دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

برابری گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج روی p-گروه‌های متناهی

استاد راهنما
دکتر سید حیدر جعفری
استاد مشاور
دکتر حسن خسروی
پژوهشگر
ام البنین جاهدی جوزچال

دی ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: جاهدی جوزچال نام: ام‌البنین

عنوان: برابری گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج روی p- گروه‌های متناهی

استاد راهنما: دکتر سید حیدر جعفری

استاد مشاور: دکتر حسن خسروی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۲

واژگان کلیدی: خودریختی مرکزی، خودریختی حافظ رده تزویج، p- گروه متناهی، ناآبلی محض

چکیده

فرض کنید G یک گروه باشد. گروه همه خودریختی‌های G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. خودریختی α از $Aut(G)$ را یک خودریختی مرکزی گوییم در صورتی که برای هر $x \in G$، $x^{-1}\alpha(x) \in Z(G)$. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های مرکزی G که آن را با $Autcent(G)$ نشان می‌دهیم یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.

خودریختی β از $Aut(G)$ را یک خودریختی حافظ رده تزویج گوییم در صورتی که برای هر $g \in G$، $\beta(g) \in g^G$. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های حافظ رده تزویج G را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم. $Aut_c(G)$ یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است. در این پایان‌نامه ابتدا گروه خودریختی‌های مرکزی و خودریختی‌های حافظ رده تزویج را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و سپس شرطی لازم و کافی برای آن‌که گروه خودریختی‌های مرکزی یک p- گروه متناهی با گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج آن برابر باشد را ارائه می‌دهیم. به‌علاوه ثابت می‌کنیم که اگر G یک p- گروه متناهی باشد که خودریختی‌های مرکزی، همگی حافظ رده تزویج باشند، آنگاه $d(G)$ زوج است($d(G)$ معرف تعداد عناصر در مجموعه مولد مینیمال G است). همچنین به بررسی گروه‌هایی با خاصیت $Aut(G) = Aut_c(G)$ می‌پردازیم.

تقدیم به خانواده‌ام

پدر تمام آرزوهای دختر بچه‌ای است که هر چه بخواهد می‌گوید پدرم هست. پدر دست مهربانیست که موهای دخترکش را نوازش می‌کند و گرمای زندگی را به او می‌بخشد.
اما در تقدیر من سایه‌ی پر مهر پدر عمری کوتاه داشت.
پدر، خدای من تو را از من گرفت اما من نام تو را در قلبی حک کرده‌ام که همیشه با یاد تو می‌تپد.
پدر، تو نیستی اما مادری دارم که نگاهش را با تمام هستی عوض نمی‌کنم. مادر قلب تپنده است، مادر تمام خانواده است و مادر من تمام دنیای من است.
مادرم، اگر گناه نباشد به اندازه‌ی خدا می‌پرستمت. در نبود پدر تو ستاره‌ی شب‌های زندگیم هستی و خدا کند که این ستاره هیچ وقت غروب نکند.
مادرم، هر چند قلب بیمارت گاه‌گاهی تو را می‌رنجاند و مرا به پای خدا می‌اندازد اما تو با همان قلب رنجور آنقدر شیفته‌ام کرده‌ای که هر روز بی‌اختیار بر دست‌های پیر و خسته‌ات بوسه می‌زنم که تو مهربان‌ترین الگوی آفرینشی.
برادرانی دارم که رسم مردانگی را از پدر و مهربانی را از مادر آموخته‌اند و هرگاه قدم به خانمان می‌گذارند بوی پدر را با تمام وجود حس می‌کنم و
خواهرانی دارم که وقار و متانت را از آن‌ها آموخته و تکیه‌گاه خستگی‌هایم هستند.

و تقدیم به دکتر جعفری
استادی که از او آموختم الفبای زیستن را
استادی که ریاضیات را به من آموخت تا با ریاضیات بر جبر زمانه غالب شوم
و با چینش مجهولات زندگی در کنار هم و نظم حروف و تفکر انسانیم نردبانی بسازم برای رسیدن به اوج.
استادی که در میان برهان‌های ریاضی خدا را برایم ثابت کرد و با وقار و متانتش اصل انسانیت را به من آموخت و محبوب شدن و محبوب ماندن نه با سلاح زور بلکه با سلاح محبت را به من آموخت.

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **امالبتین جاهدی جوزچال** رشته **ریاضی** گرایش **محض** تحت عنوان برابری گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج روی p-گروه‌های متناهی که در تاریخ ۹۲/۱۰/۰۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

1ـ عالی (20 ـ 19)

2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)

3ـ خوب (17/99 ـ16)

4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنما	دکتر سید حیدر جعفری	استادیار	
2ـ استاد مشاور	دکتر حسن خسروی	استادیار	
3ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر خدامی	استادیار	خدامی
4ـ استاد ممتحن	دکتر اسدالله فرامرزی ثالث	استادیار	
5 ـ استاد ممتحن	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	

رئیس دانشکده : دکتر احمد زیره امضاء

دانشکده ریاضی

مناجات

خداوندا تو را با کدامین قلم بستایم که تو خود آفریننده‌ی قلمی. قسم به قلمی که نام تو را می‌نویسد من سراپا دل‌باخته‌ی وجود توام.

تو خدا نیستی، تو تمام بودو نبودی. تو را در لابه‌لای رقص شاخه‌های درختان، در میان رویش گندم‌زار و در نظم مورچگان می‌توان دید. می‌گویند تو دیده نمی‌شوی اما تو یک چیز نیستی که دیده شوی، تو را در همه جا و همه چیز می‌توان دید.

در هجوم موج‌های سنگین روزگار گاه‌گاهی تا مرز له شدن رفته‌ام، اما از توستونی ساخته‌ام که آسمان را در مقابلم به زانو در آورده است. تودر لحظه‌های شاد زندگیم جریان داری و در غروب گاه‌گاه زندگیم فقط تو را می‌خوانم.

پاییز که می‌شود حتی برگ درختان برای تو به سجده می‌افتند و با نسیم صبحگاهی شاخه‌های درختان تو را رکوع می‌کنند. من چگونه تو را تسبیح نگویم که تو شایسته‌ی ستایشی.

از عیب مبرّایی، بینایی و دانایی، تو خالق یکتایی

در فضل چو دریایی

بر کوه توان دادی، برسبزه تو جان دادی، جانی و جهان دادی

تو ربّ توانایی

من کی بتوان شکرت، ای فاضل بی‌منّت، سرچشمه‌ی هر نعمت

بالایی و والایی

هم آتش و آب از تو، دریا و سراب از تو، بیداری و خواب از تو

تو چشمه‌ی بارانی

از غیر که بگسستم، تنها به تو وابستم، نومید مکن دستم

ای خالق زیبایی.

سپاس گزاری

سپاس خداوند بخشنده‌ی مهربان که هر چه دارم از اوست و در تمام لحظات زندگی همواره مرا مورد الطاف بیکران خود قرار داده است.

سپاس خداوند یکتای دانا که با عنایات بیکران خود به من توفیق داد تا در راه مقدس علم قدم گذارم و در این راه آموزگاران و اساتید بزرگی را راهنمای من قرار داد تا همگی مرا به سوی شاه‌راه علم هدایت نمایند. بنابراین بر خود واجب می‌دانم تا از این بزرگان تشکر و سپاس‌گزاری نمایم.

از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفری، که راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و با صبر و حوصله بسیار مرا در انجام آن راهنمایی نموده‌اند، کمال قدردانی را دارم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر خسروی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، صبورانه و به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند کمال امتنان را دارم.

همچنین از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر هاشمی و جناب آقای دکتر فرامرزی که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل کردند و با نظرات خود موجب غنای بیشتر پایان‌نامه شدند تشکر می‌نمایم.

در پایان تشکر می‌کنم از مادر، برادران و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من هستند. همچنین از جناب آقای بهمن حکمت‌جو نهایت تشکر را دارم.

ام‌البنین جاهدی جوزچال

دی ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب ام‌البنین جاهدی جورچال دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه برابری گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های حافظ رده‌ی تزویج روی P-گروه‌های متناهی تحت راهنمائی دکتر سید حیدر جعفری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد

مقاله مستخرج از پایان‌نامه

[1] Jahedi. O, (2013), "A note on the class preserving automorphisms group", The 23^{th} Iranian Algebra Seminar, Faculty of Computer and Mathematics, Khansar, Iran.

مقدمه

فرض کنید G یک گروه باشد. گروه همه خودریختی‌های G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. خودریختی α از $Aut(G)$ را یک خودریختی مرکزی گوییم در صورتی که برای هر $x \in G$، $x^{-1}\alpha(x) \in Z(G)$. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های مرکزی G که آن را با $Autcent(G)$ نشان می‌دهیم یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.
خودریختی β از $Aut(G)$ را یک خودریختی حافظ رده تزویج گوییم در صورتی که برای هر $g \in G$، $\beta(g) \in g^G$. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های حافظ رده تزویج G که آن را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.
ادنی و ین[۱] [۴] نشان دادند، بین گروه خودریختی‌های مرکزی از یک گروه ناآبلی محض مانند G و $Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))$ یک تناظر دوسویی وجود دارد.
در سال ۱۹۱۱، برنساید[۲] [۸] این سوال را مطرح کرد، آیا گروه متناهی G وجود دارد که دارای خودریختی حافظ رده غیر داخلی باشد؟ و در سال ۱۹۱۳، برنساید [۹] به این سوال پاسخ مثبت داد و گروه G را چنان معرفی کرد که $Aut_c(G) \neq Inn(G)$. در سال ۱۹۴۷، وال[۳] [۴۰] مثالی از گروه متناهی G که $Aut_c(G) \neq Inn(G)$ را ارائه کرد. همچنین در سال ۲۰۰۸، یاداو[۴] [۴۲] گروه‌های از مرتبه p^5 (p اول فرد)، که $Aut_c(G) \neq Inn(G)$ را بیان کرد. همین‌طور نویسندگان [۱۹]، [۲۰]، [۲۴]، [۲۷]، [۳۶] و [۳۷] گروه‌هایی با مرتبه بزرگتر مساوی p^6 ارائه کردند که $Aut_c(G) \neq Inn(G)$.
در سال ۱۹۸۸، فیت و سیتز[۵] [۱۳] برای هر گروه ساده متناهی G و در سال ۲۰۰۱، یاداو و ورمانی[۶] [۴۵] برای هر گروه از مرتبه p^4 نشان دادند که $Aut_c(G) = Inn(G)$ است. همچنین نویسندگان دیگری از جمله آنو و ودا[۷] [۳۱]، [۳۲]، [۳۸] و [۳۹] برای گروه‌هایی از G ثابت کردند که $Aut_c(G) = Inn(G)$.
در سال ۱۹۹۹ ، مان[۸] [۲۸] با طرح سوال‌هایی از جمله این‌که، "چه p-گروه‌هایی، خودریختی‌هایی دارند که حافظ رده تزویج نباشند؟" به بحث در این‌باره پرداخت. در سال ۱۹۸۰، هینکن [۹] [۱۹] مثال‌هایی از p-گروه‌های متناهی G از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ که $Aut(G) = Aut_c(G)$ را آورده است. در سال ۱۹۹۲، مالینوسکا[۱۰] [۲۷] مثال‌هایی از p-گروه‌های متناهی G از رده‌ی پوچ‌توانی ۳ که $Aut(G) = Aut_c(G)$ را آورده است. گروه G که $Aut(G) = Autcent(G)$ توسط افراد زیادی از جمله یاداو و همکارانش

---
[۱] Adney and Yen
[۲] Burnside
[۳] Wall
[۴] Yadav
[۵] Feit and Seitz
[۶] Vermani
[۷] Ono and Wada
[۸] Mann
[۹] Heineken
[۱۰] Malinowska

[۲۲] و [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۲۰۱۱، یاداو [۴۳] p-گروه‌هایی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ که $Autcent(G) = Aut_c(G)$ را رده‌بندی کرد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. فصل اول، به تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.

در فصل دوم، گروه خودریختی‌های مرکزی و گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج مورد مطالعه قرار گرفته است. در بخش اول از این فصل نشان می‌دهیم، بین گروه خودریختی‌های مرکزی از یک گروه ناآبلی محض مانند G و $Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))$ یک تناظر دوسویی وجود دارد. در بخش دوم نیز نشان می‌دهیم، بین گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج از یک گروه متناهی مانند G از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ و $Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$ یک تکریختی وجود دارد.

فصل سوم، شامل دو بخش است که در این فصل گروه‌های G صادق در فرض $Aut_c(G) = Autcent(G)$ مورد مطالعه قرار گفته است. در بخش اول از این فصل، شرط لازم و کافی برای یک p-گروه ناآبلی متناهی G که $Aut_c(G) = Autcent(G)$ را بیان می‌کنیم همچنین نشان خواهیم داد، اگر G یک p-گروه متناهی باشد که گروه خودریختی‌های مرکزی آن حافظ رده تزویج هستند آنگاه $d(G)$ زوج است. در بخش دوم به معرفی گروه‌های ایزوکلینیسم[۱۱]، کامینا[۱۲]، ویژه و فوق ویژه پرداخته و ارتباط آن‌ها را با $Aut_c(G) = Autcent(G)$ بیان خواهیم کرد.

فصل چهارم، نیز شامل دو بخش است که در بخش اول p-گروه‌های متناهی G از مرتبه کمتر مساوی p^7 که در مورد آن $Aut_c(G) = Autcent(G)$ است را مشخص می‌کنیم و در بخش دوم با فرض $Aut(G) = Aut_c(G)$ نشان خواهیم داد $|G| \geqslant p^8$ و در صورتی‌که $Aut(G) = Aut_c(G)$ آبلی باشد، آنگاه $|G| = p^8$ اگر و تنها اگر $|Aut(G)| = p^{12}$.

[۱۱] Isoclinism
[۱۲] Camina

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی از مفاهیم و نتایجی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز خواهد بود را می‌آوریم.

۱.۱ گروه‌های پوچ‌توان

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. سری

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \ldots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی گوییم در صورتی‌که به ازای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-۱}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-۱}}).$$

تعریف ۲.۱.۱. گروه G را پوچ‌توان نامیم هرگاه یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده پوچ‌توانی G گوییم و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳.۱.۱. هر گروه آبلی یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۱ است.

لم ۴.۱.۱. *هر p- گروه متناهی پوچ‌توان است.*

برهان. به [۲] صفحه ۲۱۹ رجوع شود. □

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه غیر بدیهی متناهی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

(۱) *G پوچ‌توان است.*

(۲) *G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.*

برهان. به [۲] صفحه ۲۲۳ رجوع شود. □

لم ۶.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان باشد و $H \trianglelefteq G$، در این‌صورت $\frac{G}{H}$ پوچ‌توان است و $c(\frac{G}{H}) \leqslant c(G)$.*

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این‌صورت $x^{-۱}y^{-۱}xy$ را جابه‌جاگر x و y نامیده و با علامت $[x, y]$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه برای $x \in G$، $\{[x, g] \mid g \in G\}$ را با $[x, G]$ نشان می‌دهیم.

توجه ۸.۱.۱. $x^G = [x] = \{g^{-۱}xg \mid g \in G\}$.

توجه ۹.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت برای هر $x \in G$، $x^G = x[x, G]$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند. $[H, K]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[H, K] = \langle\{[h, k] \mid h \in H, k \in K\}\rangle.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. برای گروه G تعریف می‌کنیم، $\gamma_۱(G) = G$ و به صورت استقرایی، $\gamma_{n+۱}(G) = [\gamma_n(G), G]$. در این‌صورت سری

$$G = \gamma_۱(G) \geq \gamma_۲(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

را سری مرکزی پایینی G گوییم.

در حالت خاص، زیرگروه تولید شده توسط همه جابه‌جاگرهای $[x, y]$ در G را زیرگروه جابه‌جاگر نامیده و با $\gamma_۲(G)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$\gamma_۲(G) = [G, G] = G' = \langle\{[x, y] \mid x, y \in G\}\rangle.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دنباله $\{Z_n(G)\}_{n=۰}$ از زیرگروه‌های G را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$Z_۰(G) = ۱, \quad \frac{Z_{n+۱}(G)}{Z_n(G)} = Z(\frac{G}{Z_n(G)}).$$

در این‌صورت به سری

$$۱ = Z_۰(G) \leq Z_۱(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \cdots$$

سری مرکزی بالایی G گوییم.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

(۱) *کوچکترین عدد طبیعی n موجود است که، $\gamma_{n+۱}(G) = ۱$.*

(۲) $c(G)=n$.

(۳) کوچکترین عدد طبیعی n موجود است که، $Z_n(G)=G$.

برهان. به [۲۵] صفحه ۳۸ رجوع شود. □

لم ۱.۱.۱۴. *فرض کنید G یک گروه باشد و $m,n\in\mathbb{N}$. در این‌صورت $Z_n(\frac{G}{Z_m(G)})=\frac{Z_{m+n}(G)}{Z_m(G)}$.*

برهان. به [۳۳] صفحه ۱۲۵ رجوع شود. □

نتیجه ۱.۱.۱۵. *فرض کنید G یک گروه نابدیهی باشد. در این‌صورت G پوچ‌توان از رده n است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ‌توان از رده $n-1$ باشد.*

برهان. بنا به لم ۱.۱.۱۴، داریم $\frac{Z_n(G)}{Z(G)}=Z_{n-1}(\frac{G}{Z(G)})$. بنابراین G پوچ‌توان از رده n است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ‌توان از رده $n-1$ باشد. □

لم ۱.۱.۱۶. *فرض کنید G یک گروه متناهی پوچ‌توان و $\frac{G}{G'}$ دوری باشد در این‌صورت G دوری است.*

برهان. به [۳۴] صفحه ۲۷۱ رجوع شود. □

لم ۱.۱.۱۷. *فرض کنید G یک گروه باشد و $x,y,z\in G$. در این‌صورت،*

(۱) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$.

(۲) $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$.

(۳) $[x^{-1},y]=([x,y]^{-1})^{x^{-1}}$.

(۴) $[x,y^{-1}]=([x,y]^{-1})^{y^{-1}}$.

برهان. به [۳۳] صفحه ۱۲۳ رجوع شود. □

لم ۱.۱.۱۸. *فرض کنید G یک گروه باشد و $\gamma_2(G)\leq Z(G)$. در این‌صورت برای هر $x,y,z\in G$،*

(۱) $[xy,z]=[x,z][y,z]$.

(۲) $[x,yz]=[x,y][x,z]$.

برهان. بنا به لم قبل واضح است. □

لم ۱.۱.۱۹. *اگر G یک گروه پوچ‌توان از رده ۲ باشد، آنگاه $[x,G]$ زیرگروه G است.*

برهان. برای هر $[x,g],[x,h]\in[x,G]$،
$$[x,g][x,h]^{-1}=[x,g]h^{-1}[x,h^{-1}]h.$$

چون G پوچ‌توان از رده ۲ است لذا $[x,h^{-1}]\in Z(G)$ و بنابراین $[x,g][x,h]^{-1}=[x,g][x,h^{-1}]$ در نتیجه بنا به لم ۱.۱.۱۸، $[x,g][x,h^{-1}]=[x,gh^{-1}]$. بنابراین $[x,g][x,h]^{-1}\in[x,G]$. $\square$

۱.۱.۱ زیرگروه فراتینی

تعریف ۱.۱.۲۰. اشتراک همه زیرگروه‌های ماکزیمال G را زیرگروه فراتینی G می‌نامیم و با $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکزیمال باشد قرارداد می‌کنیم $G=\Phi(G)$. برای گروه‌های متناهی $\Phi(G)\neq G$.

لم ۱.۱.۲۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $C\subseteq G$، $D\subseteq\Phi(G)$. در این‌صورت، اگر $G=\langle C,D\rangle$ آنگاه $G=\langle C\rangle$.*

برهان. به [۲] صفحه ۲۳۳ رجوع شود. $\square$

لم ۱.۱.۲۲. *اگر G یک گروه باشد و $H,K\leq G$، آنگاه $\Phi(H\times K)\leq\Phi(H)\times\Phi(K)$.*

برهان. به [۳] جلد اول صفحه ۳۲۶ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱.۱.۲۳. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $G'\leq\Phi(G)$.*

برهان. به [۲] صفحه ۲۳۴ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱.۱.۲۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد. در این‌صورت $\Phi(G)=G'G^p$ که $G^p=\langle g^p \mid g\in G\rangle$.*

برهان. به [۲] صفحه ۲۳۴ رجوع شود. $\square$

نتیجه ۱.۱.۲۵. *اگر G یک p-گروه متناهی باشد، آنگاه $\frac{G}{\Phi(G)}$ آبلی مقدماتی است.*

لم ۱.۱.۲۶. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد. در این‌صورت $\Phi(G)=1$ اگر و تنها اگر G آبلی مقدماتی باشد.*

برهان. به [۳۴] صفحه ۲۷۰ رجوع شود. $\square$

لم ۲۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. در این‌صورت اگر $N \leq \Phi(G)$، آنگاه $\frac{\Phi(G)}{N} = \Phi(\frac{G}{N})$.*

برهان. به [۲] رجوع شود. □

قضیه ۲۸.۱.۱. *(قضیه پایه برنساید). فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد و $\mid \frac{G}{\Phi(G)} \mid = p^r$. در این‌صورت هر مجموعه مولد G، زیر مجموعه‌ای با r عضو دارد که G را تولید می‌کند و $d(G) = r$ ($d(G)$ تعداد عناصر در یک مجموعه مولد مینیمال است).*

برهان. به [۲] صفحه ۲۳۵ رجوع شود. □

لم ۲۹.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و d تعداد عناصر در یک مجموعه مولد مینیمال باشد و $H \trianglelefteq G$. در این‌صورت،*

(۱) $d(\frac{G}{H}) \leqslant d(G)$.

(۲) $d(G) = d(\frac{G}{\Phi(G)})$.

۲.۱ همریختی‌ها و خودریختی‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد. در این‌صورت، مجموعه همه همریختی‌ها از G به H را با $Hom(G,H)$ نشان می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $Hom(G,H)$ همراه با عمل زیر یک گروه آبلی است.

برای هر $f,g \in Hom(G,H)$ و هر $x \in G$، $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

لم ۲.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد. در این‌صورت،*

$$Hom(G,H) \cong Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, H).$$

برهان. فرض کنید $\bar{f} : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد. در این‌صورت $\gamma_۲(G) \leq Ker\bar{f}$. بنابراین به ازای هر همریختی مانند $\bar{f}$ یک همریختی مانند $f : \frac{G}{\gamma_۲(G)} \longrightarrow H$ القا می‌شود که $\bar{f}(x) = f(x\gamma_۲(G))$. براحتی ثابت می‌شود که

$$\varphi : Hom(G,H) \underset{\bar{f} \mapsto f}{\longrightarrow} Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, H)$$

یکریختی است. □

نتیجه ۳.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. در این‌صورت،*

$$Hom(G,Z(G)) \cong Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, Z(G)).$$

توجه ۴.۲.۱. اگر $f:\frac{G}{\gamma_{2}(G)}\longrightarrow Z(G)$ یک همریختی و $\bar{f}$ همریختی متناظر آن در $Hom(G,Z(G))$ باشد، آنگاه برای هر $x\in G$، $\bar{f}(x)=f(x\gamma_{2}(G))$ و لذا بدون اینکه مشکلی ایجاد شود می‌توان به جای $\bar{f}$ از همان f استفاده کرد.

لم ۵.۲.۱. *فرض کنید C_m و C_n دو گروه دوری به ترتیب از مرتبه m و n باشند. در این‌صورت، $Hom(C_n,C_m)\cong C_d$ که $d=(n,m)$ و C_d یک گروه دوری از مرتبه d است.*

برهان. فرض کنید $C_n=\langle x\rangle$ و $C_m=\langle y\rangle$ دو گروه دوری به ترتیب از مرتبه m و n باشند و $\varphi_i:C_n\underset{x\mapsto y^i}{\longrightarrow}C_m$ یک همریختی باشد. در این صورت ثابت می‌شود که
$$\psi:Hom(C_n,C_m)\underset{\varphi_i\mapsto i}{\longrightarrow}C_d$$
یکریختی است. □

لم ۶.۲.۱. *فرض کنید A، B و C گروه‌های آبلی متناهی باشند. در این‌صورت،*

(*الف*) $Hom(A\times B,C)\cong Hom(A,C)\times Hom(B,C)$

(*ب*) $Hom(A,B\times C)\cong Hom(A,B)\times Hom(A,C)$

برهان. به [۳۵] صفحه ۳۳۸ رجوع شود. □

لم ۷.۲.۱. *فرض کنید A، B و C گروه‌های آبلی متناهی باشند که $A\cong B$. در این‌صورت، $Hom(A,C)\cong Hom(B,C)$.*

لم ۸.۲.۱. *فرض کنید A و B گروه‌های آبلی متناهی باشند. در این‌صورت، $Hom(A,B)\cong Hom(B,A)$.*

برهان. با استفاده از لم‌های ۵.۲.۱ و ۶.۲.۱ نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۹.۲.۱. *فرض کنید A و C گروه‌های آبلی متناهی باشند و $B\leq C$. در این‌صورت، $|Hom(A,B)|\leqslant|Hom(A,C)|$.*

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت، هر همریختی از G به G را یک درون‌ریختی G می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت، هر یکریختی از G به G را یک خودریختی G می‌نامیم. به‌علاوه مجموعه‌ی همه خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که آن را گروه خودریختی‌های G می‌نامیم و با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۲.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و $۲ < |G|$، در این‌صورت* $Aut(G) \neq ۱$.

برهان. به [۱] صفحه ۱۰۵ رجوع شود. □

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنید $G = H \times K$ تجزیه‌ای از G به حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه نرمالش باشد. در این‌صورت،*

(۱) $Aut(H) \times Aut(K) \hookrightarrow Aut(G)$،

(۲) *اگر G متناهی باشد و $(|H|, |K|) = ۱$ آنگاه* $Aut(H) \times Aut(K) \cong Aut(G)$.

برهان. به [۲] صفحه ۱۴۲ رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $g \in G$. در این‌صورت نگاشت $i_g : G \longrightarrow G$ با ضابطه $i_g(x) = x^g$ یک خودریختی G است که آن را خودریختی داخلی G می‌نامیم. همچنین مجموعه همه خودریختی‌های داخلی G، تشکیل زیرگروهی از $Aut(G)$ می‌دهد که آن را گروه خودریختی‌های داخلی G می‌نامیم و با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۵.۲.۱. *برای گروه G،* $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$ *و* $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$.

برهان. به [۱] صفحه ۱۰۰ رجوع شود. □

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و α یک درونریختی G باشد. در این‌صورت، α را نرمال گوییم هرگاه α با هر خودریختی داخلی G جابه‌جا شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید α درونریختی G باشد. در این‌صورت، α را پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد طبیعی مانند m وجود داشته باشد که، $\alpha^m = ۰$.

لم ۱۸.۲.۱. *فرض کنید G در شرط زنجیر افزایشی(کاهشی) بر زیرگروه‌های نرمال صدق کرده و f یک درونریختی(نرمال) G باشد. در این‌صورت f یک خودریختی است اگر و تنها اگر f یک بروریختی(تکریختی) باشد.*

برهان. به [۱۷] رجوع شود. □

قضیه ۱۹.۲.۱. (لم فیتینگ): *فرض کنید G یک گروه متناهی و α یک درونریختی نرمال G باشد. در این‌صورت، اگر α نه خودریختی باشد و نه پوچ‌توان، آنگاه G را می‌توان به حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه غیر بدیهی‌اش تجزیه کرد.* $(\exists k : G = Im\alpha^k \times Ker\alpha^k)$.

برهان. به [۲] صفحه ۱۱۴ رجوع شود. □

۳.۱ برخی دیگر از تعاریف و لم‌های مورد نیاز

قضیه ۱.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی غیر بدیهی باشد و $a \in G$. در این‌صورت اگر مرتبه a از مرتبه هر عضو G ناکمتر باشد، آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد که $G = \langle a\rangle \times H$.*

برهان. به [۲] صفحه ۱۲۶ رجوع شود. □

نتیجه ۲.۳.۱. (وجود تجزیه در گروه‌های آبلی متناهی). *هر گروه آبلی متناهی غیر بدیهی را می‌توان به حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری آن که مرتبه هر یک از آن‌ها توان مثبتی از یک عدد اول است تجزیه کرد.*

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد و $\frac{G}{Z(G)} = C_{p^{m_۱}} \times \cdots \times C_{p^{m_d}}$ که $m_۱ \geqslant m_۲ \geqslant \cdots \geqslant m_d \geqslant ۱$. به $p^{m_۱}, \ldots$ و p^{m_d} پایاهای $\frac{G}{Z(G)}$ گفته می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. برای p-گروه متناهی G، زیرگروه $\langle x \in G : x^{p^m} = ۱\rangle$ را با $\Omega_m(G)$ و زیرگروه $\langle x^{p^m} : x \in G\rangle$ را با $\Omega^m(G)$ نشان می‌دهیم، که p عدد صحیح اول و m عدد صحیح مثبت است.

لم ۵.۳.۱. *فرض کنید H و K، p-گروه‌هایی متناهی باشند. در این‌صورت،*

(۱) $\Omega_m(H \times K) = \Omega_m(H) \times \Omega_m(K)$.

(۲) $\Omega^m(H \times K) = \Omega^m(H) \times \Omega^m(K)$.

برهان. (۱)

$$\begin{aligned}
\Omega_m(H \times K) &= \langle (h,k) \in H \times K \mid (h,k)^{p^m} = ۱\rangle \\
&= \langle (h,k) \in H \times K \mid (h^{p^m}, k^{p^m}) = ۱\rangle \\
&= \langle (h,k) \in H \times K \mid h^{p^m} = ۱, k^{p^m} = ۱\rangle \\
&= \langle h \in H \mid h^{p^m} = ۱\rangle \times \langle k \in K \mid k^{p^m} = ۱\rangle \\
&= \Omega_m(H) \times \Omega_m(K).
\end{aligned}$$

(۲)

$$\begin{aligned}\Omega^m(H\times K)&=\langle (h,k)^{p^m} | (h,k)\in H\times K\rangle\\&=\langle (h^{p^m},k^{p^m}) | h\in H, k\in K\rangle\\&=\langle h^{p^m} | h\in H\rangle\times\langle k^{p^m} | k\in K\rangle\\&=\Omega^m(H)\times\Omega^m(K).\end{aligned}$$

□

لم ۶.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه آبلی باشد و $G=\langle a_۱\rangle\times\cdots\times\langle a_t\rangle$ تجزیه‌ای از G (با فرض وجود) به حاصل‌ضرب مستقیم t زیرگروه دوری غیر بدیهی G باشد. در این‌صورت به ازای هر عدد طبیعی m،*

$$\Omega^m(G)=\langle a_۱^{p^m}\rangle\times\cdots\times\langle a_t^{p^m}\rangle,$$

به‌علاوه، اگر G متناهی باشد و به ازای هر i، $t \leqslant i \leqslant ۱$، $p^{n_i} \mid p^m$ که در آن $p^{n_i} = \mid a_i \mid$ آنگاه،

$$\Omega_m(G)=\langle a_۱^{p^{n_۱-m}}\rangle\times\cdots\times\langle a_t^{p^{n_t-m}}\rangle.$$

بنابراین،

$$\mid \Omega_m(G)\mid = (p^m)^t.$$

برهان. به [۲] صفحه ۱۲۸ رجوع شود. □

لم ۷.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی باشد. در این‌صورت، $\Omega_m(G)\cong\frac{G}{\Omega^m(G)}$.*

برهان. فرض کنید $G=\langle a_۱\rangle\times\cdots\times\langle a_t\rangle$ تجزیه G به حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری باشد و $\mid a_i\mid = p^{n_i}$. فرض کنید برای i، $۱\leqslant i\leqslant s$ که $s<t$، $m<n_i$ و برای i، $s<i\leqslant t$، $m\geqslant n_i$. حال چون برای $m\geqslant n_i$، $\Omega_m(\langle a_i\rangle)=\langle a_i\rangle$ و $\Omega^m(\langle a_i\rangle)=۱$ لذا برای $s<i\leqslant t$، $\Omega_m(\langle a_i\rangle)=\langle a_i\rangle$ و $\Omega^m(\langle a_i\rangle)=۱$. بنا به لم قبل،

$$\Omega^m(G)=\langle a_۱^{p^m}\rangle\times\cdots\times\langle a_s^{p^m}\rangle\times ۱\times\cdots\times ۱,$$

$$\Omega_m(G)=\langle a_۱^{p^{n_۱-m}}\rangle\times\cdots\times\langle a_s^{p^{n_s-m}}\rangle\times\langle a_{s+۱}\rangle\times\cdots\times\langle a_t\rangle.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}\frac{G}{\Omega^m(G)}&=\frac{\langle a_۱\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle\times\cdots\times\langle a_t\rangle}{\langle a_۱^{p^m}\rangle\times\cdots\times\langle a_s^{p^m}\rangle\times ۱\cdots\times ۱}\\&\cong\frac{\langle a_۱\rangle}{\langle a_۱^{p^m}\rangle}\times\cdots\times\frac{\langle a_s\rangle}{\langle a_s^{p^m}\rangle}\times\frac{\langle a_{s+۱}\rangle}{۱}\times\cdots\times\frac{\langle a_t\rangle}{۱}.\end{aligned}$$

چون مرتبه $\langle a_i^{p^{n_i-m}}\rangle$ و $\frac{\langle a_i\rangle}{\langle a_i^{p^m}\rangle}$ برابر است لذا برای هر i، $1 \leqslant i \leqslant s$،

$$\langle a_i^{p^{n_i-m}}\rangle \cong \frac{\langle a_i\rangle}{\langle a_i^{p^m}\rangle},$$

همچنین برای $s < i \leqslant t$، $\langle a_i\rangle \cong \frac{\langle a_i\rangle}{1}$. بنابراین،

$$\Omega_m(G) \cong \frac{G}{\Omega^m(G)}.$$

□

لم ۸.۳.۱. *فرض کنید C_{p^m} یک گروه دوری از مرتبه p^m و B یک p-گروه آبلی متناهی باشد. در این‌صورت،* $|Hom(C_{p^m}, B)| = |Hom(C_{p^m}, \Omega_m(B))|$.

برهان. فرض کنید $f : C_{p^m} \underset{x\mapsto f(x)}{\longrightarrow} B$ یک همریختی باشد. چون $|x| \mid |f(x)|$ و x حداکثر از مرتبه p^m است لذا $Imf \subseteq \Omega_m(B)$. در نتیجه $\bar{f} : C_{p^m} \underset{x\mapsto f(x)}{\longrightarrow} \Omega_m(B)$ یک همریختی است. حال به‌راحتی می‌توان نشان داد

$$\varphi : Hom(C_{p^m}, B) \underset{f\mapsto \bar{f}}{\longrightarrow} Hom(C_{p^m}, \Omega_m(B))$$

یکریختی است. □

تعریف ۹.۳.۱. نمای G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$exp(G) = Min\{t \mid t \in \mathbb{N}, x^t = e,\ \forall x \in G\}$$

لم ۱۰.۳.۱. *فرض کنید H و K، دو گروه باشند. در این‌صورت* $exp(H \times K) = [exp(H), exp(K)]$. *($[]$، یعنی کوچکترین مضرب مشترک).*

لم ۱۱.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$ در این‌صورت* $exp(H) \mid exp(G)$.

لم ۱۲.۳.۱. *فرض کنید K یک p-گروه آبلی از نمای p^c باشد و A دوری از مرتبه‌ای باشد که توسط p^c شمرده می‌شود. در این‌صورت* $Hom(K, A) \cong K$.

برهان. چون K یک p-گروه آبلی است لذا فرض کنید،

$$K = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_t}},$$

چون $exp(K) = p^c$ لذا ماکزیمم مرتبه عناصر آن برابر p^c است. بنابراین $p^{m_i} \leqslant p^c$. فرض کنید $A = \langle x \rangle$ دوری از مرتبه p^n باشد که، $p^c \mid p^n$. بنا به لم‌های ۶.۲.۱ و ۵.۲.۱،

$$\begin{aligned} Hom(K, A) &\cong Hom(C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_t}}, \langle x \rangle) \\ &\cong Hom(C_{p^{m_1}}, \langle x \rangle) \times \cdots \times Hom(C_{p^{m_t}}, \langle x \rangle) \\ &\cong C_{(p^{m_1}, p^n)} \times \cdots \times C_{(p^{m_t}, p^n)} \\ &\overset{p^{m_i} \leqslant p^c \leqslant p^n}{\cong} C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_t}} = K. \end{aligned}$$

□

تعریف ۱۳.۳.۱. به زیرمجموعه $\{y_1, \ldots, y_d\}$ از گروه آبلی متناهی A، یک پایه مینیمال برای A گفته می‌شود هرگاه،

$$A = \langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle \times \cdots \times \langle y_d \rangle, \quad |\langle y_d \rangle| > 1$$

و برای هر i، $1 \leqslant i \leqslant d$، $|y_i| \mid |y_{i-1}|$.

تعریف ۱۴.۳.۱. مجموعه مولد مینیمال $\{x_1, \ldots, x_d\}$ از p-گروه متناهی G از رده‌ی پوچ‌توانی ۲، مولد مینیمال مشخص گفته می‌شود هرگاه مجموعه $\{\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_d}\}$ که $\bar{x_i} = x_i Z(G)$ ، یک پایه مینیمال برای $\frac{G}{Z(G)}$ باشد.

قضیه ۱۵.۳.۱. (قانون مدولی ددکیند): *فرض کنید A، B و C زیرگروه‌هایی از گروه G باشند که $B \leq A$. در این‌صورت $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.*

برهان. فرض کنید $a \in B(A \cap C)$، در این‌صورت $b \in B$ و $d \in A \cap C$ وجود دارند که، $a = bd$. چون $B \leq A$ لذا $b \in A$. از طرفی $d \in A \cap C$ پس $d \in A$ بنابراین $a = bd \in A$. همچنین $d \in C$ و $b \in B$ پس $a \in BC$ و در نتیجه $a \in A \cap (BC)$، بنابراین $B(A \cap C) \subseteq A \cap (BC)$.
برعکس، فرض کنید $a \in A \cap (BC)$ در این‌صورت $b \in B$ و $c \in C$ وجود دارند که، $a = bc$. چون $B \leq A$ لذا $b^{-1}a = c \in A \cap C$ و در نتیجه $a \in B(A \cap C)$، بنابراین $A \cap (BC) \subseteq B(A \cap C)$. □

لم ۱۶.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی و M یک زیرگروه ماکزیمال G باشد. در این‌صورت زیرگروه H از G و عدد صحیح مثبت i وجود دارند که $G = H \times C_{p^{i+1}}$ و $M = H \times C_{p^i}$.*

برهان. با استقرا روی مرتبه $|G| \geqslant p$، حکم را ثابت می‌کنیم.
چون $M < G$ لذا $|G| \neq 1$. اگر $|G| = p$، بدیهی است که لم برقرار است. بنابراین فرض کنید $|G| > p$

و نتیجه برای هر p-گروه متناهی با مرتبه کمتر اکید از $|G|$ برقرار باشد. فرض کنید $q = p^e$ نمای G باشد. $G \neq 1$ لذا $q > 1$. فرض کنید $y \in G$ با مرتبه q باشد، بنا به قضیه ۱.۳.۱، زیرگروه I از G وجود دارد که $G = \langle y \rangle \times I$. چون $|\langle y \rangle| > 1$ لذا $|I| < |G|$. حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: فرض کنید $y \in M$. در این‌صورت $\langle y \rangle \subseteq M$ لذا با استفاده از قانون مدولی $M = \langle y \rangle \times (M \cap I)$ و چون $p = \frac{|G|}{|M|} = \frac{|I|}{|I \cap M|}$ لذا، $M \cap I$ زیرگروه ماکزیمال I است. چون $|I| < |G|$، پس با استفاده از فرض استقرا زیرگروه $J < I$ و عنصر $x \in I$ وجود دارند که $I = J \times \langle x \rangle$ و $M \cap I = J \times \langle x^p \rangle$. لذا با این x و زیرگروه $H = J \times \langle y \rangle$ از G، $G = H \times \langle x \rangle$ و $M = H \times \langle x^p \rangle$.

حالت دوم: فرض کنید $y \notin M$ و $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ پایه‌ای مینیمال برای G باشد که مرتبه x_1 برابر q نمای G است. چون M شامل عنصری از مرتبه q در G نیست پس مشمول در زیرگروه

$$K = \langle x_1^p \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_d \rangle$$

است که دارای اندیس p در G می‌باشد. چون M در G ماکزیمال است لذا $M = K$. حال با در نظر گرفتن $x = x_1$ و $H = \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_d \rangle$ داریم $G = H \times \langle x \rangle$ و $M = H \times \langle x^p \rangle$. $\square$

لم ۱۷.۳.۱. *فرض کنید A، B، C و D، p-گروه‌های آبلی متناهی باشند که A یکریخت با یک زیرگروه سره از B و C یکریخت با یک زیرگروه سره از D است. در این‌صورت،*

$$|Hom(A, C)| < |Hom(B, D)|.$$

برهان. فرض کنید $A \cong A_1$ که $A_1 < B$ و $C \cong C_1$ که $C_1 < D$. چون A_1 و C_1 سره هستند پس زیرگروه‌های ماکزیمال M از B و N از D وجود دارند که، $A_1 \leq M$ و $C_1 \leq N$. بنا به لم ۱۶.۳.۱، زیرگروه E از B و زیرگروه F از D و صحیح‌های نامنفی i و j وجود دارند به‌طوری‌که $M \cong E \times C_{p^i}$ و $B \cong E \times C_{p^{i+1}}$ و همچنین $N \cong F \times C_{p^j}$ و $D \cong F \times C_{p^{j+1}}$.

بنا به لم ۶.۲.۱،

$$Hom(M, N) \cong Hom(E, F) \times Hom(E, C_{p^j}) \times Hom(F, C_{p^i}) \times Hom(C_{p^i}, C_{p^j})$$

و

$$Hom(B, D) \cong Hom(E, F) \times Hom(E, C_{p^{j+1}}) \times Hom(F, C_{p^{i+1}}) \times Hom(C_{p^{i+1}}, C_{p^{j+1}})$$

چون،

$$|Hom(E, C_{p^j})| \leqslant |Hom(E, C_{p^{j+1}})|,$$

و

$$|Hom(F, C_{p^i})| \leqslant |Hom(F, C_{p^{i+1}})|,$$

و

$$|Hom(C_{p^i}, C_{p^j})| < |Hom(C_{p^{i+1}}, C_{p^{j+1}})|,$$

لذا،

$$|Hom(M, N)| < |Hom(B, D)|.$$

حال با استفاده از لم‌های ۷.۲.۱ و ۹.۲.۱،

$$|Hom(A, C)| = |Hom(A_1, C_1)| \leqslant |Hom(M, N)|.$$

بنابراین،

$$|Hom(A, C)| < |Hom(B, D)|.$$

$\square$

لم ۱۸.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

(۱) *(لم موریگی[۱])، $exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)})$ و در تجزیه $\frac{G}{Z(G)}$ به حاصل‌ضرب مستقیم از گروه‌های دوری، حداقل دو عامل از مرتبه ماکزیمم وجود دارد.*

(۲) *برای هر $x \in G - Z(G)$، $[x, G]$ زیرگروه نرمال نابدیهی G مشمول در $\gamma_2(G)$ است.*

(۳) *برای هر $x \in G - Z(G)$، نمای زیرگروه $[x, G]$ برابر با مرتبه $\bar{x} = xZ(G) \in \frac{G}{Z(G)}$ است.*

برهان. (۱) فرض کنید نمای $\gamma_2(G)$ برابر p^c باشد لذا طبق تعریف نما، برای هر $x, y \in G$، $[x, y]^{p^c} = 1$. چون G از رده ۲ است لذا بنا به لم ۱۸.۱.۱، $[x^{p^c}, y] = 1$. در نتیجه $x^{p^c} \in Z(G)$ بنابراین $x^{p^c}Z(G) = Z(G) = 1_{\frac{G}{Z(G)}}$. چون x دلخواه است پس حداکثر مرتبه هر عضو $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p^c است. بنابراین نمای $\frac{G}{Z(G)}$ کمتر یا مساوی p^c است. ادعا می‌کنیم کمتر از p^c نمی‌تواند باشد. فرض کنید(فرض خلف) نمای $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p^b باشد و $b < c$. در این‌صورت $x^{p^b}Z(G) = Z(G)$ در نتیجه $x^{p^b} \in Z(G)$ بنابراین برای هر $g \in G$، $[x^{p^b}, g] = 1$. لذا $[x, g]^{p^b} = 1$ و چون $\gamma_2(G)$ آبلی است لذا برای هر عضو دلخواه $[x_1, y_1] \cdots [x_t, y_t]$ از $\gamma_2(G)$،

$$([x_1, y_1] \cdots [x_t, y_t])^{p^b} = [x_1, y_1]^{p^b} \cdots [x_t, y_t]^{p^b} = 1.$$

لذا نمای $\gamma_2(G)$ کمتر یا مساوی p^b است که $b < c$ و این متناقض با فرض $exp(\gamma_2(G)) = p^c$ است. در نتیجه نمای $\frac{G}{Z(G)}$ باید برابر p^c باشد و بنابراین $exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)})$.

[۱] Morigi

حال برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید $exp(\gamma_{۲}(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p^m$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong \langle \bar{x_{۱}} \rangle \times \cdots \times \langle \bar{x_t} \rangle$ که $\bar{x_i} = x_i Z(G)$. در این‌صورت $\frac{G}{Z(G)}$ حداقل دو عامل از مرتبه p^m دارد زیرا در غیر این‌صورت برای هر $x, y \in G$، $xZ(G) = x_{۱}^{k_{۱}} \cdots x_t^{k_t} Z(G)$ و $yZ(G) = x_{۱}^{k'_{۱}} \cdots x_t^{k'_t} Z(G)$. در نتیجه $g, g' \in Z(G)$ وجود دارند که، $x = x_{۱}^{k_{۱}} \cdots x_t^{k_t} g$ و $y = x_{۱}^{k'_{۱}} \cdots x_t^{k'_t} g'$. چون G از رده ۲ است بنابراین $[x, y] = \prod_{i \neq j} [x_i^{k_i}, x_j^{k'_j}]$ و لذا اگر مرتبه عامل‌های $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p^n باشد که $n < m$، آنگاه $[x_i^{k_i}, x_j^{k'_j}]^{p^n} = [x_i^{k_i}, \underbrace{(x_j^{k'_j})^{p^n}}_{\in Z(G)}] = ۱$ و این متناقض با نمای $\gamma_{۲}(G)$ است.

(۲) واضح است.

(۳) فرض کنید مرتبه $\bar{x} = xZ(G)$ برابر p^c باشد. در این‌صورت $x^{p^c} \in Z(G)$. فرض کنید $[x, g] \in [x, G]$ یک عنصر دلخواه باشد. چون G از رده ۲ است لذا بنا به لم ۱.۱.۱۸، $[x, g]^{p^c} = [x^{p^c}, g] = ۱$. بنابراین نمای $[x, G]$ کمتر یا مساوی p^c است. ادعا می‌کنیم کمتر از p^c نمی‌تواند باشد. فرض کنید p^b نمای $[x, G]$ باشد که $b < c$. در این‌صورت برای هر $g \in G$، $[x^{p^b}, g] = [x, g]^{p^b} = ۱$. لذا $x^{p^b} \in Z(G)$،که متناقض با مرتبه $\bar{x}$ است. بنابراین نمای $[x, G]$ برابر p^c است.

□

لم ۱.۳.۱۹. *فرض کنید $H = C_{n_{۱}} \times C_{n_{۲}} \times \cdots \times C_{n_r}$ و $K = C_{m_{۱}} \times C_{m_{۲}} \times \cdots \times C_{m_s}$ دو گروه آبلی متناهی باشند. فرض کنید $r \leqslant s$ و برای $۱ \leqslant i \leqslant r$، $n_i | m_i$. در این‌صورت H با زیرگروهی از K یکریخت است.*

لم ۱.۳.۲۰. *فرض کنید G یک گروه ۲-مولدی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد. در این‌صورت $\gamma_{۲}(G)$ دوری است.*

برهان. به [۶] صفحه ۳۳۴ رجوع شود. □

قضیه ۱.۳.۲۱. *(قضیه مدار-پایدارساز): فرض کنید گروه G بر مجموعه X عمل کند و $x \in X$. در این‌صورت تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه هم‌دست‌های راست $St(x)$ در G وجود دارد. بالاخص، اگر $Orb_G(x)$ متناهی باشد آنگاه $|Orb(x)| = |G : St(x)|$.*

برهان. به [۲] صفحه ۳۴ رجوع شود. □

توجه ۱.۳.۲۲. اگر عمل تزویج باشد، آنگاه $Orb_G(x) = x^G$ و $St_G(x) = C_G(x)$.

۴.۱ آشنایی مختصری با نرم افزار گپ

عبارت گپ[۲][۱۵] که از ابتدای کلمات *Groups*، *Algorithms* و *Programming* گرفته شده است سیستم محاسباتی نظریه گروه‌ها می‌باشد. گپ یک بسته[۳] از نرم افزارها به‌صورت باز[۴]، آزاد[۵] و قابل توسعه[۶] برای انجام محاسبات در جبر مجرد است. عبارت آزاد به این مفهوم است که این برنامه رایگان بوده و کاربر می‌تواند به آزادی آن را به سیستم عامل خود انتقال دهد و تمام برنامه‌ها برای امتحان و تغییر برای کاربر باز می‌باشند. مفهوم توسعه پذیر به آن معنا است که کاربر قادر است با استفاده از برنامه گپ برنامه‌های مشخص خود را نوشته و از آن‌ها به‌عنوان بسته جدیدی از برنامه گپ استفاده کند. نوشتن برنامه گپ در سال ۱۹۸۵ تحت سرپرستی *JoachimNeubuser* آغاز شد. نسخه ۲.۴ از این برنامه در سال ۱۹۸۸ و نسخه ۳.۱ از این برنامه در سال ۱۹۹۲ منتشر گردید. در سال‌های بعد یک بازنویسی کامل و تکمیل برنامه‌ها از گپ صورت گرفت و نسخه ۴.۱ از این برنامه در سال ۱۹۹۹ منتشر شد. نسخه‌های دیگری از این برنامه در سال‌های اخیر منتشر گردیده است. جدیدترین تغییرات در این نرم افزار را می‌توان از سایت *www.gap.system.org* به‌دست آورد. برنامه گپ دارای دو بخش اصلی، هسته‌ی مرکزی[۷] و بسته‌ها می‌باشد.

- هسته مرکزی خود به چهار قسمت تقسیم می‌شود.
  (۱) هسته[۸] که در برنامه C نوشته شده است.
  (۲) یک مجموعه بزرگ از توابع گپ که ابزار جبری و محاسبات دیگر می‌باشد.
  (۳) یک مجموعه از اطلاعات نظریه گروه‌ها که شامل نسخه‌هایی از گروه‌ها، مجموعه گروه‌های متناهی از مرتبه کمتر از ۲۰۰۰ (به استثنای گروه از مرتبه ۱۰۲۴) و غیره است. مجموعه بزرگتر از گروه‌ها را می‌توان از طریق بسته‌ها به‌دست آورد.
  (۴) متن‌های مربوط به استفاده از نرم افزار گپ. این مستندات به‌صورت *pdf* و فایل متنی در دسترس می‌باشند.
- بسته‌های گپ برنامه‌هایی هستند که توانایی الحاق به هسته گپ را دارند. این بسته‌ها توسط دستور *LoadPackage* فراخوانی می‌شوند و در این‌صورت می‌توان از اطلاعات و امکانات آن‌ها استفاده کرد. بسته‌ها به دو شکل متداول می‌باشند. یک نوع از این بسته‌ها با شروع به کار برنامه گپ فعال

[۲] GAP
[۳] Package
[۴] Open-source
[۵] Free
[۶] Extensible
[۷] Core
[۸] Kernel

می‌شود. نوع دیگر از بسته‌ها مانند nq و $GRAPE$، چون به برنامه‌های خروجی وابسته هستند در سیستم های عامل خاصی(معمولا یونیکس[۹]) فعال می‌شوند. باید توجه داشت که بسته $GRAPE$ در سیستم عامل ویندوز[۱۰] فعال می‌شود اما تمام امکانات آن فقط در سیستم عامل لینوکس[۱۱] قابل استحصال است.

[۹] Unix
[۱۰] Windows
[۱۱] Linux

فصل ۲
زیرگروه‌هایی از گروه خودریختی‌ها

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول به معرفی گروه خودریختی‌های مرکزی پرداخته و سپس ارتباط گروه خودریختی‌های مرکزی G با $Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))$ را بیان می‌کنیم. در بخش دوم گروه خودریختی‌های حافظ رده تزویج G را معرفی کرده و ارتباط آن را با $Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$ بیان خواهیم کرد.
مطالب این فصل از [۴۲] و [۴۴] گرفته شده است.

۱.۲ خودریختی‌های مرکزی

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید G یک گروه باشد. خودریختی α از گروه G را خودریختی مرکزی گوییم هرگاه برای هر $g \in G$، $g^{-1}\alpha(g) \in Z(G)$. مجموعه همه خودریختی‌های مرکزی G را با $Autcent(G)$ نشان می‌دهیم.

$$Autcent(G) = \{\alpha \in Aut(G) : g^{-1}\alpha(g) \in Z(G),\ \forall g \in G\}$$

$Autcent(G)$ همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه است.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت،*

(الف) $Autcent(G) \trianglelefteq Aut(G)$.

(ب) $Autcent(G) = C_{Aut(G)}(Inn(G))$.

برهان. (الف) برای هر $\alpha \in Aut(G)$ و برای هر $\beta \in Autcent(G)$ نشان می‌دهیم $\alpha^{-1}\beta\alpha \in Autcent(G)$.
طبق تعریف کافی است نشان دهیم برای هر $g \in G$، $g^{-1}(\alpha^{-1}\beta\alpha)(g) \in Z(G)$.
$g^{-1}(\alpha^{-1}\beta\alpha)(g) = \alpha^{-1}(\underbrace{\alpha(g)^{-1}\beta(\alpha(g))}_{\in Z(G)})$. بنابراین نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) یادآوری: $C_{Aut(G)}(Inn(G)) = \{\alpha \in Aut(G); i_g\alpha = \alpha i_g, \forall g\in G\}$.
فرض کنید $\alpha\in Aut(G)$.

$$\begin{aligned}
&\alpha \in C_{Aut(G)}(Inn(G)) \equiv \forall g\in G, \alpha i_g = i_g\alpha \\
&\equiv\ \forall x\in G,\ \alpha i_g(x) = i_g\alpha(x) \\
&\equiv\ \forall x\in G,\ \alpha(g^{-1}xg) = g^{-1}\alpha(x)g \\
&\equiv\ \forall x\in G,\ \alpha(g^{-1})\alpha(x)\alpha(g) = g^{-1}\alpha(x)g \\
&\equiv\ \forall x\in G,\ g\alpha(g^{-1})\alpha(x) = \alpha(x)g\alpha(g^{-1}) \\
&\equiv\ \forall g\in G,\ g\alpha(g^{-1}) \in Z(G) \equiv\ \alpha \in Autcent(G).
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۱.۲. $Z(Inn(G)) \leq Autcent(G)$.

نتیجه ۴.۱.۲. *اگر $Aut(G)$ آبلی باشد، آنگاه $Autcent(G) = Aut(G)$.*

لم ۵.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $f \in Hom(G, Z(G))$. در این‌صورت، $\alpha_f : G \longrightarrow G$ با ضابطه $\alpha_f(x) = xf(x)$ یک همریختی است. به‌علاوه، α_f یک خودریختی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in G$، $f(x) \neq x^{-1}$.*

برهان. خوش تعریف و همریختی بودن α_f واضح است. قسمت دوم نیز بنا به لم ۱۸.۲.۱، واضح است. □

لم ۶.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی و α یک خودریختی مرکزی G باشد. در این‌صورت،*

(۱) $\underset{x\mapsto x^{-1}\alpha(x)}{f_\alpha : G \longrightarrow Z(G)}$ *یک همریختی است که $\gamma_2(G)$ را به ۱ می‌برد.*

(۲) $\underset{\alpha\mapsto f_\alpha}{\varphi : Autcent(G) \longrightarrow Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))}$ *یک‌به‌یک است.*

(۳) *اگر $f\in Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))$ ، آنگاه α_f که $\alpha_f(x) = xf(\bar{x})$ و $\bar{x} = x\gamma_2(G)$، یک درونریختی G است و اگر G عامل مستقیم آبلی نابدیهی نداشته باشد، آنگاه α_f خودریختی است.*

برهان. (۱) خوش‌تعریف بودن واضح است.
برای هر $x, y\in G$،

$$\begin{aligned}
f_\alpha(xy) &= (xy)^{-1}\alpha(xy) \overset{\text{همریختی}\ \alpha}{=} y^{-1}\underbrace{x^{-1}\alpha(x)}_{\in Z(G)}\alpha(y) \\
&= x^{-1}\alpha(x)y^{-1}\alpha(y) = f_\alpha(x)f_\alpha(y)
\end{aligned}$$

بنابراین f_α همریختی است.

برای هر $x,y\in G$،

$$f_\alpha([x,y]) \overset{f_\alpha \text{همریختی}}{=} [\underbrace{f_\alpha(x)}_{\in Z(G)},\underbrace{f_\alpha(y)}_{\in Z(G)}] = ۱$$

بنابراین f_α، $\gamma_۲(G)$ را به ۱ می‌برد.

(۲) فرض کنید $\alpha,\beta\in Autcent(G)$ به‌طوری‌که $f_\alpha = f_\beta$. نشان می‌دهیم $\alpha=\beta$. چون $f_\alpha = f_\beta$ پس برای هر $x\in G$، $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ لذا با توجه به قسمت(۱)، $x^{-۱}\alpha(x) = x^{-۱}\beta(x)$. در نتیجه برای هر $x\in G$، $\alpha(x)=\beta(x)$ بنابراین $\alpha=\beta$.

(۳) بنا به لم ۵.۱.۲، α_f خودریختی است اگر و تنها اگر برای هر $x\in G, f(x)\neq x^{-۱}$. فرض کنید(فرض خلف) α_f خودریختی نباشد. در این‌صورت $a\neq ۱$ وجود دارد که، $f(a)=a^{-۱}$. چون، $f: Z(G)\longrightarrow G$ یک همریختی است لذا $f: G\longrightarrow G$ یک درونریختی است. حال برای هر $x\in G$،

$$i_g\circ f(x) = g^{-۱}\underbrace{f(x)}_{\in Z(G)} g = f(x),$$

و

$$f\circ i_g(x) = f(g^{-۱}xg) = f(g^{-۱})f(x)f(g) = f(x),$$

بنابراین،

$$f\circ i_g = i_g \circ f$$

لذا f نرمال است. از طرفی چون برای aای، $f(a)=a^{-۱}$ لذا برای هر n، اگر n زوج باشد $f^n(a)=a$ و اگر n فرد باشد $f^n(a)=a^{-۱}$. پس برای هر n، $f^n\neq ۰$ لذا f پوچ‌توان نیست. همچنین f پوشا نیست زیرا G ناآبلی است و $Imf\subseteq Z(G)\neq G$. در نتیجه f خودریختی نیست. حال با استفاده از لم فیتینگ $G = Imf^k\times Kerf^k$ و چون $Imf^k\in Z(G)$ پس آبلی است لذا G عامل آبلی نابدیهی دارد و این یک تناقض است. بنابراین α_f خودریختی است.

□

نتیجه ۷.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت،*

$$Autcent(G) = \{\alpha_f :\ f\in Hom(G,Z(G)),\ f(x)\neq x^{-۱}, x\in G \text{برای هر}\}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $K = \{\alpha_f :\ f\in Hom(G,Z(G)),\ f(x)\neq x^{-۱}, x\in G \text{برای هر}\}$.

فرض کنید $\alpha_f\in K$ در این‌صورت بنا به لم ۵.۱.۲، α_f خودریختی است. از طرفی برای هر $x\in G$،

$x^{-1}\alpha_f(x) = x^{-1}xf(x) = f(x) \in Z(G)$، بنابراین $\alpha_f \in Autcent(G)$.

بر عکس، فرض کنید $\alpha \in Autcent(G)$. بنا به قسمت اول لم ۶.۱.۲، $f_\alpha \in Hom(G, Z(G))$ لذا بنا به لم ۵.۱.۲، $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$ و دوباره بنا به همان لم برای هر $x \in G$، $f_\alpha(x) \neq x^{-1}$ بنابراین $\alpha \in K$. □

لم ۸.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $\alpha_f, \alpha_g \in Autcent(G)$. در این‌صورت، $\alpha_f\alpha_g = \alpha_g\alpha_f$ اگر و تنها اگر $fg = gf$.*

برهان.

$$\alpha_f\alpha_g = \alpha_g\alpha_f \Leftrightarrow \forall x \in G; \alpha_f\alpha_g(x) = \alpha_g\alpha_f(x)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in G; xg(x)f(x)f(g(x)) = xf(x)g(x)g(f(x))$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in G; f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow fg = gf.$$

□

تعریف ۹.۱.۲. گروه G را ناآبلی محض گوییم، اگر عامل مستقیم آبلی نابدیهی نداشته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی محض باشد. در این‌صورت نگاشت یک‌به‌یک،*

$$\underset{\alpha \mapsto f_\alpha}{\varphi : Autcent(G) \longrightarrow Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))}$$

پوشا است.

برهان. بنا به قسمت سوم لم ۶.۱.۲، برای هر $f \in Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))$، α_f یک خودریختی است لذا بنا به لم ۵.۱.۲، برای هر $x \in G$، $f(x) \neq x^{-1}$ و بنا به نتیجه ۷.۱.۲، $\alpha_f \in Autcent(G)$. حال، $\varphi(\alpha_f) = f_{\alpha_f} = f$ در نتیجه φ پوشا است. □

نتیجه ۱۱.۱.۲. *اگر G گروه متناهی ناآبلی محض باشد، آنگاه*

$$|Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))|$$

نتیجه ۱۲.۱.۲. *گروه متناهی ناآبلی محض G دارای خودریختی مرکزی نابدیهی است اگر و فقط اگر $1 \neq \left(|\frac{G}{\gamma_2(G)}|, |Z(G)|\right)$.*

لم ۱۳.۱.۲. *اگر G یک p-گروه ناآبلی محض باشد، آنگاه $Autcent(G)$ یک p-گروه است.*

برهان. G یک p-گروه است لذا $\frac{G}{\gamma_۲(G)}$ و $Z(G)$ نیز p-گروه هستند. از طرفی $\frac{G}{\gamma_۲(G)}$ و $Z(G)$ آبلی هستند. پس به حاصل‌ضربی از دوری‌ها تجزیه می‌شوند. فرض کنید،

$$\frac{G}{\gamma_۲(G)} \cong C_{p^{m_۱}} \times \ldots \times C_{p^{m_t}},$$
$$Z(G) \cong C_{p^{n_۱}} \times \ldots \times C_{p^{n_s}}.$$

G ناآبلی محض است لذا بنا به نتیجه قبل،

$$|Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, Z(G))|.$$

بنا به لم‌های ۶.۲.۱ و ۵.۲.۱،

$$\begin{aligned}|Autcent(G)| &= |Hom(C_{p^{m_۱}} \times \ldots \times C_{p^{m_t}}, C_{p^{n_۱}} \times \ldots \times C_{p^{n_s}}| \\ &= |Hom(C_{p^{m_۱}}, C_{p^{n_۱}}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{m_t}}, C_{p^{n_s}})| \\ &= |C_{(p^{m_۱}, p^{n_۱})} \times \cdots \times C_{(p^{m_t}, p^{n_s})}|\end{aligned}$$

چون $C_{(p^{m_i}, p^{n_j})}$ یک p-گروه است لذا $|Autcent(G)|$ توانی از p است و بنابراین $Autcent(G)$ یک p-گروه است. □

لم ۱۴.۱.۲. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد که $Z(G) = \gamma_۲(G)$. در این‌صورت $Autcent(G)$ آبلی است.*

برهان. فرض کنید $\alpha, \beta \in Autcent(G)$. بنا به آنچه در برهان نتیجه ۷.۱.۲، گفته شد داریم: $\alpha = \alpha_{f_\alpha}$ و $\beta = \beta_{f_\beta}$. حال برای هر $x \in G$،

$$\alpha\beta(x) = \alpha_{f_\alpha}\beta_{f_\beta}(x) = \alpha_{f_\alpha}(xf_\beta(x)) = xf_\beta(x)f_\alpha(x)f_\alpha(\underbrace{f_\beta(x)}_{\in Z(G)=\gamma_۲(G)})$$

و

$$\beta\alpha(x) = \beta_{f_\beta}\alpha_{f_\alpha}(x) = \beta_{f_\beta}(xf_\alpha(x)) = xf_\alpha(x)f_\beta(x)f_\beta(\underbrace{f_\alpha(x)}_{\in Z(G)=\gamma_۲(G)}).$$

بنا به قسمت اول لم ۶.۱.۲، $f_\alpha(f_\beta(x)) = ۱$ و $f_\beta(f_\alpha(x)) = ۱$. بنابراین $\alpha\beta = \beta\alpha$ و در نتیجه $Autcent(G)$ آبلی است. □

۲.۲ خودریختی‌های حافظ رده تزویج

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گروه باشد. خودریختی α از گروه G را حافظ رده تزویج گوییم هرگاه برای هر $x \in G$، $\alpha(x) \in x^G$ که x^G معرف رده تزویج x در G است.

مجموعه همه خودریختی‌های حافظ رده تزویج را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم. $Aut_c(G)$ همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه است.

لم ۲.۲.۲. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت،*

(*الف*) $Aut_c(G) \trianglelefteq Aut(G)$.

(ب) $Inn(G) \trianglelefteq Aut_c(G)$.

برهان.(الف) برای هر $\alpha \in Aut(G)$ و هر $\beta \in Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم $\alpha^{-۱}\beta\alpha \in Aut_c(G)$. کافی است نشان دهیم برای هر $x \in G$، $(\alpha^{-۱}\beta\alpha)(x) \in x^G$. چون $\beta \in Aut_c(G)$ لذا برای هر $x \in G$، $\beta(\alpha(x)) \in \alpha(x)^G$ پس $g \in G$ وجود دارد که، $\beta(\alpha(x)) = g^{-۱}\alpha(x)g$. در نتیجه،

$$\begin{aligned}\alpha^{-۱}(\beta(\alpha(x))) &= \alpha^{-۱}(g^{-۱}\alpha(x)g)\\ &= \alpha^{-۱}(g^{-۱})\alpha^{-۱}\alpha(x)\alpha^{-۱}(g)\\ &= \alpha^{-۱}(g)^{-۱}x\alpha^{-۱}(g) \in x^G\end{aligned}$$

بنابراین $\alpha^{-۱}\beta\alpha \in Aut_c(G)$.

(ب) واضح است.

$\square$

لم ۳.۲.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد. در این‌صورت* $Aut_c(G) \leqslant Autcent(G)$.

برهان. فرض کنید $\alpha \in Aut_c(G)$. لذا برای هر $x \in G$، $\alpha(x) \in x^G$. پس $g \in G$ وجود دارد که $\alpha(x) = g^{-۱}xg$ در نتیجه $x^{-۱}\alpha(x) = x^{-۱}g^{-۱}xg = [x,g] \in \gamma_۲(G)$. چون G از رده ۲ است لذا $\gamma_۲(G) \leq Z(G)$ و در نتیجه برای هر $x \in G$، $x^{-۱}\alpha(x) \in Z(G)$. لذا $\alpha \in Autcent(G)$. بنابراین $Aut_c(G) \subseteq Autcent(G)$. $\square$

لم ۴.۲.۲. *فرض کنید برای گروه متناهی G، $Aut_c(G) = Autcent(G)$. در این‌صورت، $Inn(G) \leq Autcent(G)$ و $Inn(G)$ آبلی است و G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۲ است.*

برهان. بنا به لم ۲.۲.۲، $Inn(G) \leq Autcent(G)$. همچنین چون $Autcent(G) = C_{Aut(G)}(Inn(G))$ لذا $Inn(G)$ آبلی است. از طرفی $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$ لذا $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است پس $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر یک است بنابراین G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۲ است. $\square$

لم ۵.۲.۲. *فرض کنید G آبلی باشد و $Aut_c(G) = Autcent(G)$. در این‌صورت $Aut_c(G) = ۱$ و بنابراین $Aut(G) = ۱$ و $|G| \leqslant ۲$.*

برهان. فرض کنید $\alpha \in Aut_c(G)$ در نتیجه برای هر $x \in G$،

$$\alpha(x) \in x^G = \{g^{-۱}xg : \ g \in G\} \overset{\text{آبلی } G}{=} \{x\}$$

بنابراین $\alpha(x) = x$ پس α همانی است لذا $Aut_c(G) = ۱$. چون G آبلی است پس $Autcent(G) = Aut(G)$. از طرفی $Aut_c(G) = Autcent(G)$، لذا $Aut(G) = ۱$ و بنا به لم ۱۲.۲.۱، $|G| \leqslant ۲$. □

لم ۶.۲.۲. *فرض کنید G گروه متناهی پوچ‌توان از رده‌ی ۲ باشد و $\alpha \in Aut_c(G)$. در این‌صورت،*

(۱) $f_\alpha : G \underset{g \mapsto g^{-۱}\alpha(g)}{\longrightarrow} \gamma_۲(G)$ *همریختی است و $Z(G)$ را به ۱ می‌برد.*

(۲) $\varphi : Aut_c(G) \underset{\alpha \mapsto f_\alpha}{\longrightarrow} Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G))$ *تکریختی است.*

برهان. (۱) خوش تعریفی واضح است.

$$\begin{aligned} f_\alpha(gh) = (gh)^{-۱}\alpha(gh) &\overset{\text{همریختی } \alpha}{=} h^{-۱} \underbrace{g^{-۱}\alpha(g)}_{\in \gamma_۲(G) \leq Z(G)} \alpha(h) \\ &= g^{-۱}\alpha(g)h^{-۱}\alpha(h) = f_\alpha(g)f_\alpha(h) \end{aligned}$$

بنابراین f_α همریختی است.

برای هر $g \in Z(G)$، $f_\alpha(g) = g^{-۱}\alpha(g)$. چون α خودریختی حافظ رده است لذا $\alpha(g) \in g^G$. بنابراین $f_\alpha(g) \in g^{-۱}g^G = [g, G] = ۱$ در نتیجه $f_\alpha(g) = ۱$.

(۲) برای هر $\alpha, \beta \in Aut_c(G)$ باید نشان دهیم $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$. برای هر $x \in G$،

$$\varphi(\alpha\beta)(x) = f_{\alpha\beta}(x) = x^{-۱}\alpha\beta(x) = x^{-۱}\alpha(\beta(x)).$$

از طرفی برای هر $x \in G$،

$$(\varphi(\alpha)\varphi(\beta))(x) = \varphi(\alpha)(x)\varphi(\beta)(x) = f_\alpha(x)f_\beta(x) = x^{-۱}\alpha(x)x^{-۱}\beta(x).$$

حال،

$$x^{-۱}\alpha(\beta(x)) = x^{-۱}\alpha(xx^{-۱}\beta(x)) = x^{-۱}\alpha(x)\alpha(x^{-۱}\beta(x)).$$

چون $x^{-۱}\beta(x) \in \gamma_۲(G) \leq Z(G)$ و α حافظ رده است لذا $\alpha(x^{-۱}\beta(x)) = x^{-۱}\beta(x)$ بنابراین $x^{-۱}\alpha(\beta(x)) = x^{-۱}\alpha(x)x^{-۱}\beta(x)$. در نتیجه برای هر $x \in G$،

$$\varphi(\alpha\beta)(x) = (\varphi(\alpha)\varphi(\beta))(x).$$

لذا $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ بنابراین φ همریختی است. فرض کنید $\alpha, \beta \in Aut_c(G)$ به‌طوری‌که $f_\alpha = f_\beta$. نشان می‌دهیم $\alpha = \beta$. چون $f_\alpha = f_\beta$ لذا برای هر $g \in G$، $f_\alpha(g) = f_\beta(g)$. بنابراین $g^{-1}\alpha(g) = g^{-1}\beta(g)$ لذا برای هر $g \in G$، $\alpha(g) = \beta(g)$ بنابراین $\alpha = \beta$ در نتیجه φ یک‌به‌یک است.

□

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده ۲ باشد. در این‌صورت،

$$\{f \in Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G)) : f(gZ(G)) \in [g, G], g \in G \text{ برای هر}\}$$

را با $Hom_c(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۸.۲.۲. *فرض کنید G یک گروه متناهی پوچ‌توان از رده ۲ باشد. در این‌صورت،* $\varphi : \underset{\alpha \mapsto f_\alpha}{Aut_c(G) \longrightarrow Hom_c(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))}$ *یکریختی است.*

برهان. همریختی و یک‌به‌یک بودن واضح است. اگر $f \in Hom_c(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$ آنگاه برای هر $g \in G$، $f(gZ(G)) \in [g, G]$. در نتیجه $gf(gZ(G)) \in g[g, G] = g^G$. بنابراین $\alpha_f : G \longrightarrow G$ که، $\alpha_f(g) = gf(\bar{g})$ و $\bar{g} = gZ(G)$ یک خودریختی حافظ رده است. حال $\varphi(\alpha_f) = f_{\alpha_f} = f$. لذا φ پوشا است. □

گزاره ۹.۲.۲. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ و $\{x_1, \ldots, x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال G باشد. در این‌صورت،*

$$|Aut_c(G)| \leqslant \prod_{i=1}^{d} |Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G])|.$$

برهان. بنا بر قسمت دوم لم ۱۸.۳.۱، برای هر $x \in G - Z(G)$، $[x, G]$ زیرگروه نرمال سره نابدیهی G است. فرض کنید $\{x_1, \ldots, x_d\}$ مولد مینیمال G باشد. در این‌صورت،

$$\frac{G}{Z(G)} = \langle \bar{x_1} \rangle \times \cdots \times \langle \bar{x_d} \rangle$$

که $\bar{x_i} = x_iZ(G)$، و برخی عامل‌ها ممکن است بدیهی باشند(این در حالتی اتفاق می‌افتد که، $Z(G) \nleq \Phi(G)$). فرض کنید $f \in Hom_c(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$. بنابراین برای هر $g \in G$، $f(gZ(G)) \in [g, G]$ به ویژه برای $1 \leqslant i \leqslant d$، $f(x_iZ(G)) \in [x_i, G]$. بنابراین،

$$|Hom_c(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))| \leqslant \prod_{i=1}^{d} |Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G])|.$$

و لذا بنا به گزاره ۸.۲.۲،

$$|Aut_c(G)| \leqslant \prod_{i=1}^{d} |Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G])|.$$

□

قضیه ۱۰.۲.۲. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ و $\{x_1, \dots, x_d\}$ مولد مینیمال G باشد که برای $1 \leqslant i \leqslant d$، $[x_i, G]$ دوری باشد. در این‌صورت، $Aut_c(G) = Inn(G)$.*

برهان. بنا به قسمت سوم لم ۱۸.۳.۱ و لم ۵.۲.۱، $|Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G])| = |\langle \bar{x_i} \rangle|$ لذا بنا به گزاره ۹.۲.۲،

$$|Aut_c(G)| \leqslant \prod_{i=1}^{d} |\langle \bar{x_i} \rangle|.$$

از طرفی،

$$\begin{aligned} |Inn(G)| \leqslant |Aut_c(G)| &\leqslant \prod_{i=1}^{d} |\langle \bar{x_i} \rangle| \\ &= |\frac{G}{Z(G)}| = |Inn(G)|. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$|Aut_c(G)| = |Inn(G)|.$$

در نتیجه،

$$Aut_c(G) = Inn(G).$$

□

نتیجه ۱۱.۲.۲. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد که $\gamma_2(G)$ دوری است. در این‌صورت $Aut_c(G) = Inn(G)$.*

فصل ۳

گروه‌های صادق در رابطه‌ی $Aut_c(G) = Autcent(G)$

این فصل مشتمل بر دو بخش است که در بخش اول به بحث و بررسی شرایطی که تحت آن گروه G در تساوی خودریختی‌های مرکزی با خودریختی‌های حافظ رده تزویج صدق می‌کند می‌پردازیم و در بخش دوم به معرفی چند گروه خواهیم پرداخت.
مطالب این فصل از [۱۶] و [۴۴] گرفته شده است.

۱.۳ برابری خودریختی‌های مرکزی با خودریختی‌های حافظ رده تزویج

از این به بعد، فرض $Aut_c(G) = Autcent(G)$ را با عنوان فرض A در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۱.۳. *فرض کنید $G = H \times K$ تجزیه‌ای از G به حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه نرمالش باشد. در این‌صورت،*

(۱) $Aut_c(G) \cong Aut_c(H) \times Aut_c(K)$.

(۲) $Autcent(H) \times Autcent(K) \hookrightarrow Autcent(G)$.

(۳) *اگر G متناهی باشد و* $(|H|, |K|) = 1$ *آنگاه* $Autcent(H) \times Autcent(K) \cong Autcent(G)$.

برهان. (۱) فرض کنید $\alpha \in Aut_c(H)$ و $\beta \in Aut_c(K)$. نگاشت $\gamma : H \times K \longrightarrow H \times K$ را با ضابطه $\gamma(hk) = \alpha(h)\beta(k)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم γ یک خودریختی است. برای هر $h, h' \in H$

و $k, k' \in K$،

$$\begin{aligned}\gamma(hkh'k') = \gamma(hh'kk') &= \alpha(hh')\beta(kk')\\ &\overset{\text{خودریختی}\ \beta,\alpha}{=} \alpha(h)\alpha(h')\beta(k)\beta(k')\\ &= \alpha(h)\beta(k)\alpha(h')\beta(k') = \gamma(hk)\gamma(h'k')\end{aligned}$$

بنابراین γ همریختی است. یک‌به‌یک بودن γ واضح است.
برای هر $h \in H$ و $k \in K$، چون α و β پوشا هستند لذا $h' \in H$ و $k' \in K$ وجود دارند که $\alpha(h') = h$ و $\beta(k') = k$. بنابراین $\gamma(h'k') = hk$ و در نتیجه γ پوشا است. حال نشان می‌دهیم $\gamma \in Aut_c(G)$. چون α و β خودریختی حافظ رده هستند لذا برای هر $hk \in H \times K$، $\gamma(hk) = \alpha(h)\beta(k) \in h^H k^K$. پس $h_1 \in H$ و $k_1 \in K$ وجود دارند که، $\alpha(h)\beta(k) = h^{h_1}k^{k_1} = (hk)^{h_1k_1}$. چون $h_1k_1 \in G$ لذا $\gamma(hk) = (hk)^{h_1k_1} \in (hk)^G$. حال نشان می‌دهیم،

$$\psi : Aut_c(H) \times Aut_c(K) \underset{(\alpha,\beta)\mapsto\gamma_{\alpha,\beta}}{\longrightarrow} Aut_c(G)$$

یک یکریختی است. خوش‌تعریف بودن ψ واضح است. فرض کنید $\alpha, \alpha' \in Aut_c(H)$ و $\beta, \beta' \in Aut_c(K)$. نشان می‌دهیم $\psi((\alpha,\beta)(\alpha',\beta')) = \psi(\alpha,\beta)\psi(\alpha',\beta')$. برای هر $h \in H$ و $k \in K$،

$$\begin{aligned}\psi((\alpha,\beta)(\alpha',\beta'))(hk) &= \psi(\underbrace{\alpha\alpha'}_{\in Aut_c(H)}, \underbrace{\beta\beta'}_{\in Aut_c(K)})(hk)\\ &= \gamma_{\alpha\alpha',\beta\beta'}(hk) = \alpha\alpha'(h)\beta\beta'(k)\end{aligned}$$

از طرفی،

$$\psi(\alpha,\beta)\psi(\alpha',\beta')(hk) = \gamma_{\alpha,\beta}\gamma_{\alpha',\beta'}(hk) = \gamma_{\alpha,\beta}(\alpha'(h)\beta'(k)) = \alpha\alpha'(h)\beta\beta'(k).$$

بنابراین ψ همریختی است. حال فرض کنید $\psi(\alpha,\beta) = \psi(\alpha',\beta')$ در این‌صورت برای هر $h \in H$ و $k \in K$،

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta)(hk) = \psi(\alpha',\beta')(hk) &\Rightarrow \gamma_{\alpha,\beta}(hk) = \gamma_{\alpha',\beta'}(hk)\\ &\Rightarrow \alpha(h)\beta(k) = \alpha'(h)\beta'(k).\end{aligned}$$

لذا $\alpha(h) = \alpha'(h)$ و $\beta(k) = \beta'(k)$. بنابراین $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$. در نتیجه $(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$.
بنابراین ψ یک‌به‌یک است.

فرض کنید $\gamma \in Aut_c(G)$. در این‌صورت برای هر $h \in H$ و $k \in K$، $\gamma(hk) \in (hk)^{H\times K}$. بنابراین $h' \in H$ و $k' \in K$ وجود دارند که، $\gamma(hk) = (hk)^{h'k'} = h^{h'}k^{k'} \in h^H k^K$ لذا با فرض $h = ۱$، $\gamma(k) \in k^K$ و همچنین با فرض $k = ۱$، $\gamma(h) \in h^H$. قرار می‌دهیم، $\gamma_۱ = \gamma|_H$ و $\gamma_۲ = \gamma|_K$. در نتیجه،

$$(\psi(\gamma_۱, \gamma_۲))(hk) = \gamma_{۱,۲}(hk) = \gamma_۱(h)\gamma_۲(k) = \gamma(h)\gamma(k) = \gamma(hk).$$

بنابراین ψ پوشا است.

(۲) فرض کنید $\alpha \in Autcent(H)$ و $\beta \in Autcent(K)$. نگاشت γ را مانند قسمت قبل تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $\gamma \in Autcent(G)$. چون α و β خودریختی مرکزی هستند لذا برای هر $hk \in H \times K$،

$$(hk)^{-۱}\gamma(hk) = k^{-۱}h^{-۱}\alpha(h)\beta(k) = \underbrace{h^{-۱}\alpha(h)}_{\in Z(H)}\underbrace{k^{-۱}\beta(k)}_{\in Z(K)} \in Z(H)Z(K).$$

بنابراین $(hk)^{-۱}\gamma(hk) \in Z(G)$. به‌راحتی می‌توان نشان داد،

$$\psi : Autcent(H) \times \underset{(\alpha,\beta)\mapsto\gamma_{\alpha,\beta}}{Autcent(K)} \longrightarrow Autcent(G)$$

یک تکریختی است.

(۳) فرض کنید $\varphi \in Autcent(G)$. برای هر $h \in H$ و $k \in K$،

$$(hk)^{-۱}\varphi(hk) = k^{-۱}h^{-۱}\varphi(h)\varphi(k) = \underbrace{h^{-۱}\varphi(h)}_{\in Z(H)}\underbrace{k^{-۱}\varphi(k)}_{\in Z(K)}.$$

قرار می‌دهیم، $\alpha = \varphi|_H$ و $\beta = \varphi|_K$. بنابراین برای هر $h \in H$ و $k \in K$،

$$\psi(\alpha, \beta)(hk) = \gamma_{\alpha,\beta}(hk) = \alpha(h)\beta(k) = \varphi(h)\varphi(k) = \varphi(hk).$$

در نتیجه ψ پوشا است.

□

نتیجه ۲.۱.۳. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $G_۱$، ... وG_n مجموعه زیرگروه‌های سیلوی دو به دو متمایز G باشد. در این‌صورت اگر $G = G_۱ \times \cdots \times G_n$ آنگاه،*

$$Autcent(G) \cong Autcent(G_۱) \times \cdots \times Autcent(G_n).$$

توجه ۳.۱.۳. چون یک گروه پوچ‌توان متناهی G به‌صورت حاصل‌ضرب مستقیم از p-زیرگروه‌های سیلو است، لذا برای مطالعه $Autcent(G)$، کافی است گروه خودریختی‌های مرکزی p- گروه‌های متناهی مطالعه شود. بنابراین اساس کار ما در این پایان‌نامه روی p- گروه‌های متناهی خواهد بود.

گزاره ۴.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد که در فرض A صدق می‌کند. در این‌صورت $\gamma_2(G) = Z(G)$.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم G ناآبلی محض است. فرض کنید (فرض خلف) $G = K \times H$ که H زیرگروه آبلی نابدیهی G باشد. بنا به لم‌های ۵.۲.۲ و ۱.۱.۳،

$$|Aut_c(G)| = |Aut_c(K)|.$$

اما چون H نابدیهی است، بنا به لم ۱.۱.۳،

$$|Autcent(G)| \geqslant |Autcent(K)||Autcent(H)| > |Autcent(K)|,$$

بنابراین،

$$|Aut_c(G)| = |Aut_c(K)| \leqslant |Autcent(K)| < |Autcent(G)|.$$

و این متناقض با فرض A است، لذا G ناآبلی محض است. چون G از رده ۲ است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است. پس $\gamma_2(G) \leq Z(G)$. کافی است نشان دهیم $Z(G) \geq \gamma_2(G)$. حال فرض کنید (فرض خلف) $\gamma_2(G) < Z(G)$. در این‌صورت،

$$|\frac{G}{Z(G)}| < |\frac{G}{\gamma_2(G)}|.$$

با فرض $H = \frac{G}{Z(G)}$ و $K = \frac{G}{\gamma_2(G)}$ بنا به لم ۱۹.۳.۱، $\frac{G}{Z(G)}$ با زیرگروه سره از $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ یکریخت است. چون G ناآبلی محض است بنا به نتیجه ۱۱.۱.۲،

$$|Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))|.$$

همچنین بنا به لم ۶.۲.۲،

$$|Aut_c(G)| \leqslant |Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))|.$$

چون $\frac{G}{Z(G)}$ یکریخت با زیرگروه سره از $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ و $\gamma_2(G)$ زیرگروه سره از $Z(G)$ است لذا بنا به لم ۱۷.۳.۱،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))| < |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))|.$$

بنابراین،

$$|Aut_c(G)| \leqslant |Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))| < |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))| = |Autcent(G)|.$$

که متناقض با فرض A است. بنابراین $\gamma_2(G) = Z(G)$. □

لم ۵.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد که $Z(G) \leq \gamma_2(G)$، در این‌صورت G ناآبلی محض است.*

برهان. فرض کنید (فرض خلف) G ناآبلی محض نباشد. فرض کنید $G = H \times K$ و H آبلی نابدیهی باشد. در این‌صورت،

$$\gamma_۲(G) = \gamma_۲(H) \times \gamma_۲(K).$$

و چون H آبلی است پس $\gamma_۲(H) = ۱$ لذا،

$$\gamma_۲(G) = ۱ \times \gamma_۲(K).$$

همچنین،

$$Z(G) = Z(H) \times Z(K) = H \times Z(K).$$

چون $Z(G) \leq \gamma_۲(G)$ لذا،

$$H \times Z(K) \leq ۱ \times \gamma_۲(K).$$

و این ممکن نیست. بنابراین G ناآبلی محض است. □

لم ۶.۱.۳. *گروه متناهی G ناآبلی محض است هرگاه مرکز آن مشمول در زیرگروه فراتینی باشد.*

برهان. فرض کنید (فرض خلف) G ناآبلی محض نباشد. فرض کنید $G = H \times K$ و H آبلی نابدیهی باشد. در این‌صورت بنا به لم ۲۲.۱.۱،

$$\Phi(H \times K) \leq \Phi(H) \times \Phi(K).$$

همچنین،

$$Z(G) = Z(H) \times Z(K) = H \times Z(K).$$

چون $Z(G) \leq \Phi(G)$ لذا،

$$H \times Z(K) \leq \Phi(H) \times \Phi(K).$$

در نتیجه $\Phi(H) \leq H$ و از طرفی $H \leq \Phi(H)$ لذا، $H = \Phi(H)$. و این متناقض با متناهی بودن H است. □

لم ۷.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد که $Z(G) \leq \Phi(G)$. در این‌صورت،*

(۱) *اگر $\{\bar{x_۱}, \dots, \bar{x_d}\}$ پایه مینیمال $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ باشد، آنگاه $\{x_۱, \dots, x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G است.*

(۲) *هر $x \in G - \Phi(G)$ می‌تواند عضوی در یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G باشد.*

برهان. (۱) فرض کنید $\{\bar{x_1},\dots,\bar{x_d}\}$ پایه مینیمال $\bar{G}$ باشد که $\bar{x_i}=x_iZ(G)$. در این‌صورت، $\{\bar{x_1}\Phi(\bar{G}),\dots,\bar{x_d}\Phi(\bar{G})\}$ مولد مینیمال $\frac{\bar{G}}{\Phi(\bar{G})}$ است. چون $Z(G)\leq\Phi(G)$ پس بنا به قضیه سوم یکریختی و لم ۲۷.۱.۱،

$$\frac{G}{\Phi(G)}\cong\frac{G}{Z(G)}\Big/\frac{\Phi(G)}{Z(G)}\cong\frac{\bar{G}}{\Phi(\bar{G})}$$

بنابراین $\{x_1\Phi(G),\dots,x_d\Phi(G)\}$ مولد مینیمال $\frac{G}{\Phi(G)}$ است(تصویر معکوس مولد مینیمال $\frac{\bar{G}}{\Phi(\bar{G})}$ است). در نتیجه بنا به قضیه پایه برنساید، $\{x_1,\dots,x_d\}$ مولد مینیمال G است و چون $\{\bar{x_1},\dots,\bar{x_d}\}$ پایه مینیمال $\bar{G}$ است لذا طبق تعریف، $\{x_1,\dots,x_d\}$ مولد مینیمال مشخص G است.

(۲) فرض کنید $x\in G-\Phi(G)$، در این‌صورت $xZ(G)\in\frac{G}{Z(G)}-\frac{\Phi(G)}{Z(G)}$. بنابراین پایه مینیمال $\{\bar{x_1},\dots,\bar{x_d}\}$ را برای $\bar{G}$ طوری پیدا می‌کنیم که برای برخی $1\leqslant i\leqslant d$، $\bar{x}=xZ(G)=\bar{x_i}$. لذا با توجه به قسمت (۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

□

نتیجه ۸.۱.۳. *هر p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A یک مجموعه مولد مینیمال مشخص دارد.*

برهان. فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد. بنا به گزاره ۴.۱.۳، $Z(G)=\gamma_2(G)$. از طرفی بنا به قضیه ۲۳.۱.۱، $\gamma_2(G)\leq\Phi(G)$ پس $Z(G)\leq\Phi(G)$ و لذا بنا به لم ۷.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۹.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A و $\{x_1,\dots,x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G باشد. در این‌صورت،*

$$|Aut_c(G)|=\prod_{i=1}^{d}|x_i^G|,\quad [x_i,G]=\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))$$

که p^{m_i} مرتبه $\bar{x}_i$ است. به‌علاوه $[x_1,G]=\gamma_2(G)$.

برهان. فرض کنید $\{x_1,\dots,x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G باشد که برای $1\leqslant i\leqslant d$، مرتبه $\bar{x}_i$ برابر p^{m_i} است و فرض کنید $\alpha\in Aut_c(G)$. چون برای $1\leqslant i\leqslant d$، $\alpha(x_i)\in x_i^G$ لذا حداکثر به تعداد $|x_i^G|$، انتخاب برای تصویر x_i تحت α وجود دارد. بنابراین،

$$|Aut_c(G)|\leqslant\prod_{i=1}^{d}|x_i^G|.$$

بنا به لم ۱۸.۳.۱، چون برای هر $1\leqslant i\leqslant d$ نمای $[x_i,G]$ با مرتبه $\bar{x}_i=x_iZ(G)\in\frac{G}{Z(G)}$ برابر است و با توجه به اینکه $\gamma_2(G)$ آبلی است(چون G از رده ۲ است) و $[x_i,G]\subseteq\gamma_2(G)$ پس بنا به لم‌های ۸.۲.۱ و

۱۲.۳.۱،

$$Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G]) \cong [x_i, G]. \tag{۱.۳}$$

همچنین بنا به گزاره ۴.۱.۳، $\gamma_۲(G) = Z(G)$ لذا G ناآبلی محض است. بنابراین،

$$\begin{aligned} |Aut_c(G)| &= |Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, Z(G))| = |Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G))| \\ &= \prod_{i=۱}^{d} |Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, \gamma_۲(G))| \geqslant \prod_{i=۱}^{d} |Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G])| \\ &= \prod_{i=۱}^{d} |[x_i, G]| = \prod_{i=۱}^{d} |x_i^G| \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

در نتیجه،

$$|Aut_c(G)| = \prod_{i=۱}^{d} |x_i^G|.$$

حال چون $\gamma_۲(G) \supseteq [x_i, G]$ لذا $Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G]) \subseteq Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, \gamma_۲(G))$ بنابراین از رابطه (۲.۳)، نتیجه می‌شود که برای هر $۱ \leqslant i \leqslant d$،

$$Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, \gamma_۲(G)) = Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, [x_i, G]). \tag{۳.۳}$$

بنا به لم‌های ۸.۲.۱، ۸.۳.۱ و ۱۲.۳.۱،

$$Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, \gamma_۲(G)) = Hom(\langle \bar{x_i} \rangle, \Omega_{m_i}(\gamma_۲(G))) = \Omega_{m_i}(\gamma_۲(G)). \tag{۴.۳}$$

بنابراین از رابطه‌های (۱.۳)، (۳.۳) و (۴.۳)،

$$|[x_i, G]| = |\Omega_{m_i}(\gamma_۲(G))|.$$

چون نمای $[x_i, G]$ با مرتبه $\bar{x_i}$ برابر است پس $[x_i, G] \leq \Omega_{m_i}(\gamma_۲(G))$. لذا $[x_i, G] = \Omega_{m_i}(\gamma_۲(G))$. حال چون $\{x_۱, \dots, x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G است لذا $\{\bar{x_۱}, \dots, \bar{x_d}\}$ پایه مینیمال $\frac{G}{Z(G)}$ است بنابراین مرتبه $\bar{x_۱}$ برابر با نمای $\frac{G}{Z(G)}$ است و چون $exp(\gamma_۲(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)})$ لذا،

$$[x_۱, G] = \Omega_{m_۱}(\gamma_۲(G)) = \langle x \in \gamma_۲(G) | x^{p^{m_۱}} = ۱ \rangle \overset{exp(\gamma_۲(G)) = p^{m_۱}}{=} \gamma_۲(G).$$

بنابراین $[x_۱, G] = \gamma_۲(G)$. □

نتیجه زیر نشان می‌دهد که مرتبه $Aut_c(G)$ به‌دست آمده در گزاره ۹.۱.۳، مستقل از انتخاب مجموعه مولد مینیمال مشخص G است.

نتیجه ۱۰.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد و p^{m_1}، ...، وp^{m_d} پایاهای $\frac{G}{Z(G)}$ باشند. در این‌صورت،*

$$|Aut_c(G)| = \prod_{i=1}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))|.$$

برهان. فرض کنید p^{m_1}، ...، وp^{m_d} پایاهای $\frac{G}{Z(G)}$ باشند. چون هر مجموعه مولد مینیمال مشخص G را می‌توان به‌صورت $\{x_1, \dots, x_d\}$ (در صورت لزوم بعد از مرتب نمودن)، نوشت به‌طوری‌که برای $1 \leqslant i \leqslant d$، مرتبه $\bar{x}_i$ برابر p^{m_i} باشد. بنابراین با استفاده از گزاره قبل،

$$|Aut_c(G)| = \prod_{i=1}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))|.$$

□

نتیجه ۱۱.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد و $x \in G - \Phi(G)$ که مرتبه $xZ(G)$ برابر p^m است. در این‌صورت، $[x, G] = \Omega_m(\gamma_2(G))$.*

برهان. از گزاره ۴.۱.۳ و قضیه ۲۳.۱.۱، شرایط لم ۷.۱.۳، حاصل می‌شود. لذا می‌توانیم یک مجموعه مولد مینیمال مشخص $\{x_1, \dots, x_d\}$ را برای G پیدا کنیم به‌طوری‌که برای برخی $1 \leqslant i \leqslant d$، $x_i = x$. بنابراین بنا به گزاره ۹.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۲.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد و $x \in G - \Phi(G)$ که مرتبه $xZ(G)$ برابر p^m است. در این‌صورت،*

$$|C_G(x)| = |\frac{G}{Z(G)}||\Omega^m(\gamma_2(G))|.$$

برهان. با توجه به قضیه مدار-پایدارساز،

$$|C_G(x)| = \frac{|G|}{|x^G|} = \frac{|G|}{|[x, G]|}$$

بنا به گزاره ۴.۱.۳، $\gamma_2(G) = Z(G)$. حال با توجه به نتیجه ۱۱.۱.۳ و لم ۷.۳.۱، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۳.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر $Z(G) = \gamma_2(G)$ و $|Aut_c(G)| = \prod_{i=1}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))|$ که p^{m_1}، ...، وp^{m_d} پایاهای $\frac{G}{Z(G)}$ هستند.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند. در این‌صورت بنا به گزاره ۴.۱.۳ و نتیجه ۱۰.۱.۳، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

برعکس، فرض کنید

$$Z(G) = \gamma_2(G) \quad \text{و} \quad |Aut_c(G)| = \prod_{i=1}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))|$$

فرض کنید $\{x_1, \ldots, x_d\}$ یک مجموعه مولد مینیمال مشخص G باشد که برای $1 \leqslant i \leqslant d$، مرتبه $\bar{x}_i = x_i Z(G)$ برابر p^{m_i} است. چون $Z(G) = \gamma_2(G)$ لذا G ناآبلی محض است و بنابراین بنا به نتیجه ۱۱.۱.۲ و لم‌های ۸.۲.۱ ، ۸.۳.۱ و ۱۲.۳.۱،

$$\begin{aligned} |Autcent(G)| &= |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))| = |Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| \\ &= \prod_{i=1}^{d} |Hom(\langle \bar{x}_i \rangle, Z(G))| \\ &= \prod_{i=1}^{d} |Hom(\langle \bar{x}_i \rangle, \Omega_{m_i}(\gamma_2(G)))| \\ &= \prod_{i=1}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_2(G))| = |Aut_c(G)| \end{aligned}$$

از طرفی G از رده ۲ است پس،

$$Aut_c(G) \leq Autcent(G),$$

در نتیجه G در فرض A صدق می‌کند. □

قضیه ۱۴.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر $Aut_c(G) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))$ و $\gamma_2(G) = Z(G)$.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند در این‌صورت چون G ناآبلی است پس از رده ۲ است. در نتیجه بنا به گزاره ۴.۱.۳، $\gamma_2(G) = Z(G)$ و لذا بنا به لم ۵.۱.۳، G ناآبلی محض است. بنابراین با توجه به نتیجه ۱۱.۱.۲ و اینکه G در فرض A صدق می‌کند نتیجه می‌شود که،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G))| = |Aut_c(G)|.$$

بنابراین بنا بر قسمت دوم لم ۶.۲.۲،

$$Aut_c(G) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_2(G)).$$

برعکس، فرض کنید

$$Aut_c(G) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}\gamma_2(G)) \quad \text{و} \quad \gamma_2(G) = Z(G).$$

چون،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G))| = \prod_{i=۱}^{d} |Hom(\langle \bar{x}_i \rangle, \gamma_۲(G))|$$

که p^{m_i} مرتبه $\bar{x}_i$ است، لذا بنا به لم‌های ۸.۲.۱ ، ۸.۳.۱ و ۱۲.۳.۱،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G))| = \prod_{i=۱}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_۲(G))|.$$

در نتیجه بنا به قضیه ۱۳.۱.۳، G در فرض A صدق می‌کند.

برهان دیگری از این قضیه را می‌توان در [۱۶] دید. □

قضیه ۱۵.۱.۳. *اگر G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد، آنگاه $Autcent(G) = Inn(G)$ اگر و فقط اگر $\gamma_۲(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.*

برهان. فرض کنید $\gamma_۲(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد. چون $\gamma_۲(G) = Z(G)$ لذا $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$ آبلی است و چون $Inn(G) \subseteq Aut(G)$ لذا $Inn(G) \subseteq C_{Aut(G)}(Inn(G)) = Autcent(G)$ بنابراین $Inn(G) \leq Autcent(G)$. چون $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است لذا G از رده ۲ می‌باشد در نتیجه بنا به لم ۱۸.۳.۱،

$$exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_۲(G)).$$

چون $\gamma_۲(G) = Z(G)$ پس G ناآبلی محض است. بنابراین بنا به نتیجه ۱۱.۱.۲ و لم ۱۲.۳.۱،

$$\begin{aligned} |Autcent(G)| &= |Hom(\frac{G}{\gamma_۲(G)}, Z(G))| \\ &= |Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G))| \\ &= |\frac{G}{Z(G)}| = |Inn(G)|. \end{aligned}$$

بنابراین، $Autcent(G) = Inn(G)$.

برعکس، فرض کنید

$$Autcent(G) = Inn(G).$$

چون $Inn(G) \leq Aut_c(G)$ لذا،

$$Autcent(G) \leq Aut_c(G).$$

از طرفی چون $Inn(G) = Autcent(G) = C_{Aut(G)}(Inn(G))$ لذا $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$ آبلی است پس G از رده ۲ است. لذا بنا به لم ۳.۲.۲،

$$Aut_c(G) \leq Autcent(G).$$

بنابراین $Aut_c(G) = Autcent(G)$. در نتیجه از قضیه ۱۴.۱.۳،

$$Autcent(G) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G)) \quad \text{و} \quad \gamma_۲(G) = Z(G).$$

حال چون،

$$exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_۲(G))$$

و

$$Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_۲(G)) \cong Autcent(G) = Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$$

لذا بنا به لم ۱۲.۳.۱، $\gamma_۲(G)$ دوری است.

□

قضیه ۱۶.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد که $Z(G)$ دوری است. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر $Z(G) = \gamma_۲(G)$.*

برهان. اگر $Z(G) = \gamma_۲(G)$ آنگاه بنا به قضیه ۱۵.۱.۳، $Autcent(G) = Inn(G)$. چون $Z(G) = \gamma_۲(G)$ و G ناآبلی است لذا G از رده ۲ است و بنا به لم ۳.۲.۲، $Aut_c(G) \leq Autcent(G)$. بنابراین،

$$Aut_c(G) \leq Autcent(G) = Inn(G) \leq Aut_c(G).$$

لذا G در فرض A صدق می‌کند.

برعکس، فرض کنید G در فرض A صدق کند. بنا به قضیه ۱۴.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

تعریف ۱۷.۱.۳. فرض کنید G یک p-گروه متناهی و $Z(G) = Z_۱ \times Z_۲ \times \cdots \times Z_r$ تجزیه دوری $Z(G)$ باشد به‌طوری‌که،

$$|Z_۱| \geqslant |Z_۲| \geqslant \cdots \geqslant |Z_r| > ۱.$$

برای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$، Z_i^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_i^* = Z_۱ \times \cdots \times Z_{i-۱} \times Z_{i+۱} \times \cdots \times Z_r$$

توجه ۱۸.۱.۳. تا پایان این بخش از Z_iها و Z_i^* بدون اشاره استفاده خواهیم کرد.

لم ۱۹.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد. در این‌صورت $\frac{G}{Z_i^*}$ نیز یک p-گروه متناهی از رده ۲ است.*

برهان. چون G از رده ۲ است لذا بنا به لم ۶.۱.۱، $\frac{G}{Z_i^*}$ از رده ۱ یا ۲ است. حال اگر $\frac{G}{Z_i^*}$ ناآبلی باشد از رده ۲ می‌شود. فرض کنید(فرض خلف) $\frac{G}{Z_i^*}$ آبلی باشد پس $\gamma_۲(G) \leq Z_i^*$. چون G از رده ۲ صادق در فرض

A است لذا $\gamma_۲(G) = Z(G)$ در نتیجه $Z(G) \leq Z_i^*$ و این ممکن نیست. بنابراین $\frac{G}{Z_i^*}$ ناآبلی است و لذا از رده ۲ می‌باشد. $\square$

گزاره ۲۰.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد و $x \in G - Z(G)$. در این‌صورت برای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$، $[x, G] \cap Z_i \neq ۱$. به‌علاوه اگر مرتبه Z_i برابر نمای $Z(G)$ باشد، آنگاه $|[x, G] \cap Z_i|$ برابر نمای $[x, G]$ است و $\frac{G}{Z_i^*}$ در فرض A صدق می‌کند.*

برهان. چون G در فرض A صدق می‌کند لذا $\gamma_۲(G) = Z(G)$. فرض کنید $x \in G - \Phi(G)$ به‌طوری‌که مرتبه $xZ(G)$ برابر p^m باشد که $m \geqslant ۱$. در این‌صورت بنا به نتیجه ۱۱.۱.۳، $[x, G] = \Omega_m(\gamma_۲(G))$، لذا $[x, G] = \Omega_m(Z(G))$ در نتیجه بنا به لم ۵.۳.۱، برای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$،

$$[x, G] \cap Z_i \neq ۱ \qquad (*)$$

فرض کنید $|Z_i| = p^e$ برابر نمای $Z(G)$ باشد. بنا به لم ۱۸.۳.۱ (از قضیه ۲۳.۱.۱ و اینکه $\gamma_۲(G) = Z(G)$ شرایط لم ۱۸.۳.۱ حاصل است)، نمای $[x, G]$ برابر با $|\langle \bar{x} \rangle|$ است که $\bar{x} = xZ(G)$، لذا نمای $[x, G]$ برابر با p^m است. بنابراین بنا به لم ۱۱.۳.۱، $m \leqslant e$. چون $[x, G] = \Omega_m(Z(G))$ لذا بنا به لم ۵.۳.۱ و با توجه به تجزیه $Z(G)$ در تعریف ۱۷.۱.۳، و با استفاده از قانون مدولی

$$[x, G] \cap Z_i = \Omega_m(Z_i).$$

بنابراین،

$$|[x, G] \cap Z_i| = p^m.$$

در نتیجه،

$$exp([x, G]) = |[x, G] \cap Z_i| \qquad (**)$$

حال فرض کنید $|Z_۱| = p^e$ برابر نمای $Z(G)$ باشد. برای لحظه‌ای فرض کنید،

$$Z(\frac{G}{Z_i^*}) = \frac{Z(G)}{Z_i^*},$$

در این‌صورت $Z(\frac{G}{Z_i^*}) \cong Z_i$ دوری است (زیرا Z_i دوری است). چون $\gamma_۲(G) = Z(G)$ و $Z_i^* \leq Z(G)$ لذا،

$$\gamma_۲(\frac{G}{Z_i^*}) = \frac{\gamma_۲(G)}{Z_i^*}.$$

بنابراین،

$$Z(\frac{G}{Z_i^*}) = \gamma_۲(\frac{G}{Z_i^*}).$$

در نتیجه از قضیه ۳.۱.۱۶ و لم ۳.۱.۱۹، فرض A برای $\frac{G}{Z_i^*}$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم $Z(\frac{G}{Z_i^*}) = \frac{Z(G)}{Z_i^*}$. فرض کنید $xZ_i^* \in \frac{Z(G)}{Z_i^*}$ در این‌صورت $x \in Z(G)$ و در نتیجه برای هر $y \in G$، $xy = yx$. بنابراین برای هر $yZ_i^* \in \frac{G}{Z_i^*}$،

$$xZ_i^*yZ_i^* = xyZ_i^* = yxZ_i^* = yZ_i^*xZ_i^*.$$

در نتیجه $xZ_i^* \in Z(\frac{G}{Z_i^*})$ بنابراین $\frac{Z(G)}{Z_i^*} \leq Z(\frac{G}{Z_i^*})$. فرض کنید $xZ_i^* \in \frac{G}{Z_i^*} - \frac{Z(G)}{Z_i^*}$، در این‌صورت $x \in G - Z(G)$. دو حالت زیر را در نظر بگیرید.

حالت اول: اگر $x \in G - \Phi(G)$ آنگاه از رابطه $(*)$، و اینکه $Z_i^* \cap Z_i = 1$ (از تجزیه $Z(G)$)، نتیجه می‌شود $[x, G] \nsubseteq Z_i^*$ پس $[x, G]Z_i^* \neq Z_i^*$ لذا $[xZ_i^*, \frac{G}{Z_i^*}] \neq 1$. بنابراین $xZ_i^* \notin Z(\frac{G}{Z_i^*})$.

حالت دوم: فرض کنید $x \in \Phi(G) - Z(G)$. چون $\frac{G}{\Phi(G)}$ آبلی مقدماتی است لذا،

$$\frac{G}{\Phi(G)} = \langle y_1\Phi(G)\rangle \times \cdots \times \langle y_t\Phi(G)\rangle,$$

که $y_i \in G - \Phi(G)$. بنابراین $G = \langle y_1\rangle \times \cdots \times \langle y_t\rangle$. چون $x \in \Phi(G) \subseteq G$ لذا $x = y_1^{\alpha_1} \cdots y_t^{\alpha_t}$. بنابراین $xZ(G) = y_1^{\alpha_1} \cdots y_t^{\alpha_t} Z(G)$. حال چون $y_i \notin \Phi(G)$ و $exp(\frac{G}{\Phi(G)}) = p$ لذا $y_i^{\alpha_i} \in \Phi(G) \Leftrightarrow p|\alpha_i$. در نتیجه،

$$xZ(G) = y_1^{p^{\beta_1}\alpha'_1} \cdots y_t^{p^{\beta_t}\alpha'_t} Z(G) = (y_1^{\alpha'_1} y_2^{p^{\beta_2-\beta_1}\alpha'_2} \cdots y_t^{p^{\beta_t-\beta_1}\alpha'_t})^{p^{\beta_1}} Z(G).$$

چون p ، α'_1 را نمی‌شمارد لذا $y_1^{\alpha'_1} \notin \Phi(G)$ و در نتیجه $y_1^{\alpha'_1} y_2^{p^{\beta_2-\beta_1}\alpha'_2} \cdots y_t^{p^{\beta_t-\beta_1}\alpha'_t} \notin \Phi(G)$. قرار می‌دهیم:

$$y = y_1^{\alpha'_1} y_2^{p^{\beta_2-\beta_1}\alpha'_2} \cdots y_t^{p^{\beta_t-\beta_1}\alpha'_t} \quad \text{و} \quad j = p^{\beta_1}$$

پس عنصر $y \in G - \Phi(G)$، عدد صحیح j و $z \in Z(G)$ وجود دارند که، $x = y^j z$. حال چون G از رده ۲ است لذا،

$$[x, G] = [y^j z, G] = [y^j, G][z, G] = [y^j, G] = [y, G]^j, \ 1 \leqslant j < exp([y, G]).$$

چون $y \in G - \Phi(G)$ لذا از رابطه $(**)$، $|[y, G] \cap Z_i|$ برابر نمای $[y, G]$ است. پس برای هر j ناصفر که اکیدا کمتر از نمای $[y, G]$ است داریم: $|[y, G] \cap Z_i| = exp([y, G]) > 1$، لذا $[y, G] \cap Z_i \neq 1$ و از طرفی $Z_i^* \cap Z_i = 1$، در نتیجه $[y, G] \nsubseteq Z_i^*$، لذا $[y, G]^j \nsubseteq Z_i^*$ و بنابراین $[x, G] \nsubseteq Z_i^*$. در نتیجه $xZ_i^* \notin Z(\frac{G}{Z_i^*})$. بنابراین با توجه به این دو حالت، $Z(\frac{G}{Z_i^*}) \leq \frac{Z(G)}{Z_i^*}$. از طرفی $\frac{Z(G)}{Z_i^*} \leq Z(\frac{G}{Z_i^*})$، در نتیجه $\frac{Z(G)}{Z_i^*} = Z(\frac{G}{Z_i^*})$. □

تعریف ۳.۱.۲۱. گروه G را حاصل‌ضرب مرکزی از زیرگروه‌های نرمال G_1، ...، وG_n گویند هرگاه $G = G_1 \cdots G_n$ و برای $i \neq j$، $[G_i, G_j] = 1$ و برای هر i، $G_i \cap \prod_{i \neq j} G_j = Z(G)$.

لم ۲۲.۱.۳. *اگر گروه G حاصل‌ضرب مرکزی از زیرگروه‌های نرمال G_1، ... و G_n باشد، آنگاه $Z(G) = Z(G_i)$ و $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ حاصل‌ضرب مستقیم از گروه‌های $\bar{G_1}$، ... و $\bar{G_n}$ است که $\bar{G_i} = \frac{G_i}{Z(G_i)}$.*

برهان. فرض کنید $x \in Z(G_i)$. در این‌صورت،

$$[x, G_i] = 1 \qquad (*)$$

حال فرض کنید $g \in G$ دلخواه باشد لذا $g = g_1 \cdots g_n$ که $g_i \in G_i$.

$$[x,g] = [x, g_1 \cdots g_n] = [x, g_2 \cdots g_n] \underbrace{[x, g_1]^{g_2 \cdots g_n}}_{\text{از رابطه } (*) = 1}$$
$$= [x, g_3 \cdots g_n] \underbrace{[x, g_2]^{g_3 \cdots g_n}}_{=1} = \cdots = [x, g_n] = 1.$$

لذا $x \in Z(G)$. بنابراین $Z(G_i) \leq Z(G)$، از طرفی با توجه به تعریف حاصل‌ضرب مرکزی $Z(G_i) \geq Z(G)$. حال با توجه به این تساوی واضح است که،

$$\bar{G} = \frac{G}{Z(G)} = \frac{G_1}{Z(G)} \times \cdots \times \frac{G_n}{Z(G)}.$$

□

قضیه ۲۳.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ با مرکز دوری باشد. در این‌صورت G حاصل‌ضرب مرکزی، از زیرگروه‌های ۲-مولدی با مرکز دوری است.*

برهان. به [۷] قضیه ۲.۱ رجوع شود. □

قضیه ۲۴.۱.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ صادق در فرض A باشد. در این‌صورت $d(G)$ زوج است.*

برهان. فرض کنید $|Z_i|$ برابر نمای $Z(G)$ و G^* معرف گروه عامل $\frac{G}{Z_i^*}$ باشد. در این‌صورت بنا به گزاره ۲۰.۱.۳، G^* در فرض A صدق می‌کند. چون G^* از رده ۲ است(بنا به ۱۹.۱.۳)، در نتیجه از گزاره ۴.۱.۳، $Z(G^*) = \gamma_2(G^*)$ دوری از مرتبه $|Z_i|$ است (زیرا $Z(G^*) \cong Z_i$ و Z_i دوری است).
چون G^* یک p-گروه متناهی از رده ۲ با مرکز دوری است لذا بنا به قضیه ۲۳.۱.۳ G^*، حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های ۲-مولدی با مرکز دوری است. فرض کنید $G^* = G_1^* \cdots G_n^*$ که G_i^*، ۲-مولدی با مرکز دوری هستند. با توجه به ناآبلی محض بودن G^* مولد مینیمال G_i^* نیز دو عضوی است. حال با استفاده از لم ۲۲.۱.۳،

$$\frac{G^*}{Z(G^*)} = \frac{G_1^*}{Z(G_1^*)} \times \cdots \times \frac{G_n^*}{Z(G_n^*)} \qquad (*)$$

چون G_i^*، ۲-مولدی است لذا $\frac{G_i^*}{Z(G_i^*)}$ تک مولدی یا ۲-مولدی است. اگر تک مولدی باشد آنگاه دوری است و لذا G_i^* آبلی است. پس $G_i^* = Z(G_i^*)$ و این یک تناقض است زیرا G_i^*، ۲-مولدی و لذا غیر دوری است در صورتی‌که $Z(G_i^*)$ دوری است. بنابراین مولد مینیمال $\frac{G_i^*}{Z(G_i^*)}$ دو عضوی است. از طرفی چون G^* از رده ۲ است لذا $\frac{G^*}{Z(G^*)}$ آبلی است و بنا به رابطه $(*)$، $\frac{G_i^*}{Z(G_i^*)}$ نیز آبلی است. بنابراین $\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{G^*}{Z(G^*)}$ حاصل‌ضرب مستقیم از تعداد زوج زیرگروه‌های دوری $\frac{G^*}{Z(G^*)}$ است(چون هر گروه آبلی با حاصل‌ضرب مستقیم از گروه‌های دوری یکریخت است). بنابراین $d(\frac{G}{Z(G)})$ زوج است. از طرفی بنا به قضیه ۲۳.۱.۱، $\gamma_2(G) \leq \Phi(G)$ و بنا به گزاره ۴.۱.۳، $Z(G) = \gamma_2(G)$. لذا $d(G)$ زوج است. □

۲.۳ گروه‌های ویژه و فوق ویژه

لم ۱.۲.۳. *فرض کنید X یک گروه متناهی و $\bar{X} = \frac{X}{Z(X)}$. در این‌صورت با فرض جابه‌جایی $\bar{X}$ نگاشت $a_X : \bar{X} \times \bar{X} \longrightarrow \gamma_2(X)$ با ضابطه $a_X(xZ(X), yZ(X)) = [x, y]$ برای $(x, y) \in X \times X$، خوش تعریف است.*

تعریف ۲.۲.۳. دو گروه متناهی G و H، ایزوکلینیک[۱] گفته می‌شوند هرگاه یکریختی φ از گروه عامل $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ بروی $\bar{H} = \frac{H}{Z(H)}$ و یکریختی θ از $\gamma_2(G)$ بروی $\gamma_2(H)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که، نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{G} & \xrightarrow{a_G} & \gamma_2(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi\times\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ \bar{H} \times \bar{H} & \xrightarrow{a_H} & \gamma_2(H) \end{array}$$

زوج (φ, θ) ایزوکلینیسم G بروی H گفته می‌شود.

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنید G و H دو گروه ایزوکلینیک ناآبلی متناهی باشند. در این‌صورت، $Aut_c(G) \cong Aut_c(H)$.*

برهان. به [۴۲] قضیه ۴.۱ رجوع شود. □

گزاره ۴.۲.۳. *فرض کنید G و H دو p-گروه متناهی ناآبلی ایزوکلینیک باشند و G در فرض A صدق کند. در این‌صورت H در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر $|G| = |H|$.*

برهان. فرض کنید H در فرض A صدق کند. چون H ناآبلی است لذا از رده ۲ است. بنابراین

[۱] Isoclinic

$\gamma_{۲}(H) = Z(H)$. چون G و H ایزوکلینیک هستند لذا،
$$\gamma_{۲}(G) \cong \gamma_{۲}(H) \text{ و } \frac{H}{Z(H)} \cong \frac{G}{Z(G)}$$
و چون G ناآبلی است و در فرض A صدق می‌کند پس از رده ۲ است. لذا $\gamma_{۲}(G) = Z(G)$ بنابراین $Z(H) \cong Z(G)$. در نتیجه،
$$|H| = |\frac{H}{Z(H)}||Z(H)| = |\frac{G}{Z(G)}||Z(G)| = |G|$$
بر عکس، فرض کنید $|G| = |H|$. از قسمت قبل نتیجه می‌شود که $|\gamma_{۲}(H)| = |Z(H)|$ و چون $\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{H}{Z(H)}$ آبلی است، لذا $\gamma_{۲}(H) \leq Z(H)$ و بنابراین $\gamma_{۲}(H) = Z(H)$. فرض کنید $p^{m_۱}, \ldots$ و p^{m_d} پایاهای $\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{H}{Z(H)}$ باشند. چون $\gamma_{۲}(G) \cong \gamma_{۲}(H)$ لذا،
$$\Omega_{m_i}(\gamma_{۲}(H)) \cong \Omega_{m_i}(\gamma_{۲}(G)).$$
از طرفی بنا به قضیه ۳.۲.۳، $Aut_c(G) \cong Aut_c(H)$. بنابراین از قضیه۱۳.۱.۳، داریم:
$$|Aut_c(H)| = |Aut_c(G)| = \prod_{i=۱}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_{۲}(G))| = \prod_{i=۱}^{d} |\Omega_{m_i}(\gamma_{۲}(H))|.$$
در نتیجه از همان قضیه، H در فرض A صدق می‌کند. □

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنید G یک گروه متناهی و $N \neq ۱$ زیرگروه نرمال G باشد. به (G, N) زوج کامینا گفته می‌شود هرگاه برای هر $x \in G - N$، $xN \subseteq x^G$.
گروه G گروه کامینا است هرگاه $(G, \gamma_{۲}(G))$ یک زوج کامینا باشد.

تذکر ۶.۲.۳. *اگر G گروه کامینا باشد، آنگاه برای هر $x \in G - \gamma_{۲}(G)$، $x\gamma_{۲}(G) \subseteq x^G$. این معادل با این است که، برای هر $x \in G - \gamma_{۲}(G)$، $\gamma_{۲}(G) \subseteq [x, G]$. از طرفی $[x, G] \subseteq \gamma_{۲}(G)$، لذا G گروه کامینا است اگر و تنها اگر برای هر $x \in G - \gamma_{۲}(G)$، $\gamma_{۲}(G) = [x, G]$.*

لم ۷.۲.۳. *فرض کنید (G, N) یک زوج کامینا باشد. در این‌صورت $Z(G) \subseteq N$. بویژه اگر G کامینا باشد، آنگاه $Z(G) \subseteq \gamma_{۲}(G)$.*

برهان. فرض کنید $x \in Z(G)$. اگر $x \notin N$ آنگاه بنا به تعریف کامینا، $xN \subseteq x^G = \{x\}$. بنابراین $|N| = ۱$ و این متناقض با تعریف کامینا است. □

لم ۸.۲.۳. *اگر G یک گروه از رده c و $(G, \gamma_r(G))$ زوج کامینا باشد، آنگاه برای i که $r - ۱ \leqslant i \leqslant c$، $\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+۱}(G)}$ دارای نمای p است.*

برهان. به [۲۶] نتیجه ۲.۳ رجوع شود. □

نتیجه ۹.۲.۳. *اگر G یک گروه کامینا از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد، آنگاه $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ آبلی مقدماتی است.*

تعریف ۱۰.۲.۳. p-گروه متناهی G، ویژه گفته می‌شود هرگاه G آبلی مقدماتی باشد یا $Z(G) = \gamma_2(G) = \Phi(G)$.

تعریف ۱۱.۲.۳. p-گروه متناهی G، فوق ویژه گفته می‌شود هرگاه $Z(G) = \gamma_2(G) = \Phi(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.

لم ۱۲.۲.۳. *اگر G یک p-گروه متناهی ویژه باشد، آنگاه $\frac{G}{Z(G)}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی هستند.*

برهان. اگر G آبلی مقدماتی باشد واضح است که $\frac{G}{Z(G)}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی هستند. اگر $Z(G) = \gamma_2(G) = \Phi(G)$ آنگاه بنا به نتیجه ۲۵.۱.۱، $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است. و بنا به لم ۱۸.۳.۱،
$$exp(Z(G)) = exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p$$
و چون $Z(G)$ آبلی است لذا آبلی مقدماتی است. □

لم ۱۳.۲.۳. *هر p-گروه ناآبلی از مرتبه p^3 فوق ویژه است.*

برهان. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^3 باشد. چون G ناآبلی است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ دوری نیست. بنابراین $|\frac{G}{Z(G)}| = p^2$ پس $|Z(G)| = p$ و در نتیجه $Z(G)$ دوری است. از طرفی G یک p-گروه ناآبلی است لذا $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ نیز دوری نیست و $\gamma_2(G) \neq 1$ پس $|\frac{G}{\gamma_2(G)}| = p^2$ و لذا $|\gamma_2(G)| = p$. چون $|\frac{G}{\gamma_2(G)}| = p^2$ و $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ دوری نیست لذا $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ آبلی مقدماتی است در نتیجه $\Phi(\frac{G}{\gamma_2(G)}) = 1$ و لذا بنا به لم ۲۷.۱.۱، $\gamma_2(G) = \Phi(G)$. از طرفی $|\frac{G}{Z(G)}| = p^2$ و چون هر گروه از مرتبه p^2 آبلی است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است بنابراین $\gamma_2(G) \leq Z(G)$. حال چون $|Z(G)| = |\gamma_2(G)| = p$ پس $Z(G) = \gamma_2(G)$ و در نتیجه G فوق ویژه است. □

فرض کنید G یک p-گروه متناهی از مرتبه p^n و $\{x_1, \ldots, x_d\}$ مجموعه مولد مینیمال G و $|\gamma_2(G)| = p^m$ باشد. چون $\gamma_2(G) \leq \Phi(G)$ لذا بنا به قضیه پایه برنساید $d \leqslant n - m$ است.
چون برای $i = 1, \ldots, d$، $|x_i^G| \leqslant |\gamma_2(G)| = p^m$ و $|Aut_c(G)| \leqslant \prod_{i=1}^{d} |x_i^G|$ بنابراین،
$$|Aut_c(G)| \leqslant p^{md} \leqslant p^{m(n-m)}. \tag{۵.۳}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که تحت شرایطی، تساوی در رابطه (۵.۳)، برقرار است.

قضیه ۱۴.۲.۳. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی و d تعداد عناصر مولد مینیمال G باشد. در این‌صورت $|Aut_c(G)| = |\gamma_2(G)|^d$ اگر و تنها اگر G یک p-گروه آبلی یا یک p-گروه کامینا ویژه ناآبلی باشد.*

برهان. به [۴۱] قضیه ۵.۴ رجوع شود. □

گزاره ۱۵.۲.۳. *فرض کنید G یک p-گروه ویژه متناهی باشد. در این‌صورت فرض A برای G برقرار است اگر و تنها اگر G گروه کامینا باشد.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند. G یک p-گروه ویژه است لذا برای هر دو حالت از تعریف گروه ویژه $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ آبلی مقدماتی است پس $\Phi(\frac{G}{\gamma_2(G)}) = 1$ لذا $\gamma_2(G) = \Phi(G)$. پس کافی است برای هر $x \in G - \Phi(G)$، نشان دهیم $\gamma_2(G) = [x, G]$. فرض کنید $x \in G - \Phi(G)$، بنا به نتیجه ۱۱.۱.۳، $[x, G] = \Omega_m(\gamma_2(G))$ که p^m مرتبه $xZ(G)$ در $\frac{G}{Z(G)}$ است. از لم ۱۲.۲.۳، نتیجه می‌شود که $m = 1$ و نمای $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p است. لذا نمای $\gamma_2(G)$ برابر p است. بنابراین $[x, G] = \Omega_m(\gamma_2(G)) = \gamma_2(G)$ و در نتیجه G گروه کامینا است.

بر عکس، فرض کنید G گروه کامینا است. G ویژه است در نتیجه بنا به قضیه ۱۴.۲.۳،

$$|Aut_c(G)| = |\gamma_2(G)|^d,$$

که $|\frac{G}{\Phi(G)}| = p^d$. از اینکه G کامینا ویژه است بنا به لم‌های ۷.۲.۳ و ۱۲.۲.۳، $\gamma_2(G) = Z(G)$ و $p^{m_1} = p$، ...، و $p^{m_d} = p$ پایاهای $\frac{G}{Z(G)}$ هستند. بنابراین $\Omega_{m_i}(\gamma_2(G)) = \gamma_2(G)$. حال از قضیه ۱۳.۱.۳، نتیجه می‌شود که G در فرض A صدق می‌کند. □

لم ۱۶.۲.۳. *هر p-گروه کامینا متناهی پوچ‌توان از رده ۲ ویژه است.*

برهان. چون G از رده ۲ است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است و در نتیجه $\gamma_2(G) \leq Z(G)$. از طرفی بنا به لم ۷.۲.۳، $Z(G) \leq \gamma_2(G)$ لذا $Z(G) = \gamma_2(G)$ و بنا به نتیجه ۹.۲.۳، $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ آبلی مقدماتی است لذا $\Phi(G) = \gamma_2(G)$ و بنابراین G ویژه است. □

نتیجه ۱۷.۲.۳. *فرض کنید G یک p-گروه کامینا متناهی پوچ‌توان از رده ۲ باشد. در این صورت G در فرض A صدق می‌کند.*

برهان. بنا به گزاره ۱۵.۲.۳، و لم قبل نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۸.۲.۳. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد که $Z(G)$ آبلی مقدماتی است. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر G یک p-گروه کامینا از رده ۲ باشد.*

برهان. فرض کنید G یک p-گروه کامینا از رده ۲ باشد. در این‌صورت بنا به نتیجه قبل G در فرض A صدق می‌کند.

بر عکس، فرض کنید G در فرض A صدق کند. چون G ناآبلی است لذا از رده ۲ است. در نتیجه بنا به گزاره ۳.۱.۴، $\gamma_2(G) = Z(G)$. چون $Z(G)$ آبلی مقدماتی است لذا،

$$exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_2(G)) = exp(Z(G)) = p$$

بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است. پس $\Phi(\frac{G}{Z(G)}) = 1$ لذا $\Phi(G) = Z(G)$(از لم ۱.۱.۲۷). از طرفی $\gamma_2(G) = Z(G)$ پس G ویژه است. بنابراین بنا به گزاره ۳.۲.۱۵، G کامینا است.

برهان دیگری از این قضیه را می‌توان در [۱۶] دید. □

نتیجه ۳.۲.۱۹. *p-گروه‌های فوق ویژه، کامینا هستند و برای هر p-گروه فوق ویژه G، $Aut_c(G) = Inn(G)$.*

برهان. از قضیه ۳.۱.۱۶ و گزاره ۳.۲.۱۵ و قضیه ۳.۱.۱۵، نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه زیر از نتایج ۳.۲.۱۹ و ۳.۲.۱۷ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳.۲.۲۰. *همه p-گروه‌های فوق ویژه متناهی در فرض A صدق می‌کنند.*

توجه ۳.۲.۲۱. عکس نتایج ۳.۲.۱۷ و ۳.۲.۲۰ لزوما برقرار نیست. مثال‌هایی از p-گروه‌های کامینا از رده‌ی پوچ‌توانی ۲، که فوق ویژه نیستند را می‌توان در [۱۱] و [۲۶] دید. همچنین مثالی از p-گروه متناهی صادق در فرض A که گروه کامینا نیست را می‌توان در زیر مشاهده کرد.

مثال ۳.۲.۲۲. [۴۴] فرض کنید R حلقه عامل $\frac{S}{p^2 S}$ باشد که S حلقه صحیح‌های p-ادیک[۲] در توسیع نامنشعب از درجه ۲ روی کامل‌سازی p-ادیک Q_p از میدان اعداد گویای Q است. در این‌صورت گروه G از ماتریس‌های 3×3 به فرم،

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$$

که $x, y, z \in R$، گروهی صادق در فرض A است که کامینا نیست.

---

[۲] p-adic

فصل ۴

p- گروه‌های خاص

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول روی مرتبه‌ای از G که G در فرض A صدق کند بحث می‌کنیم و در بخش دوم گروه G را با ویژگی $Aut(G) = Aut_c(G)$ در نظر گرفته و روی مرتبه گروه G و مرتبه گروه خودریختی‌های آن بحث می‌کنیم و همچنین با فرض $Aut(G) = Aut_c(G)$ ثابت می‌کنیم که $Aut(G)$ آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر G کامینا ویژه باشد.

مطالب این فصل از [۱۶] و [۴۴] گرفته شده است.

۱.۴ گروه‌های از مرتبه p^n، $n \leqslant 7$

لم ۱.۱.۴. *فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه p^n باشد که $n \geqslant 3$. اگر $\mid Z(G) \mid = p^{n-2}$ آنگاه $Aut_c(G) = Inn(G)$.*

برهان. چون $\mid \frac{G}{Z(G)} \mid = p^2$ و هر گروه از مرتبه p^2 آبلی است لذا G از رده ۲ است.

اگر x عضو غیر مرکزی G باشد، آنگاه $\mid C_G(x) \mid = p^{n-1}$ و بنابراین،

$$\mid [x, G] \mid = \mid x^G \mid = \frac{\mid G \mid}{\mid C_G(x) \mid} = p.$$

اگر $x \in Z(G)$ آنگاه $\mid [x, G] \mid = \mid x^G \mid = 1$. در هر حالت $[x, G]$ دوری است و بنابراین بنا به قضیه ۱۰.۲.۲، $Aut_c(G) = Inn(G)$. □

قضیه ۲.۱.۴. *فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^n باشد که $n = 3, 5$. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\gamma_2(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند. در این‌صورت بنا به قضیه ۱۴.۱.۳، $\gamma_2(G) = Z(G)$.

- اگر $|G|=p^{۳}$ آنگاه بنا به لم ۱۳.۲.۳، G فوق ویژه است و لذا $Z(G)$ دوری است.

- اگر $|G|=p^{۵}$ آنگاه چون G ناآبلی است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ دوری نیست پس $|\frac{G}{Z(G)}|$ برابر $p^{۲}$ یا $p^{۳}$ یا $p^{۴}$ است.

۱. اگر $|\frac{G}{Z(G)}|=p^{۲}$ آنگاه $|Z(G)|=p^{۳}$ و لذا بنا به لم قبل $Aut_c(G)=Inn(G)$ و چون G در فرض A صدق می‌کند لذا $Autcent(G)=Inn(G)$ و در نتیجه بنا به قضیه ۱۵.۱.۳، $Z(G)$ دوری است و این بنا به لم موریگی(۱۸.۳.۱)، ممکن نیست. پس این حالت رخ نمی‌دهد.

۲. اگر $|\frac{G}{Z(G)}|=p^{۳}$ آنگاه $|Z(G)|=p^{۲}$. اگر $Z(G)$ دوری باشد به تناقض با لم موریگی می‌رسیم و اگر دوری نباشد به تناقض با قضیه ۲۴.۱.۳ می‌رسیم. در نتیجه این حالت نیز رخ نمی‌دهد. لذا تنها حالت ممکن حالت زیر است.

۳. اگر $|\frac{G}{Z(G)}|=p^{۴}$ آنگاه $|Z(G)|=p$ و لذا $Z(G)$ دوری است.

عکس قضیه، از قضیه ۱۶.۱.۳، حاصل می‌شود. □

توجه ۳.۱.۴. قضیه فوق برای گروه‌های از مرتبه $p^{۴}$ برقرار نیست.

قضیه ۴.۱.۴. *فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبه $p^{۶}$ باشد. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر یا $\gamma_{۲}(G)=Z(G)$ و $Z(G)$ دوری است یا G یک p-گروه کامینا از رده ۲ است.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند در این‌صورت بنا به قضیه ۱۴.۱.۳، $\gamma_{۲}(G)=Z(G)$. اگر $Z(G)$ دوری نباشد آنگاه ثابت می‌کنیم که $Z(G)$ آبلی مقدماتی است و نتیجه از قضیه ۱۸.۲.۳، حاصل می‌شود. چون $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ دوری نیستند لذا، $p^{۲}\leqslant|Z(G)|\leqslant p^{۴}$.

- اگر $|Z(G)|=p^{۲}$ آنگاه چون $Z(G)$ دوری نیست لذا،
$$Z(G)\cong C_p\times C_p.$$
بنابراین $Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

- فرض کنید $|Z(G)|=p^{۳}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی نباشد در این‌صورت،
$$Z(G)\cong C_{p^{۲}}\times C_p.$$
لذا،
$$exp(\frac{G}{Z(G)})=exp(\gamma_{۲}(G))=exp(Z(G))=p^{۲}.$$

بنابراین چون $|\frac{G}{Z(G)}| = p^3$ لذا،

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^2} \times C_p$$

و این متناقض با لم موریگی است. بنابراین $Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

- اگر $|Z(G)| = p^4$ آنگاه چون $\frac{G}{Z(G)}$ دوری نیست و از مرتبه p^2 است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است. بنابراین،

$$exp(Z(G)) = exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p.$$

در نتیجه $Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

برعکس، فرض کنید $Z(G) = \gamma_2(G)$ و $Z(G)$ دوری است یا G یک p-گروه کامینا از رده ۲ است. اگر $Z(G) = \gamma_2(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد، آنگاه بنا به قضیه ۱۶.۱.۳، G در فرض A صدق می‌کند. اگر G یک p-گروه کامینا از رده ۲ باشد، آنگاه بنا به نتیجه ۱۷.۲.۳، G در فرض A صدق می‌کند. □

قضیه ۵.۱.۴. *فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^7 باشد. در این‌صورت G در فرض A صدق می‌کند اگر و تنها اگر یا $Z(G) = \gamma_2(G)$ و $Z(G)$ دوری است یا G یک p-گروه کامینا از رده ۲ است.*

برهان. فرض کنید G در فرض A صدق کند در این‌صورت بنا به قضیه ۱۴.۱.۳، $Z(G) = \gamma_2(G)$. اگر $Z(G)$ دوری نباشد آنگاه مانند قضیه قبل کافی است ثابت کنیم $Z(G)$ آبلی مقدماتی است. چون $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ دوری نیستند لذا $p^2 \leqslant |Z(G)| \leqslant p^5$.

- اگر $|Z(G)| = p^2$ آنگاه چون $Z(G)$ دوری نیست لذا مانند قضیه قبل آبلی مقدماتی است.

- اگر $|Z(G)| = p^5$ آنگاه $|\frac{G}{Z(G)}| = p^2$ و چون دوری نیست لذا آبلی مقدماتی است. بنابراین،

$$exp(Z(G)) = exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p.$$

پس $Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

- فرض کنید $|Z(G)| = p^3$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی نباشد یعنی $Z(G) \cong C_{p^2} \times C_p$. در این‌صورت بنا به لم موریگی و اینکه $|\frac{G}{Z(G)}| = p^4$ نتیجه می‌شود،

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^2} \times C_{p^2}.$$

بنابراین G یک گروه ۲-مولدی است لذا بنا به لم ۲۰.۳.۱، $\gamma_2(G)$ دوری است و این متناقض با $\gamma_2(G) = Z(G) \cong C_{p^2} \times C_p$ است. در نتیجه $Z(G)$ آبلی مقدماتی می‌باشد.

- فرض کنید $|Z(G)|=p^{۴}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی نباشد. در این‌صورت، $exp(Z(G))=p^{۲}$ یا $exp(Z(G))=p^{۳}$.

لذا،

$$|\frac{G}{Z(G)}|=p^{۳} \text{ و } exp(\frac{G}{Z(G)})=p^{۳} \text{ یا } exp(\frac{G}{Z(G)})=p^{۲}$$

که بنا به لم موریگی ممکن نیست. بنابراین $Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

عکس قضیه، از نتیجه ۱۷.۲.۳ و قضیه ۱۶.۱.۳ به‌دست می‌آید.

□

۲.۴ گروه‌هایی با ویژگی $Aut(G)=Aut_c(G)$

در سراسر این بخش p عدد اول فرد است.

قضیه زیر از [۵]، [۱۲]، [۱۸]، [۲۶]، [۲۹] و [۳۰] گرفته شده است.

قضیه ۱.۲.۴. *گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(۱) *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه کمتر یا مساوی $p^{۵}$ باشد. در این‌صورت $Aut(G)$ ناآبلی است.*

(۲) *گروهی از مرتبه $p^{۶}$ که گروه خودریختی آن یک p-گروه آبلی باشد وجود ندارد.*

(۳) *فرض کنید G یک p-گروه متناهی ناآبلی باشد که $Aut(G)$ آبلی است. در این‌صورت، $d(G)\geqslant ۴$.*

(۴) *فرض کنید G یک p-گروه متناهی غیر دوری باشد که $Aut(G)$ آبلی است. در این‌صورت، $p^{۱۲}\mid |Aut(G)|$.*

(۵) *فرض کنید G یک گروه غیر دوری از مرتبه $p^{۷}$ باشد. اگر $Aut(G)$ آبلی باشد، آنگاه مرتبه آن باید $p^{۱۲}$ باشد.*

(۶) *فرض کنید G یک p-گروه متناهی غیر دوری باشد که $Aut(G)$ آبلی است. در این‌صورت، $\gamma_{۲}(G)\cong C_{p^m}\times C_{p^m}$ یا $\gamma_{۲}(G)\cong C_{p^m}\times C_{p^m}\times C_{p^{m_۱}}\times\cdots\times C_{p^{m_k}}$*

که p^m نمای $\gamma_{۲}(G)$ است و برای $۱\leqslant i\leqslant k$، $m\geqslant m_i$.

(۷) *فرض کنید G یک p-گروه کامینا متناهی از رده ۲ باشد که برای برخی اعداد صحیح m و n، $d(G) = n$ و $d(\gamma_2(G)) = m$. در این‌صورت n زوج است و $n \geqslant 2m$.*

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد و $p > 2$، به‌طوری‌که $\gamma_2(G)$ دوری است. اگر α یک خودریختی از G باشد که خودریختی‌های القایی روی $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ و $Z(G)$ خودریختی همانی باشند، آنگاه α خودریختی داخلی است.*

برهان. به [۱۰] قضیه ۳ رجوع شود. □

قضیه ۳.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد. در این‌صورت G دارای خودریختی از مرتبه توانی از p است که داخلی نیست.*

برهان. به [۱۴] رجوع شود. □

لم ۴.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد که $Aut(G) = Aut_c(G)$. در این‌صورت $\gamma_2(G)$ دوری نیست.*

برهان. فرض کنید $\gamma_2(G)$ دوری است و $\alpha \in Aut(G)$. چون $Aut(G) = Aut_c(G)$ لذا برای هر $g \in G$، $\alpha(g) \in g^G$. بنابراین $g^{-1}\alpha(g) \in [g, G] \subseteq \gamma_2(G)$ و در نتیجه $\alpha(g)\gamma_2(G) = g\gamma_2(G)$. حال فرض کنید $x \in Z(G)$. در این‌صورت $\alpha(x) \in x^G = \{x\}$. در نتیجه $\alpha(x) = x$. بنابراین از قضیه ۲.۲.۴، نتیجه می‌شود که،

$$Aut(G) = Aut_c(G) = Inn(G).$$

و این بنا به قضیه ۳.۲.۴، ممکن نیست. □

لم ۵.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد که $Aut(G) = Aut_c(G)$. در این‌صورت $Aut(G)$ آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر G یک p-گروه کامینا ویژه باشد.*

برهان. فرض کنید $Aut(G) = Aut_c(G)$ آبلی مقدماتی باشد. در این‌صورت،

$$\frac{G}{Z(G)} (\cong Inn(G) \leq Aut(G))$$

آبلی مقدماتی است. چون G ناآبلی است لذا از رده ۲ است. از طرفی $Aut(G)$ آبلی است پس $Aut(G) = Autcent(G)$، لذا G در فرض A صدق می‌کند. بنابراین $\gamma_2(G) = Z(G)$. از اینکه $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است نتیجه می‌شود که $\Phi(\frac{G}{Z(G)}) = 1$ و بنا به لم ۲۷.۱.۱، $\Phi(G) = Z(G)$. در نتیجه G ویژه است. بنابراین بنا به گزاره ۱۵.۲.۳، G کامینا است.

بر عکس، فرض کنید G کامینا ویژه باشد. در این‌صورت G از رده ۲ است. از طرفی بنا به لم ۱۲.۲.۳، $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است لذا $Hom(\frac{G}{Z(G)}, \gamma_{۲}(G))$ نیز آبلی مقدماتی است. حال از قضیه ۱۴.۱.۳، نتیجه می‌شود که $Aut(G) = Aut_c(G)$ نیز آبلی مقدماتی است. □

قضیه ۶.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی ناآبلی محض باشد. در این‌صورت، اگر نمای $Z(G)$ برابر p یا نمای $\frac{G}{\gamma_{۲}(G)}$ برابر p باشد، آنگاه $Autcent(G)$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است.*

برهان. به [۲۱] رجوع شود. □

لم ۷.۲.۴. *اگر G یک p-گروه ویژه ناآبلی باشد و $Aut(G) = Autcent(G)$ آنگاه $Aut(G)$ آبلی مقدماتی است.*

برهان. G یک p-گروه ویژه است لذا $Z(G)$ آبلی مقدماتی است و در نتیجه نمای $Z(G)$ برابر p است. چون G ویژه ناآبلی است پس $\gamma_{۲}(G) = Z(G) = \Phi(G)$، لذا G ناآبلی محض است. حال از قضیه ۶.۲.۴، نتیجه حاصل می‌شود. □

تذکر ۸.۲.۴. *عکس لم قبل درست نیست یعنی p-گروه‌های متناهی غیر ویژه G وجود دارد که، $Aut(G) = Autcent(G)$ آبلی مقدماتی است.*

برای نمونه به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۹.۲.۴. [۲۲] گروه،

$$\begin{aligned} G = \langle & x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_{۵} : \\ & x_{۱}^{p^{۲}} = x_{۲}^{p^{۲}} = x_{۳}^{p^{۲}} = x_{۴}^{p^{۲}} = x_{۵}^{p} = ۱, \\ & [x_{۱}, x_{۲}] = x_{۱}^{p}, [x_{۱}, x_{۳}] = x_{۳}^{p}, [x_{۱}, x_{۴}] = ۱, \\ & [x_{۱}, x_{۵}] = x_{۱}^{p}, [x_{۲}, x_{۳}] = x_{۲}^{p}, [x_{۲}, x_{۴}] = ۱, \\ & [x_{۲}, x_{۵}] = x_{۴}^{p}, [x_{۳}, x_{۴}] = ۱, [x_{۳}, x_{۵}] = x_{۴}^{p}, \\ & [x_{۴}, x_{۵}] = ۱ \rangle \end{aligned}$$

یک p-گروه از مرتبه $p^{۹}$ و $\gamma_{۲}(G) = \Phi(G) < Z(G)$ و $\Phi(G)$ آبلی مقدماتی است. توسط برنامه گپ برای $p = ۲$، $Aut(G)$ آبلی مقدماتی است.

حل. با توجه به روابط داده شده در گروه تعریف شده،

$$\gamma_۲(G) = \langle x_۱^p, x_۲^p, x_۳^p, x_۴^p \rangle.$$

$$[x_۱, x_۲] = x_۱^p \Rightarrow x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^p \Rightarrow x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^{p+۱}$$
$$\Rightarrow x_۲^{-۱} x_۱^p x_۲ = (x_۱^{p+۱})^p \Rightarrow x_۲^{-۱} x_۱^p x_۲ = x_۱^p$$

لذا،

$$[x_۱^p, x_۲] = ۱ \quad \text{و بنابراین} \quad [x_۱^p, x_۲^p] = ۱ \tag{۱.۴}$$

به همین ترتیب، چون $[x_۱, x_۵] = x_۱^p$ و $[x_۲, x_۳] = x_۲^p$ لذا،

$$[x_۱^p, x_۵] = ۱ \quad \text{و} \quad [x_۲^p, x_۳] = ۱ \tag{۲.۴}$$

بنابراین،

$$[x_۱^p, x_۵^p] = ۱ \quad \text{و} \quad [x_۲^p, x_۳^p] = ۱ \tag{۳.۴}$$

از طرفی داریم، $[x_۱, x_۴] = ۱$ لذا،

$$[x_۱^p, x_۴] = ۱, [x_۱, x_۴^p] = ۱, [x_۱^p, x_۴^p] = ۱. \tag{۴.۴}$$

همچنین داریم،

$$[x_۲, x_۴] = ۱, [x_۳, x_۴] = ۱, [x_۴, x_۵] = ۱,$$

بنابراین،

$$[x_۲^p, x_۴] = ۱, [x_۲, x_۴^p] = ۱, [x_۲^p, x_۴^p] = ۱. \tag{۵.۴}$$

و

$$[x_۳^p, x_۴] = ۱, [x_۳, x_۴^p] = ۱, [x_۳^p, x_۴^p] = ۱. \tag{۶.۴}$$

و

$$[x_۴^p, x_۵] = ۱. \tag{۷.۴}$$

داریم $[x_۲, x_۵] = x_۴^p$ و از رابطه (۵.۴)، داریم $[x_۲, x_۴^p] = ۱$ لذا،

$$x_۲^{-۱} x_۵^{-۱} x_۲ x_۵ = x_۴^p \Rightarrow x_۵^{-۱} x_۲ x_۵ = x_۲ x_۴^p$$
$$\Rightarrow x_۵^{-۱} x_۲^p x_۵ = x_۲^p x_۴^{p^۲} = x_۲^p$$

بنابراین،

$$[x_۲^p, x_۵] = ۱, \tag{۸.۴}$$

همچنین داریم، $[x_۳, x_۵] = x_۴^p$ لذا،

$$[x_۳^p, x_۵] = ۱, \tag{۹.۴}$$

از اینکه $[x_۱, x_۳] = x_۴^p$ نتیجه می‌شود،

$$[x_۴^p, x_۱] = ۱ \quad \text{و} \quad [x_۴^p, x_۱^p] = ۱ \quad \text{و لذا} \quad [x_۳, x_۱^p] = ۱ \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین بنا به رابطه‌های (۱.۴)، (۳.۴)، (۴.۴)، (۵.۴)، (۶.۴)، و (۱۰.۴)، $x_۱^p$ تا $x_۴^p$ همه با هم جابه‌جا می‌شوند. بنابراین،

$$\gamma_۲(G) = \langle x_۱^p \rangle \times \langle x_۲^p \rangle \times \langle x_۳^p \rangle \times \langle x_۴^p \rangle. \tag{۱۱.۴}$$

با توجه به روابط،

$$[x_۱, x_۴] = ۱, [x_۲, x_۴] = ۱, [x_۳, x_۴] = ۱, [x_۴, x_۵] = ۱,$$

$x_۴$ با همه $x_۱$ تا $x_۵$ جابه‌جا می‌شود. همچنین $x_۱^p$ تا $x_۴^p$ با همه $x_۱$ تا $x_۵$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین،

$$x_۱^p, x_۲^p, x_۳^p, x_۴ \in Z(G). \tag{۱۲.۴}$$

با توجه به روابط (۱۱.۴) و (۱۲.۴)، $\gamma_۲(G) \leq Z(G)$ و لذا G از رده ۲ است. حال باید نشان دهیم $\gamma_۲(G) < Z(G)$. با توجه به رابطه (۱۲.۴)،

$$\langle x_۱^p \rangle \times \langle x_۲^p \rangle \times \langle x_۳^p \rangle \times \langle x_۴ \rangle \subseteq Z(G)$$

لذا حداقل مرتبه $Z(G)$ برابر $p^۵$ است در حالی که با توجه به رابطه (۱۱.۴)، $|\gamma_۲(G)| = p^۴$. بنابراین $\gamma_۲(G) < Z(G)$. حال،

$$\frac{G}{\gamma_۲(G)} = \langle \bar{x_۱}, \ldots, \bar{x_۵} : \bar{x_۱}^p = \cdots = \bar{x_۵}^p = ۱ \rangle.$$

که $\bar{x_i} = x_i\gamma_۲(G)$. چون $[\bar{x_i}, \bar{x_j}] = ۱$ و $\bar{x_i}$ها از مرتبه p هستند لذا $\frac{G}{\gamma_۲(G)}$ آبلی مقدماتی و از مرتبه $p^۵$ است. در نتیجه،

$$|G| = |\gamma_۲(G)||\frac{G}{\gamma_۲(G)}| = p^۹.$$

چون $\frac{G}{\gamma_۲(G)}$ آبلی مقدماتی است پس $\Phi(\frac{G}{\gamma_۲(G)}) = ۱$، بنابراین $\Phi(G) = \gamma_۲(G)$. و چون بنا به رابطه (۱۱.۴)، $\gamma_۲(G)$ آبلی مقدماتی است لذا $\Phi(G)$ نیز آبلی مقدماتی است.

در فصل پیوست آ.۱، توسط برنامه گپ برای $p = ۲$، مشخص می‌شود که $Aut(G)$ آبلی مقدماتی است. لذا $Aut(G) = Autcent(G)$ آبلی مقدماتی است.

گزاره ۱۰.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد که $Aut(G) = Aut_c(G)$. در این‌صورت $|G| \geqslant p^۸$.*

برهان. چون G از رده ۲ است و $Aut(G) = Aut_c(G)$ لذا G در فرض A صدق می‌کند. بنا به گزاره ۴.۱.۳ و لم ۱۴.۱.۲، $Autcent(G)$ آبلی است لذا $Aut(G)$ آبلی است. حال از قسمت یک و دو قضیه ۱.۲.۴، نتیجه می‌شود که $|G| \geqslant p^7$.

فرض کنید $|G| = p^7$، بنا به قسمت پنجم قضیه ۱.۲.۴، $|Aut(G)| = p^{12}$ (G از رده ۲ است لذا ناآبلی می‌باشد پس G غیر دوری است). بنا به گزاره ۴.۱.۳، $\gamma_2(G) = Z(G)$ لذا G ناآبلی محض است. در نتیجه بنا به نتیجه ۱۱.۱.۲،

$$|Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))|.$$

بنابراین،

$$|Aut(G)| = |Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = p^{12}.$$

بنا به لم ۴.۲.۴، $Z(G)$ دوری نیست و بنا به قضیه ۲۴.۱.۳، $d(\frac{G}{Z(G)})$ زوج است و بنا به قسمت سوم قضیه ۱.۲.۴، $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant 4$.

از اینکه $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی هستند و دوری نیستند و اینکه $|G| = p^7$ و $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant 4$ نتیجه می‌شود که $p^2 \leqslant |Z(G)| \leqslant p^3$ و $|\frac{G}{Z(G)}| \geqslant p^4$.

- اگر $|Z(G)| = p^2$ آنگاه، چون $Z(G)$ آبلی است و دوری نیست لذا $Z(G) \cong C_p \times C_p$. بنابراین،

  $$|\frac{G}{Z(G)}| = p^5 \qquad \text{و} \qquad \frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p \times C_p \times C_{p^2}$$

  بنا به لم‌های ۵.۲.۱ و ۶.۲.۱،

  $$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = |Hom(C_p \times C_p \times C_p \times C_{p^2}, C_p \times C_p)| = p^8.$$

  و این یک تناقض است.

- اگر $|Z(G)| = p^3$ آنگاه $|\frac{G}{Z(G)}| = p^4$. در این‌صورت دو حالت رخ می‌دهد.

  حالت اول:

  $$Z(G) \cong C_p \times C_p \times C_p$$

  حالت دوم:

  $$Z(G) \cong C_p \times C_{p^2}$$

  و لذا،

  $$\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p \times C_p \times C_p$$

  بنابراین برای حالت اول داریم:

  $$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = |Hom(C_p \times C_p \times C_p \times C_p, C_p \times C_p \times C_p)| = p^{12}.$$

و برای حالت دوم داریم:

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = |Hom(C_p \times C_p \times C_p \times C_p, C_p \times C_{p^۲})| = p^۸.$$

برای حالت دوم به تناقض می‌رسیم لذا حالت اول رخ می‌دهد. بنابراین $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی هستند. لذا $\Phi(\frac{G}{Z(G)}) = ۱$ و بنابراین $\Phi(G) = Z(G)$. از طرفی داریم، $\gamma_۲(G) = Z(G)$ لذا G ویژه است. در نتیجه بنا به گزاره ۱۵.۲.۳، G یک گروه کامینا است. و این بنا به قضیه ۱.۲.۴، ممکن نیست(زیرا $d(\gamma_۲(G)) = d(Z(G)) = ۳$ و $d(G) = d(\frac{G}{\Phi(G)}) = d(\frac{G}{Z(G)}) = ۴$). بنابراین،

$$|G| \geqslant p^۸.$$

□

لم ۱۱.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد که، برای برخی عدد صحیح مثبت m، $\gamma_۲(G) \cong C_{p^m} \times C_{p^m}$. در این‌صورت گروه آبلی H وجود دارد که،*

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^m} \times C_{p^m} \times C_{p^m} \times H.$$

برهان. چون نمای $\gamma_۲(G)$ برابر p^m و G از رده ۲ است لذا نمای $\frac{G}{Z(G)}$ نیز برابر p^m است. پس بنا به لم موریگی، برای برخی زیرگروه K از G شامل $Z(G)$،

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \langle \bar{x_۱} \rangle \times \langle \bar{x_۲} \rangle \times \frac{K}{Z(G)}$$

که،

$$|\langle [x_۱, x_۲] \rangle| = |\langle \bar{x_۱} \rangle| = |\langle \bar{x_۲} \rangle| = p^m.$$

کافی است ثابت کنیم نمای $\frac{K}{Z(G)}$ برابر p^m است. چون $\gamma_۲(G) \cong C_{p^m} \times C_{p^m}$ لذا $d(\gamma_۲(G)) = ۲$، پس عنصر $w \in \gamma_۲(G)$ وجود دارد که،

$$\gamma_۲(G) = \langle [x_۱, x_۲], w \rangle.$$

فرض کنید $w = [a, b]$. در این‌صورت برای اعداد صحیح $i_۱$،$i_۲$،$j_۱$،$j_۲$ و $k_۱, k_۲ \in K$ ،

$$aZ(G) = x_۱^{i_۱} Z(G) x_۲^{i_۲} Z(G) k_۱ Z(G)$$

و

$$bZ(G) = x_۱^{j_۱} Z(G) x_۲^{j_۲} Z(G) k_۲ Z(G)$$

لذا $z_۱, z_۲ \in Z(G)$ وجود دارند که، $a = x_۱^{i_۱} x_۲^{i_۲} k_۱ z_۱$ و $b = x_۱^{j_۱} x_۲^{j_۲} k_۲ z_۲$. در نتیجه،

$$\begin{aligned} w &\overset{\text{از رده ۲} G}{=} [x_۱^{i_۱}, x_۲^{j_۲}][x_۱^{i_۱}, k_۲][x_۲^{i_۲}, x_۱^{j_۱}][x_۲^{i_۲}, k_۲][k_۱, x_۱^{j_۱}][k_۱, x_۲^{j_۲}][k_۱, k_۲] \\ &= [x_۱, x_۲]^{i_۱ j_۲ + j_۱ i_۲} \underbrace{[x_۱, k_۲]^{i_۱} [x_۲, k_۲]^{i_۲} [k_۱, x_۱]^{j_۱} [k_۱, x_۲]^{j_۲} [k_۱, k_۲]}_{u} \end{aligned}$$

بنابراین u و $[x_1, x_2]$ مولدهای $\gamma_2(G)$ هستند. ادعا می‌کنیم نمای $\frac{K}{Z(G)}$ برابر p^m است. فرض کنید(فرض خلف) نمای $\frac{K}{Z(G)}$ برابر p^n است که، $n < m$. در این‌صورت برای هر i, $k_i^{p^n} Z(G) = Z(G)$. در نتیجه،

$$u^{p^n} = ([x_1, k_2]^{i_1}[x_2, k_2]^{i_2}[k_1, x_1]^{j_1}[k_1, x_2]^{j_2}[k_1, k_2])^{p^n}$$
$$\overset{\gamma_2(G) \text{آبلی}}{=} [x_1, \underbrace{k_2^{p^n}}_{\in Z(G)}]^{i_1}[x_2, \underbrace{k_2^{p^n}}_{\in Z(G)}]^{i_2}[\underbrace{k_1^{p^n}}_{\in Z(G)}, x_1]^{j_1}[\underbrace{k_1^{p^n}}_{\in Z(G)}, x_2]^{j_2}[\underbrace{k_1^{p^n}}_{\in Z(G)}, k_2] = 1$$

لذا مرتبه u از p^m کمتر است. بنابراین $|\gamma_2(G)| < p^{2m}$ که متناقض با $\gamma_2(G) \cong C_{p^m} \times C_{p^m}$ است. بنابراین نمای $\frac{K}{Z(G)}$ برابر p^m است. حال چون $\frac{K}{Z(G)}$ آبلی و نمای آن برابر p^m است پس عاملی از مرتبه p^m دارد. □

گزاره ۱۲.۲.۴. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد که $Aut(G) = Aut_c(G)$ آبلی است. در این‌صورت $|G| = p^8$ اگر و تنها اگر $|Aut(G)| = p^{12}$.*

برهان. فرض کنید $|Aut(G)| = p^{12}$. از اینکه $Aut(G)$ آبلی است نتیجه می‌شود که، $Aut(G) = Autcent(G)$. لذا G در فرض A صدق می‌کند. از طرفی بنا به لم ۵.۲.۲، G ناآبلی است لذا از رده ۲ می‌باشد. بنابراین بنا به گزاره ۱۰.۲.۴، $|G| \geqslant p^8$ و بنا به قضیه ۲۴.۱.۳، $d(\frac{G}{Z(G)})$ زوج است. بنا به گزاره ۴.۱.۳، $Z(G) = \gamma_2(G)$ لذا G ناآبلی محض است و بنابراین،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = |Autcent(G)| = |Aut(G)| = p^{12}.$$

بنا به لم ۴.۲.۴، $Z(G) = \gamma_2(G)$ نمی‌تواند دوری باشد. لذا نسخه‌ای از $C_p \times C_p$ در $Z(G)$ قرار می‌گیرد. فرض کنید $d(Z(G)) \geqslant 3$. بنا به قضیه ۱.۲.۴، $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant 4$ لذا بنا به لم‌های ۵.۲.۱ و ۶.۲.۱، $|Aut(G)| \geqslant p^{12}$. تساوی فقط وقتی برقرار است که $d(Z(G)) = 3$ و $d(\frac{G}{Z(G)}) = 4$ و نمای $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p باشد.

(اگر $exp(Z(G)) = p^m$ آنگاه، چون $exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_2(G)) = exp(Z(G)) = p^m$ لذا بنا به لم موریگی، $\frac{G}{Z(G)}$ حداقل دو عامل از مرتبه p^m دارد و در نتیجه $|Aut(G)| > p^{12}$ و این یک تناقض است لذا نمای $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ برابر p است).

در نتیجه $|G| = p^7$ که یک تناقض است. بنابراین $d(Z(G)) = 2$.

فرض کنید برای برخی عدد صحیح مثبت m، نمای $Z(G)$ برابر p^m است. در این‌صورت از قسمت شش قضیه ۱.۲.۴، نتیجه می‌شود که $Z(G) \cong C_{p^m} \times C_{p^m}$. ادعا می‌کنیم $m = 1$. فرض کنید $m \geqslant 2$. چون،

$$exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_2(G)) = exp(Z(G)) = p^m،$$

لذا، اگر ۶ $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant$ آنگاه $|Aut(G)| > p^{12}$ و این یک تناقض است. بنابراین بنا به قضیه ۲۴.۱.۳، ۴ $d(\frac{G}{Z(G)}) =$. و بنا به لم ۱۱.۲.۴، برای برخی $1 \leqslant r \leqslant m$،

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^m} \times C_{p^m} \times C_{p^m} \times C_{p^r}.$$

بنابراین،

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = |Hom(C_{p^m} \times C_{p^m} \times C_{p^m} \times C_{p^r}, C_{p^m} \times C_{p^m})| > p^{12}.$$

لذا $|Aut(G)| > p^{12}$ و این تناقض، ادعای ما را ثابت می‌کند یعنی $m = 1$. در نتیجه $Z(G) \cong C_p \times C_p$ و چون $|Aut(G)| = p^{12}$، لذا تنها انتخاب برای $d(\frac{G}{Z(G)})$ باید ۶ باشد. بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی به ترتیب از مرتبه p^6 و p^2 هستند. بنابراین،

$$|G| = |\frac{G}{Z(G)}||Z(G)| = p^8.$$

برعکس، فرض کنید $|G| = p^8$. چون $Aut(G) = Aut_c(G)$ آبلی است لذا G در فرض A صدق می‌کند. بنا به لم ۵.۲.۲، G ناآبلی و لذا از رده ۲ است. همچنین $Z(G) = \gamma_2(G) \leq \Phi(G)$، در نتیجه بنا به قضیه ۲۴.۱.۳ و قسمت سوم قضیه ۱.۲.۴، ۴ $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant$ و زوج است. پس $|\frac{G}{Z(G)}| \geqslant p^4$ و لذا $|Z(G)| = |\gamma_2(G)| \leqslant p^4$.

- اگر $|Z(G)| = p^4$ آنگاه $|\frac{G}{Z(G)}| = p^4$. بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است. لذا ۱ $\Phi(\frac{G}{Z(G)}) =$. پس $\Phi(G) = Z(G)$. در نتیجه،

$$\Phi(G) = Z(G) = \gamma_2(G).$$

پس G ویژه است و بنا به گزاره ۱۵.۲.۳، G یک گروه کامینا است. اما این بنا به قضیه ۱.۲.۴، ممکن نیست (زیرا $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی و از مرتبه p^4 هستند لذا ۴ $d(\frac{G}{Z(G)}) = d(Z(G) =$).

- اگر $|Z(G)| = p^3$ آنگاه، چون ۴ $d(\frac{G}{Z(G)}) \geqslant$ و زوج است لذا،

$$\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^2} \times C_p \times C_p \times C_p.$$

چون،

$$exp(Z(G)) = exp(\gamma_2(G)) = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p^2,$$

پس $Z(G) \cong C_{p^2} \times C_p$. بنابراین،

$$\begin{aligned}|Aut(G)| &= |Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| \\ &= |Hom(C_{p^2} \times C_p \times C_p \times C_p, C_{p^2} \times C_p)| = p^9.\end{aligned}$$

که بنا به قسمت چهارم قضیه ۱.۲.۴، ممکن نیست. بنابراین $|Z(G)| = p^2$.

• $|Z(G)| = p^{۲}$ و بنا به لم ۴.۲.۴، $Z(G)$ دوری نیست لذا $Z(G) \cong C_p \times C_p$. چون،

$$exp(\frac{G}{Z(G)}) = exp(\gamma_{۲}(G)) = exp(Z(G)) = p$$

در نتیجه $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی و از مرتبه $p^{۶}$ است. بنابراین،

$$|Aut(G)| = |Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| = p^{۱۲}.$$

□

برای عدد اول فرد p گروه G را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
G = \langle & x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}, x_{۵}, x_{۶} : \\
& x_{۱}^{p^{۲}} = x_{۲}^{p^{۲}} = x_{۳}^{p} = x_{۴}^{p} = x_{۵}^{p} = x_{۶}^{p} = ۱, \\
& [x_{۱}, x_{۲}] = x_{۱}^{p}, [x_{۱}, x_{۳}] = x_{۲}^{p}, [x_{۲}, x_{۳}] = x_{۱}^{p}, \\
& [x_{۱}, x_{۴}] = x_{۲}^{p}, [x_{۲}, x_{۴}] = x_{۲}^{p}, [x_{۳}, x_{۴}] = x_{۲}^{p}, \\
& [x_{۱}, x_{۵}] = x_{۲}^{p}, [x_{۲}, x_{۵}] = x_{۱}^{p}, [x_{۳}, x_{۵}] = x_{۲}^{p}, \\
& [x_{۴}, x_{۵}] = x_{۱}^{p}, [x_{۱}, x_{۶}] = x_{۲}^{p}, [x_{۲}, x_{۶}] = x_{۲}^{p}, \\
& [x_{۳}, x_{۶}] = x_{۱}^{p}, [x_{۴}, x_{۶}] = x_{۱}^{p}, [x_{۵}, x_{۶}] = x_{۲}^{p} \rangle
\end{aligned}$$

لم ۱۳.۲.۴. *برای هر عدد اول p گروه G تعریف شده در بالا، یک گروه کامینا ویژه از مرتبه $p^{۸}$ و $|Z(G)| = p^{۲}$ است. برای $p = ۳$، $Aut(G) = Aut_c(G)$ آبلی مقدماتی از مرتبه $۳^{۱۲}$ است.*

برهان. با توجه به روابط داده شده در گروه تعریف شده،

$$\gamma_{۲}(G) = \langle x_{۱}^{p}, x_{۲}^{p} \rangle.$$

$$\begin{aligned}
[x_{۱}, x_{۲}] = x_{۱}^{p} &\Rightarrow x_{۱}^{-۱} x_{۲}^{-۱} x_{۱} x_{۲} = x_{۱}^{p} \\
&\Rightarrow x_{۲}^{-۱} x_{۱} x_{۲} = x_{۱}^{p+۱} \\
&\Rightarrow x_{۲}^{-۱} x_{۱}^{p} x_{۲} = (x_{۱}^{p+۱})^{p} \\
&\Rightarrow x_{۲}^{-۱} x_{۱}^{p} x_{۲} = x_{۱}^{p}
\end{aligned}$$

لذا،

$$[x_{۱}^{p}, x_{۲}] = ۱ \quad \text{و بنابراین} \quad [x_{۱}^{p}, x_{۲}^{p}] = ۱ \qquad (۱۳.۴)$$

در نتیجه،

$$\gamma_۲(G) = \langle x_۱^p \rangle \times \langle x_۲^p \rangle.$$

داریم، $[x_۱, x_۲] = x_۱^p$ و از رابطه (۱۳.۴)، داریم ۱ $= [x_۱^p, x_۲]$ لذا،

$$\begin{aligned}[x_۱, x_۲] = x_۱^p &\Rightarrow x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^p \\ &\Rightarrow x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ = x_۱^p x_۲^{-۱} \\ &\Rightarrow x_۱^{-۱} x_۲^{-p} x_۱ = x_۱^{p^۲} x_۲^{-p} = x_۲^{-p} \\ &\Rightarrow [x_۲^{-p}, x_۱] = ۱,\end{aligned}$$

بنابراین،

$$[x_۱, x_۲^p] = ۱ \tag{۱۴.۴}$$

حال نشان می‌دهیم $x_۱^p$ با $x_۳, \ldots, x_۶$ نیز جابه‌جا می‌شود. چون $[x_۱, x_۳] = x_۲^p$ در نتیجه با توجه به رابطه (۱۴.۴)، داریم:

$$x_۳^{-۱} x_۱ x_۳ = x_۱ x_۲^p \Rightarrow x_۳^{-۱} x_۱^p x_۳ = x_۱^p x_۲^{p^۲} = x_۱^p.$$

بنابراین،

$$[x_۱^p, x_۳] = ۱, \tag{۱۵.۴}$$

همچنین چون، $[x_۱, x_۴] = [x_۱, x_۵] = [x_۱, x_۶] = x_۲^p$ لذا همانند قبلی

$$[x_۱^p, x_۶] = ۱ \text{ و } [x_۱^p, x_۵] = ۱ \text{ و } [x_۱^p, x_۴] = ۱ \tag{۱۶.۴}$$

از رابطه‌های (۱۳.۴)، (۱۵.۴) و (۱۶.۴) ، $x_۱^p$ با $x_۱$ ، ... و $x_۶$ جابه‌جا می‌شود. در نتیجه،

$$x_۱^p \in Z(G). \tag{۱۷.۴}$$

به همین ترتیب، $x_۲^p$ نیز با $x_۱$ ، ... و $x_۶$ جابه‌جا می‌شود. در نتیجه،

$$x_۲^p \in Z(G). \tag{۱۸.۴}$$

چون $x_۱^p$ و $x_۲^p$ با $x_۱$ ، ... و $x_۶$ جابه‌جا می‌شوند، لذا برای هر i, j, k که $i \neq j \neq k$ و $۱ \leqslant i, j, k \leqslant ۶$، $[x_i, x_j, x_k] = ۱$. بنابراین G از رده ۲ است. در نتیجه $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است. بنابراین $\gamma_۲(G) \leq Z(G)$. حال،

$$\frac{G}{\gamma_۲(G)} = \langle \bar{x_۱}, \ldots, \bar{x_۶} : \bar{x_۱}^p = \bar{x_۲}^p = \cdots = \bar{x_۶}^p = ۱ \rangle, \tag{۱۹.۴}$$

که $\bar{x_i} = x_i \gamma_۲(G)$. چون $[\bar{x_i}, \bar{x_j}] = ۱$ و $\bar{x_i}$ها از مرتبه p هستند لذا $\frac{G}{\gamma_۲(G)}$ آبلی مقدماتی و از مرتبه $p^۶$ است. بنابراین $\Phi(G) = \gamma_۲(G)$. چون $\gamma_۲(G) = \langle x_۱^p \rangle \times \langle x_۲^p \rangle$ پس $|\gamma_۲(G)| = p^۲$. از طرفی $|\frac{G}{\gamma_۲(G)}| = p^۶$ لذا،

$$|G| = |\frac{G}{\gamma_۲(G)}||\gamma_۲(G)| = p^۸. \tag{۲۰.۴}$$

فرض کنید $x \in Z(G)$ در این‌صورت $x\gamma_2(G) = \bar{x_1}^{i_1}\cdots\bar{x_6}^{i_6} = x_1^{i_1}\cdots x_6^{i_6}\gamma_2(G)$ لذا $g \in \gamma_2(G)$ وجود دارد که،

$$x = x_1^{i_1}\cdots x_6^{i_6} g \tag{۲۱.۴}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} 1 = [x,x_1] &= [x_1,x_1]^{i_1}[x_2,x_1]^{i_2}\cdots[x_6,x_1]^{i_6} = x_1^{-pi_2}x_2^{-pi_3}x_2^{-pi_4}x_2^{-pi_5}x_2^{-pi_6} \\ &= x_1^{-pi_2}x_2^{-p(i_3+\cdots+i_6)} \end{aligned}$$

و بنابراین $p|i_2$ و $p|i_3+\cdots+i_6$. همچنین،

$$\begin{aligned} 1 = [x,x_2] &= [x_1,x_2]^{i_1}[x_2,x_2]^{i_2}\cdots[x_6,x_2]^{i_6} = x_1^{pi_1}x_1^{-pi_3}x_2^{-pi_4}x_1^{-pi_5}x_2^{-pi_6} \\ &= x_1^{-p(-i_1+i_3+i_5)}x_2^{-p(i_4+i_6)} \end{aligned}$$

لذا با ادامه این روند خواهیم دید که $i_1, \ldots, i_6$ مضربی از p هستند بنابراین با توجه به رابطه (۲۱.۴)، داریم:

$$x = x_1^{pk_1}x_2^{pk_2}\cdots x_6^{pk_6} g$$

و چون $g \in \gamma_2(G)$ و x_3 تا x_6 از مرتبه p هستند لذا x به صورت حاصل‌ضربی از توان‌های x_1^p و x_2^p است بنابراین $Z(G) = \langle x_1^p\rangle \times \langle x_2^p\rangle$ و در نتیجه $\gamma_2(G) = Z(G)$ لذا G ویژه است. پس G ناآبلی محض است و چون $\frac{G}{\gamma_2(G)}$ و $Z(G)$ آبلی مقدماتی هستند بنابراین،

$$|Autcent(G)| = |Hom(\frac{G}{\gamma_2(G)}, Z(G))| = p^{12}.$$

از طرفی بنا به قضیه ۶.۲.۴، $Autcent(G)$ آبلی مقدماتی است. چون G از رده ۲ است لذا،

$$Aut_c(G) \leq Autcent(G).$$

بنابراین $Aut_c(G)$ نیز آبلی مقدماتی است. در فصل پیوست آ.۲، با استفاده از برنامه گپ مشخص می‌شود گروه G برای $p = 3$ دارای ۷۳۷ رده تزویج است. چون $[x,G] \subseteq \gamma_2(G)$ و $|\gamma_2(G)| = |Z(G)| = p^2$ لذا،

$$|x^G| = |[x,G]| \leqslant |\gamma_2(G)|,$$

در نتیجه برای $p = 3$، $|x^G| = ۳$یا۹ و تعداد رده‌های تزویج تک عضوی برابر ۹ است. لذا تعداد رده‌های تزویج غیر تک عضوی برابر ۷۲۸ است. فرض کنید تعدادی از رده‌های تزویج از مرتبه ۳ و باقی از مرتبه ۹ باشند. فرض کنید z تعداد رده‌های تزویج از مرتبه ۳ و y تعداد رده‌های تزویج از مرتبه ۹ باشد. در این‌صورت با توجه به معادله رده‌ای،

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} |x^G| = 9 + 3 \times z + 9 \times y.$$

بنابراین، اگر همه رده‌های تزویج از مرتبه ۹ باشد آنگاه $|G| < ۹(z+y) + ۹$. و این یک تناقض است زیرا $|G| = ۶۵۶۱ = ۷۲۸ \times ۹ + ۹$. بنابراین، همه رده‌های تزویج از مرتبه ۹ است. یعنی،

$$|[x, G]| = |x^G| = ۹,$$

در نتیجه برای هر $x \in G - \gamma_۲(G)$،

$$[x, G] = \gamma_۲(G).$$

بنابراین G کامینا است. و بنا به گزاره ۱۵.۲.۳، G در فرض A صدق می‌کند. بنابراین،

$$|Aut_c(G)| = |Autcent(G)| = ۳^{۱۲}.$$

همچنین با استفاده از برنامه گپ(که در فصل پیوست آ.۲، می‌آوریم)، برای $p = ۳$، $|Aut(G)| = ۳^{۱۲}$ و چون $Aut_c(G) \leq Aut(G)$ در نتیجه، $Aut_c(G) = Aut(G)$ آبلی مقدماتی از مرتبه $۳^{۱۲}$ است.

□

پیوست آ
برنامه‌های گپ

در این فصل برنامه گپ مربوط به مثال ۹.۲.۴ و لم ۱۳.۲.۴، که در فصل ۴ بیان شدند را می‌آوریم.

۱.آ

```
gap> F:=FreeGroup(5);
<free group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5 ]>
gap> a:=F.1;;b:=F.2;;c:=F.3;;d:=F.4;;e:=F.5;;
gap> G:=F/[a^4,b^4,c^4,d^4,e^2,Comm(a,b)*a^-2,Comm(a,c)*c^-2,Comm(a,d),
Comm(a,e)*a^-2,Comm(b,c)*b^-2,Comm(b,d),Comm(b,e)*d^-2,Comm(c,d),
Comm(c,e)*d^-2,Comm(d,e)];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5 ]>
gap> Order(G);
512
gap> 2^9;
512
gap> AutomorphismGroup(G);
<group of size 1048576 with 20 generators>
gap> 2^20;
1048576
```

```
gap> IsElementaryAbelian(AutomorphismGroup(G));
true
gap> N:=F/[a^9,b^9,c^9,d^9,e^3,Comm(a,b)*a^-3,Comm(a,c)*c^-3,Comm(a,d),
Comm(a,e)*a^-3,Comm(b,c)*b^-3,Comm(b,d),Comm(b,e)*d^-3,Comm(c,d),
Comm(c,e)*d^-3,Comm(d,e)];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5 ]>
gap> AutomorphismGroup(N);
<group of size 3486784401 with 20 generators>
gap> 3^20;
3486784401
gap> IsElementaryAbelian(AutomorphismGroup(N));
true
```

۲.آ

```
gap> F:=FreeGroup(6);
<free group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]>
gap> a:=F.1;;b:=F.2;;c:=F.3;;d:=F.4;;e:=F.5;;f:=F.6;;
gap> G:=F/[a^9,b^9,c^3,d^3,e^3,f^3,Comm(a,b)*a^-3,Comm(a,c)*b^-3,
Comm(b,c)*a^-3,Comm(a,d)*b^-3,Comm(b,d)*b^-3,Comm(c,d)*b^-3,
Comm(a,e)*b^-3,Comm(b,e)*a^-3,Comm(c,e)*b^-3,Comm(d,e)*a^-3,
Comm(a,f)*b^-3,Comm(b,f)*b^-3,Comm(c,f)*a^-3,Comm(d,f)*a^-3,
Comm(e,f)*b^-3];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]>
gap> AutomorphismGroup(G);
<group of size 531441 with 12 generators>
gap> 3^12;
531441
```

```
gap> IsElementaryAbelian(AutomorphismGroup(G));
true
gap> NrConjugacyClasses(G);
737
gap> N:=F/[a^4,b^4,c^2,d^2,e^2,f^2,Comm(a,b)*a^-2,Comm(a,c)*b^-2,
Comm(b,c)*a^-2,Comm(a,d)*b^-2,Comm(b,d)*b^-2,Comm(c,d)*b^-2,
Comm(a,e)*b^-2,Comm(b,e)*a^-2,Comm(c,e)*b^-2,Comm(d,e)*a^-2,
Comm(a,f)*b^-2,Comm(b,f)*b^-2,Comm(c,f)*a^-2,Comm(d,f)*a^-2,
Comm(e,f)*b^-2];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]>
gap> AutomorphismGroup(N);
<group of size 49152 with 15 generators>
gap> 2^12;
4096
gap> IsElementaryAbelian(AutomorphismGroup(N));
false
gap> NrConjugacyClasses(N);
70
```

مراجع

[۱] و. ساهای، و. بیست. جبر، ترجمه *ابراهیم هاشمی*. دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۸۷.

[۲] ع. ر. جمالی. *مباحثی در نظریه‌ی گروه‌های متناهی*. مبتکران، ۱۳۸۰.

[۳] م. ر. درفشه. جبر *جلد اول*، گروه. دانشگاه تهران، ۱۳۸۶.

[4] J. E. Adney and T. Yen. Automorphisms of a p-group. *Illinois j. Math*, 9:137–143, 1965.

[5] G. Ban and S. Yu. Minimal abelian groups that are not automorphism groups. *Arch. Math. (Basel)*, 70:427–434, 1998.

[6] Y. Berkovich. *Groups of prime power order*. Berlin. New York.

[7] J. M. Brady, R. A. Bryce, and J. Cossey. On certain abelian-by-nilpotent varieties. *Bull. Austral. Math. Soc*, 1:403–416, 1969.

[8] W. Burnside. *Theory of groups of finite order*. Cambridge University Press, 1911.

[9] W. Burnside. On the outer automorphisms of a group. *Proc. London Math. Soc*, 11(2):40–42, 1913.

[10] Y. Cheng. On finite p-groups with cyclic commutator subgroup. *Arch. Math. (Basel)*, 39(4):295–298, 1982.

[11] R. Dark and C. M. Scoppola. On Camina groups of prime power order. *J. Algebra*, 181:787–802, 1996.

[12] B. E. Earnley. *On finite groups whose group of automorphisms is abelian.* PhD thesis, Wayne State University, MI, 1975.

[13] W. Feit and G. M. Seitz. On finite rational groups and related topics. *Illinois J. Math*, 33:103–131, 1988.

[14] W. Gasch¨utz. Nichtabelsche p-gruppen besitzen ¨aussere p-automorphismen. *J. Algebra*, 4:1–2, 1966.

[15] The GAP Group. *GAP - Groups, Algorithms, and Programming.* Version 4.4.12, 2008 (http://www.gap-system.org).

[16] D. Gumber and H. Karla. On equality of central and class preserving automorphisms of finite p-groups. *preprint, available at arXiv:1106.0373v6 [math.GR] 29 Sep 2012.*

[17] T. W. Hangerford. *Algebra.* Springer-Verlag New York, 1996.

[18] P. Hegarty. Minimal abelian automorphism groups of finite groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 94:121–135, 1995.

[19] H. Heineken. Nilpotente gruppen, deren s¨amtliche normaliteiler charakteristisch sind. *Arch. Math. (Basel)*, 33(6):497–503, 1980.

[20] M. Hertweck. *Contributions to the integral representation theory of groups.* 2004.

[21] M. H. Jafari. Elementary abelian p-groups as central automorphism groups. *Communications in Algebra*, 34:601–607, 2006.

[22] V. K. Jain, P. K. Rai, and M. K. Yadav. On finite p-groups with abelian automorphism group. *Int. J. Algebra Comput. DOI: 10.1142/S0218196713500161*, 2013.

[23] V. K. Jain and M. K. Yadav. On finite p-groups whose automorphisms are all central. *Israel J. Math*, 189:225–236, 2012.

[24] D. Jonah and M. Konvisser. Some non-abelian p-groups with abelian automorphism groups. *Arch. Math. (Basel)*, 26:131–133, 1975.

[25] E. I. Khukhro. *p-Automorphisms of finite p-groups.* Cambridge University Press, 1997.

[26] I. D. Macdonald. Some p-groups of Frobenius and extra-special type. *Israel J. Math*, 40:350–364, 1981.

[27] I. Malinowska. On quasi-inner automorphisms of a finite p-group. *Publ. Math. Debecen*, 41(1-2):73–77, 1992.

[28] A. Mann. Some questions about p-groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 67(3):356–379, 1999.

[29] M. Morigi. On p-groups with abelian automorphism group. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 92:47–58, 1994.

[30] M. Morigi. On the minimal number of generators of finite non-abelian p-groups having an abelian automorphism group. *Comm. Algebra*, 23(6):2045–2065, 1995.

[31] T. Ono and H. Wada. Hasse principle for free groups. *Proc. Japan Acad*, 75:1–2, 1999.

[32] T. Ono and H. Wada. Hasse principle for symmetric and alternating groups. *Proc. Japan Acad*, 75:61–62, 1999.

[33] J. S. Robinson. *A course in the theory of groups.* Springer-Verlag New York, 1982.

[34] J. S. Rose. *A course on group theory.* Cambridge University Press, 1978.

[35] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups.* Springer-Verlag New York, 1995.

[36] C. H. Sah. Automorphisms of finite groups. *J. Algebra*, 10:47–68, 1968.

[37] F. Szechtman. n-inner automorphisms of finite groups. *Proc. Am. Math. Soc*, 131:3657–3664, 2003.

[38] H. Wada. Hasse principle for SLn(D). *Proc. Japan Acad*, 75:67–69, 1999.

[39] H. Wada. Hasse principle for GLn(D). *Proc. Japan Acad*, 76:44–46, 2000.

[40] G. E. Wall. Finite groups with class preserving outer automorphisms. *J. London Math. Soc*, 22:315–320, 1947.

[41] M. K. Yadav. Class preserving automorphisms of finite p-groups. *J. London Math. Soc*, 75(3):755–772, 2007.

[42] M. K. Yadav. On automorphisms of some finite p-groups. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci)*, 118:1–11, 2008.

[43] M. K. Yadav. Class preserving automorphisms of finite p-groups-A Survey. *Groups St. Andrews, LMS Lecture Note Series 388*, 2:569–579, 2011.

[44] M. K. Yadav. On finite p-groups whose central automorphisms are all class preserving. *Communications in Algebra*, 41:4576–4592, 2013.

[45] M. K. Yadav and L. R. Vermani. Hasse principle for the groups of order p^4. *Proc. Japan Acad*, 77(6):95–98, 2001.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آبلی مقدماتی	elementary abelian
استقرا	induction
برهان خلف	contrary
بزرگترین مقسوم علیه مشترک	greatest common divisor
پایا	invariant
پایه مینیمال	minimal basis
پوچ‌توان	nilpotent
تجزیه	decomposition
تکریختی	monomorphism
تناظر	correspondence
تناقض	contradiction
جابه‌جاگر	commutator
جابه‌جایی	commutation
حافظ رده	class preserving
خودریختی مرکزی	central automorphism
دوری	cyclic
رده تزویج	conjugacy class

زوج کامینا .... camina pair

سره .... proper

شامل شدن .... contains

شرایط .... conditions

شمردن-عاد کردن .... divides

صدق کردن .... satisfies

ضرب مرکزی .... central product

ضرب مستقیم .... direct product

عبارت-گزاره .... statement

فرض-فرضیه .... Hypothesis

فرض کردن .... suppose

فرض کردن .... assume

فوق ویژه .... extra-special

گروه کامینا .... camina group

گروه مشتق-گروه تعویض‌گر .... additive group

p-گروه ویژه .... special p-group

متمرکز کردن .... concentrate

مرتبه .... order

مرکزساز .... centralizer

مستقل .... independent

مشخص .... distinguished

مشمول .... contained

مشمول .... included

معادل .... equivalent

منحصر به فرد .... unique

مولد مینیمال .... minimal generating

ناآبلی محض .... purely non-abelian

نتیجه .... corollary

نما .... exponent

همریختی .... homomorphism

یکریختی .... isomorphism

Surname: Jahedi Jozchal Name: Ommolbanin

Title: On equality of central and class preserving automorphisms of finite p-groups.

Supervisor: Dr. Sayyed Heidar Jafari
Advisor: Dr. Hasan Khosravi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Finite group

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 2013 Number of pages: 72

Keywords: Central automorphisms, Class preserving automorphism, Finite p-group, Purely non-abelian

Abstract

Let G be a group. The set of all automorphisms of G, is denoted by $Aut(G)$. An automorphism α of a group G is called central if $x^{-1}\alpha(x) \in Z(G)$ for all $x \in G$. The set of all central automorphisms of G, which is denoted by $Autcent(G)$, is a normal subgroup of $Aut(G)$. An automorphism β of G is called class preserving automorphism if $\beta(g) \in g^G$ for all $g \in G$. The set of all class preserving automorphism of G, which is denoted by $Aut_c(G)$, is a normal subgroup of $Aut(G)$. We study on central automorphisms group and class preserving automorphisms of finite groups and also we give necessary and sufficient condition such that these groups are equaled. In particular, we prove that if G is a finite p-group whose central automorphisms are all class preserving, then $d(G)$ is even, where $d(G)$ denotes the number of elements in any minimal generating set of G. Also we study all groups G where $Aut(G) = Aut_c(G)$.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

On equality of central and class preserving automorphisms of finite p-groups.

Supervisor

Dr. Sayyed Heidar Jafari

Advisor

Dr. Hasan Khosravi

by

Ommolbanin Jahedi Jozchal

2013