf^T$ تغییر دهد.

در نتیجه هدف از پیدا کردن β ، تخصیص طیف مقادیر ویژه $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ به ماتریس حلقه بسته $(A - bf^T)$ است که در قضیه فوق مجموعه $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص و در این قسمت نیز مجموعه Λ_1 را به $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ تغییر می دهد.

اگر چنین β وجود داشته باشد آنگاه ماتریس بردار ویژه $Z \in \mathbb{C}^{k \times k}$ وجود دارد که $Z = (z_1, \dots, z_k)$ و $j = 1, \dots, k$ و $z_j \neq 0$ که $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k)$ ماتریس قطری

$$(A - bf^T)Z - ZD = 0, \quad (17.3.3)$$

حال با جایگزینی $f^T = \beta Y^H A$ در فرمول بالا داریم:

$$(A - b\beta Y^H A)Z - ZD = AZ - ZD - b\beta Y^H AZ = 0.$$

در نتیجه

$$AZ - ZD = b\beta Y^H AZ = b\beta W^H = bc^H. \quad (18.3.3)$$

و $c = \beta W^H$ بردار وابسته به مقادیر انتخاب شده برای بردارهای ویژه Z است. برای محاسبه Z ، قرار می‌دهیم $c = (1, \dots, 1)^T$. پس معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$AZ - ZD = b(1, \dots, 1), \quad (19.3.3)$$

حال می‌توان هر بردار z_j را با استفاده از معادله‌های $(A - \mu_j I)z_j = b$ به دست آورد. پس ماتریس W از $W^H = Y^H AZ$ محاسبه می‌شود. چون Z محاسبه شود پس β^H و در نهایت f به دست می‌آید.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $Ax_i = \lambda_i x_i$ و $1 \leq i \leq n$ به صورت (۱۴.۳.۳) و f به صورت (۱۵.۳.۳) باشد با مولفه‌های β_j از β که

$$\beta_j = \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \cdot \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (20.3.3)$$

پس ماتریس $A - bf^T$ طیف $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ را دارد و k بردار ویژه اولیه‌اش در $[19] j = 1, \dots, k$ صدق می‌کند که

برهان. کافیت نشان دهیم:

$$\Phi_h(\beta) = [(A - bf^T) - \mu_h I] z_h = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k. \quad (21.3.3)$$

به طوری که

$$(A - \mu_h I) z_h = b. \quad (22.3.3)$$

با جایگذاری $f^T = \beta Y^H A$ در $\Phi_h(\beta)$ داریم:

$$\Phi_h(\beta) = [(A - \mu_j I) - b\beta Y^H A] z_h = 0.$$

آنگاه از (۲۲.۳.۳) خواهیم داشت:

$$\Phi_h(\beta) = b - [b\beta Y^H A] z_h$$

حال با جایگذاری β_j با استفاده از (۲۰.۳.۳) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\Phi_h(\beta) &= b - \left[b \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} y_j^H A \right) \right] z_h \\ &= b - \left[b \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} y_j^H (\lambda_j - \mu_h) \right) \frac{A}{\lambda_j} \right] z_h,\end{aligned}$$

آنگاه

$$\Phi_h(\beta) = b - \left[b \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) y_j^H (\lambda_j - \mu_h) \frac{A}{\lambda_j} \right] z_h.$$

ز امین ستون $y^H A = \lambda y^H$ را می توانیم به صورت

$$y_j^H I = y_j^H \frac{A}{\lambda_j}, \quad \lambda_j \neq 0.$$

بنویسیم، بنابراین برای هر انتخاب $1 \leq h, j \leq k$ داریم:

$$y_j^H (A - \mu_h I) = y_j^H \left(A - \mu_h \left(\frac{A}{\lambda_j} \right) \right),$$

آنگاه

$$y_j^H (A - \mu_h I) = y_j^H (\lambda_j - \mu_h) \left(\frac{A}{\lambda_j} \right). \quad (23.3.3)$$

با جایگذاری (۲۳.۳.۳) در عبارت آخر $\Phi_h(\beta)$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\Phi_h(\beta) = b - \left[b \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) y_j^H (A - \mu_h I) \right] z_h,$$

و با استفاده از (۲۲.۳.۳) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\Phi_h(\beta) &= b - b \sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} y_j^H b, \\ &= b - b \sum_{j=1}^k \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} (b^T \bar{y}_j)^T.\end{aligned}$$

با حذف جمله اضافه، داریم:

$$\begin{aligned}\Phi_h(\beta) &= b - b \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_h} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, h}}^k \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} \\ \Phi_h(\beta) &= b \left(1 - \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^k \lambda_j - \mu_i}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_j - \lambda_i} \right).\end{aligned}$$

در [۹] اثبات شده است که

$$\sum_{j=1}^k \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^k \lambda_j - \mu_i}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_j - \lambda_i} = 1, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (24.3.3)$$

برای هر مجموعه $\{\lambda_h\}_{h=1}^k$ و $\{\mu_h\}_{h=1}^k$ که λ_h ها مجزا هستند، بنابراین $\Phi_h(\beta)$ صفر است و نتیجه مطلوب به دست می‌آید. $\square$

با توجه به بسط تعریف شده برای β ، شرایط کافی برای وجود β و در نتیجه برای هر مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی به صورت زیر است:

۱. λ_j ها مخالف صفر باشند.

۲. λ_j ها مجزا باشند.

۳. بردار b باید با $\bar{y}_j$ نامتعامد باشد.

این روش برای ماتریس‌های با اندازه کوچک مناسب است، اما وقتی اندازه ماتریس بزرگ باشد پیدا کردن مولفه‌های β_j و در نتیجه پیدا کردن f دشوار خواهد بود.

مثال ۱.۳. ماتریس A و بردار b را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

و $\Lambda = \{22/3934, -0/5105, -6/8566, -5/0263\}$ باشد. هدف پیدا کردن بردار پس‌خورد حالت f است به طوری که $\mu = -1$ جایگزین $\lambda_1 = 22/3934$ شود.

حل. بدین منظور ابتدا ماتریس Y_1^H را محاسبه می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$Y_1^H = \begin{bmatrix} -0/5955 \\ -0/3371 \\ -0/6221 \\ -0/5461 \end{bmatrix},$$

در نتیجه با توجه به فرمول β_j خواهیم داشت:

$$\beta_1 = \frac{1}{b^T \bar{y}_1} \cdot \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} = -1/6793$$

و در نهایت f به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f^T = \beta Y_1^H A = [22/3934 \quad 12/6752 \quad 23/3934 \quad 20/5385]$$

بنابراین ماتریس حلقه بسته $A - bf^T$ دارای طیف $\Lambda = \{-0/5105, -1, -6/8566, -5/0263\}$ خواهد بود. $\square$

۲.۳.۳ روش آرنولدی به طور ضمنی دوباره آغاز شده

روش آرنولدی به طور ضمنی دوباره آغاز شده (IRA method) ^۳ تعمیمی از روش آرنولدی سعد ^۴ [۲۱] برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی است که در سال ۲۰۰۱ توسط د. کالواتی ^۵ و ب. لوییز ^۶ [۳] پیشنهاد شده

^۳Implicitly restarted Arnoldi method

^۴Yousef Saad

^۵D.Calvetti

^۶B.Lewis

است. در این روش می‌توان مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را با محاسبه زیر فضای ناوردای راست A وابسته به مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ حل نمود.

فرض کنید ستون‌های ماتریس $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ یک پایه متعامد برای این زیرفضا تشکیل دهند. پس

$$AV = VH, \quad V^T V = I, \quad (25.3.3)$$

برای برخی از ماتریس‌های $H \in \mathbb{R}^{k \times k}$ با طیف

$$\lambda(H) = \{\lambda_j\}_{j=1}^k. \quad (26.3.3)$$

خواهد بود. باید توجه داشت که این تجزیه منحصر به فرد نیست، زیرا اگر زوج ماتریسی (H, V) در (25.3.3) و (26.3.3) صدق کند آنگاه زوج $(U^T H U, V U)$ نیز برای هر ماتریس متعامد U در (25.3.3) و (26.3.3) صدق می‌کند.

فرض کنید (25.3.3) و (26.3.3) برای زوج ماتریسی (H, V) برقرار باشد. بردار $\tilde{b} = V^T b$ را تعریف می‌کنیم. مساله پیدا کردن بردار $\tilde{f} \in \mathbb{R}^k$ است به‌طوری‌که

$$\lambda(H - \tilde{b}\tilde{f}^T) = K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}. \quad (27.3.3)$$

باشد. زوج بردار ماتریسی $(H, \tilde{b})$ کنترل پذیر است اگر

$$\text{rank}([H - zI_k, \tilde{b}]) = k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

در واقع، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی (27.3.3) دارای جواب $\tilde{f}$ برای هر مجموعه P می‌باشد، اگر و فقط اگر زوج بردار-ماتریسی $(H, \tilde{b})$ کنترل پذیر باشد. [ونهام^۷ (27)]

قضیه ۸.۳. فرض کنید V و H در معادله‌های (25.3.3) و (26.3.3) صدق کنند و $\tilde{b} = V^T b$ تعریف شود به‌طوری‌که b در (1.1.3) صدق می‌کند. مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی

$$\lambda(A - b f^T) = p \cup \{\lambda_j\}_{j=k+1}^n. \quad (28.3.3)$$

دارای جواب $f \in \text{rang}(V)$ است اگر و فقط اگر مساله (27.3.3) دارای جواب $\tilde{f} \in \mathbb{R}^k$ باشد [۳].

^۷W. M. Wonham

برهان. V را به ماتریس متعامد $X = [V, W] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ گسترش می‌دهیم. تجزیه (۲۵.۳.۳) و

$$W^T V = 0. \quad (29.3.3)$$

نتیجه می‌دهد که $V^T A V = H$ و $W^T A V = W^T H = 0$. در نتیجه A مشابه با ماتریس بلوکی مثالی زیر است،

$$X^T A X = \begin{bmatrix} H & V^T A W \\ 0 & W^T A W \end{bmatrix}. \quad (30.3.3)$$

زیرا

$$X = [V \quad W]$$

بنابراین

$$X^T A X = \begin{bmatrix} V^T \\ W^T \end{bmatrix} A [V \quad W] = \begin{bmatrix} V^T A \\ W^T A \end{bmatrix} [V \quad W] = \begin{bmatrix} V^T A V & V^T A W \\ W^T A V & W^T A W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & V^T A W \\ 0 & W^T A W \end{bmatrix}.$$

از (۲۶.۳.۳) نتیجه می‌شود

$$\lambda(W^T A W) = \{\lambda_j\}_{j=k+1}^n. \quad (31.3.3)$$

فرض کنید $f \in \text{rang}(V)$ در مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی (۲۸.۳.۳) صدق کند. $\tilde{f} = V^T f$ را تعریف می‌کنیم. معادله‌های (۲۵.۳.۳) و (۲۹.۳.۳) و $W^T f = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$V^T (A - b f^T) V = H - \tilde{b} \tilde{f}^T,$$

$$W^T (A - b f^T) V = W^T A V - W^T b f^T V = 0,$$

$$W^T (A - b f^T) W = W^T A W - W^T b f^T W = W^T A W$$

و بنابراین

$$X^T (A - b f^T) X = \begin{bmatrix} H - \tilde{b} \tilde{f}^T & V^T A W \\ 0 & W^T A W \end{bmatrix} \quad (32.3.3)$$

از $\Lambda(X^T (A - b f^T) X) = K \cup \{\lambda_j\}_{j=k+1}^k$ و (۳۱.۳.۳) نتیجه می‌شود که $\Lambda(H - \tilde{b} \tilde{f}^T) = K$. در نتیجه $\tilde{f}$ در مساله (۲۷.۳.۳) صدق می‌کند.

برعکس: فرض کنید $\tilde{f} \in \mathbb{R}^k$ جواب مساله (۲۷.۳.۳) باشد به طوری که زوج ماتریسی $\{H, V\}$ در (۲۵.۳.۳) و (۲۶.۳.۳) صادق باشد. تعریف می‌کنیم $f = V\tilde{f}$. با جایگذاری (۲۵.۳.۳) و f در $X^T(A - bf^T)X$ طرف راست (۳۲.۳.۳) به دست می‌آید و معادله‌های (۲۷.۳.۳) و (۳۱.۳.۳)، (۲۸.۳.۳) را نتیجه می‌دهد. $\square$

سعد برای به دست آوردن تجزیه‌هایی به فرم (۲۵.۳.۳) استفاده از روش آرنولدی را پیشنهاد داد. این روش برای مسایل بزرگ مقدار مناسب است زیرا از ماتریس A تنها در حاصل ضرب‌های ماتریس-بردار استفاده می‌شود. به ویژه زمانی که A تجزیه پذیر و تقلیل پذیر نیست.

روش آرنولدی

این روش برای اولین بار در سال ۱۹۵۱ توسط آرنولدی^۸ مطرح شده است و برای ماتریس‌های اسپارس و بزرگ به کار می‌رود. روش آرنولدی یک پایه متعامد از زیرفضایی به نام زیرفضای کریلوف^۹ را ساختار بندی می‌کند [۷]. زیرفضای کریلوف از بعد m توسط ماتریس $A_{n \times n}$ و بردار v_1 به صورت

$$\mathcal{K}_m(A, v_1) = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\},$$

تعریف می‌شود.

روش آرنولدی می‌تواند تنها حاصل ضرب‌های بردار-ماتریسی را به کار ببرد، بنابراین برای ماتریس‌های اسپارس مناسب است، زیرا صفرها را حفظ می‌کند. ایده اساسی حل یک مساله بزرگ و اسپارس با استفاده از روش آرنولدی، تصویر کردن مساله به یک زیرفضای کریلوف از بعد $m < n$ با استفاده از یک تقریب استاندارد است و سپس بازیابی جواب مساله از جواب این مساله تصویر شده می‌باشد. الگوریتم روش آرنولدی به صورت زیر می‌باشد:

الگوریتم روش آرنولدی:

مرحله ۱: شروع: یک بردار با نرم ۱ و عدد صحیح $m \leq n$ را انتخاب کنید.

مرحله ۲: تکرار: برای $j = 1, 2, \dots, m$ انجام بده:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= (v_j^T A v_j), \quad i = 1, 2, \dots, j \\ \hat{v}_{j+1} &= A v_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v_i \\ h_{j+1,j} &= \|\hat{v}_{j+1}\|_2, \\ v_{j+1} &= \frac{\hat{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}}. \end{aligned}$$

تذکر ۱.۳. ۱. اسکالرهای h_{ij} باید به گونه‌ای انتخاب شوند که بردارهای v_j یکا متعامد باشند.

^۸Arnoldi

^۹Krylov subspace

۲. فرض کنید V_m ماتریس $n \times m$ باشد به طوری که j امین ستون آن بردار ستونی v_j باشد، یعنی $V_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$. آن گاه بردارهای V_m یک پایه متعامد از زیرفضای کريلوف $\mathcal{K}_m(A, v_1)$ را تشکیل می دهند.

۳. $\tilde{H}_m$ را به صورت یک ماتریس $(m+1) \times m$ تعریف کنید که درایه های غیر صفر آن ضرایب h_{ij} هستند و H_m یک ماتریس $m \times m$ که از $\tilde{H}_m$ با حذف آخرین سطرش به دست آمده است. پس ماتریس H_m به صورتی است که

$$AV_m - V_m H_m = h_{m+1, m} [\circ, \circ, \dots, v_{m+1}]$$

یا به طور معادل

$$AV_m = V_{m+1} \tilde{H}_m.$$

که در آن $V_{m+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{m+1})$ است.

۴. یک روش عددی مناسب برای کاربرد روش آرنولدی، استفاده از روش گرام اشمیت اصلاح شده و یا دوباره یکا متعامد سازی جزیی یا کامل در مرحله دوم است.

مثال ۲.۳. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $m = 2$ و $v_1 = (1, \circ, \circ)^T$ روش آرنولدی به صورت زیر محاسبه می شود:

حل.

$j = 1 :$

$$i = 1, \quad h_{11} = 1$$

$$\hat{v}_2 = Av_1 - h_{11}v_1 = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{21} = 1/4141$$

$$v_2 = \frac{\hat{v}_2}{h_{21}} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ/7\circ71 \\ \circ/7\circ71 \end{pmatrix}$$

$j = 2 :$

$$i=1, \quad h_{12} = 3/5355, \quad h_{22} = 3/5000$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0/7071 \\ 0 & 0/7071 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3/5355 \\ 1/4142 & 3/5000 \end{pmatrix}$$

$$AV_2 - V_2H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/0607 \\ 0 & -1/0607 \end{pmatrix}$$

□

حال با کاربرد m مرحله از فرایند آرنولد ماتریس A با بردار یکه اولیه v_1 تجزیه آرنولد زیر به دست می‌آید:

$$AV_m - V_mH_m = \eta_m v_{m+1} e_m^T, \quad (33.3.3)$$

که در آن $V_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $V_m^T V_m = I_m$ و $V_m e_1 = v_1$ و $H_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ یک ماتریس بالاهسنبرگی با درایه‌های زیرقطری مثبت می باشد. اسکالر η_m در (33.3.3) نامنفی است. وقتی $\eta_m > 0$ باشد به بردار $v_{m+1} \in \mathbb{R}^n$ نیاز داریم که در $1 = v_{m+1}^T v_{m+1}$ و $0 = V_m^T v_{m+1}$ صدق کند. به علاوه $e_m = [0, 0, \dots, 1]^T$. حال فرض می‌کنیم m به قدر کافی کوچک است که تجزیه (33.3.3) با ویژگی فوق وجود دارد. فرض کنید ماتریس H_m و اسکالر η_m تجزیه آرنولد (33.3.3) در

$$\lambda(H_m) = \{\lambda_j\}_{j=1}^m, \quad \eta_m = 0, \quad (34.3.3)$$

صدق کند. پس زوج ماتریسی (H_m, V_m) از (33.3.3) در (25.3.3) صدق می‌کند. فرض کنید $\tilde{b} = V_m^T b$ و $\tilde{f}$ جواب مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی (28.3.3) باشد. بنابراین با فرایند آرنولد (33.3.3) به طوری که (34.3.3) برقرار باشد می‌توانیم مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی (28.3.3) را در صورت وجود جواب، با محاسبه یک جواب برای مساله تخصیص مقادیر ویژه (27.3.3) حل کنیم. به هر جهت با داشتن یک بردار اولیه دلخواه v_1 و با کاربرد m مرحله از فرایند آرنولد ماتریس A بعید است که تجزیه (33.3.3) با فرض (34.3.3) تولید شود.

در نتیجه از روش IRA که فرایند آرنولد را با یک الگوریتم کاملاً شیفته داده شده QR ترکیب می‌کند، برای تولید الگوریتم آرنولد (33.3.3) با فرض (34.3.3) استفاده می‌کنیم. فرض کنید مقادیر ویژه λ_j از A در

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad k+1 \leq j \leq n,$$

صادق باشد و k معلوم باشد. می‌خواهیم زیرفضاهای ناوردای A را تعیین کنیم که به مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ وابسته باشد. کاربرد $2k$ مرحله از فرایند آرنولد ماتریس A با بردار یکه ν_1 ، درایه‌هایی برای تعیین تجزیه

$$AV_{2k} = V_{2k}H_{2k} + \eta_{2k}V_{2k+1}e_{2k}, \quad (35.3.3)$$

تولید می‌کند.

طیف $\Lambda(H_{2k}) = \{\mu_j\}_{j=1}^{2k}$ را محاسبه می‌کنیم و

$$Re(\mu_1) \leq Re(\mu_2) \leq \dots \leq Re(\mu_l) \leq 0 \leq Re(\mu_{l+1}) \leq \dots \leq Re(\mu_{2k}).$$

را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $k_1 = \min\{k, l\}$. سورن سن^{۱۰} [۲۶] شرح می‌دهد که چگونه تجزیه (۳۵.۳.۳) بدون ارزیابی هیچ ضرب بردار-ماتریسی، ماتریس A ، تجزیه آرنولد زیر را می‌دهد:

$$A\hat{V}_{2k-k_1} = \hat{V}_{2k-k_1}\hat{H}_{2k-k_1} + \eta_{2k-k_1}v_{2k-k_1+1}e_{2k-k_1}^T, \quad (36.3.3)$$

با بردار آغازی

$$\hat{v}_1 = \hat{V}_{2k-k_1}e_1 = \frac{\prod_{j=1}^{k_1}(A - \mu_j I)v_1}{\|\prod_{j=1}^{k_1}(A - \mu_j I)v_1\|}. \quad (37.3.3)$$

به‌طوری‌که v_1 بردار اولیه در تجزیه آرنولد (۳۵.۳.۳) است. بنابراین بردار اولیه جدید (۳۷.۳.۳) با ضرب بردار اولیه اصلی v_1 در یک چندجمله‌ای از A به‌دست می‌آید. صفرهای این چندجمله‌ای مقادیر ریس با بخش حقیقی منفی است. اگر برد (V_{2k-k_1}) شامل یک تقریب خوب از زیرفضای ناوردای A وابسته به مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ نباشد آن‌گاه k مرحله از فرایند آرنولد

$$A\hat{V}_{2k} = \hat{V}_{2k}\hat{H}_{2k} + \eta_{2k}v_{2k+1}e_{2k}^T,$$

را به‌کار می‌بریم تا زمانی که یک تقریب دقیق از زیرفضای ناوردای A وابسته به مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ تعیین شده باشد.

مثال ۳.۳. مثال ۱.۳ را در نظر بگیرید.

حل. با توجه به طیف ماتریس A که به صورت $\Lambda = \{22/3934, -0/5105, -6/8566, -5/0263\}$ می‌باشد و تخصیص $\mu = -1$ به‌جای $\lambda_1 = 22/3934$ ، $k = 1$ پس $2k = 2$ است بنابراین روش IRA دو مرحله است که با در نظر گرفتن بردار اولیه

^{۱۰}D. C. Sorenson

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.6757 \\ -0.4679 \\ -0.2641 \\ -0.5047 \end{bmatrix},$$

به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 22.3934 \\ A \times v_1 &= \begin{bmatrix} -15.1322 \\ -10.4771 \\ -5.9133 \\ -11.3023 \end{bmatrix} \\ h &= h_{11} \times v_1 = \begin{bmatrix} -15.1322 \\ -10.4771 \\ -5.9133 \\ -11.3023 \end{bmatrix} \\ v_1^T A v_1 &= 22.3934 \\ \hat{v}_1 &= A v_1 - h_{11} v_1 = 0. \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $\hat{v}_1 = 0$ به دست آمد و با توجه به الگوریتم آرنولدی مرحله دوم الگوریتم را نمی‌توان به دست آورد، پس روش IRA برای این مثال به جواب نمی‌رسد.

□

فصل ۴

حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این فصل روشی جدید را برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی بیان می‌کنیم. در این روش ابتدا با استفاده از تجزیه شور جزیی، ماتریس حلقه باز سیستم را به ماتریس‌های کوچک‌تر تجزیه کرده و سپس با به‌کاربردن تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی به حل مساله می‌پردازیم. این روش در مقایسه با دو روش ذکر شده در فصل قبل دارای مزیت‌های زیر است:

- با تبدیل ماتریس بزرگ A به ماتریس‌های کوچک باعث سرعت بخشیدن به انجام محاسبات می‌شود.
- در دو روش قبل، B حتما باید به صورت بردار باشد اما در این روش می‌توانیم B را به یک ماتریس $n \times m$ گسترش دهیم.

قبل از بیان روش، ابتدا تجزیه شور جزیی^۱ و روش تبدیلات تشابهی^۲ را شرح می‌دهیم.

۱.۴ تجزیه شور

می‌توان نشان داد که هر ماتریس، مشابه یکانی با یک ماتریس بالامثلثی است [۲۲]. بدین منظور در قضیه زیر اثبات می‌کنیم هر بردار با نرم یک به وسیله $n - 1$ بردار افزوده که به شکل پایه‌ای یکامتعامل از $\mathbb{C}^n$ هستند، کامل می‌شود.

قضیه ۱.۴. برای هر ماتریس مربعی A ماتریس یکانی Q وجود دارد به طوری که

^۱partial Shur decomposition

^۲similarity transformation

$$Q^H A Q = R, \quad (1.1.4)$$

بالامثلشی است.

برهان. اثبات به وسیله استقرا روی n انجام می‌گیرد. برای $n = 1$ نتیجه برقرار است. لذا فرض کنید برای $n - 1$ نیز برقرار و A از اندازه n و بردار ویژه u و A وابسته به مقدار ویژه λ باشد. همچنین بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $\|u\|_2 = 1$. ابتدا بردار u را با یک مجموعه یکامتعامد کامل می‌کنیم، یعنی یک ماتریس $(n - 1) \times n$ پیدا می‌کنیم به طوری که ماتریس $n \times n$ ، $U = [u, V]$ ، یکانی باشد. آنگاه $AU = [\lambda u, AV]$ و بنابراین

$$U^H A U = \begin{bmatrix} u^H \\ V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda u \\ AV \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & u^H AV \\ 0 & V^H AV \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

است. حال با استفاده از فرض استقرا برای ماتریس $(n - 1) \times (n - 1)$ ، $B = V^H AV$ ، وجود دارد ماتریس یکانی $(n - 1) \times (n - 1)$ ، Q_1 ، به طوری که $Q_1^H B Q_1 = R_1$ بالامثلشی است. ماتریس $n \times n$

$$\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix},$$

را تعریف و طرفین (2.1.4) را از چپ در $\hat{Q}_1^H$ و از راست در $\hat{Q}_1$ ضرب می‌کنیم، آنگاه ماتریس به دست آمده بالامثلشی است و بنابراین نتایج برای ماتریس A با $Q = \hat{Q}_1$ که یک ماتریس یکانی است برقرار می‌باشد [۲۲]. $\square$

چون ماتریس R مثلثی و مشابه A است درایه‌های قطری آن برابر مقادیر ویژه A می‌باشد. توجه به این نکته ضروری است که برای هر $k \leq n$ زیرفضای تولید شده توسط k ستون اول Q تحت A ناورداست. در واقع، رابطه $AQ = QR$ نشان می‌دهد که برای $1 \leq j \leq k$ داریم:

$$Aq_j = \sum_{i=1}^j r_{ij} q_i.$$

اگر فرض کنیم $Q_k = [q_1, q_2, \dots, q_k]$ و اگر R_k زیرماتریس اصلی پیشرو از بُعد k ماتریس R باشد رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$AQ_k = Q_k R_k, \quad (3.1.4)$$

که تجزیه شور جزیی نامیده می‌شود. حالت ساده این تجزیه زمانی است که $k = 1$ باشد. که در آن q_1 یک بردار ویژه است. بردارهای q_i را بردارهای شور می‌نامند. بردارهای شور یکتا نیستند و وابسته اند، به‌ویژه به مرتبه‌ای که برای مقادیر ویژه انتخاب می‌شود.

مثال ۱.۴. تجزیه شور ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل. مقادیر ویژه و ماتریس بردارهای ویژه ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$\Lambda = \{2/4069 \pm 3/2110i, 0/1863\},$$

$$V = \begin{bmatrix} -0/9113 & -0/9113 & 0/6303 \\ -0/1282 - 0/2926i & -0/1282 + 0/2926i & -0/0513 \\ 0/1043 - 0/2381i & 0/1043 + 0/2381i & 0/7746 \end{bmatrix}.$$

آنگاه با توجه به رابطه $AQ = QR$ ماتریس‌های R و Q به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$Q = \begin{bmatrix} -0/9113 & -0/3714 - 0/0331i & 0/1749 + 0/0000i \\ -0/1282 - 0/2926i & -0/0416 + 0/7142i & -0/6214 - 0/0000i \\ 0/1043 - 0/2381i & 0/0512 + 0/5887i & 0/7637 - 0/0000i \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 2/4069 + 3/2110i & -0/2331 - 6/5796i & 5/7284 - 0/2330i \\ 0 & 2/4069 - 3/2110i & 2/3264 + 0/3644i \\ 0 & 0 & 0/1863 + 0/0000i \end{bmatrix}.$$

□

۲.۴ تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی

سیستم کنترل خطی $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ را با قانون کنترل $u(t) = -F^T x(t)$ در نظر بگیرید به‌طوری‌که زوج (A, B) کنترل پذیر باشد. فرض کنید T تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای R^n تعریف شده باشد و $x(t)$ عضوی دلخواه از فضای حالت سیستم باشد. فرض می‌کنیم حالت سیستم توسط P^{-1} تبدیل شود و بردار حالت در فضای تبدیل یافته $\hat{x}(t)$ باشد یعنی

$$\hat{x}(t) = P^{-1}x(t). \quad (۴.۲.۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴.۲.۴) در معادله حالت (۱.۱.۳) خواهیم داشت:

$$P\hat{x}(t) = AP\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (۵.۲.۴)$$

$$\hat{x}(t) = P^{-1}AP\hat{x}(t) + P^{-1}Bu(t),$$

در نتیجه

$$\hat{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad (۶.۲.۴)$$

که از قرار دادن $\hat{A} = P^{-1}AP$ و $\hat{B} = P^{-1}B$ به دست آمده است. ماتریس P را می‌توان از روی ماتریس کنترل‌پذیری به صورت منحصر به فرد تعیین نمود. در این صورت زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ را می‌توان با استفاده از زوج (B, A) و ماتریس P به دست آمده تعیین نمود. زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ را فرم استاندارد اشلون^۳ می‌نامیم. فرم استاندارد اشلون می‌تواند به طور عددی با انجام عملیات سطری مقدماتی روی زوج (B, A) و به دنبال آن عملیات تشابهی ستونی، تنها روی ماتریس A به دست آید. حال اگر عملیات ستونی مشابه (و یا سطری مشابه) بر روی ماتریس واحد $n \times n$ انجام شود ماتریس تبدیل P^{-1} به دست می‌آید.

$$L = [B \ A \ I] \equiv [\hat{B} \ \hat{A} \ P^{-1}].$$

عملیات تشابهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. ضرب یا تقسیم یک سطر از ماتریس L به کمیت اسکالر^۴ $k \neq 0$ و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A .

$$kR(j) \longrightarrow R(j) \quad \text{on } L \qquad \frac{1}{k}C(j) \longrightarrow C(j) \quad \text{on } A$$

۲.

$$R(i) + kR(j) \longrightarrow R(i) \quad \text{on } L \qquad C(j) - kC(i) \longrightarrow C(j) \quad \text{on } A$$

۳.

$$R(i) \longleftrightarrow R(j) \quad \text{on } L \qquad C(i) \longleftrightarrow C(j) \quad \text{on } A$$

^۳Standard Eshelon form

مثال ۲.۴. فرم استاندارد اشلون سیستم زیر را به دست آورید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل.

$$L = [B \quad A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(2) - R(1) \longrightarrow R(2) \quad \text{on } L \quad C(1) + C(2) \longrightarrow C(1) \quad \text{on } A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}R(2) \longleftrightarrow R(2) \quad \text{on } L \quad -2C(2) \longleftrightarrow C(2) \quad \text{on } A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(1) - 2R(2) \longrightarrow R(1) \quad \text{on } L \quad C(2) + 2C(1) \longrightarrow C(2) \quad \text{on } A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{3} \longleftrightarrow R(3) \quad \text{on } L \quad -3C(3) \longleftrightarrow C(3) \quad \text{on } A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & -6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 3 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R(1) - R(3) \longrightarrow R(1) \quad \text{on } L \quad C(3) + C(1) \longrightarrow C(3) \quad \text{on } A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و P^{-1} به‌فرم زیر هستند:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{16}{3} & -9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{4}{3} & 4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

۱.۲.۴ ناورداهای کرونگر

ماتریس کنترل‌پذیری

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (7.2.4)$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $b_1, \dots, b_m$ به‌ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = [b_1 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{n-1}b_1 \quad \dots \quad A^{n-1}b_m], \quad (8.2.4)$$

از آن جایی‌که سیستم کنترل‌پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های Q را طوری به‌دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2b_1 & \dots & A^2b_m \\ \vdots & & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}. \quad (9.2.4)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به‌طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبل وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همگی بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این حالت همگی بردارهای باقیمانده

غیر از n بردار به دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آنگاه P معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به دست می‌آید.

$$P = [b_1 \dots b_m \quad Ab_1 \dots Ab_m \dots A^{p_1-1}b_1 \dots A^{p_m-1}b_m]. \quad (10.2.4)$$

تعریف ۱.۴. در رابطه (۹.۲.۴) به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس B است عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq p_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11.2.4)$$

این p_i ها را ناوردهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقیمانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m, \quad (12.2.4)$$

از طرفی این تعداد برابر n است، در نتیجه

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n, \quad (13.2.4)$$

در کنترل بهینه به دنبال یافتن ماتریس F به گونه‌ای هستیم که در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر میل نماید (به حالت تعادل برسد). v را اندیس کنترل پذیری می‌نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$v = \max\{p_i \mid i = 1, \dots, m\}, \quad (14.2.4)$$

تعریف ۲.۴. ناوردهای کرونکر (B, A) را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین $\max$ و $\min$ آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این صورت ناوردهای کرونکر را نامنظم گویند.

۲.۲.۴ فرم همدم برداری

فرض کنید S تبدیل تشابهی خطی باشد و بردار حالت به فرم استاندارد اشلون باشد. در این مرحله این بردار توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌شود.

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}P^{-1}x(t),$$

$$\hat{x}(t) = S\tilde{x}(t). \quad (۱۵.۲.۴)$$

از آن جایی که در فضای استاندارد اشلون معادله حالت به فرم

$$\dot{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad (۱۶.۲.۴)$$

در نظر گرفته می‌شود با جایگذاری (۱۵.۲.۴) در معادله (۱۶.۲.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S\tilde{x}(t) &= \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \tilde{x}(t) &= S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\tilde{\dot{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad (۱۷.۲.۴)$$

که از قرار دادن $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}P^{-1}B$ و $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}P^{-1}APS$ به دست آمده است. به گونه‌ای که زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ به فرم همدم برداری^۴ زیر می‌باشد:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{\circ}^{n \times m} \\ \dots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_{\circ}^{m \times n} & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & \circ & (n-m) \times m \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = B_{\circ}^{-1}G_{\circ}. \quad (۱۸.۲.۴)$$

در حقیقت برای تبدیل زوج (B, A) به زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ می‌توان با استفاده از عملیات سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی نظیر ماتریس افزوده L را تشکیل داد و سپس $\tilde{L}$ و $\tilde{L}$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$L = [B \quad A \quad I] \longrightarrow \hat{L} = [\hat{B} \quad \hat{A} \quad P^{-1}] \longrightarrow \tilde{L} = [\tilde{B} \quad \tilde{A} \quad S^{-1}P^{-1}].$$

نمادگذاری: در سراسر این بحث $S^{-1}P^{-1}$ را با T^{-1} نشان خواهیم داد.

فرم $(\tilde{B}, \tilde{A})$ تعریف شده، زمانی است که ناورداهای کرونگر منظم باشند. در صورتی که ناورداهای نامنظم باشند ستون‌های I_{n-m} در بلوک پایین ماتریس $\tilde{A}$ پخش می‌شوند. در حالت کلی فرم همدم برداری به صورت زیر است:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{\circ} \\ \dots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \dots \\ G_1 \end{bmatrix}. \quad (۱۹.۲.۴)$$

^۴Companion vector form

که در آن B یک ماتریس بالامثلثی و معکوس پذیر است و G یک ماتریس دلخواه $m \times n$ است و G_1 یک ماتریس $n \times (n - m)$ است که دارای خصوصیات زیر می باشد:

• آخرین ستون G_1 برابر صفر است. (m ستون آخر)

• بقیه ستون های G_1 از ماتریس I_{n-m} است.

اگر $e_1, \dots, e_{n-m}$ به ترتیب ستون های اول تا $n - m$ ام ماتریس همانی باشند آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس شان در ستون های G_1 ظاهر می شوند، یعنی اگر $i < j$ باشد e_i در G_1 قبل از e_j قرار می گیرد.

مثال ۳.۴. فرم استاندارد اشلون مثال ۲.۴ را تبدیل به فرم همدم برداری نمایید.

حل. فرم استاندارد اشلون مثال ۲.۴ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

برای به دست آوردن فرم همدم برداری ابتدا اعمال ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سپس اعمال سطری مقدماتی نظیر روی کل $\hat{L}$ انجام می دهیم.

$$-\frac{4}{3}C(1) + C(2) \rightarrow C(2) \quad \text{on } \hat{A} \quad R(1) + \frac{4}{3}R(2) \rightarrow R(1) \quad \text{on } \hat{L}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$-4C(1) + C(3) \rightarrow C(3) \quad \text{on } \hat{A} \quad 4R(3) + R(1) \rightarrow R(1) \quad \text{on } \hat{L}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{16}{3} & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

می‌باشد.

□

۳.۴ مساله تصویر تخصیص مقادیر ویژه جزئی

سیستم کنترل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (۲۰.۳.۴)$$

با قانون کنترل $u(t) = -F^T x(t)$ ، که در آن A یک ماتریس $n \times n$ بزرگ و حتی‌الامکان اسپارس و B یک ماتریس $n \times m$ و u تابعی از t است. با جایگذاری قانون کنترل در رابطه (۲۰.۳.۴) داریم:

$$\dot{x}(t) = (A - BF^T)x(t), \quad (۲۱.۳.۴)$$

همان‌طور که در فصل قبل به آن اشاره شد، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای این سیستم تغییر دادن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز سیستم که باعث ناپایداری آن است با یک مجموعه دلخواه جدید و بدون تغییر گذاشتن باقیمانده طیف است.

فرض کنید Λ مجموعه مقادیر ویژه A را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه کرده‌ایم که در آن $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و $\Lambda_2 = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد. مجموعه $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را در نظر بگیرید. برای حل این مساله، ابتدا نیاز به یک پایه متعامد روی زیرفضای چپ ناوردای A وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ داریم. فرض کنید تجزیه شورتز A^T را داشته باشیم:

$$A^T Q = QR. \quad (۲۲.۳.۴)$$

به‌طوری‌که Q یک ماتریس $n \times k$ است که ستون‌هایش تشکیل یک پایه یکامتعامد از زیرفضای چپ وابسته به λ_i برای $i = 1, \dots, k$ را می‌دهد و R یک ماتریس شبه بالامثلثی $k \times k$ است. تعریف می‌کنیم

$$F = QS. \quad (۲۳.۳.۴)$$

با فرض $Z = A - BF^T$ ، ماتریس $Z^T Q$ را در نظر بگیرید:

$$Z^T Q = [A^T - FB^T]Q = QR - QSB_T Q \equiv Q[R - SE^T]$$

یا به طور معادل به صورت

$$Z^T Q = Q[R^T - ES^T]^T = QC_k^T, \quad (24.3.4)$$

نوشته می شود. معادله بالا بدین معنی است که انتخاب (23.3.4) زیرفضای تولید شده توسط Q را که تحت Z^T ناورد است می سازد. به علاوه چون Z^T مشابه با C_k است: $Z^T = QC_k Q^T$ ؛ بنابراین مقادیر ویژه ماتریس Z وابسته به این زیرفضای ناوردا، مقادیر ویژه ماتریس $C_k = R^T - ES^T$ می باشد. در ادامه شرح خواهیم داد که چگونه به وسیله یک انتخاب مناسب ماتریس S مقادیر ویژه این ماتریس کوچک (یعنی C_k) می تواند به μ_i تغییر پیدا کند.

فرض کنید S به گونه ای انتخاب شده باشد که

$$\Lambda\{C_k\} = \Lambda\{R^T - ES^T\} = \{\mu_i; i = 1, \dots, k\}, \quad (25.3.4)$$

است. مساله بالا را مساله تصویر می نامند. بنابراین با این انتخاب S ، مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ از ماتریس A به μ_i تغییر پیدا می کند. در قضیه زیر نشان می دهیم که بقیه مقادیر ویژه ماتریس A بدون تغییر باقی می ماند.

قضیه ۲.۴. فرض کنید S طوری انتخاب شده باشد که مساله تصویر $k \times k$ (25.3.4) را حل کند و F به صورت (23.3.4) تعریف شود. پس ماتریس $Z = A - BF^T$ دارای مقادیر ویژه $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ خواهد بود [21].

برهان. فرض کنید $w = [w_1, w_2, \dots, w_{n-k}]$ بردارهای شور باقیمانده λ_i برای $i > k$ باشد. به عبارت دیگر W یک پایه متعامد از متمم متعامد $\text{span}\{Q\}$ است به طوری که $X = [Q, W]$ یکانی است. با استفاده از (24.3.4) داریم:

$$Q^T Z^T Q = C_k^T; \quad W^T Z^T Q = 0,$$

با استفاده از (23.3.4) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} Q^T Z^T W &= Q^T (A^T - QSB^T)W = \\ Q^T A^T W - SB^T W &= Q^T A^T W + M^T; \\ W^T Z^T W &= W^T (A^T - QSB^T)W = \\ W^T A^T W - W^T QSB^T W &= W^T A^T W. \end{aligned}$$

بنابراین

$$X^T Z X = \begin{pmatrix} C_k & \\ W^T A Q + M & W^T A W \end{pmatrix}.$$

□

و اثبات فوراً نتیجه می شود.

در نتیجه مساله تبدیل به پیدا کردن ماتریس S می شود به طوری که سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ دارای مقادیر ویژه μ_i باشد. یک روش برای به دست آوردن ماتریس S که در بخش بعدی آن را شرح می دهیم استفاده از تبدیلات تشابهی در سیستم های کنترل خطی است.

۴.۴ محاسبه ماتریس پس خورد حالت S

در این بخش ماتریس پس خورد حالت S را برای سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ محاسبه می کنیم. سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ را در نظر بگیرید. فرض کنید زوج (R^T, E) کنترل پذیر باشد. ابتدا ماتریس افزوده $[R^T, E, I]$ را با استفاده از عملیات تشابهی اولیه تبدیل به فرم همدم برداری $[\tilde{R}^T, \tilde{E}, T^{-1}]$ می کنیم [۱۲]. بنابراین ماتریس های $\tilde{R}^T$ و $\tilde{E}$ به فرم زیر تبدیل می گردند:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{\circ m \times m} \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}^T = \begin{bmatrix} G_{\circ m \times k} \\ \vdots \\ I_{(k-m)}, \circ_{(k-m) \times m} \end{bmatrix}. \quad (۲۶.۴.۴)$$

حال ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می دهد به فرم زیر محاسبه می کنیم:

$$\tilde{S}_p = E_{\circ}^{-1} G_{\circ}, \quad (۲۷.۴.۴)$$

در نتیجه ماتریس پس خورد حالت اولیه برای زوج (R, E) به صورت زیر به دست می آید:

$$S_p^T = \tilde{S}_p T^{-1}, \quad (۲۸.۴.۴)$$

پس ماتریس حلقه بسته تبدیل یافته $\tilde{\Gamma}_k$ به شکل بلوکی زیر با مقادیر ویژه صفر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_k &= \tilde{R}^T - \tilde{E} \tilde{S}_p = \begin{bmatrix} G_{\circ m \times k} \\ \vdots \\ I_{(k-m)}, \circ_{(k-m) \times m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{\circ m \times m} \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} E_{\circ}^{-1} G_{\circ} \\ &= \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \vdots \\ I, \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{\circ} \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ_{m \times k} \\ \vdots \\ I_{(k-m)}, \circ_{(k-m) \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (۲۹.۴.۴)$$

می‌خواهیم ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست آوریم که ماتریس حلقه بسته در طیف موردنظر قرار گیرد، بدین منظور ماتریس قطری $D = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را با ماتریس $\tilde{\Gamma}_k$ جمع می‌کنیم، آنگاه $\tilde{R}^T - \tilde{E}\tilde{S}^T$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$V = (\tilde{R}^T - \tilde{E}\tilde{S}^T) + D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_m & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ I & & & & & \mu_k \end{bmatrix}. \quad (30.4.4)$$

حال اگر عملیات تشابهی ستونی

$$C(j) - \lambda_j(C_i) \longrightarrow C(j)$$

$$R(i) + \lambda_j(R_i) \longrightarrow R(i) \quad j = k, k-1, \dots, m+1, \quad i = j-m$$

را انجام دهیم آنگاه $\tilde{V}$ به فرم

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\lambda_m \times k} \\ \dots\dots\dots \\ I_{(k-m)} \quad \circ_{(k-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad (31.4.4)$$

تبدیل می‌شود. حال چون $\tilde{V}$ مشابه V است، بنابراین مقادیر ویژه $\tilde{V}$ نیز همان طیف $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ است. حال ماتریس پس‌خورد اولیه S را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم:

$$S^T = S_p^T - E_p^{-1} \tilde{G}_\lambda T^{-1}.$$

بنابراین با توجه به تعریف $F = QS$ ، ماتریس پس‌خورد حالت سیستم حلقه بسته اصلی محاسبه می‌شود.

تذکر ۱۰۴. روش فوق برای $m \leq k$ برقرار است.

الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی با استفاده از روش تجزیه شور جزیی و تبدیلات تشابهی به‌صورت زیر است:

۱۰.۴.۴ الگوریتم تخصیص مقادیر ویژه جزیی با استفاده از تبدیلات تشابهی

ورودی: ماتریس $A_{n \times n}$ و ماتریس $B_{n \times m}$. خروجی: ماتریس پس‌خورد حالت F به طوری که سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه موردنظر باشد.

۱. ابتدا طیف مقادیر ویژه جزیی $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ از ماتریس A و تجزیه شور جزیی ماتریس A^T محاسبه می‌کنیم.

۲. قرار می‌دهیم $E = Q^T B$.

۳. حال با استفاده از تبدیلات تشابهی و فرم همدم برداری S را به‌گونه‌ای تعیین می‌نماییم که مقادیر ویژه ماتریس $R^T - ES^T$ طیف $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ باشد.

۴. در نهایت قرار می‌دهیم $F = QS$.

۵.۴ مثال عددی

در این بخش دو مثال برای شرح الگوریتم فوق آورده شده است. در مثال اول B را به‌صورت بردار b در نظر گرفته‌ایم. رمضان و سعید [۱۹] نشان داده‌اند که وقتی B به صورت بردار باشد ماتریس F یک بردار حقیقی خواهد بود، اگر تمام $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ تحت مزدوج مختلط بسته باشند. در مثال دوم B را به صورت ماتریس در نظر گرفته‌ایم.

مثال ۴.۴. ماتریس $A_{10 \times 10}$ و بردار $b_{10 \times 1}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 & 3 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 9 & 0 & 8 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 9 & 1 & 3 & 5 & 9 & 0 & 9 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 6 & 5 & 3 & 5 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 1 & 4 & 4 & 9 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 & 7 & 1 & 0 & 6 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \\ 9 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید طیف مقادیر ویژه ماتریس A را به صورت $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ تجزیه کرده‌ایم که در آن

$$\Lambda_1 = \{42.6780, 6.2155 \pm 2.3210i, 1.0377\},$$

$$\Lambda_2 = \{-9.9970, -1.8860 \pm 5.3178i, -0.7961, -3.2908 \pm 0.6198i\},$$

می‌باشد. مجموعه $K = \{-1 \pm 0.3i, -2, -0.5\}$ را در نظر بگیرید. هدف پیدا کردن بردار پس‌خورد f است

به صورتی که طیف سیستم حلقه بسته $A - bf^T$ برابر $\Lambda = K \cup \Lambda_2$ باشد.
 حل. با استفاده از تجزیه شور جزئی ماتریس A^T به صورت $A^T Q = QR$ ماتریس های Q و R به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.3340 & 0.154 + 0.200i & 0.156 - 0.367i & -0.2850 + 0.0000i \\ -0.2365 & -0.5302 - 0.0045i & -0.3520 + 0.1509i & 0.1349 - 0.0000i \\ -0.2900 & 0.2405 - 0.1817i & 0.1099 + 0.2296i & 0.4351 + 0.0000i \\ -0.4092 & 0.0226 + 0.199i & 0.0203 - 0.384i & 0.2567 + 0.0000i \\ -0.2596 & -0.1439 - 0.3118i & -0.1795 + 0.5448i & -0.2211 - 0.0000i \\ -0.1932 & -0.3931 + 0.3364i & -0.1690 - 0.4394i & 0.3940 - 0.0000i \\ -0.2895 & 0.4175 + 0.0570i & 0.2916 - 0.2055i & 0.1148 + 0.0000i \\ -0.4197 & 0.1358 - 0.0666i & 0.0718 + 0.0713i & 0.1151 + 0.0000i \\ -0.3248 & -0.0252 + 0.1940i & 0.0359 - 0.3080i & -0.6080 + 0.0000i \\ -0.3327 & -0.0453 + 0.0099i & -0.0273 - 0.0037i & -0.2125 - 0.0000i \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 42.6780 & 3.9901 + 0.4471i & 2.7605 - 1.8054i & -1.1153 + 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & 6.2155 + 2.3210i & 1.2564 - 2.2303i & -0.5098 - 0.3435i \\ -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 6.2155 - 2.3210i & -0.2443 + 0.4194i \\ -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & 1.0377 + 0.0000i \end{bmatrix}.$$

و E نیز به فرم

$$E = Q^T b = \begin{bmatrix} -18.9270 \\ -4.1893 + 0.1373i \\ -2.8085 - 1.3567i \\ -6.2264 + 0.0000i \end{bmatrix},$$

به دست می آید. حال با استفاده از تبدیلات تشابهی بردار s به صورت زیر به دست می آید:

$$s^T = [-3.8364 \quad 1.7592 + 0.2154i \quad 1.2220 - 0.8256i \quad 0.0021],$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - bf^T$ را به طیف

$$\Lambda = \{-1 \pm 0.3i, -2, -0.5, -9.9970, -1.8860 \pm 5.3178i, -0.7961, -3.2908 \pm 0.6198i\},$$

می‌برد به فرم

$$f = Qs = \begin{bmatrix} ۱/۳۶۱۷ \\ -۰/۵۸۰۸ \\ ۱/۴۴۲۲ \\ ۱/۶۷۰۹ \\ ۰/۰۰۶۲ \\ ۰/۲۷۹۳ \\ ۲/۳۸۳۳ \\ ۱/۸۶۳۹ \\ ۱/۵۴۰۵ \\ ۱/۱۶۸۰ \end{bmatrix}$$

□

محاسبه می‌شود.

مثال ۵.۴. ماتریس‌های $A_{۱۰ \times ۱۰}$ و $B_{۱۰ \times ۲}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۴ & ۶ & ۳ & ۳ & ۶ & ۲ & ۶ & ۸ \\ ۳ & ۷ & ۶ & ۸ & ۵ & ۹ & ۰ & ۸ & ۱ & ۴ \\ ۶ & ۶ & ۲ & ۹ & ۱ & ۳ & ۵ & ۹ & ۰ & ۹ \\ ۶ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۸ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۵ & ۵ & ۴ & ۹ & ۱ & ۲ & ۵ & ۸ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۵ & ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۹ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۹ & ۶ & ۵ & ۳ & ۵ & ۷ & ۶ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۹ & ۷ & ۹ & ۱ & ۰ & ۲ & ۷ & ۷ \\ ۷ & ۱ & ۳ & ۶ & ۱ & ۴ & ۴ & ۹ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ & ۷ & ۱ & ۰ & ۶ & ۶ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۹ & ۱ \\ ۹ & ۷ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \\ ۰ & ۷ \\ ۴ & ۹ \\ ۸ & ۶ \\ ۸ & ۳ \\ ۰ & ۸ \\ ۹ & ۳ \end{bmatrix}.$$

فرض کنید طیف مقادیر ویژه ماتریس A را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه کرده‌ایم که در آن

$$\Lambda_1 = \{۴۲/۶۷۸۰, ۶/۲۱۵۵ \pm ۲/۳۲۱۰i, ۱/۰۳۷۷\},$$

$$\Lambda_2 = \{-۹/۹۹۷۰, -۱/۸۸۶۰ \pm ۵/۳۱۷۸i, -۰/۷۹۶۱, -۳/۲۹۰۸ \pm ۰/۶۱۹۸i\},$$

می‌باشد. مجموعه $K = \{-۱ \pm ۰/۳i, -۲, -۰/۵\}$ را در نظر بگیرید. هدف پیدا کردن ماتریس پس‌خورد F

است به صورتی که طیف سیستم حلقه بسته $A - BF^T$ برابر $\Lambda = K \cup \Lambda_2$ باشد.

حل. با استفاده از تجزیه شور جزئی ماتریس A^T به صورت $A^T Q = QR$ ماتریس‌های Q و R به صورت

زیر محاسبه می‌شوند:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.3340 & 0.154 + 0.200i & 0.156 - 0.367i & -0.2850 + 0.0000i \\ -0.2365 & -0.5302 - 0.0045i & -0.3520 + 0.1509i & 0.1349 - 0.0000i \\ -0.2900 & 0.2405 - 0.1817i & 0.1099 + 0.2296i & 0.4351 + 0.0000i \\ -0.4092 & 0.0226 + 0.0199i & 0.0203 - 0.384i & 0.2567 + 0.0000i \\ -0.2596 & -0.1439 - 0.3118i & -0.1795 + 0.5448i & -0.2211 - 0.0000i \\ -0.1932 & -0.3931 + 0.3364i & -0.1690 - 0.4394i & 0.3940 - 0.0000i \\ -0.2895 & 0.4175 + 0.0570i & 0.2916 - 0.2055i & 0.1148 + 0.0000i \\ -0.4197 & 0.1358 - 0.0666i & 0.0718 + 0.0713i & 0.1151 + 0.0000i \\ -0.3248 & -0.0252 + 0.1940i & 0.0359 - 0.3080i & -0.6080 + 0.0000i \\ -0.3327 & -0.0453 + 0.0099i & -0.0273 - 0.0037i & -0.2125 - 0.0000i \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 42.6780 & 3.9901 + 0.4471i & 2.7605 - 1.8054i & -1.1153 + 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & 6.2155 + 2.2210i & 1.2564 - 2.2303i & -0.5098 - 0.3435i \\ -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 6.2155 - 2.2210i & -0.2443 + 0.4194i \\ -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & 1.0377 + 0.0000i \end{bmatrix}.$$

و E نیز به فرم

$$E = Q^T B = \begin{bmatrix} -16.3835 & -16.4532 \\ -1.6390 - 1.1937i & -4.3059 - 1.7889i \\ -0.7612 + 1.4930i & -2.3642 + 1.7369i \\ 1.7919 + 0.0000i & 2.1622 + 0.0000i \end{bmatrix},$$

به دست می آید. حال با استفاده از تبدیلات تشابهی ماتریس S به صورت زیر به دست می آید:

$$S^T = \begin{bmatrix} -0.9028 + 0.0286i & 4.1513 + 0.8729i & 2.8116 - 2.7172i & -1.0928 + 0.1609i \\ -2.0245 + 0.0052i & -3.6296 - 0.7430i & -2.7292 + 1.9980i & 0.4944 + 0.0728i \end{bmatrix},$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - BF^T$ را به طیف

$$\Lambda = \{-1 \pm 0.3i, -2, -0.5, -9.9970, -1.8860 \pm 5.3178i, -0.7961, -3.2908 \pm 0.6198i\},$$

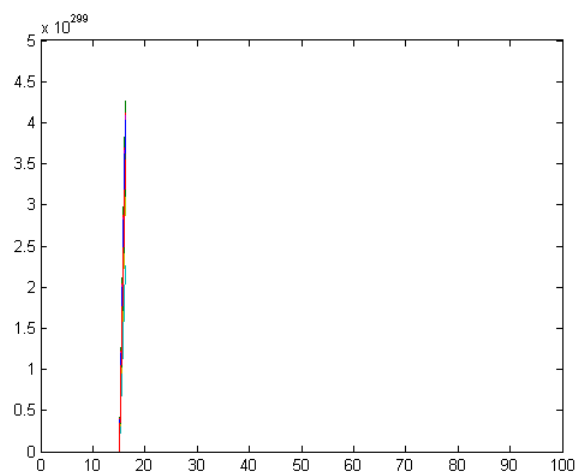
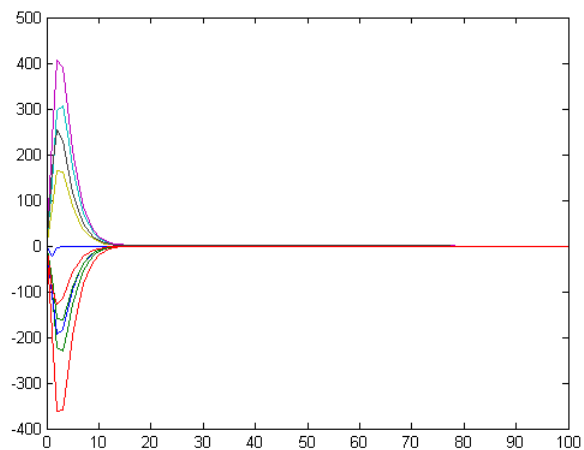
می برد به فرم

$$F = QS = \begin{bmatrix} 0.8380 + 0.0644i & 0.3486 + 0.301i \\ -3.5386 - 0.1031i & 3.7355 - 0.0946i \\ 0.3113 - 0.0815i & 0.2230 - 0.0385i \\ 0.3613 - 0.0195i & 0.7265 - 0.0078i \\ -2.3784 - 0.0819i & 2.7486 - 0.0859i \\ -0.8754 - 0.0127i & 1.3459 - 0.0039i \\ 3.2968 + 0.0766i & -2.1212 + 0.0746i \\ 0.7668 - 0.0060i & 0.4098 - 0.0016i \\ 1.9602 + 0.1661i & -0.4090 + 0.0919i \\ 0.2864 + 0.0395i & 0.7928 + 0.0125i \end{bmatrix}$$

□

محاسبه می‌شود.

نمودارهای پایداری مثال فوق به صورت زیر است:

شکل ۱.۴: نمودار مربوط به ورودی $u = 0$ شکل ۲.۴: نمودار مربوط به ورودی $u = -F^T x(t)$

فصل ۵

محاسبه مینیمم نورم ماتریس پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه جزئی

مینیمم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت در چند دهه اخیر مورد توجه نویسندگان بسیاری قرار گرفته است [۱]. واضح است که برای بهبود واکنش گذرای سیستم حلقه بسته و کاهش هزینه ها در سیستم های کنترل، ماتریس پس خورد حالت باید دارای نورم بسیار پایین باشد، به عبارت دیگر باید مینیمم نورم شود. روش های عددی مختلفی از جمله، استفاده از ساختارهای دوتایی [۱۶]^۱، روش کنترل مُدال [۲۳]^۲ و ... ارایه شده است. در این فصل، با استفاده از روش شرح داده شده در فصل قبل و کاربرد گراف انتقال حالت، روش جدیدی را جهت مینیمم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت بیان می کنیم. قبل از بیان روش ابتدا تعاریفی از ماتریس و گراف و نورم ماتریس را شرح می دهیم.

۱.۵ نورم ماتریس

تعریف ۱.۵. نورم ماتریس^۳ نگاشت $R^{m \times n} \rightarrow R$: $\|\cdot\|$ است به طوری که:

$$۱. \quad \|A\| \geq ۰, \text{ به ازای } A \in R^{m \times n} \text{ و } \|A\| = ۰ \text{ اگر و فقط اگر } A = ۰;$$

$$۲. \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \text{ به ازای } \alpha \in R \text{ و } A \in R^{m \times n} \text{ (خاصیت همگنی);}$$

$$۳. \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ به ازای } A, B \in R^{m \times n} \text{ (نامساوی مثلثی) [۱۸].}$$

^۱Utilizing the diadic structure

^۲Technique of modal control

^۳Matrix norm

تعریف ۲.۵. نورم

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2} = \text{tr}(AA^H), \quad (1.1.5)$$

که یک نورم ماتریسی است، نورم فروبینیوس^۴ (یا نورم اقلیدسی^۵ در $C^{n \times n}$) نامیده می‌شود [۱۸].

قضیه ۱.۵. فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نورم برداری باشد، تابع

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad (2.1.5)$$

یک نورم ماتریسی است که نورم ماتریسی القایی^۶ (نورم ماتریسی طبیعی^۷) نامیده می‌شود [۱۸].

برهان. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که (۲.۱.۵) هم ارز

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

است. در واقع، برای هر $x \neq 0$ بردار واحد $u = \frac{x}{\|x\|}$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که (۲.۱.۵) به‌صورت

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \|Aw\|, \quad \|w\|=1. \quad (3.1.5)$$

باشد. حال نشان می‌دهیم (۲.۱.۵) (یا به‌طور معادل (۳.۱.۵)) یک نورم است. با استفاده از تعریف ۱.۵ داریم:

$$1. \text{ اگر } \|Ax\| \geq 0, \text{ آنگاه نتیجه می‌شود که } \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \text{ به‌علاوه}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \iff \|Ax\| = 0, \quad x \neq 0$$

$$\text{و } Ax = 0 \text{ برای } x \neq 0 \text{ اگر و تنها اگر } A = 0; \text{ بنابراین } \|A\| = 0 \iff A = 0.$$

۲. اسکالر α را در نظر می‌گیریم. پس

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \|A\|.$$

^۴Frobenius norm

^۵Euclidean norm

^۶Induced matrix norm

^۷Natural matrix norm

۳. سرانجام، خاصیت نامساوی مثلثی برقرار است. زیرا، با استفاده از تعریف سوپریمم، اگر $x \neq 0$ آنگاه

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

بنابراین، با فرض x با نورم یک، به دست می آوریم

$$\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

در نتیجه

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

تعریف ۳.۵. نورم یک^۸ و نورم بینهایت^۹ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m \|a_{ij}\|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|. \quad (4.1.5)$$

و به ترتیب نورم مجموع ستونی^{۱۰} و نورم مجموع سطری^{۱۱} نیز نامیده می شوند.

به علاوه داریم: $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ و اگر A خودمزدوج یا متقارن حقیقی باشد $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.

۲.۵ ماتریس و گراف

برای گراف G با n راس یک ماتریس $n \times n$ به صورت زیر وابسته می کنیم:

رئوس گراف G را با e_1 و $\dots$ و e_n نمادگذاری می کنیم و ماتریس G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر یالی از e_i به e_j وجود داشته باشد قرار می دهیم $g_{ij} = 1$ و اگر یالی وجود نداشته باشد $g_{ij} = 0$ ، بدین

ترتیب برای یک گراف ماتریس G را که درایه های آن صفر و یک هستند مربوط می کنیم. به طور مشابه می توان

برای یک ماتریس $G_{n \times n}$ که درایه های آن صفر و یک می باشند گرافی با n راس متناظر ساخت.

۱.۲.۵ گراف مربوط به ماتریس $A - BF^T$

با فرض این که زوج (B, A) به فرم همدم برداری است می توان به آسانی ماتریس پس خورد F را به دست آورد.

لذا ملاحظه می شود که درایه های ماتریس $A - BF^T$ صفر یا یک هستند. پس می توان گرافی را برای آن متناظر

ساخت که رئوس آن را بردارهای پایه استاندارد R^n به انضمام بردار صفر تشکیل می دهد.

^۸1-norm

^۹Infty norm

^{۱۰}Column sum norm

^{۱۱}Row sum norm

ابتدا برای رسم گراف ماتریس حلقه بسته $\Gamma_p = A - BF^T$ رئوس ورودی e_1 و ... و e_m را در نظر می‌گیریم، سپس یالی از e_i به e_j در نظر می‌گیریم اگر بردار e_i توسط تبدیل Γ_p به بردار e_j نگاشته شود، یعنی

$$\Gamma_p e_i = e_j,$$

بین راس e_i و صفر یالی فرض می‌کنیم اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\Gamma_p e_i = 0.$$

گرافی که به این صورت برای Γ_p به دست می‌آید را با g_p نمایش می‌دهیم. از آن جایی که Γ_p پوچ توان است می‌توان نشان داد که از هر راس غیر صفر g_p مسیری به صفر وجود دارد و علاوه بر این در g_p هیچ حلقه و دوری وجود ندارد. می‌توان برای هر e_i عدد L_i (طول مسیر) را مربوط ساخت که L_i ماکزیمم فاصله راس e_i با صفر است. و می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

۱. هر عدد L_i عدد صحیحی است که در رابطه $1 \leq L_i \leq n$ صدق می‌کند.

۲. اندیس پوچ توانی Γ_p برابر است با

$$v = \max(L_1, \dots, L_n).$$

۳. در گراف g_p به هیچ یک از رئوس e_1 و ... و e_m یالی منتهی نمی‌شود.

۴. اندیس پوچ توانی Γ_p برابر است با

$$v = \max(L_1, \dots, L_n).$$

۲.۲.۵ استفاده از نظریه گراف برای تعیین پارامترهای خطی

جهت تعیین محل پارامترهای خطی در معادله پس‌خورد حالت، ماتریس حلقه بسته را در فضای همدم برداری برای مقادیر ویژه صفر در نظر می‌گیریم. ابتدا

$$\tilde{\Gamma}_p = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}^T,$$

را تشکیل می‌دهیم. بردار اولیه دلخواه x_0 یا $\tilde{x}_0$ می‌تواند یکی از بردارهای $e_1, \dots, e_m$ باشد. اگر سیستم گسسته فرض شود داریم:

$$\tilde{x}(1) = \tilde{\Gamma} \tilde{x}(0) = \tilde{\Gamma}_p \{e_1, \dots, e_n\}.$$

اثر $\tilde{\Gamma}_p$ بر هر یک از بردارهای یکه، بردار یکه دیگری می‌باشد. اگر ناوردهای کرونکر منظم باشند می‌توان نوشت:

$$\tilde{\Gamma}_p e_i = e_{i+m},$$

اگر $n < i + m$ باشد:

$$\tilde{\Gamma}_p e_i = 0,$$

این اثر موسوم به انتقال حالت ^{۱۲} و گراف آن را گراف انتقال حالت ^{۱۳} می‌نامیم. پس گراف مربوط به $\tilde{\Gamma}_p$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

در نظر می‌گیریم: $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ و ورودی‌های آن را e_1 و $\dots$ و e_m . سپس یالی از e_i به e_j در نظر می‌گیریم اگر

$$\tilde{\Gamma}_p e_i = e_j \quad (i < j),$$

همچنین بین راس e_i و صفر یالی فرض می‌کنیم اگر و فقط اگر

$$\tilde{\Gamma}_p e_i = 0.$$

گرافی که به دست می‌آید شامل هیچ حلقه و دوری نیست و برگشت از روی یال امکان ندارد و از هر راس غیر صفر گراف مسیری به صفر وجود دارد که اندیس پوچ توانی $\tilde{\Gamma}_p$ بزرگ‌ترین طول مسیر از یک راس ورودی تا راس صفر است. حال ماتریس G_α را با بعد $m \times n$ با درایه‌های صفر در نظر می‌گیریم، سپس برای یافتن محل پارامترها یال‌هایی از هر راس به رئوس یا گره‌های دیگر وصل می‌کنیم به گونه‌ای که

الف- ابتدای هر یال یکی از ورودی‌های گراف باشد و انتهای آن ورودی یا گره‌های دیگر گراف باشد.

ب- ایجاد دور ننماید.

ج- روی هم قرار نگیرند.

د- اگر از رئوسی که اندیس آن‌ها کمتر از n است یالی به رئوس دیگر وصل گردد، آن‌گاه این یال‌های اضافی بیان‌گر پارامترهای خطی می‌باشد.

^{۱۲}Transition graph

^{۱۳}State transition graph

بنابراین هنگامی که از e_i به e_j یالی اضافه می کنیم درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس G_α را g_{ij} قرار می دهیم. از آنجایی که صورت های متفاوت و یال های متفاوتی را می توان به گراف افزود، G_α های متفاوتی به دست می آید که پارامترهای اضافه شده به G_α ، پارامترهای مؤثرند و بقیه درایه ها صفر باقی می مانند. قابل توجه است در حالتی که بخواهیم اندیس پوچ توانی تغییر نکند باید دقت داشت در اثر اضافه شدن یالی $\max L_i (i = 1, \dots, m)$ تغییر نکند.

۳.۵ پارامتری سازی ماتریس پس خورد حالت

در این بخش ماتریس پس خورد حالت پارامتری را به دست می آوریم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته $A - BF^T$ اختصاص دهد. در فصل قبل ماتریس پس خورد F را محاسبه کردیم تا بخشی از طیف ماتریس حلقه بسته را به یک طیف از پیش تعریف شده تغییر دهد. در واقع با تعریف $F = QS$ و با استفاده از تجزیه شور جزیی برای ماتریس A^T به فرم $A^T Q = QR$ و تبدیل سیستم حلقه بسته $A - BF^T$ به سیستم جدید $R^T - ES^T$ و با استفاده از تبدیلات تشابهی برای این سیستم جدید ماتریس پس خورد حالت F محاسبه شد. حال سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ را در نظر بگیرید. با توجه به روند محاسبات در فصل قبل، ماتریس S^T را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$S^T = S_p^T - B_*^{-1} \tilde{G}_\lambda T^{-1}.$$

که S_p ماتریس پس خورد حالتی است که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می دهد و $S_\lambda = B_*^{-1} \tilde{G}_\lambda$ ماتریس پس خورد حالتی است که مقادیر ویژه دلخواه را به سیستم اختصاص می دهد. در نتیجه ماتریس پس خورد حالت پارامتری را به صورت

$$K^T = S^T - F_\alpha, \quad (5.3.5)$$

تعریف می کنیم که در آن $F_\alpha = B_*^{-1} G_\alpha T^{-1}$ و G_α یک ماتریس $k \times m$ است که درایه های آن تنها پارامترهای آزاد هستند. یک راه ساده برای تعیین این پارامترها استفاده از گراف انتقال حالت است.

با توجه به توضیحات گفته شده در بخش قبل، برای رسم گراف انتقال حالت سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ ابتدا بردارهای $\{e_1, \dots, e_m\}$ را به عنوان ورودی ها در نظر می گیریم. سپس گراف انتقال حالت ماتریس $\tilde{\Gamma}$ را رسم می کنیم [۱۵]. زیرماتریس G_α را با درایه های صفر تعریف می کنیم. پارامترهای آزاد خطی، یال های اضافه شده به این گراف هستند که از رئوسی با اندیس کمتر از n به رئوس دیگر وصل شده اند، بنابراین هنگامی که از e_i به e_j یالی اضافه می کنیم درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس G_α را g_{ij} قرار می دهیم، در این صورت

واضح است که G_α منحصر به فرد نمی باشد. بدین ترتیب با توجه به رابطه (۵.۳.۵) ماتریس پس خورد حالت پارامتری برای سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ به دست می آید. حال با تعریف $K_p = QK$ ماتریس پس خورد حالت پارامتری برای سیستم حلقه بسته $A - BF^T$ محاسبه می شود.

مثال ۱.۵. مثال ۵.۴ را در نظر بگیرید.

حل. با محاسبات انجام شده در فصل قبل ماتریس های F و S به فرم زیر به دست آمدند:

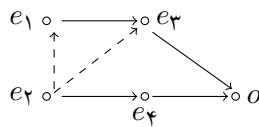
$$S = \begin{bmatrix} -0.9028 + 0.0286i & 4.1513 + 0.8729i & 2.8116 - 2.7172i & -1.0928 + 0.1609i \\ -2.0245 + 0.0052i & -3.6296 - 0.7430i & -2.7292 + 1.9980i & 0.4944 + 0.0728i \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.8380 + 0.0644i & 0.3486 + 0.0301i \\ -3.5386 - 0.1031i & 3.7355 - 0.0946i \\ 0.3113 - 0.0815i & 0.2230 - 0.0385i \\ 0.3613 - 0.0195i & 0.7265 - 0.0078i \\ -2.3784 - 0.0819i & 2.7486 - 0.0859i \\ -0.8754 - 0.0127i & 1.3459 - 0.0039i \\ 3.2968 + 0.0766i & -2.1212 + 0.0746i \\ 0.7668 - 0.0060i & 0.4098 - 0.0016i \\ 1.9602 + 0.1661i & -0.4090 + 0.0919i \\ 0.2864 + 0.0395i & 0.7928 + 0.0125i \end{bmatrix}.$$

با توجه به رابطه $\tilde{\Gamma} = \tilde{R}^T - \tilde{E}\tilde{S}$ ماتریس $\tilde{\Gamma}$ به فرم زیر است:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و بنابراین گراف انتقال حالت سیستم به شکل



خواهد بود. پس ماتریس های G و F_α^T به صورت زیر به دست می آیند:

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad F_\alpha^T = \begin{bmatrix} 0 & 0.0772g_{21} + 0.009g_{23} \\ 0 & -0.2807 - 0.1618ig_{21} + 0.1110 - 0.0438ig_{23} \\ 0 & -0.2295 + 0.3384ig_{21} - 0.0046 + 0.681ig_{23} \\ 0 & 0.1832g_{21} + 0.1765g_{23} \end{bmatrix}$$

حال با فرض $g_{21} = 1$ و $g_{23} = 1$ و با توجه به تعریف $K_p = QK$ ماتریس پس خورد حالت که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می دهد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.8380 + 0.0644i & 0.1905 + 0.0301i \\ -3.5386 - 0.1031i & 4.0512 - 0.0946i \\ 0.3113 - 0.0815i & 0.3947 - 0.0385i \\ 0.3613 - 0.0195i & 0.7531 - 0.0078i \\ -2.3784 - 0.0819i & 3.0130 - 0.0859i \\ -0.8754 - 0.0127i & 1.3687 - 0.0039i \\ 3.2968 + 0.0766i & -2.3809 + 0.0746i \\ 0.7668 - 0.0060i & 0.4043 - 0.0016i \\ 1.9602 + 0.1661i & -0.8224 + 0.0919i \\ 0.2864 + 0.0395i & 0.7027 + 0.0125i \end{bmatrix}.$$

□

۴.۵ محاسبه مینیمم نورم ماتریس پس خورد حالت

در این قسمت مینیمم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت را شرح می دهیم. در مواردی ممکن است مینیمم سازی اندیس کنترل پذیری سیستم به اندازهی مینیمم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت اهمیت نداشته باشد. در این صورت می توان اندیس کنترل پذیری را بیش تر کرده و بدین ترتیب ماتریس پس خورد حالت را با پارامترهای بیش تری محاسبه کرد که افزایش پارامترها در مینیمم سازی نورم ماتریس پس خورد حالت مفید می باشد. در واقع اگر اندیس کنترل پذیری (B, A) برابر v باشد، آنگاه جواب های معادله $(A - BX^T)^v$ که $(v \leq n)$ زیرمجموعه ای از جواب های معادله $(A - BX^T)^w$ که $(v \leq w \leq n)$ است، در نتیجه خواهیم داشت

$$\min\{\|X\|: (A - BX^T)^w = 0\} \leq \min\{\|X\|: (A - BX^T)^v = 0\}. \quad (6.4.5)$$

مثال ۲.۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید

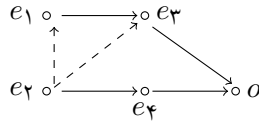
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

حل.

$$G_{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = B_{\circ}^{-1} G_{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و نورم ماتریس $\tilde{F}$ برابر $\sqrt{9}$ است. گراف انتقال حالت برای این سیستم به شکل



می باشد و ماتریس های پارامتری G_{α_1} و G_{α_2} به فرم

$$G_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

هستند، ابتدا ماتریس G_{α_1} را در نظر می گیریم

$$K = F - B_{\circ}^{-1} G_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 + g_{21} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

با فرض $g_{21} = -1$ داریم

$$K_{new} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

و نورم ماتریس K_{new} برابر $\sqrt{8}$ می باشد. حال ماتریس G_{α_2} را در نظر می گیریم

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 + g_{21} & 1 & 1 + g_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

در نتیجه با فرض $g_{21} = -1$ و $g_{23} = -1$ نورم ماتریس k برابر $\sqrt{7}$ خواهد بود. بنابراین همان طور که ملاحظه شد افزایش پارامترها باعث کاهش نورم ماتریس پس خورد حالت می شود. $\square$

یک الگوریتم جهت مینیم سازی نورم کنترل کننده ی پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه جزیی به صورت زیر می باشد [۱۵]:

در بخش قبل ماتریس پس خورد حالت پارامتری که مقادیر ویژه جزیی مورد نظر را به سیستم اختصاص می دهد، به صورت زیر محاسبه کردیم

$$K^T = S^T - F_\alpha, \quad (7.4.5)$$

که در آن S ماتریس پس خورد حالتی است که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ اختصاص می دهد و F_α نیز ماتریس پس خورد پارامتری است که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می دهد. هدف پیدا کردن ماتریس پس خورد حالتی است که

$$j = \|K\|_F^2 = \text{trac}(K.K^T),$$

مینیمم شود. یک روش برای به دست آوردن چنین ماتریسی تشکیل یک زیرماتریس از G_α است که شامل درایه های غیر صفر می باشد [۱۵] و آن را با α و درایه های این زیرماتریس را نیز با α_{sr} نمایش می دهیم. بدیهی است در حاصل ضرب $E_\alpha^{-1} G_\alpha T^{-1}$ ستون s ام از ماتریس E_α^{-1} و سطر r ام از ماتریس T^{-1} درایه غیر صفر تولید می کنند که با عناصر متناظر s_{ij} برای $(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k)$ جمع می شوند.

برای سهولت ستون های E_α^{-1} را که با سطرهای α_{sr} سازگارند در زیرماتریس V و سطرهایی از ماتریس T^{-1} را که با ستون های α_{sr} سازگارند را در زیرماتریس W قرار می دهیم. بنابراین ماتریس پس خورد پارامتری خطی موثر عبارت است از

$$K^T = S^T - V\alpha W, \quad (8.4.5)$$

که به صورت مولفه ای

$$(k_{ij}) = (s_{ij}) - (v_{is})(\alpha_{sr})(w_{rj}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, k \quad s \leq i, \quad r \leq j \quad (9.4.5)$$

نشان می دهیم. داریم

$$\|K^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k ((s_{ij}) - (v_{is})(\alpha_{sr})(w_{rj}))^2. \quad (10.4.5)$$

جهت مینیمم نورم باید داشته باشیم

$$\frac{\partial \|K^T\|_F^2}{\partial \alpha_{sr}} = 0, \quad (11.4.5)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۰.۴.۵) نسبت به هر α_{sr} داریم

$$2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k [-v_{si}((s_{ij}) - (v_{is})(\alpha_{sr})(w_{rj})) w_{jr}] = 0, \quad (12.4.5)$$

در نتیجه

$$-v_{si}s_{ij}w_{rj} + v_{si}v_{is}\alpha_{sr}w_{rj}w_{jr} = 0.$$

با نمادگذاری $C = V^T S^T W^T$ و $Q = WW^T = w_{rj}w_{jr}$ و $P = V^T V = v_{si}v_{is}$ داریم

$$-C + P\alpha Q = 0,$$

در نتیجه

$$P\alpha Q = C,$$

و در نهایت

$$\alpha = P^{-1} C Q^{-1},$$

خواهد بود. بنابراین درایه‌های ناصفر ماتریس پارامتری G_α به دست می‌آیند به طوری که ماتریس پس خورد حالت را مینیمم می‌کنند. در نتیجه ماتریس $K^T = S^T - F_\alpha$ برای سیستم حلقه بسته $R^T - ES^T$ با نورم کمینه محاسبه می‌شود.

تعریف می‌کنیم

$$K_m = QK, \quad (13.4.5)$$

در نتیجه ماتریس پس خورد حالت پارامتری که مقادیر ویژه جزیی را به سیستم حلقه بسته $A - BF^T$ اختصاص می‌دهد و دارای نورم کمینه است، با توجه به تعریف (۱۳.۴.۵) به دست می‌آید.

۵.۵ الگوریتم نورم کمینه ماتریس پس خورد حالت

ورودی: ماتریس‌های A, B ، و ماتریس پس خورد حالت اولیه F و E_0^{-1} و T^{-1} .

مرحله ۱: به دست آوردن ماتریس α که درایه‌هایش همان درایه‌های غیر صفر ماتریس پارامتری G_α است. ستون‌های ماتریس E_0^{-1} که متناظر با سطرهای α_{sr} در زیرماتریس V و سطرهای ماتریس T^{-1} که متناظر با ستون‌های α_{sr} در زیرماتریس W ذخیره می‌کنیم.

مرحله ۲: ماتریس‌های $Q = WW^T$ و $P = V^T V$ و $C = V^T S^T W^T$ را محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۳: ماتریس

$$\alpha = P^{-1} C Q^{-1}, \quad (۱۴.۵.۵)$$

را محاسبه می‌کنیم، در نتیجه درایه‌های پارامتری ماتریس G_α به دست می‌آیند.

مرحله ۴: ماتریس

$$F_\alpha = E_\alpha^{-1} G_\alpha T^{-1}, \quad (۱۵.۵.۵)$$

را به دست می‌آوریم.

مرحله ۵: خروجی ماتریس $K^T = S^T - F_\alpha$ برای سیستم $R^T - ES^T$ و $K_m = QK$ برای سیستم اصلی $A - BF^T$ است.

مثال ۳.۵. مثال ۱.۵ را در نظر بگیرید.

حل. نورم فروبینیوس ماتریس F برابر $۸/۰۵۲۰$ است. حال برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت با نورم کمینه ماتریس G_α را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ g_{21} & \circ & g_{23} & \circ \end{bmatrix},$$

بنابراین طبق الگوریتم، زیرماتریس α به صورت $\alpha = [g_{21} \ g_{23}]$ و $s = ۲$ و $r = ۱, ۳$ خواهد بود. در نتیجه ماتریس‌های V و W که به ترتیب متناظر ستون دوم E_α^{-1} و سطرهای اول و سوم T^{-1} هستند به صورت زیر می‌باشند

$$V = \begin{bmatrix} \circ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} ۰/۰۷۷۲ & -۰/۲۸۰۷ - ۰/۱۶۱۸i & -۰/۲۲۹۵ + ۰/۳۳۸۴i & ۰/۱۸۳۲ \\ ۰/۰۰۹۰ & ۰/۰۱۱۰ - ۰/۰۴۳۸i & -۰/۰۰۴۶ + ۰/۰۶۸۱i & ۰/۱۷۶۵ \end{bmatrix}.$$

حال ماتریس‌های P و Q و C به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$P = V^T V = ۱, \quad Q = W W^T = \begin{bmatrix} ۰/۳۱۱۷ & ۰/۰۶۱۱ \\ ۰/۰۶۱۱ & ۰/۰۳۷۹ \end{bmatrix},$$

$$C = V^T S W^T = [۲/۳۷۵۸ + ۰/۱۰۰۰i \quad ۰/۲۱۰۳ + ۰/۰۲۲۴i].$$

در نتیجه

$$\alpha = P^{-1} C Q^{-1} = [-۹/۵۵۵۸ - ۰/۲۹۹۸i \quad ۹/۸۵۶۱ - ۰/۱۰۸۲i]$$

پس ماتریس پس خورد حالت K برای سیستم $R^T - ES^T$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$K = \begin{bmatrix} -0.9028 + 0.0286i & 4.1513 + 0.8729i & 2.8116 - 2.7172i & -1.0928 + 0.1609i \\ -2.6731 - 0.0189i & -0.8921 + 0.4542i & -0.4726 - 0.4958i & 0.4839 - 0.0012i \end{bmatrix},$$

با نورم $6/6461$ و با توجه به تعریف، ماتریس پس خورد حالت با نورم کمینه $6/6461$ برای سیستم $A - BF^T$ به صورت

$$K_m = \begin{bmatrix} 0.8380 + 0.0644i & 0.7612 - 0.0065i \\ -3.5386 - 0.1031i & 1.2600 - 0.0053i \\ 0.3113 - 0.0815i & 0.5229 - 0.0062i \\ 0.3613 - 0.0195i & 1.2164 - 0.0072i \\ -2.3784 - 0.0819i & 0.3885 - 0.0082i \\ -0.8754 - 0.0127i & 1.5083 - 0.0008i \\ 3.2968 + 0.0766i & 0.4469 - 0.0041i \\ 0.7668 - 0.0060i & 0.9570 - 0.0082i \\ 1.9602 + 0.1661i & 0.8205 - 0.0052i \\ 0.2864 + 0.0395i & 0.8462 - 0.0065i \end{bmatrix},$$

□

نتیجه می شود.

فصل ۶

مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی برای سیستم‌های خطی دوبعدی

در این فصل، ابتدا سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر^۱ معرفی می‌شود، سپس با استفاده از این ویژگی که پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی رفتاری مشابه با پایداری سیستم‌های خطی یک‌بعدی هم ارزش را دارد، پایداری این سیستم‌ها را بررسی می‌کنیم. با توجه به این‌که برای پایداری یک سیستم گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار بگیرد، از این‌رو مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای این سیستم‌ها به‌کار برده و با روش شرح داده شده در فصل‌های پیشین به حل این مساله برای سیستم‌های دوبعدی مدل راسر می‌پردازیم.

۱.۶ سیستم‌های خطی دوبعدی مدل راسر

سیستم‌های خطی دوبعدی به دلایل زیادی از جمله راندمان بالا، پردازش و تحلیل بهتر داده‌ها، قابلیت اجرای عملگرهای غیرخطی، قابلیت بالای انعطاف‌پذیری مورد توجه قرار گرفته‌اند. تئوری تحلیل و طراحی سیستم‌های دوبعدی در سال‌های اخیر بسیار گسترش یافته است و مورد استفاده‌های فراوانی قرار گرفته است. از زمانی‌که این سیستم‌ها معرفی شدند دانشمندان بسیاری مدل‌های متنوعی را برای این سیستم‌ها ارائه دادند که معروف‌ترین این مدل‌ها عبارتند از: مدل راسر^۲[۲۰]، فورناسا-مارکسینی^۳[۱۳] و غیره. لازم به ذکر است مدل راسر به عنوان بهترین و کلی‌ترین مدل معرفی شده لذا مدل راسر را به عنوان مبنای کار خود در این فصل انتخاب کردیم.

با توجه به اهمیت پایداری در سیستم‌های کنترل خطی و اینکه یک سیستم ناپایدار عملاً ارزشی ندارد، به

^۱ 2D discrete time linear systems described by Rosser model

^۲ Rosser model

^۳ Fornasini-Marchesini model

علاوه چون اکثر سیستم‌های کنترل خطی ناپایدار هستند لذا شرایطی برای پایداری این سیستم‌ها شرح داده و نتیجه می‌شود که یک سیستم دوبعدی هم ارز با سیستم یک‌بعدی است، لذا بررسی پایداری سیستم‌های دو بعدی به بررسی پایداری سیستم‌های یک‌بعدی هم ارزش کاهش می‌یابد. از طرفی برای یک سیستم گسسته لازم است که تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار گیرد، پس می‌توان مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای این سیستم‌ها به‌کار برد و آن دسته از مقادیر ویژه‌ای را که داخل دایره واحد قرار ندارند و باعث ناپایداری سیستم شده‌اند با مقادیر ویژه جدید پایدار جایگزین کنیم تا سیستم پایدار شود.

۱.۱.۶ مدل راسر

مدل راسر دوبعدی برای سیستم‌های گسسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (1.1.6)$$

$$y(i, j) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j). \quad (2.1.6)$$

که در آن $i, j \geq 0$ و i, j مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه‌های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می‌کنند و $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ بردار حالت افقی، $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردار حالت عمودی و $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی و $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2, D$ ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای سیستم توصیف شده (۱.۱.۶) و (۲.۱.۶) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x^h(i, 0), x^v(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.6)$$

مثال ۱.۶. نمونه‌ای از سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & : & 8 \\ 0 & 4 & : & 1 \\ \dots & \dots & : & \dots \\ -4 & 6 & : & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این مثال همان‌طور که ملاحظه می‌شود ماتریس A_{11} یک ماتریس 2×2 ، A_{12} یک ماتریس 2×1 ، A_{21} یک ماتریس 1×2 و A_{22} یک ماتریس 2×2 می‌باشد. همچنین B_1 و B_2 به‌ترتیب ماتریس‌هایی با ابعاد 2×1 و یک ماتریس 1×1 می‌باشند.

۲.۱.۶ پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی مدل راسر

سیستم (۱.۱.۶) را در نظر می‌گیریم. برای این سیستم قانون کنترل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i, j) = - [F_1 \quad F_2]^T \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (۴.۱.۶)$$

که F_1 و F_2 به ترتیب دارای بعد $n_1 \times m$ و $n_2 \times m$ می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادله (۱.۱.۶) سیستم حلقه بسته مدل راسر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 F_1^T & A_{12} - B_1 F_2^T \\ A_{21} - B_2 F_1^T & A_{22} - B_2 F_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (۵.۱.۶)$$

که در آن $\Gamma = A - BF^T$ ماتریس حلقه بسته سیستم (۱.۱.۶) می‌باشد.

لم ۱.۶. فرض کنید $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ و $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب باشند بنابراین سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر (۱.۱.۶) با $u = 0$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد [۲۰]:

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{bmatrix} \right) \neq 0. \quad (۶.۱.۶)$$

$$\forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}.$$

هدف بررسی قانون پس‌خورد حالت $u(i, j) = - [F_1 \quad F_2]^T \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ است به قسمی که سیستم حلقه بسته

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 F_1^T & A_{12} - B_1 F_2^T \\ A_{21} - B_2 F_1^T & A_{22} - B_2 F_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$$

پایدار مجانبی باشد.

با استفاده از لم زیر نتایج پایداری اولیه برای سیستم دوبعدی خطی توصیف شده توسط مدل راسر

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (۷.۱.۶)$$

را فراهم می‌کنیم. در حقیقت نشان می‌دهیم پایداری مجانبی سیستم (۷.۱.۶) هم‌ارز پایداری مجانبی سیستم یک‌بعدی گسسته زمانی زیر است:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(k) \quad (۸.۱.۶)$$

لم ۲.۶. فرض کنید ماتریس‌های $A_{۲۲}, A_{۲۱}, A_{۱۲}, A_{۱۱}$ ماتریس‌های حقیقی ثابت باشند در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند [۲]:

۱. سیستم یک‌بعدی توصیف شده توسط (۸.۱.۶) پایدار مجانبی است.

$$\rho \left(\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} \right) < ۱ \quad ۲.$$

۳. بردار $d \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} - I_{n_1} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0, \quad d > 0.$$

حال به بیان قضیه‌ای در خصوص شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم دوبعدی با استفاده از مدل راسر (۷.۱.۶) می‌پردازیم.

قضیه ۱.۶. عبارات زیر هم‌ارزند [۱۴].

۱.

$$\left\{ \det \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{۱۱} & -z_1 A_{۱۲} \\ -z_2 A_{۲۱} & I_{n_2} - z_2 A_{۲۲} \end{bmatrix} \right) \neq 0, \right. \\ \left. \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\} \right\}.$$

۲.

$$\rho \left(\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} \right) < ۱$$

نتیجه ۱.۶. عبارات زیر هم‌ارزند:

۱. سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر (۷.۱.۶) پایدار مجانبی است.

۲. سیستم یک‌بعدی توصیف شده توسط (۸.۱.۶) پایدار مجانبی است.

برای اثبات به [۱۴] مراجعه کنید.

در نتیجه برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت سیستم دوبعدی، ابتدا سیستم را به‌فرم یک‌بعدی هم‌ارزش تبدیل می‌کنیم، سپس با توجه به مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز، آن دسته از مقادیر ویژه که باعث ناپایداری سیستم می‌شود را در ناحیه پایداری تخصیص داده و ماتریس پس‌خورد حالت را محاسبه می‌نماییم، در نهایت با توجه به ابعاد $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}, x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ماتریس پس‌خورد حالت یک‌بعدی به‌دست آمده را به دو ماتریس F_1 و F_2 افراز می‌کنیم که با توجه به قضیه فوق به ترتیب دارای ابعاد $(n_1 \times m)$ و $(n_2 \times m)$ می‌باشند. در نتیجه ماتریس پس‌خورد حالت دوبعدی به‌دست می‌آید.

مثال ۲.۶. مدل راسر سیستم دوبعدی خطی گسسته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j). \quad (9.1.6)$$

به طوری که A و B به صورت زیر می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 0.4065 & 0.8867 & 0.2158 & 0.7922 & \vdots & 0.1669 & 0.6808 \\ 0.9518 & 0.2100 & 0.0787 & 0.3335 & \vdots & 0.4428 & 0.9232 \\ 0.9120 & 0.1309 & 0.9331 & 0.6927 & \vdots & 0.6330 & 0.1528 \\ 0.9514 & 0.5205 & 0.6029 & 0.2038 & \vdots & 0.9300 & 0.4057 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0.3460 & 0.9055 & 0.3775 & 0.9587 & \vdots & 2.0000 & 1.0000 \\ 0.2902 & 0.4025 & 0.6649 & 0.7118 & \vdots & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \\ \dots & \dots \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

که در آن $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^4$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^2$ می‌باشد. با توجه به توضیحات گفته شده سیستم دوبعدی توصیف شده (۹.۱.۶) را هم‌ارز سیستم یک‌بعدی زیر در نظر می‌گیریم.

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (10.1.6)$$

لذا بررسی پایداری سیستم دوبعدی (۹.۱.۶) به بررسی پایداری سیستم یک‌بعدی (۱۰.۱.۶) تبدیل می‌شود. طیف مقادیر ویژه سیستم $\Lambda = \{3.3289, -1.0364, 0.3680 \pm 0.4993i, 0.3168, -0.3688\}$ می‌باشد. Λ را به صورت $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ تجزیه می‌کنیم به طوری که

$$\Lambda_1 = \{3.3289, -1.0364\}, \quad \Lambda_2 = \{0.3680 \pm 0.4993i, 0.3168, -0.3688\}.$$

فرض می‌کنیم $M = \{0.2, -0.32\}$ مجموعه مقادیر ویژه دلخواه باشد، هدف تغییر دادن مجموعه مقادیر ویژه Λ_1 به مجموعه مقادیر ویژه M که درون دایره واحد قرار دارند می‌باشد. آنگاه با استفاده از تجزیه شور جزیی برای A^T و تبدیلات تشابهی ماتریس پس‌خورد F را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$F^T = \begin{bmatrix} -0.1930 & 0.3020 & 0.0462 & 0.3854 & -0.1095 & 0.0298 \\ 0.2098 & -0.0577 & 0.0591 & -0.0853 & 0.1527 & 0.0802 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد حالت برای سیستم دوبعدی (۹.۱.۶) را با توجه به ابعاد $x^h(i, j)$ و $x^v(i, j)$ به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$F_1^T = \begin{bmatrix} -0.1930 & 0.3020 & 0.0462 & 0.3854 \\ 0.2098 & -0.0577 & 0.0591 & -0.0853 \end{bmatrix}, F_2^T = \begin{bmatrix} -0.1095 & 0.0298 \\ 0.1527 & 0.0802 \end{bmatrix}$$

به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - BF^T$ به صورت زیر است:

$$K = \{0.2, -0.32, 0.3680 \pm 0.4993i, 0.3168, -0.3688\}$$

۲.۶ سیستم‌های دوبعدی با تاخیر

تاخیر زمانی معمولاً در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در مسیر بین سیستم ورودی‌ها و سیستم خروجی‌ها رخ می‌دهد. به عنوان مثال، کاربردهای مهندسی را در نظر بگیرید که در آن‌ها تاخیر زمانی می‌تواند شامل اندازه‌گیری تاخیر، انتقال تاخیر و محاسبه تاخیر باشد. بنابراین این ضروری است که مدل‌های سیستم به منظور پیش‌بینی درست پویایی سیستم شرح داده می‌شود. کوپک^۴ [۲۵] روش بردار حالت افزوده را برای سیستم‌های تاخیر پیشنهاد کرد سپس تعدادی از محققان [۱۴]، [۱۷] ایده او را در تلفیق قانون‌های کنترل برای سیستم‌های تاخیر زمانی مورد استفاده قرار دادند. سیستم‌های تاخیری گسسته زمانی چند متغیره در سه دسته قرار می‌گیرند:

دسته اول: شامل سیستم‌هایی است که در آن‌ها حالت‌ها با مقدارهای یکسان یا متفاوت به تاخیر افتاده که این نوع سیستم‌های تاخیر حالت نامیده می‌شود.

دسته دوم: شامل سیستم‌هایی است که در آن‌ها ورودی‌ها با مقدارهای یکسان یا متفاوت به تاخیر افتاده که این نوع سیستم‌های تاخیر ورودی نامیده می‌شود.

^۴Koepeke

دسته سوم: شامل سیستم‌هایی است که در آن‌ها ورودی‌ها و حالت‌ها با مقدارهای یکسان به تاخیر افتاده است.

در این‌جا سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی با تاخیر زمانی در بردار حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از تعریف بردار حالت افزوده^۵ سیستم تاخیر زمانی گسسته را به سیستم بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌کنیم، در نتیجه بررسی پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی با تاخیر تبدیل به بررسی پایداری سیستم‌های خطی یک‌بعدی بدون تاخیر می‌شود.

۱.۲.۶ مدل راسر

مدل راسر سیستم‌های دوبعدی گسسته با q تاخیر در حالت به‌فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (11.2.6)$$

که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ به‌ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی، $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی در نقطه (i, j) می‌باشد. $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ، $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ و

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, q$$

شرایط مرزی برای معادله (۱۱.۲.۶) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x^v(0, j), x^h(i, 0) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

سیستم خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت با تعریف بردارهای حالت افزوده به سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌کنیم و از آن‌جایی که در بخش قبل توضیح داده شد پایداری مجانبی هر سیستم دوبعدی در حالت کلی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک‌بعدی هم‌ارزش را دارا می‌باشد لذا می‌توان از این ویژگی استفاده کرده و نتیجه گرفت پایداری سیستم‌های دوبعدی گسسته با تاخیر زمانی هم‌ارز پایداری سیستم‌های یک‌بعدی نظیرش می‌باشد.

سیستم دوبعدی گسسته زمانی راسر با q تاخیر در بردار حالت را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^q A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k, j) \\ x^v(i, j-k) \end{bmatrix} + Bu(i, j) \quad (12.2.6)$$

به‌طوری‌که $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ به‌ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i, j) می‌باشند و $A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}$ برای $k = 0, \dots, q$ که در آن $A_{11}^k \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ، $A_{12}^k \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ، $A_{21}^k \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ، $A_{22}^k \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$

^۵Gain state vector

(۱۲.۲.۶) می‌باشد. شرایط مرزی برای سیستم (۱۲.۲.۶) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} x^h(i, j) = x^h_0(j), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ x^v(i, j) = x^v_0(i), & \forall i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

جهت تبدیل معادله حالت (۱۲.۲.۶) به فرم بدون تاخیر بردارهای حالت افزوده زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \\ \vdots \\ x^h(i-q, j) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \\ \vdots \\ x^v(i, j-q) \end{bmatrix}$$

با به کارگیری دو بردار حالت افزوده تعریف شده می‌توان معادله حالت (۱۲.۲.۶) را به فرم معادله حالت دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j) \quad (۱۳.۲.۶)$$

که در آن $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ و $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ به طوری که $N = (q+1)(n_1 + n_2)$ و

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & \dots & A_{11}^{q-1} & A_{11}^q \\ I_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_1} & 0 \end{bmatrix}, & \bar{A}_{12} &= \begin{bmatrix} A_{12}^0 & A_{12}^1 & \dots & A_{12}^{q-1} & A_{12}^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{21} &= \begin{bmatrix} A_{21}^0 & A_{21}^1 & \dots & A_{21}^{q-1} & A_{21}^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \bar{A}_{22} &= \begin{bmatrix} A_{22}^0 & A_{22}^1 & \dots & A_{22}^{q-1} & A_{22}^q \\ I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حال برای معادله حالت (۱۳.۲.۶) قانون کنترل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i, j) = -[\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2]^T \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (۱۴.۲.۶)$$

که $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ به ترتیب دارای بعد $(q+1)n_1 \times m$ و $(q+1)n_2 \times m$ می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادله (۱۳.۲.۶) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - \bar{B}_1 \bar{F}_1^T & \bar{A}_{12} - \bar{B}_1 \bar{F}_2^T \\ \bar{A}_{21} - \bar{B}_2 \bar{F}_1^T & \bar{A}_{22} - \bar{B}_2 \bar{F}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} = \bar{\Gamma} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix}$$

با توجه به قضایای گفته شده در بخش قبل سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر (۱۳.۲.۶) هم‌ارز سیستم یک‌بعدی زیر می‌باشد:

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (15.2.6)$$

که $\bar{A}$ و $\bar{B}$ به‌فرم ماتریس‌های تعریف شده فوق می‌باشند و به‌ترتیب دارای بعد $N \times N$ و $N \times m$ می‌باشند.

۳.۶ تخصیص مقادیر ویژه جزئی

در این بخش به حل مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای این سیستم‌ها می‌پردازیم. سیستم خطی تبدیل یافته (۱۵.۲.۶) را در نظر می‌گیریم. که در آن $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ و $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ به‌طوری که $N = (q+1)(n_1 + n_2)$ و $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ به‌فرم ماتریس‌های تعریف شده در بخش قبل هستند. قانون کنترل را برای این سیستم تبدیل یافته به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i, j) = -\bar{F}^T \bar{x}(i), \quad (16.3.6)$$

و با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۱۵.۲.۶) سیستم حلقه بسته زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}(i+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T)\bar{x}(i), \quad (17.3.6)$$

با توجه به این‌که ماتریس $\bar{A}$ بزرگ بوده و اکثر درایه‌های آن صفر است (ماتریس $\bar{A}$ اسپارس می‌باشد)، بنابراین برای پایداری سیستم کافی است مقادیر ویژه ماتریس $\bar{A}$ را در نظر بگیریم و چون تعداد کمی از مقادیر ویژه ماتریس خارج ناحیه پایداری هستند، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای این سیستم به‌کار می‌بریم.

فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N\}$ طیف ماتریس $\bar{A}$ باشد و قرار دهیم $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ که $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ و $\Lambda_2 = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N\}$ است و مجموعه $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ را در نظر بگیرید و همگی تحت مزدوج مختلط بسته باشند. با توجه به این‌که برای پایداری سیستم‌های گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار بگیرند، مجموعه Λ_1 را که اعضای آن داخل دایره واحد قرار ندارند به مجموعه K

که تمام اعضای آن داخل دایره واحد قرار دارند تغییر می‌دهیم در نتیجه، هدف پیدا کردن ماتریس پس‌خورد حالت $\bar{F}$ است به‌طوری که ماتریس حلقه بسته $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ دارای مقادیر ویژه $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N\}$ باشد که در این صورت سیستم حلقه بسته، پایدار خواهد بود. بنابراین از روش شرح داده شده در فصل سوم استفاده کرده و مساله را حل می‌کنیم. بدین منظور تجزیه شور جزیی ماتریس $\bar{A}^T$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{A}^T Q = QR$$

که در آن Q یک ماتریس $N \times k$ است به‌طوری که ستون‌های آن تشکیل یک پایه یک‌معامد برای زیرفضای چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ را می‌دهد و R یک ماتریس بالامثلثی $K \times K$ است. با در نظر گرفتن ماتریس $Z = \bar{A} - \bar{B}\bar{F}^T$ و تعریف ماتریس پس‌خورد حالت به‌فرم

$$\bar{F} = QS \quad (۱۸.۳.۶)$$

می‌توان نوشت:

$$Z^T Q = (\bar{A}^T - \bar{F}\bar{B}^T)Q = QC_k^T,$$

که در آن

$$C_k = R^T - ES^T, \quad E = Q^T \bar{B}, \quad (۱۹.۳.۶)$$

می‌باشد. در نتیجه C_k دارای مقادیر ویژه $K = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ است و بنابراین طیف Z برابر $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N\}$ است.

با توجه به این‌که مساله تبدیل به پیدا کردن S برای ماتریس حلقه بسته C_k شده است برای پیدا کردن S از روش تبدیلات تشابهی شرح داده شده در فصل سوم استفاده می‌کنیم، در نتیجه این ماتریس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S = S_p - E^{-1} \tilde{G}_\lambda T^{-1}, \quad (۲۰.۳.۶)$$

حال ماتریس پس‌خورد حالت $\bar{F}$ را با توجه به (۱۸.۳.۶) می‌توان محاسبه نمود.

مثال ۳.۶. سیستم دوبعدی گسسته زمانی توسط مدل راسر زیر را برای $q = ۱$ تاخیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A_* \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_\lambda \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix} Bu(i, j) \quad (۲۱.۳.۶)$$

که در آن بردارهای حالت افقی و عمودی به ترتیب دارای ابعاد $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^2$ و $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^1$ می باشند و

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.4065 & 0.8867 & \vdots & 0.9518 \\ 0.787 & 0.3335 & \vdots & 0.9331 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0.9514 & 0.5205 & \vdots & 0.1669 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.2158 & 0.7922 & \vdots & 0.2100 \\ 0.9120 & 0.1309 & \vdots & 0.6927 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0.6029 & 0.2038 & \vdots & 1.6808 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ \dots & \dots \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

جهت کنترل این سیستم بردارهای افزوده زیر را تعریف می کنیم.

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i-1, j) \end{bmatrix}, \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix}$$

لذا سیستم تاخیری (۲۱.۳.۶) را می توان با جایگذاری بردارهای افزوده $\bar{x}^h(i, j)$ و $\bar{x}^v(i, j)$ تعریف شده به فرم سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j) \quad (22.3.6)$$

به طوری که ماتریس های $\bar{A}$ و $\bar{B}$ به فرم زیر می باشند:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.4065 & 0.8867 & 0.2158 & 0.7922 & \vdots & 0.9518 & 0.2100 \\ 0.787 & 0.3335 & 0.9120 & 0.1309 & \vdots & 0.9331 & 0.6927 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0.9514 & 0.5205 & 0.6029 & 0.2038 & \vdots & 0.1669 & 1.6808 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23.3.6)$$

همان طور که در بخش قبل توضیح داده شد پایداری مجانبی سیستم دوبعدی توصیف شده (۲۲.۳.۶) هم ارز پایداری مجانبی سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر می باشد.

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \quad (24.3.6)$$

به طوری که $\bar{A}$ و $\bar{B}$ به فرم ماتریس های به دست آمده در (۲۳.۳.۶) می باشند. طیف ماتریس $\bar{A}$ را به صورت $\Lambda_1 = \{2.3944, -1.3991\}$ و $\Lambda_2 = \{0.5103, -0.409 \pm 0.8765i, -0.6158\}$ تفکیک می کنیم. مجموعه

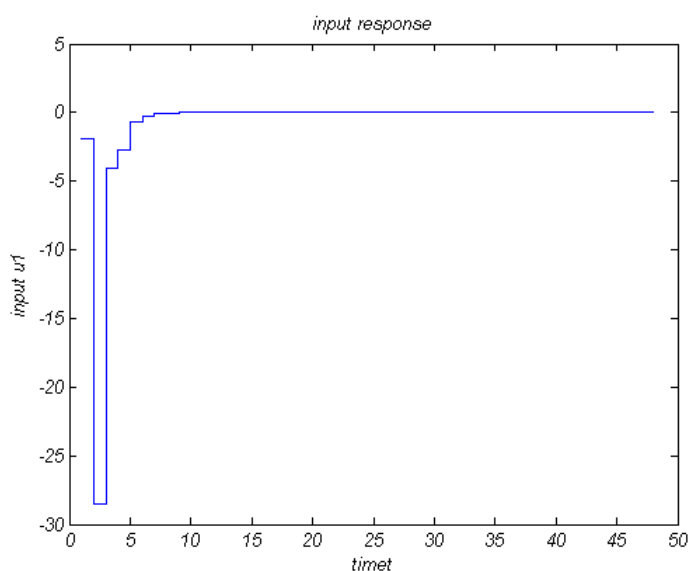
$K = \{0.3514, -0.2137\}$ را در نظر بگیرید. هدف پیدا کردن ماتریس $\bar{F}$ است به صورتی که طیف ماتریس حلقه بسته برابر $\Lambda_1 \cup K$ باشد. با توجه به توضیحات داده شده ماتریس پس خورد حالت به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{F} = QS = \begin{bmatrix} -0.5063 & 0.0747 \\ 0.2035 & -0.1963 \\ -0.3586 & 0.0473 \\ 0.6530 & -0.3135 \\ 4.5706 & -1.9475 \\ -2.7760 & 0.9315 \end{bmatrix}.$$

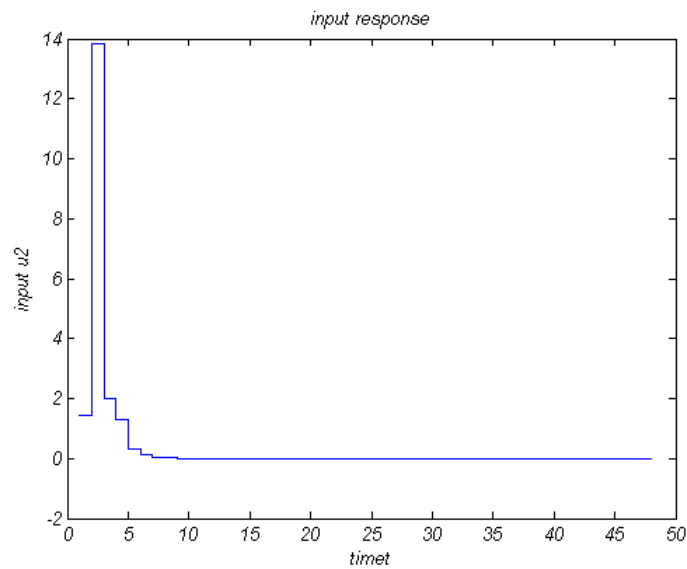
و نهایتاً داریم:

$$\bar{F}_1^T = \begin{bmatrix} -0.5063 & 0.2035 \\ 0.0747 & -0.1963 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_2^T = \begin{bmatrix} -0.3586 & 0.6530 & 4.5706 & -2.7760 \\ 0.0473 & -0.3135 & -1.9475 & 0.9315 \end{bmatrix}$$

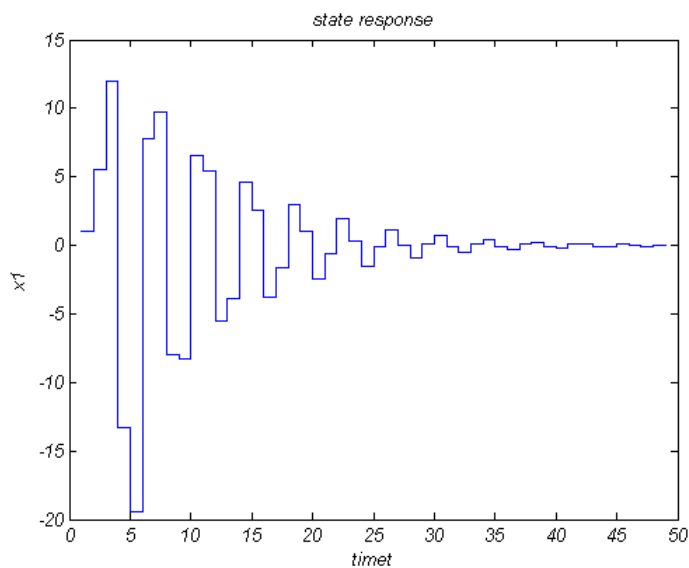
نمودارهای پایداری برای مثال فوق به صورت زیر می‌باشد:



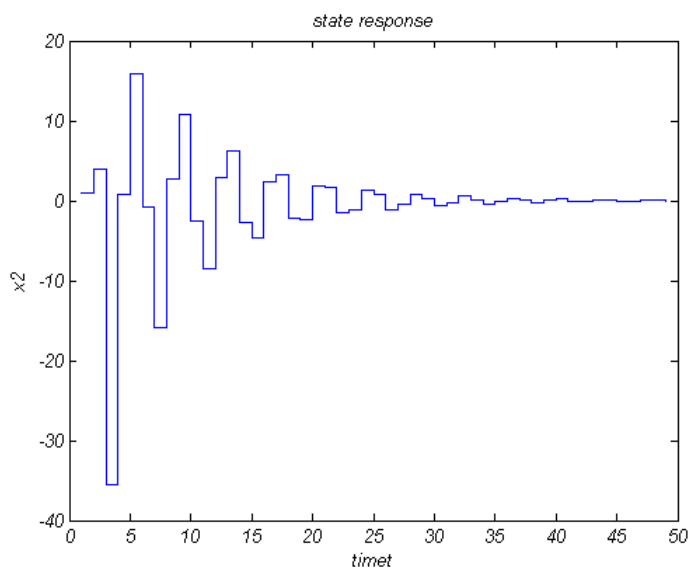
شکل ۱۰۶: نمودار مربوط به مولفه اول ورودی



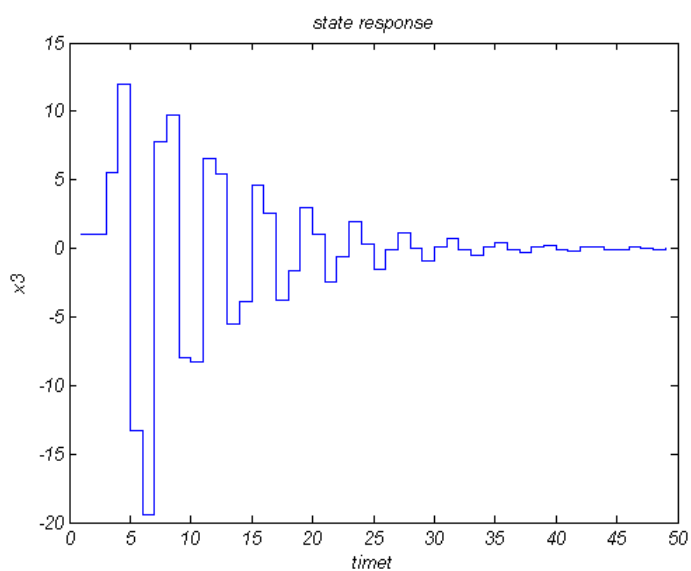
شکل ۲.۶: نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی



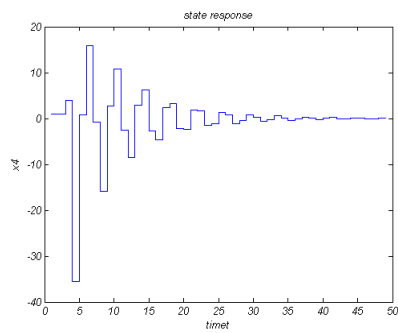
شکل ۳.۶: نمودار مربوط به x_1



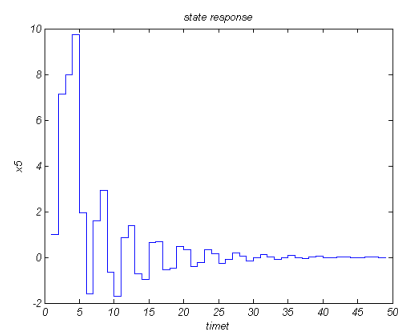
شکل ۴.۶: نمودار مربوط به x_2



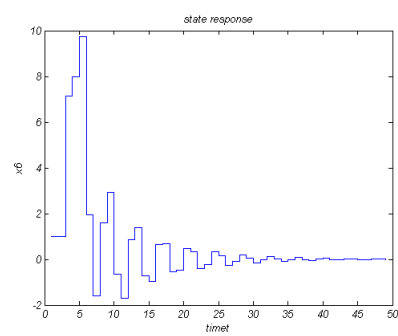
شکل ۵.۶: نمودار مربوط به x_3



شکل ۶.۶: نمودار مربوط به x_4



شکل ۷.۶: نمودار مربوط به x_5



شکل ۸.۶: نمودار مربوط به x_6

فصل ۷

نتیجه‌گیری

هدف ما در این پایان‌نامه، بررسی مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم‌های کنترل خطی می‌باشد. با توجه به اهمیت این مساله در نظریه کنترل و بهینه سازی، تاکنون روش‌های زیادی برای حل این مساله ارایه شده است که ما به بررسی این روش‌ها پرداختیم. سپس روش جدیدی را پیشنهاد کردیم که با استفاده از آن بتوان مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای سیستم‌های کنترل خطی حل نمود.

همان‌طور که در فصل ۳ به آن اشاره شد، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم‌هایی کاربرد دارد که همه مقادیر ویژه آن نیاز به تخصیص ندارند و تنها تعداد کمی از مقادیر ویژه ناپایدار هستند و تنها همین تعداد کم نیاز به تخصیص دوباره دارند.

در فصل ۴، روش جدیدی را پیشنهاد دادیم که در آن می‌توان با استفاده از تجزیه شور جزئی و تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را حل نمود. بدین ترتیب ابتدا، مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز را در نظر گرفته و به دو مجموعه که یکی شامل مقادیر ویژه ناپایدار و دیگری بقیه مقادیر ویژه را داراست، تفکیک کردیم. سپس با استفاده از تجزیه شور جزئی ماتریس حلقه باز سیستم را که دارای ابعاد بزرگ است به ماتریس‌های کوچک‌تر تجزیه نمودیم تا محاسبات با سرعت بیش‌تری انجام گیرد. در نهایت با بهره‌گیری از تبدیلات تشابهی به حل مساله برای ماتریس‌های جدید پرداختیم.

سپس با توجه به این نکته که نورم کمینه ماتریس پس‌خورد حالت در کاهش هزینه سیستم کنترل خطی تاثیر بسزایی دارد، با استفاده از روش پیشنهادی و مفهوم جدید گراف انتقال حالت، ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری را به‌دست آوردیم که مقادیر ویژه موردنظر را به سیستم اختصاص می‌دهد. سرانجام، با توجه به الگوریتم ارایه شده برای کمینه کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت، توانستیم نورم این ماتریس را به حداقل برسانیم. باید در نظر داشت که هرچه تعداد پارامترها در ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری بیش‌تر باشد، نورم ماتریس کمتر می‌شود.

در فصل ۶ نیز با توجه به اهمیت مساله تخصیص، آن را برای سیستم‌های خطی دوبعدی به‌کار بردیم و حل

این مساله برای این سیستم‌ها با روش جدید بررسی شد. همان‌طور که بیان شد، مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی یکی از پرکاربردترین و مهم‌ترین مسایل نظریه کنترل و بهینه‌سازی است. پس می‌توان از آن برای پایداری سیستم‌های مختلف استفاده کرد. ما در این پایان‌نامه بخش کوچکی از کاربردهای این مساله را بیان نمودیم، اما از این مساله می‌توان برای پایداری سیستم‌های دیگری مانند سیستم‌های توسیع‌یافته^۱، سیستم‌های متناوب^۲ و ... بهره جست. به علاوه می‌توان این مساله را با روش‌های دیگری مانند استفاده از تجزیه مقدار تکین^۳ (SVD) نیز حل نمود.

^۱Descriptor systems

^۲Periodic systems

^۳Singular value decomposition

پوست آ

برنامه‌های کامپیوتری

آ.۱ کد متلب مساله تخصیص مقدارویژه جزیی در سیستم‌های کنترل خطی

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% *****
t0=cputime;

disp('          This is the given plant matrix A')          %line 1
disp('          *****')                                  %line 2
A=[0 5 4 6 3 3 6 2 6 8;3 7 6 8 5 9 0 8 1 4;6 6 2 9 1 3 5 9 0 9;6 1 0 0 0 2 7 8 2 0;
5 5 5 4 9 1 2 5 8 3;4 3 2 5 2 3 4 2 9 5;2 0 9 6 5 3 5 7 6 0;5 1 9 7 9 1 0 2 7 7 ;
7 1 3 6 1 4 4 9 2 5;7 6 0 7 1 0 6 6 5 5]

%line 3
disp('          This is the given input matrix B')          %line 4
```

```

disp('*****') %line 5
B=[9 1;9 7;2 5;3 7;0 7;4 9;8 6;8 3;0 8;9 3]
%line 6
A=A'; %line 7
[V,D]=eig(A);
[V,D]
V1=V(:, [1 3 4 9])
Qp=gramsch(V1)
R=Qp'*A*Qp
E=Qp'*B
A=R'
B=-E
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n); %line 10
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else
        if i~=k
            Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
            T1([i,k],:)=T1([k,i],:);

```

```

        Q(:, [i+m, k+m]) = Q(:, [k+m, i+m]);
    end

        t = Q(i, j);

%   if t ~= 0
        Q(i, :) = Q(i, :) / t;
        Q(:, i+m) = Q(:, i+m) * t;
        T1(i, :) = T1(i, :) / t;

%   end

    if i ~= n
        for k = i+1:n
            t = Q(k, i);
            if t ~= 0
                Q(k, :) = Q(k, :) - t * Q(i, :);
                Q(:, i+m) = Q(:, i+m) + t * Q(:, k+m);
                T1(k, :) = T1(k, :) - t * T1(i, :);
            end
        end
    end

    i = i + 1;
    j = j + 1;
end

end

% *****
% Now compute the Standard echelon form      !
% -----
s = 1;

```

```

while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
            break
        end
    end
    s=s+1;
end

% *****

for i=n:-1:m+1
    for k=i:r
        if Q(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Q(i,j);
                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end

```

```

end

end

% *****

      Q

% .....

disp('          This is the transformation matrix,T1')
disp('          *****')

      T1

% *****

% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]);A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;

% *****

disp('          This is the primdry feedback law ')
disp('          ***** ')

Fp

% *****

gama=A+B*Fp

%**** *****

t0=cputime;
t1=cputime-t0;

% program for assigning eigenvalues,eigen.m

% *****

D=[];

for j=1:n

```

```

        landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
        end

for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
end

    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end

end

G2=Qc(1:m,m+1:r);

```

```

    glanda=Qc(:,m+1:r);
    Fc=bo*G2*T1;
    disp('      The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
    disp('      *****')
    Kp=newF+Fc
    F=Qp*Kp';
    disp('      with the closed-loop matrix ')
    disp('      ***** ')
    gamac=A+B*Kp;
    disp('      checking the eigen values ')
    disp('      ***** ')
    v=eig(gamac)'
    [u1,v1]=eig(gamac);
    c2=cond(u1)
    disp('      Frobenius norm of feedback matrix ')
    disp('      ***** ')
    Normkp=norm(Kp,'fro')
    F

%      End of program for eigen
t0=cputime;
t1=cputime-t0;

t=linspace(0,100,100);
x=zeros(10,100);
matA = zeros(10,10,100);
x0 = ones(10,1);
for k=1:100, matA(:,:,k) = expm(A*t(k)); x(:,k) = matA(:,:,k)*x0;end;

```

```
plot(t,x),hold on
pause
hold off
t=linspace(0,100,100);
x=zeros(10,100);
matA = zeros(10,10,100);
x0 = ones(10,1);
for k=1:100, matA(:,:,k) = expm(((A-B*F'))*t(k)); x(:,k) = matA(:,:,k)*x0;end;
plot(t,x)
```

مراجع

- [1] M.H. Amin. Optimal pole shifting for continuous multivariable linear systems. *Int. J. Control*, 41:701–707, 1985.
- [2] M. Ait Rami and F. Tadeo. Positive observation problem for linear discrete positive systems. *IEEE*, 0:13–15, December 2006.
- [3] D. Calvetti , B. Lewis and L. Reichel. On the solution of large sylvester-observer equations. *linear algebra appl*, 8:1–16, April 2001.
- [4] R. Carden. Ritz values and arnoldi convergence for nonsymmetric matrices. Masters of arts, Rice university, Houston, Texas, April 2009.
- [5] C.T. Chen. Linear system theory and design. Master’s thesis, CBS College Publishing, New York, 1984.
- [6] B.N. Datta. *Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis*. elsevier academic press, 2003.
- [7] B.N. Datta. *Numerical Linear Algebra and Applications*. SIAM, 2 edition, 2010.
- [8] B.N. Datta and Y. Saad. Arnoldi methods for large sylvester-like observer matrix equation and partial pole placement. *Lin. Alg. Appl*, 0:225–244, 1991.
- [9] B.N. Datta, M. Ram, S.Y. Elhay. Ortopgonality and partial pole assignment for the symmetric definite quadratic pencil. *Lin. Alg. Appl*, 257:29–48, 1997.
- [10] B.N. Datta and D.R. Sarkissian. Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence, uniqueness and numerical solution. *IEEE*, 2001.

- [11] R. Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control System*. Pearson, 2011, 12, illustrated edition, 1967.
- [12] M.M. Fateh, H. Ahsani Tehrani and S. M. Karbassi. Repetitive control of electrically driven robot manipulators. *IJSySc*, 0:25–36, 18 October 2011.
- [13] E. Fornasini and G. Marchesini. Doubly-indexed dynamical systems:state-space models and structural propeties. *Math. Syst.*, 12:59–72, 1978.
- [14] A. Hmamed , M. Ait Rami and M. Alfid. Controller synthesis for positive 2d systems described by the roesser model. *IEEE*, 47:9–11, 2008.
- [15] S.M. Karbassi. An algorithm for minimizing the norm of state feedback controllers in eigenvalue assignment. *comp and math app*, 41, 2001.
- [16] B. Kouvaritakis and R. Cameron. Pole placement with minimized norm controllers. *IEEE*, 127:32–36, 1980.
- [17] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices with Applications*. Academic Press, second edition, 1985.
- [18] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2006.
- [19] M.A. Ramadan and E.A. El-Sayed. Partial eigenvalue assignment problem of linear control systems using orthogonality relations, 2006.
- [20] R. Roesser. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE*, 20:1–10, 1975.
- [21] Y. Saad. Projection and deflation methods for partial pole assignment in linear state feedback. *IEEE*, 0:290–297, 1986.
- [22] Y. Saad. *IteIterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.
- [23] M. Saif. Optimal model controller design by entire eigenstructure assignment. *IEEE*, 136:341–344, 1989.

-
- [24] D.R. Sarkissan. *Theory and computations of partial eigenvalue and eigenstructure assignment problems in matrix second-order and distributed-parameter systems*. Phd, Northern Illinois, 2001.
- [25] R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [26] D. C. Sorensen. Implicit application of polynomial filters in a k-step arnoldi method. *SIAM*, 13:357–385, 1992.
- [27] W.M. Wonham. *Linear Multivariate Control: a Geometric Approach*. Springer, 3rd edition, Desember 1985.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Array	آرایه
Sparse	اسپارس
Scaler	اسکالر
Horizontal	افقی
Vector	بردار
Left eigenvector	بردار ویژه چپ
Right eigenvector	بردار ویژه راست
State vector	بردار حالت
Output vector	بردار خروجی
Parameterisation	پارامتری‌سازی
Linear parameter	پارامتر خطی
Bases	پایه
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Stablity	پایداری
Feedback	پس‌خورد
Continous-time	پیوسته زمانی
Similarity transation	تبدیلات تشابهی

Decompositionable	تجزیه پذیر
Schur decomposition	تجزیه شور
Assignment	تخصیص
Transpose	ترانهاد
Linear composition	ترکیب خطی
Reducable	تقلیل پذیر
Accses	تقریب
Single-input	تک-ورودی
Projection	تصویر
Characteristic equation	چندجمله‌ای مشخصه
Solving	حل پذیر
Loop	حلقه
Open-loop	حلقه باز
Closed-loop	حلقه بسته
Determinant	دترمینان
Tow-dimensional	دو بعدی
Vertex	راس
Rank	رتبه
Approch	رویکرد
Sub space	زیرفضا
Krylove sub space	زیرفضای کریلوف
Sub-matrix	زیرماتریس
Delay system	سیستم تاخیری

Bounded conditions	شرایط مرزی
Spectrum	طیف
Jordan form	فرم جردن
Vector companion form	فرم همدم برداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشعلون
Vector space	فضای برداری
Null space	فضای پوچ
Control law	قانون کنترل
Controlable	کنترل پذیر
Controller	کنترل گر
Descript-time	گسسته زمانی
State transition graph	گراف انتقال حالت
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Vertical	عمودی
Matrix	ماتریس
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Trianglar matrix	ماتریس مثلثی
Squar matrix	ماتریس مربعی
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Identity matrix	ماتریس همانی
Similarity matrix	ماتریس های متشابه
Hessenberg matrix	ماتریس هسنبرگی

Unitary matrix	ماتریس یکانی
Maximum	ماکزیمم
Projection problem	مساله تصویر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Linear independed	مستقل خطی
Control variable	متغیر کنترل
Observation	مشاهده پذیر
Eigenvalue	مقدار ویژه
Inverse	معکوس
Component	مولفه
Span	مولد
Fild	میدان
Kronecker invariant	ناوردای کرونگر
Nonsingular	نامنفرد
Norm	نرم
Mapping	نگاشت
linear depended	وابسته خطی
Existence	وجود
Eqvalent	هم‌ارز
Uniqueness	یکتایی
Edge	یال
Orthonormal	یکامتعامد

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accses.....	تقریب
Approch	رویکرد
Array	آرایه
Assignment	تخصیص
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Bounded conditions	شرایط مرزی
Characteristic equation	چندجمله‌ای مشخصه
Closed-loop	حلقه بسته
Component	مولفه
Control low	قانون کنترل
Controlable.....	کنترل پذیر
Controller.....	کنترل گر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Control variable.....	متغیر کنترل
Continous-time.....	پیوسته زمانی

Decompositionable	تجزیه پذیر
Determinant	دترمینان
Delay system	سیستم تاخیری
Descript-time	گسسته زمانی
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Edge	یال
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Eigenvalue	مقدار ویژه
Equivalent	هم‌ارز
Existence	وجود
Field	میدان
Feedback	پس‌خورد
Hessenberg matrix	ماتریس هسنبرگی
Horizontal	افقی
Identity matrix	ماتریس همانی
Inverse	معکوس
Jordan form	فرم جردن
Kronecker invariant	ناوردای کرونکر
Krylove subspace	زیرفضای کریلوف
Left eigenvector	بردار ویژه چپ
Linear parameter	پارامتر خطی
Linear depended	وابسته خطی
Linear composition	ترکیب خطی

Linear independent	مستقل خطی
Loop	حلقه
Matrix	ماتریس
Mapping	نگاشت
Maximum	ماکزیمم
Nonsingular	نامنفرد
Norm	نرم
Null space	فضای پوچ
Observation	مشاهده پذیر
Open-loop	حلقه باز
Orthonormal	یکامتعامد
Output vector	بردار خروجی
Parameterisation	پارامتری سازی
Projection	تصویر
PRojection problem	مساله تصویر
Rank	رتبه
Reducable	تقلیل پذیر
Right eigenvector	بردار ویژه راست
Scaler	اسکالر
Schur decomposition	تجزیه شور
Similarity transation	تبدیلات تشابهی
Similarity matrix	ماتریس های متشابه
Single-input	تک-ورودی

Solving	حل پذیر
Span	مولد
Sparse	اسپارس
Spectrum	طیف
Square matrix	ماتریس مربعی
Stability	پایداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشعلون
State vector	بردار حالت
State transition graph	گراف انتقال حالت
Sub-matrix	زیرماتریس
Sub space	زیرفضا
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Transpose	ترانهاده
Triangular matrix	ماتریس مثلثی
Two-dimensional	دو بعدی
Uniqueness	یکتایی
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Vector	بردار
Vector companion form	فرم همدم برداری
Vector space	فضای برداری
Vertex	راس
Vertical	عمودی

نمایه

ا	تجزیه پذیر، ۲۳
اندیس پوچ توانی، ۴۶	ترکیب خطی، ۵
ب	تقلیل پذیر، ۲۳
بالاهسنبرگی، ۷	تک ورودی، ۱۲
برد، ۴	چ
بردار حالت، ۹	چندجمله‌ای مشخصه، ۷
بردار خروجی، ۹	ح
بردار ویژه، ۷	حلقه، ۴۶
بردارهای شور باقیمانده، ۳۸	د
بعد فضا، ۵	دایره واحد، ۵۱
پ	دترمینان، ۳
پایدار مجانبی، ۱۰	ر
پایه، ۵	روش آرنولدی کاملاً دوباره آغازشده، ۲۱
پایه استاندارد، ۴۶	روش روابط متعامد، ۱۶
پایین هسنبرگی، ۷	روش گرام-اشمیت اصلاح شده، ۲۵
پوچ توان، ۴۶	ز
ت	زیرفضای تولید شده، ۵
تبدیل خطی تشابهی، ۳۱	

کنترل گره‌های بهینه زمانی، ۴۵

گ

گراف، ۹

گراف انتقال حالت، ۴۸

ل

لیاپانوف، ۱۰

م

ماتریس، ۳

ماتریس کنترل‌پذیری، ۹

ماتریس مثلثی، ۴

ماتریس مربعی، ۳

ماتریس یکانی، ۲۹

ماتریس‌های متشابه، ۶

ماکزیم، ۴۶

متغیر کنترل، ۹

متمم متعامد، ۵

مزدوج مختلط، ۱۳

مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی، ۱

مستقل خطی، ۵

مشاهده پذیر، ۹

معادله تفاضلی، ۹

معکوس‌پذیر، ۶

زیرفضای کريلوف، ۲۴

زیرفضای ناوردای راست، ۲۱

زیرماتریس، ۳

س

سه قطری، ۷

سیستم تک ورودی، ۱۴

سیستم کنترل خطی، ۱۲

سیستم یک بعدی، ۵۱

سیستم‌های تاخیر زمانی، ۵۵

ع

عملیات تشابهی ستونی، ۳۲

ف

فرم جردن، ۱۱

فضای برداری، ۴

فضای پوچ، ۴

فضای ستونی، ۶

فضای سطری، ۶

ق

قانون کنترل، ۱۲

ک

کنترل‌پذیر، ۹

مقادیر ویژه، ۶

مقدارهای ریس، ۲۷

ن

نامنفرد، ۶

ناورداهای کرونکر، ۳۶

و

وابسته خطی، ۵

ی

یکامتعامد، ۶

Surname: Heidari

Name: Marzieh

Title: Partial eigenvalue assignment problem in linear control system

Supervisor: Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: December 2013

Number of pages: 103

Keywords: Partial eigenvalue assignment, Stability, Partial Schur decomposition, Linear control system, Similarity transation, State transition graph

Abstract

In this thesis, we describe the partial eigenvalue assignment problem in linear control systems. This problem applied for systems that are near stability. In other words, a small number of eigenvalues of the open-loop system, aren't in stability region and only this small number require reassigning. Given the importance of this problem in control theory and optimization, various method methods have been presented to solve it such as orthogonality relations method, Arnoldi method and, that we first examine these methods and then with using partial Schur decomposition method and similarity transation in linear control systems, we introduce a new method that requires less computation compared to other methods. For solving problem with this method, first, with using partial Schur decomposition we find the ortonormal basis on invariant subspace assocaited with the eigenvalues to be assigned. Then with using similarity transationt in linear control system, we compute the feedback matrix that assigned desired eigenvalues in to the closed-loop system. Given the importance of the minimization norm of the state feedback matrix in optimization of the linear control system, with using proposed method and the state transation graph , we find the state feedback matrix that is minimum norm. Finally, we solve partial eigenvalues assignment problem for stability of descrite time 2D linear control systms with proposed method. In the end of each discussion, numerical examples are given.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Partial eigenvalue assignment problem in linear control system

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

by

Marzieh Heidari

December 2013