



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی، گرایش جبر

عنوان

بررسی گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی روی حلقه جابجایی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

پژوهشگر

خدیجه پاسبان خمری

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: پاسبان خمري

نام: خديجه

عنوان: بررسی گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی روی حلقه جابجایی

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: جبر

دانشگاه: صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۸۱

واژگان کلیدی: حلقه جابجایی، حلقه ناجابجایی، گراف مقسوم علیه‌های صفر، حلقه ماتریس‌های مربعی، حلقه ماتریس‌های بالامثلثی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی تعاریف و خصوصیات اساسی گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه جابجایی و حلقه ناجابجایی می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم حلقه جابجایی R و حلقه کسره‌های کامل آن، $Q(R)$ ، دارای گراف‌های یکریخت هستند، و در نتیجه قطر و کمر یکسانی دارند. هم‌چنین به بررسی خواصی از گراف (جهت‌دار) مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی می‌پردازیم، سپس از این نتایج برای بحث در مورد روابط بین قطر گراف مقسوم علیه‌های صفر روی حلقه جابجایی R و حلقه ماتریس‌های مربعی $M_n(R)$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین مشخص می‌کنیم چه هنگام $2 \leq \text{diam}(\Gamma(R))$ یا $4 \leq \text{gr}(\Gamma(R))$. سپس از این نتایج برای بررسی قطر و کمر گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه چندجمله‌ای‌های R ، حلقه سری‌های توانی R و توسیع حلقه R توسط R -مدول M می‌پردازیم. در آخر، گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه جابجایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تقدیم بہ روان پاک پدرم

اولین و بہترین معلم زندگی من

و بہ مادر بزرگوارم

باززشتہین سرمایہ زندگی من

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

^۱ مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزار می... ..

سپاس خدای یکتا را که هرچه هست از اوست؛

سپاس او را که بی یاد و نامش نمی توان آغاز کرد و نمی توان به پایان برد؛

سپاس و حمد بیکران یگانه عالم را که توفیق کسب و دانش و معرفت را به ما عطا فرمود.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. همچنین بوسه می زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسش را ستایش می کنم.

خدیجه پاسبان خمری

۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱	پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی	۱
۲	۱.۱ مقدمه	۱.۱
۳	۲.۱ مفاهیم مربوط به نظریه گراف	۲.۱
۴	۳.۱ مفاهیم مربوط به نظریه حلقه‌های جابجایی	۳.۱
۱۲	۲ همبندی، قطر و کمر در گراف مقسوم‌علیه‌های صفر	۲
۱۳	۱.۲ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ها	۱.۲
۲۰	۲.۲ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر ماتریس‌های مربعی	۲.۲
۲۸	۳.۲ رابطه بین قطر $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$	۳.۲
۳۴	۳ کاربردهایی از گراف مقسوم‌علیه‌های صفر	۳
۳۵	۱.۳ گراف متمم شده و منحصرأ متمم شده	۱.۳
۵۳	۲.۳ بررسی قطر و کمر $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$	۲.۳
۵۶	۳.۳ بررسی قطر و کمر $\Gamma(R(+)M)$	۳.۳
۶۶	۴ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌های جابجایی	۴
۶۷	۱.۴ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی	۱.۴

۷۳

مراجع

۷۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۷۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

اولین بار بک^۱ در سال ۱۹۸۸ به یک حلقه‌ی یک‌دار و جابجایی یک گراف نسبت داد. بک با استفاده از مفاهیم نظریه گراف‌ها، خواص جالبی از حلقه‌ها را به‌دست آورد. بعدها اندرسون^۲ و لیوینگستون^۳ (۱۹۹۹) به این موضوع علاقه‌مند شدند و به‌طور جدی نظریه گراف مقسوم‌علیه‌های صفر را با ارائه یک تعریف دقیق، بررسی خواص گرافی و مقایسه کردن آن‌ها با خواص حلقه‌ای پایه‌گذاری کردند. آن‌ها گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه جابجایی R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان دادند. مفهوم گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در واقع پلی بین نظریه گراف‌ها و نظریه حلقه‌هاست.

ردموند^۴ (۲۰۰۲) این مفهوم را به حلقه‌های ناجابجایی گسترش داد و چندین تعریف مختلف از گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه ناجابجایی را ارائه نمود. اخیراً اکستل^۵ و همکارانش (۲۰۰۵)، لوکاس^۶ (۲۰۰۶)، اندرسون و مولای^۷ (۲۰۰۷) مفهوم قطر^۸ و کمر^۹ در حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی روی یک حلقه جابجایی را مورد مطالعه قرار دادند.

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی و یک‌دار و $M_n(R)$ ، حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و هم‌چنین $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$ به ترتیب گراف مقسوم‌علیه‌های صفر R و گراف مقسوم‌علیه‌های صفر $M_n(R)$ باشد.

حال به معرفی مفاهیم و تعاریفی از نظریه گراف و نظریه حلقه‌های جابجایی که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند، می‌پردازیم. تعاریف مربوط به گراف به کار رفته در این قسمت از مرجع [۹]، گرفته شده‌اند.

^۱Beck

^۲Anderson

^۳Livingston

^۴Redmond

^۵Axtell

^۶Lucas

^۷Mulay

^۸Diameter

^۹Girth

۲.۱ مفاهیم مربوط به نظریه گراف

تعریف ۱.۲.۱. گراف G ، زوج مرتب (V, E) است که در آن V یک مجموعه و E زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ می‌باشد، V را مجموعه رئوس و E را مجموعه یال‌های گراف G گوئیم.

تعریف ۲.۲.۱. دو رأس x و y در G را مجاور گویند، هرگاه بین x و y یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۲.۱. $G' = (V', E')$ یک زیرگراف $G = (V, E)$ است اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ ، که در این صورت با نماد $G' \subseteq G$ نمایش می‌دهیم. زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است را زیرگراف القا شده توسط V' نامیده و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. می‌گوئیم $G[V']$ یک زیرگراف القایی G است.

تعریف ۴.۲.۱. در گراف G دنباله‌ای از رئوس متمایز مانند $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ که در آن برای هر $0 \leq i \leq n$ ، a_i و a_{i+1} مجاورند را مسیری به طول n می‌نامیم. مسیر $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ با شرط $a_0 = a_n$ ، دور نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. گراف G را همبند گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه a و b از G ، مسیری در G موجود باشد. در غیر این صورت G را ناهمبند نامند.

تعریف ۶.۲.۱. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس a و b را فاصله a و b نامیده و با $d(a, b)$ نمایش می‌دهیم، هم‌چنین اگر مسیری بین a و b موجود نباشد، می‌نویسیم $d(a, b) = \infty$. بیشترین فاصله بین دو رأس G ، را قطر G می‌نامیم و با $diam(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. کمر گراف G ، طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف است و آن را با $gr(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر گرافی فاقد دور باشد، می‌نویسیم $gr(G) = \infty$.

تعریف ۸.۲.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشد را گراف کامل گوئیم. گراف کامل با n رأس را با K^n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. گراف G را r -بخشی گوئیم، هرگاه رأس‌های G را بتوان به r زیر مجموعه افراز کرد به طوری که بین رأس‌های هیچ یک از این زیرمجموعه‌ها یالی نباشد. گراف r -بخشی G را یک گراف r -بخشی کامل گوئیم، هرگاه هر دو رأس که در یک بخش نباشند، با یکدیگر مجاور باشند. گراف دوبخشی کامل با بخش‌های با اندازه‌های m و n را با $K^{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گراف ستاره گرافی است که در آن یک رأس با بقیه رئوس مجاور است و بین رأس‌های دیگر یالی وجود ندارد. به عبارت دیگر گراف $K^{1,n}$ را ستاره می‌نامیم.

بنابر تعریف واضح است که اگر $m, n \geq 2$ ، $gr(K^{n,m}) = 4$ و برای هر $n \geq 1$ ، $gr(K^{1,n}) = \infty$.

هم‌چنین $diam(K^{1,1}) = 1$ و اگر $m \geq 2$ یا $n \geq 2$ ، $diam(K^{m,n}) = 2$.

تعریف ۱۱.۲.۱. $\bar{K}^{m,3}$ گرافی است که در واقع از به هم پیوستن گراف دو بخشی کامل $G_1 = K^{m,3} (= A \cup B ; |A| = m, |B| = 3)$ با گراف ستاره‌ی $G_2 = K^{1,m}$ به وسیله یکی گرفتن مرکز G_2 و یک نقطه از B به دست می‌آید.

بنابر تعریف واضح است که اگر $m \geq 2$ ، آن‌گاه $gr(\bar{K}^{m,3}) = 4$ و هم‌چنین $gr(\bar{K}^{1,3}) = \infty$.

تعریف ۱۲.۲.۱. رأسی از یک گراف را پایانی گوئیم، هرگاه فقط یک رأس دیگر وجود داشته باشد که با آن مجاور باشد.

۳.۱ مفاهیم مربوط به نظریه حلقه‌های جابجایی

در این پایان‌نامه، همواره R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار است که $1_R \neq 0$ و هرگاه از M به عنوان R -مدول یاد می‌کنیم M, R -مدولی یکانی است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوئیم a یک مقسوم‌علیه صفر چپ است اگر عنصر ناصفر $x \in R$ موجود باشد که $ax = 0$. به طور مشابه مقسوم‌علیه صفر راست تعریف می‌شود. عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر گوئیم، هرگاه a یا یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد یا یک مقسوم‌علیه

صفر راست. همچنین عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر دو طرفه گوئیم، هرگاه a هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد و هم یک مقسوم‌علیه صفر راست.

قرارداد ۲.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای $A \subseteq R$ قرارداد می‌کنیم:

$$A^* = A - \{0\}.$$

همچنین برای هر مجموعه X ، تعداد عناصر X را با $|X|$ نمایش می‌دهیم. اگر X متناهی نباشد، می‌نویسیم $|X| = \infty$.

تعریف ۳.۳.۱. عضو x از حلقه R را که مقسوم‌علیه صفر نباشد منظم، و حلقه‌ای را که مقسوم‌علیه صفر ناصفر نداشته باشد حوزه صحیح می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. ایده‌آل P از حلقه R را اول گوئیم، هرگاه $P \neq R$ و برای هر دو ایده‌آل A و B ، اگر $AB \subseteq P$ ، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $\text{spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۳.۱. ایده‌آل سره M از حلقه R را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه هیچ ایده‌آل سره بین M و R وجود نداشته باشد. همچنین هر حلقه جابجایی R که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد را موضعی گوئیم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ایده‌آل اولی از R مانند p را که شامل I است، یک ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل q موجود نباشد که $I \subseteq q \subsetneq p$. هر ایده‌آل اول مینیمال (0) به ایده‌آل اول مینیمال R معروف است.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر پوچ‌توان نامند، هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری که $a^n = 0$. مجموعه عناصر پوچ‌توان R را با $\text{nil}(R)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که هر عنصر پوچ‌توان در حلقه R ، یک مقسوم‌علیه صفر است. همچنین $0 \in R$ عنصری پوچ‌توان است.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر خودتوان نامند، هرگاه $a^2 = a$.
 عنصر خودتوان a را نابديهی گوئیم، هرگاه $a \neq 0$ و $a \neq 1$.

واضح است که در هر حلقه، صفر تنها عنصر پوچ توان است که خودتوان نیز هست. در حلقه R ، اگر e خودتوان نابديهی باشد، چون $(1-e)e = 0$ ، پس e یک مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۹.۳.۱. ایده آل I از حلقه R را پوچ گوئیم، هرگاه تمام عناصر I پوچ توان باشد.

مثال ۱۰.۳.۱. $nil(R)$ یک ایده آل پوچ از حلقه جابجایی R است.

تعریف ۱۱.۳.۱. مجموع تمام ایده آل های پوچ را رادیکال پوچ گوئیم و با $N(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. حلقه R را تقلیل یافته گوئیم، هرگاه صفر تنها عنصر پوچ توان آن باشد. به عبارت دیگر حلقه جابجایی R تقلیل یافته است اگر رادیکال پوچ آن برابر صفر باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱. عنصر a از حلقه R را وارون پذیر گوئیم، هرگاه عضوی مانند b از R موجود باشد که $ab = 1$. مجموعه ی عناصر وارون پذیر R را با $U(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یک دار باشد. بعد R را با $dim R$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$dim R = \sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \text{ } \}$$

{ زنجیری از ایده آل های اول به طول n موجود باشد. }

اگر این زنجیر متناهی نباشد بعد R را برابر ∞ تعریف می کنیم.

تعریف ۱۵.۳.۱. حلقه R را فون نیومن منظم گوئیم، هرگاه برای هر $x \in R$ ، عنصر $y \in R$ موجود باشد که $x = x^2 y$.

واضح است که حلقه های فون نیومن منظم، تقلیل یافته هستند.

لم ۱۶.۳.۱. حلقه جابجایی یک‌دار R فون‌نیومن منظم است اگر و فقط اگر هر ایده‌آل اصلی آن به وسیله یک عضو خودتوان تولید شود.

برهان. ($\Leftarrow$) اگر Ra ایده‌آل اصلی از حلقه R باشد، طبق فرض $b \in R$ موجود است که $a = a^2b$. واضح است که ab خودتوان است و به علاوه $Ra = Rab$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $a \in R$ عضو دلخواهی از حلقه R باشد. طبق فرض عنصر خودتوان b از R وجود دارد که $Ra = Rb$. بنابراین $r, r' \in R$ موجودند که $a = rb$ و $b = r'a$. چون b خودتوان است، $a = rb^2$ یعنی $a = r(r'a)b$ ، مجدداً با جایگذاری b در عبارت اخیر $a = a^2(r'r'^2)$ یعنی $r'' := r'r'^2$ به گونه ای یافت شد که $a = a^2r''$ ، بنابراین R حلقه فون نیومن منظم است. $\square$

تعریف ۱۷.۳.۱. گوییم حلقه جابجایی R ، π -منظم است اگر برای هر $r \in R$ ، عدد صحیح مثبت n و عنصر $x \in R$ موجود باشند به‌قسمی که $r^{2n}x = r^n$.

واضح است که هر حلقه فون نیومن منظم، π -منظم است. به سادگی می‌توان نشان داد حلقه R فون نیومن منظم است اگر و تنها اگر تقلیل یافته و صفر بعدی باشد.

قضیه ۱۸.۳.۱. [۱۳، قضیه ۳.۱] فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. R ، π -منظم است.

۲. برای هر $r \in R$ ، یک عنصر $y \in R$ و عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌قسمی که $r^{n+1}y = r^n$.

۳. $R/N(R)$ یک حلقه فون نیومن منظم است.

۴. R صفر-بعدی است.

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) کافیست قرار دهیم $x = r^{n-1}$.

(۲ $\Leftarrow$ ۱) چون $r^{2n}y^n = \dots = r^{2n}y^2 = r^{n+1}yry = r^{n+1}yry = r^n(r'y) = r^{n+1}y = r^{n+1}y$ ، کافیست $x = y^n$

انتخاب کنیم.

(۲ $\Leftarrow$ ۳) فرض کنیم $r \in R$ و $\bar{r}$ باقیمانده آن در $R/N(R)$ باشد. در این صورت برای y و n متناظر آن در $R/N(R)$ داریم $\bar{r}^{n+1}\bar{y} = \bar{r}^n$. در نتیجه $\bar{r}^{n+1}\bar{y} = \bar{r}^{n+1}$ و چون $R/N(R)$ یک حلقه تقلیل یافته است لذا $\bar{r}^{n+1}\bar{y} = \bar{r}^{n+1}$ با ادامه این روند نتیجه می گیریم $\bar{r}^2\bar{y} = \bar{r}$.

(۳ $\Leftarrow$ ۲) برای هر $x \in R, r \in R$ را طوری انتخاب می کنیم که $r - r^2x \in N(R)$. در این صورت برای بعضی اعداد صحیح مثبت n داریم $(r - r^2x)^n = r^n(1 - rx)^n$. می نویسیم $1 - prx = (1 - rx)^n$ و تعریف می کنیم $y = px$.

(۳ $\Leftrightarrow$ ۴) حلقه های R و $R/N(R)$ به طور همزمان صفر-بعدی هستند. $\square$

تعریف ۱۹.۳.۱. در حلقه R اگر $S = R - Z(R)$ ، آن گاه $R_s = \{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in S\}$ را با نماد $Q(R)$ نمایش می دهیم و آن را حلقه کسرهای کامل R می نامیم که در آن جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

معمولا، عنصر $x \in R - Z(R)$ را یک عنصر منظم R گوئیم.

قضیه ۲۰.۳.۱. [۱۳، قضیه ۳.۲] فرض کنیم Q یک حلقه کسرهای کامل باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند.

۱. Q, π - منظم است.

۲. برای هر $a \in Q$ ، یک خودتوان $e \in Q$ وجود دارد به قسمی که $a + (1 - e)$ یکه و $a(1 - e)$ پوچ توان است.

۳. برای هر $a \in Q$ ، عنصر $b \in Q$ موجود است به قسمی که $a + b$ یکه و ab پوچ توان است.

۴. برای هر $a \in Q$ ، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد به قسمی که $a^n = re$ که r یکه و e خودتوان است.

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم a در Q باشد. $a' \in Q$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $a'^n a = a^n$. به آسانی می‌توان نشان داد که $a^n a'$ و $1 - a^n a'$ عناصر خودتوان در Q هستند. به علاوه،

$$[a(1 - a^n a')]^n = a^n (1 - a^n a')^n = a^n (1 - a^n a') = 0.$$

پس $a(1 - a^n a')$ پوچ‌توان است. نشان می‌دهیم $a + (1 - a^n a')$ یک عنصر یکه است. کافیت نشان دهیم متعلق به هیچ ایده‌آل اول P از Q نیست.

اگر P یک ایده‌آل اول Q باشد، آن‌گاه $a(1 - a^n a') \in P$ اما هر دوی a و $(1 - a^n a')$ نمی‌توانند در P باشند زیرا اگر در P باشند، آن‌گاه $1 \in P$. بنابراین $a + (1 - a^n a') \notin P$.

(۲ $\Leftarrow$ ۳) واضح است.

(۳ $\Leftarrow$ ۴) فرض کنیم a در Q باشد و b را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط گزاره (۳) صدق کند. اگر P ایده‌آل اولی از Q باشد و اگر $a^n + b^n \in P$ که n عدد صحیح مثبتی باشد به‌قسمی که $(ab)^n = 0$ ، آن‌گاه a^n و b^n متعلق به P هستند. بنابراین a و b در P هستند که با فرض منظم بودن $a + b$ ، در تناقض است. اگر $r = a^n + b^n$ و $e = a^n / (a^n + b^n)$ ، آن‌گاه r و e عناصر مورد نظر هستند.

(۴ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $P_1 \subseteq P_2$ ایده‌آل‌های اول Q باشند. اگر $a \in P_2$ ، آن‌گاه $a^n = re$ ؛ که n ، r و e عناصر مذکور در گزاره (۴) هستند. عنصر $1 - e \notin P_2$ و از $e(1 - e) = 0$ نتیجه می‌شود $e \in P_1$. بنابراین $P_1 = P_2$ ، که نشان می‌دهد Q ، صفر-بعدی است. $\square$

نتیجه ۲۱.۳.۱. [۱۳، نتیجه ۳.۳] فرض کنیم Q یک حلقه کسرهای کامل و تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. Q فون نیومن منظم است.

۲. برای هر $a \in Q$ ، عنصر خودتوان $e \in Q$ موجود است به‌طوری که $a + (1 - e)$ یکه است و

$$a(1 - e) = 0.$$

۳. برای هر $a \in Q$ ، عنصر $b \in Q$ وجود دارد به طوری که $a + b$ یکه است و $ab = 0$.

۴. برای هر $a \in Q$ داریم $a = re$ به طوری که r یکه است و e خودتوان است.

لم ۲۲.۳.۱. هر قلمرو صحیح فون نیومن منظم، میدان است.

برهان. فرض کنیم R قلمرو صحیح فون نیومن منظم باشد و $a \in R$ و $a \neq 0$. در این صورت $b \in R$ موجود است که $a = a^2b$. بنابراین $a(1 - ab) = 0$. چون R قلمرو صحیح است $1 - ab = 0$ لذا $ab = 1$. پس R میدان است. $\square$

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از R باشد. پوچساز X را که با نماد $\text{ann}(X)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{ann}(X) = \{a \in R \mid aX = 0\}.$$

لم ۲۴.۳.۱. [۱۵، قضیه ۶] اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد و $x \in R$ موجود باشد به طوری که $\text{ann}(x)$ در بین بقیه پوچسازها ماکسیمال باشد آن‌گاه $\text{ann}(x)$ ایده‌آلی اول است.

برهان. فرض کنیم $\text{ann}(x)$ در بین پوچسازها ماکسیمال باشد و فرض کنیم $ab \in \text{ann}(x)$. نشان می‌دهیم $a \in \text{ann}(x)$ یا $b \in \text{ann}(x)$.

فرض کنیم $a \notin \text{ann}(x)$. در این صورت $ax \neq 0$. داریم $\text{ann}(ax) \supseteq \text{ann}(x)$ زیرا هر عنصری که پوچساز x باشد، پوچساز ax نیز هست. حال از آنجائی که $\text{ann}(x)$ در بین پوچسازها ماکسیمال است لذا $\text{ann}(ax) = \text{ann}(x)$. در نتیجه $\text{ann}(ax) \subseteq \text{ann}(x)$. چون b پوچساز ax است لذا $b \in \text{ann}(x)$. $\square$

لم ۲۵.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و X یک زیرگروه جمعی R باشد. در این صورت برای هر $a \in R$ داریم:

$$[X : X \cap \text{ann}_l(a)] = |Xa|.$$

برهان. تابع $f: X \rightarrow Xa$ را با ضابطه $f(x) = xa$ در نظر می‌گیریم. به وضوح f یک همریختی جمعی

پوشاست. حال چون $\text{Ker } f = X \cap \text{ann}(a)$ پس داریم $|X : X \cap \text{ann}_l(a)| = |Xa|$. $\square$

نتیجه ۲۶.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت برای هر $a \in R$ داریم:

$$[R : \text{ann}_l(a)] = |Ra|.$$

قضیه ۲۷.۳.۱. [۱۵، قضیه ۱۲] فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. فرض کنیم A یک R -مدول ناصفر

متناهی تولیدشده و S نیز یک زیرحلقه مضمول در $Z(A)$ باشد. در این صورت عنصر ناصفر منحصر به فردی

مانند a در A وجود دارد به طوری که $Sa = 0$.

فصل ۲

همبندی، قطر و کمر در گراف
مقسوم علیه‌های صفر

این فصل برگرفته از مرجع [۱۲] می باشد و شامل سه بخش است که در آن به معرفی گراف مقسوم علیه های صفر حلقه ها، همبندی، قطر و کمر گراف می پردازیم و قضایا و نتایجی را در مورد این مفاهیم بیان و اثبات می کنیم. در بخش اول، به تعاریف اصلی و نتایج مورد نیاز درباره حلقه های جابجایی و ناجابجایی می پردازیم. در بخش دوم، چندین قضیه درباره گراف مقسوم علیه های صفر حلقه ماتریس های مربعی را ثابت می کنیم و در بخش سوم، به بررسی رابطه قطر $\Gamma(M_n(R))$ و قطر $\Gamma(R)$ می پردازیم.

۱.۲ گراف مقسوم علیه های صفر حلقه ها

مجموعه مقسوم علیه های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می دهیم. هم چنین تعریف می کنیم:

$$Z^*(R) = Z(R) - \{0\}.$$

اگر حلقه R ناجابجایی باشد، مجموعه مقسوم علیه های صفر چپ را در حلقه R با نماد $Z_l(R)$ و مجموعه مقسوم علیه های صفر راست را با نماد $Z_r(R)$ نمایش می دهیم. هم چنین $Z(R) = Z_l(R) \cup Z_r(R)$. قابل ذکر است در هر حلقه R ، عنصر $0 \in R$ یک مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۱.۱.۲. برای حلقه جابجایی و یک دار R ، با مجموعه مقسوم علیه های صفر $Z(R)$ ، گراف مقسوم علیه های صفر حلقه R با $\Gamma(R)$ نمایش داده می شود و گرافی است با مجموعه رئوس $Z^*(R) = Z(R) - \{0\}$ که دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر $xy = 0$. فاصله بین دو رأس متمایز a و b ، طول کوتاه ترین مسیر بین دو رأس a و b است که با نماد $d(a, b)$ نمایش می دهیم. قطر Γ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{diam}(\Gamma) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in V(\Gamma)\}.$$

هم چنین کمر Γ ، طول کوتاه ترین دور در Γ است که با نماد $gr(\Gamma)$ نمایش می دهیم و اگر فاقد دور باشد $gr(\Gamma) = \infty$.

تعریف ۲.۱.۲. اگر R یک حلقه ناجابجایی باشد، گراف مقسوم علیه های صفر جهت دار $\Gamma(R)$ با مجموعه رئوس $Z^*(R)$ به این صورت تعریف می کنیم که $x \rightarrow y$ یک یال بین رئوس متمایز x و y است اگر و تنها

اگر $xy = 0$. (این تعریف توسط ردموند (۲۰۰۲) مطرح شد، [۱۸]). یک گراف جهت‌دار زمانی همبند است که یک مسیر جهت‌دار همبند بین هر دو رأس متمایز آن وجود داشته باشد. فاصله و قطر نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۲. $\bar{\Gamma}(R)$ را گراف مقسوم‌علیه‌های صفر بدون جهت برای حلقه ناجابجایی R با رؤس در مجموعه‌ی $Z^*(R)$ معرفی می‌کنیم به‌طوری که برای رؤس متمایز a و b ، یک یال بین آن‌ها وجود دارد اگر و فقط اگر $ab = 0$ یا $ba = 0$.

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $Z^*(R) \neq \emptyset$. در این صورت همواره $\Gamma(R)$ همبند است، همچنین $diam(\Gamma(R)) \leq 3$ و اگر $\Gamma(R)$ شامل حداقل یک دور باشد، آن‌گاه $g(\Gamma(R)) \leq 4$.
برهان. فرض کنیم $x, y \in Z^*(R)$ متمایز باشند.

اگر $xy = 0$ ، آن‌گاه $d(x, y) = 1$. بنابراین فرض می‌کنیم xy ناصفر است. در این صورت اگر $x^2 = y^2 = 0$ ، آن‌گاه $x - xy - y$ یک مسیر به طول ۲ است؛ بنابراین $d(x, y) = 2$.
 اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$ ، آن‌گاه $b \in Z^*(R) - \{x, y\}$ موجود است به‌طوری که $by = 0$. اگر $bx = 0$ ، آن‌گاه $x - b - y$ یک مسیر به طول ۲ است و اگر $bx \neq 0$ ، آن‌گاه $x - bx - y$ یک مسیر به طول ۲ است. لذا در هر مورد $d(x, y) = 2$. برای حالتی که $y^2 = 0$ و $x^2 \neq 0$ ، استدلالی مشابه داریم.
 بنابراین فرض می‌کنیم xy ، x^2 و y^2 همگی ناصفر باشند. بنابراین $a, b \in Z^*(R) - \{x, y\}$ موجودند به‌طوری که $ax = by = 0$.

اگر $a = b$ ، آن‌گاه $x - a - y$ مسیری به طول ۲ است. بنابراین فرض می‌کنیم $a \neq b$. در این صورت اگر $ab = 0$ ، آن‌گاه $x - a - b - y$ یک مسیر به طول ۳ است و لذا $d(x, y) \leq 3$.
 اگر $ab \neq 0$ ، آن‌گاه $x - ab - y$ یک مسیر به طول ۲ است؛ بنابراین $d(x, y) = 2$. لذا در هر حالت $d(x, y) \leq 3$ و در نتیجه $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

حال فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد و $\Gamma(R)$ شامل حداقل یک دور باشد. ثابت می‌کنیم

$$g(\Gamma(R)) \leq 4.$$

با برهان خلف فرض می‌کنیم $g(\Gamma(R)) \geq 5$ ، هم‌چنین $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \dots - x_n - x_1$ یک دور با کوتاه‌ترین طول در $\Gamma(R)$ باشد. لذا $n \geq 5$ و x_i ها دو به دو متمایزند. چون $g(\Gamma(R)) \geq 5$ پس x_2 و x_4 به هم متصل نیستند، لذا $x_2 x_4 \neq 0$. حال گردش $x_1 - x_2 x_4 - x_5 - \dots - x_n - x_1$ شامل یک دور به طول حداکثر $n - 2$ در $\Gamma(R)$ خواهد بود (ممکن است مساوی یکی از x_i ها باشد). که با فرض مینیم بودن n در تناقض است و لذا حکم ثابت می‌شود. $\square$

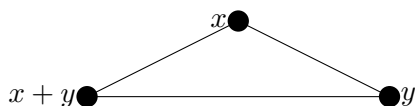
مثال ۵.۱.۲. قطر $\mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_6$ به ترتیب برابر صفر، یک و دو است زیرا

اگر $R = \mathbb{Z}_4$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ تک نقطه‌ای است زیرا تنها ۲ مقسوم‌علیه صفر ناصفر آن است.

اگر $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ شامل دو رأس $(1, 0)$ و $(0, 1)$ می‌باشد که تشکیل یک یال را می‌دهند.

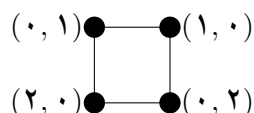
اگر $R = \mathbb{Z}_6$ آن‌گاه Γ شامل سه رأس ۲، ۳ و ۴ می‌باشد.

مثال ۶.۱.۲. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_2[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$. در این صورت $\Gamma(R)$ یک مثلث است زیرا



شکل ۱.۲: $(gr(\Gamma(\mathbb{Z}_2[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)))) = 3$

مثال ۷.۱.۲. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. در این صورت $\Gamma(R)$ یک مربع است زیرا



شکل ۲.۲: $(gr(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) = 4$

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$ ، آن‌گاه R متناهی است. بنابراین $\Gamma(R)$ یک گراف متناهی است (همچنین تعداد متناهی رئوس دارد) اگر و تنها اگر R یک حلقه متناهی یا حوزه صحیح باشد. به ویژه اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$ ، آن‌گاه R متناهی است و میدان نیست.

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R) (= Z^*(R))$ متناهی و ناتهی باشد. در این صورت عناصر ناصفر $x, y \in R$ موجودند به طوری که $xy = 0$. فرض کنیم $I = ann(x)$. در این صورت $I \subset Z(R)$ و $y \in I$. در حقیقت برای هر $r \in R$ ، $ry \in I$. فرض کنیم R نامتناهی باشد. در این صورت یک $i \in I$ موجود است که $J = \{r \in R \mid ry = i\}$ نامتناهی است. برای هر $r, s \in J$ ، $(r - s)y = 0$. بنابراین $ann(y) \subset Z(R)$. نامتناهی است لذا با این حقیقت که تعداد متناهی مقسوم‌علیه صفر موجود است، تناقض دارد. پس R متناهی است. $\square$

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه ناجابجایی باشد و $Z^*(R) \neq \emptyset$. در این صورت $\Gamma(R)$ همبند است اگر و فقط اگر $Z_l(R) = Z_r(R)$. همچنین اگر $\Gamma(R)$ همبند باشد، آن‌گاه $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

برهان. فرض کنیم $Z_l(R) = Z_r(R)$.

فرض کنیم x و y رئوس متمایز $\Gamma(R)$ باشند (لذا $x \neq 0$ و $y \neq 0$).

حالت ۱: اگر $xy = 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow y$ ، یک مسیر به طول ۱ است.

حالت ۲: اگر $xy \neq 0$ ، $x^2 = 0$ و $y^2 = 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow xy \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت ۳: اگر $xy \neq 0$ ، $y^2 \neq 0$ و $x^2 = 0$ ، آن‌گاه $b \in R - \{x, y, 0\}$ موجود است به‌طوری که $by = 0$.

حال اگر $xb = 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow b \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

اگر $xb \neq 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow xb \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت ۴: اگر $xy \neq 0$ ، $x^2 \neq 0$ و $y^2 = 0$ ، آن‌گاه $a \in R - \{x, y, 0\}$ موجود است به‌طوری که $xa = 0$.

حال اگر $ay = 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow a \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

اگر $ay \neq 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow ay \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت ۵: اگر $xy \neq 0$ ، $x^2 \neq 0$ و $y^2 \neq 0$ ، آن‌گاه $a \in R - \{x, y, 0\}$ موجود است به‌طوری که $xa = 0$. همچنین $b \in R - \{x, y, 0\}$ موجود است به‌طوری که $by = 0$.

حالت فرعی ۱: فرض کنیم $a = b$. در این صورت $x \rightarrow a \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت فرعی ۲: فرض کنیم $a \neq b$. در این صورت اگر $ab = 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۳ است. اگر $ab \neq 0$ ، آن‌گاه $x \rightarrow ab \rightarrow y$ یک مسیر به طول ۲ است.

بنابراین در هر حالت $\Gamma(R)$ همبند است و $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

برعکس، فرض کنیم $\Gamma(R)$ همبند باشد. ثابت می‌کنیم $Z_r(R) = Z_l(R)$.

فرض کنیم $x \in Z_r(R)$ ، $x \neq 0$. در این صورت x یک رأس $\Gamma(R)$ است. اگر x تنها رأس $\Gamma(R)$ باشد،

آن‌گاه $x^2 = 0$ و $Z_r(R) = Z_l(R) = \{x, 0\}$. حال فرض کنیم y یک رأس متمایز از x باشد. چون گراف

همبند است، یک مسیر مانند $y \rightarrow a_n \rightarrow \dots \rightarrow a_1 \rightarrow x$ در $\Gamma(R)$ وجود دارد. بنابراین $xa_1 = 0$ و در

نتیجه $x \in Z_l(R)$. پس $Z_r(R) \subseteq Z_l(R)$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $Z_l(R) \subseteq Z_r(R)$. بنابراین

□

$$Z_l(R) = Z_r(R)$$

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه ناجابجایی باشد و $Z^*(R) \neq \emptyset$. در این صورت $\bar{\Gamma}(R)$ همبند است،

هم‌چنین $\text{diam}(\bar{\Gamma}(R)) \leq 3$ و اگر $\bar{\Gamma}(R)$ شامل حداقل یک دور باشد، آن‌گاه $g(\bar{\Gamma}(R)) \leq 4$.

برهان. فرض کنیم x و y رئوس متمایز $\bar{\Gamma}(R)$ باشند.

حالت ۱: اگر $xy = 0$ یا $yx = 0$ ، آن‌گاه $x - y$ یک مسیر به طول ۱ است.

فرض کنیم $xy \neq 0$ و $yx \neq 0$.

حالت ۲: اگر $x^2 = y^2 = 0$ ، آن‌گاه $x - xy - y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت ۳: اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$ ، آن‌گاه $b \in R - \{x, y, 0\}$ موجود است به‌طوری که $by = 0$ یا $yb = 0$.

حال اگر $xb = 0$ یا $bx = 0$ ، آن‌گاه $x - b - y$ یک مسیر به طول ۲ است.

اگر $xb \neq 0$ و $bx \neq 0$ ، آن‌گاه $x - bx - y$ یک مسیر به طول ۲ است.

هم‌چنین اگر $yb = 0$ و $by = 0$ ، آن‌گاه $x - xb - y$ یک مسیر به طول ۲ است.

حالت ۴: اگر $x^2 \neq 0$ و $y^2 = 0$ ، آن‌گاه با استدلالی مشابه حالت ۳، یک مسیر به طول ۲ خواهیم داشت.

حالت ۵: اگر $x^2 \neq 0$ و $y^2 \neq 0$ ، آن‌گاه $a, b \in R - \{x, y, 0\}$ وجود دارند به‌طوری که $ax = 0$ یا $xa = 0$ و $by = 0$ یا $yb = 0$.

فرض کنیم $a = b$. در این صورت $x - a - y$ یک مسیر به طول ۲ است.

فرض کنیم $a \neq b$. اگر $ab = 0$ یا $ba = 0$ ، آن‌گاه $x - a - b - y$ یک مسیر به طول ۳ است.

بنابراین فرض می‌کنیم $a \neq b$ و $ab \neq 0$ و $ba \neq 0$.

حالت فرعی ۱: $x - a - y$ یک مسیر به طول ۲ است اگر $ay = 0$ یا $ya = 0$.

حالت فرعی ۲: $x - ab - y$ یک مسیر به طول ۲ است اگر $xa = 0$ و $by = 0$.

حالت فرعی ۳: $x - ba - y$ یک مسیر به طول ۲ است اگر $ax = 0$ و $yb = 0$.

حالت فرعی ۴: $x - ay - b - y$ یک مسیر به طول ۳ است اگر $xa = 0$ ، $yb = 0$ و $ay \neq 0$.

حالت فرعی ۵: $x - ya - b - y$ یک مسیر به طول ۳ است اگر $ax = 0$ ، $by = 0$ و $ya \neq 0$. بنابراین

$$\text{diam}(\bar{\Gamma}(R)) \leq 3.$$

حال فرض می‌کنیم $\bar{\Gamma}(R)$ شامل یک دور باشد. ثابت می‌کنیم $g(\bar{\Gamma}(R)) \leq 4$.

فرض کنیم $x_0 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} - x_n - x_0$ یک دور با کوتاه‌ترین طول در $\bar{\Gamma}(R)$ باشد. فرض

کنیم $g(\bar{\Gamma}(R)) > 4$. همچنین فرض کنیم $n \geq 4$. در این صورت

حالت ۱: تعدادی x_j وجود دارند که $x_j \in I = \text{ann}_l(x_{j+1}) \cap \text{ann}_l(x_{j-1})$ بدون کاسته شدن

از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد $j = 1$. اگر $y \in I^*$ موجود باشد به طوری که $y \neq x_1$ ، آن‌گاه

$x_0 - x_1 - x_2 - y - x_0$ یک دور در $\bar{\Gamma}(R)$ است. بنابراین فرض می‌کنیم $I = \{0, x_1\}$. در این صورت

$x_3x_4 = 0$ یا $x_4x_3 = 0$. متذکر می‌شویم که $x_1x_3 \neq 0$ ، $x_1x_4 \neq 0$ ، $x_4x_1 \neq 0$ و $x_1x_4 \neq 0$. بنابراین

$x_3x_1 = x_4x_1 = x_1$ زیرا $I = \{0, x_1\}$ یک ایده‌آل چپ است. اما در این صورت از $x_3x_4 = 0$ نتیجه

$$x_3x_1 = x_3(x_4x_1) = (x_3x_4)x_1 = 0 \text{ می‌شود.}$$

همچنین از $x_4x_3 = 0$ نتیجه می‌شود $x_4x_1 = x_4(x_3x_1) = (x_4x_3)x_1 = 0$. که در این صورت به

تناقض می‌رسیم.

حالت ۲: تعدادی x_j وجود دارند که $x_j \in I = \text{ann}_r(x_{j+1}) \cap \text{ann}_r(x_{j-1})$ در این صورت با

استدلای مشابه حالت ۱ به تناقض می‌رسیم.

حالت ۳: برای هر j ،

$$x_j \notin \text{ann}_l(x_{j+1}) \cap \text{ann}_l(x_{j-1}) \quad \text{و} \quad x_j \notin \text{ann}_r(x_{j+1}) \cap \text{ann}_r(x_{j-1})$$

در این صورت بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، مسیری در $\Gamma(R)$ به صورت $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_0$

داریم به طوری که همه یال‌ها یک‌طرفه هستند.

حالت فرعی ۱: فرض کنیم $x_n^2 = x_n = 0$. توجه داشته باشیم که $x_0, x_n \notin \{0, x_0, x_n\}$. بنابراین

$$x_0 \rightarrow x_0, x_n \rightarrow x_n \rightarrow x_0 \text{ یک مسیر در } \Gamma(R) \text{ است.}$$

حالت فرعی ۲: فرض کنیم $x^2 = 0$ و $x_n^2 \neq 0$. توجه داشته باشیم که $x, x_{n-1} \notin \{0, x, x_n\}$. بنابراین $x, x_{n-1} \rightarrow x, x_{n-1} \rightarrow x_n \rightarrow x$ یک مسیر در $\Gamma(R)$ است.

حالت فرعی ۳: فرض کنیم $x^2 \neq 0$ و $x_n^2 = 0$. توجه داشته باشیم که $x, x_{n-1} \notin \{0, x, x_n\}$. بنابراین $x, x_{n-1} \rightarrow x, x_{n-1} \rightarrow x_n \rightarrow x$ یک مسیر در $\Gamma(R)$ است.

حالت فرعی ۴: فرض کنیم $x^2 \neq 0$ و $x_n^2 \neq 0$. توجه داشته باشیم که $x, x_{n-1} \notin \{0, x, x_n\}$. بنابراین $x, x_{n-1} \rightarrow x, x_{n-1} \rightarrow x_n \rightarrow x$ یک مسیر در $\Gamma(R)$ است.

در هر حالت توانستیم دوری در $\bar{\Gamma}(R)$ بیابیم که طول آن بیشتر از ۴ نیست لذا به تناقض رسیدیم پس

$$\square \quad g(\bar{\Gamma}(R)) \leq 4$$

۲.۲ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر ماتریس‌های مربعی

می‌دانیم حتی اگر حلقه R فاقد مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر باشد، $M_n(R)$ مقسوم‌علیه صفر ناصفر دارد. هم‌چنین همواره عناصر متمایز $A, B \in Z(M_n(R))$ چنان موجودند که AB برابر صفر نیست. بنابراین برای هر حلقه جابجایی R ، $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 2$.

برخلاف گراف مقسوم‌علیه‌های صفر روی حلقه جابجایی، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر (جهت‌دار) در حلقه‌های ناجابجایی الزاماً همبند نیستند. قصد داریم تعیین کنیم که آیا گراف مقسوم‌علیه‌های صفر ماتریس‌های مربعی روی حلقه‌های جابجایی، همبند هستند؟ ابتدا به بیان چند قضیه اساسی و مفید برای این بخش از مرجع [۱۱] می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم $A \in M_{n \times n}(R)$. در این صورت $rk(A) < n$ ، اگر و فقط اگر $\det(A) \in Z(R)$ است. ($rk(A)$ ، نمایانگر رتبه ماتریس A است.)

قضیه ۲.۲.۲. [۱۱، قضیه مک‌کوی^۱] فرض کنیم $A \in M_{m \times n}(R)$. در این صورت معادله همگن

$$AX = 0, \text{ یک جواب غیربدیهی دارد اگر و تنها اگر } rk(A) < n.$$

^۱McCoy

قضیه ۳.۲.۲. [۱۱، قضیه ۹.۱ براون^۲] فرض کنیم $A \in M_{n \times n}(R)$.

الف) A یک مقسوم‌علیه صفر چپ در $M_{n \times n}(R)$ است اگر و فقط اگر $\det(A) \in Z(R)$.

ب) A یک مقسوم‌علیه صفر راست در $M_{n \times n}(R)$ است اگر و فقط اگر $\det(A) \in Z(R)$.

برهان. الف) فرض کنیم $\det(A) \in Z(R)$. در این صورت $rk(A) < n$. از قضیه مک‌کوی نتیجه می‌شود برای بعضی بردارهای ناصفر $\xi \in R^n$ ، $A\xi = 0$. قرار می‌دهیم $B = (\xi|\xi|\dots|\xi) \in M_{n \times n}(R)$. در این صورت $B \neq 0$ و $AB = (A\xi|\dots|A\xi) = (0|\dots|0) = 0$. بنابراین A یک مقسوم‌علیه صفر چپ در $M_{n \times n}(R)$ است.

ب) چون $\det(A^t) = \det A$ ، با اثباتی مشابه (الف)، از $\det(A) \in Z(R)$ نتیجه می‌شود A^t یک مقسوم‌علیه صفر چپ در $M_{n \times n}(R)$ است. بنابراین به ازای بعضی ماتریس‌های ناصفر $B \in M_{n \times n}(R)$ ، $A^t B = 0$. پس $B^t \neq 0$ و $(B^t A)^t = A^t B = 0$. بنابراین $B^t A = 0$. پس A یک مقسوم‌علیه صفر راست در $M_{n \times n}(R)$ است.

در نتیجه می‌توان گفت اگر $\det(A) \in Z(R)$ ، آن‌گاه A هم یک مقسوم‌علیه صفر راست و هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ در $M_{n \times n}(R)$ است.

برعکس، فرض کنیم A یک مقسوم‌علیه صفر چپ در $M_{n \times n}(R)$ باشد. در این صورت به ازای بعضی ماتریس‌های ناصفر $B \in M_{n \times n}(R)$ ، $AB = 0$. فرض کنیم $B = (\xi_1|\dots|\xi_n)$ یک افراز ستونی از ماتریس B باشد. چون B ناصفر است، لذا تعدادی از بردارهای ξ_i در R^n ناصفر هستند. داریم:

$$0 = AB = (A\xi_1|\dots|A\xi_n) \Rightarrow \forall i: 1, \dots, n; \quad A\xi_i = 0.$$

به ویژه، معادله $AX = 0$ یک جواب غیر بدیهی دارد. بنابر قضیه مک‌کوی، $rk(A) < n$ و در نتیجه $\det(A) \in Z(R)$.

اگر A یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد، آن‌گاه A^t یک مقسوم‌علیه صفر چپ است. بنابراین

$$\det(A^t) = \det(A) \in Z(R).$$

^۲Brown

□

از قضیه براون نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ $M_{n \times n}(R)$ دقیقاً همان مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر راست $M_{n \times n}(R)$ است. هر کدام از این مجموعه‌ها با $Z(M_{n \times n}(R))$ برابر هستند. به عبارت دیگر در $M_{n \times n}(R)$ ، ماتریس A یک مقسوم‌علیه صفر چپ است اگر و تنها اگر A یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

نتیجه ۴.۲.۲. فرض کنیم R یک حوزه صحیح باشد و $A \in M_{n \times n}(R)$. در این صورت $A \in Z(M_{n \times n}(R))$ اگر و تنها اگر $\det(A) = 0$.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(M_n(R))$ همبند است و

$$\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) \leq 3.$$

برهان. بنابر قضیه ۹.۱.۲، یک گراف مقسوم‌علیه‌های صفر (جهت‌دار) از حلقه ناجابجایی R همبند است اگر و تنها اگر $Z_l(R) = Z_r(R)$. همچنین اگر گراف همبند باشد، آن‌گاه $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. بنابر قضیه براون، $Z_l(R) = Z_r(R)$ ، لذا حکم برقرار است. □

گزاره ۶.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $Z^*(R) \neq 0$. در این صورت

$$\text{diam}(\Gamma(R)) \leq \text{diam}(\Gamma(M_n(R))).$$

برهان. با توجه به قضیه ۴.۱.۲ داریم $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

اگر $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$ یا $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$ ، آن‌گاه $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) \geq 2 \geq \text{diam}(\Gamma(R))$. اگر $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$ ، آن‌گاه عناصر ناصفر متمایز a, b, c و d در R موجودند به طوری که $ab = 0$ ، $bc = 0$ ، $cd = 0$ و $a - b - c - d$ کوتاه‌ترین مسیر از a به d در $\Gamma(R)$ است. پس ماتریس $A = aI_n$ و $D = dI_n$ متعلق به $Z^*(M_n(R))$ هستند و بدیهی است که $AD \neq 0$.

حال فرض کنیم ماتریس $C = (c_{ij}) \in Z^*(M_n(R))$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $AC = CD = 0$. در این صورت $AC = aC = 0$ و $CD = dC = 0$. بنابراین برای هر $i, j = 1, \dots, n$ ، $ac_{ij} = dc_{ij} = 0$. از آنجاکه تنها مقسوم‌علیه صفر مشترک a و d صفر بود لذا برای هر $i, j = 1, \dots, n$ ، $c_{ij} = 0$. بنابراین $C = 0$ که با انتخاب C در تناقض است. در نتیجه $diam(\Gamma(M_n(R))) \geq 3 = diam(\Gamma(R))$. $\square$

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل R باشد. در ادامه نشان خواهیم داد $\Gamma(R)$ و $\Gamma(Q(R))$ ایزومورف هستند و در نتیجه این دو گراف، قطر و کمر یکسان دارند. همچنین درستی مطالبی مشابه را برای $\Gamma(M_n(R))$ و $\Gamma(M_n(Q(R)))$ بررسی می‌کنیم.

تعریف ۷.۲.۲. گوئیم گراف‌های G و G' ایزومورف هستند، اگر یک تابع دوسویی $\phi: G \rightarrow G'$ از رئوس وجود داشته باشد به‌طوری که x و y در G مجاورند اگر و تنها اگر $\phi(x)$ و $\phi(y)$ در G' مجاور باشند.

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $x, y \in R$. گوئیم $x \sim y$ اگر و تنها اگر $ann(x) = ann(y)$.

واضح است که رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی R است و به یک رابطه هم‌ارزی روی $\Gamma(R) (= Z^*(R))$ محدود می‌شود.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل آن باشد. در این صورت $\Gamma(Q(R))$ و $\Gamma(R)$ ایزومورف هستند.

برهان. فرض کنیم $S = R - Z(R)$ و $Q = Q(R)$. رابطه هم‌ارزی تعریف شده در ۸.۲.۲ روی $Z^*(R)$ و $Z^*(Q)$ را به ترتیب با $\sim_R$ و $\sim_Q$ ، و کلاس‌های هم‌ارزی مربوطه را با $[a]_R$ و $[a]_Q$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که $ann_Q(x/s) = ann_R(x)_S$ و $ann_Q(x/s) \cap R = ann_R(x)$. بنابراین برای هر $x, y \in Z^*(R)$ ، $[x/s]_Q \cap R = [x]_R$ و $([x]_R)_S = [x/1]_Q$ ، $(x \sim_R y \Leftrightarrow x/s \sim_Q y/s)$ ، $x/s \sim_Q x/t$ داریم $s, t \in S$. چون $Z(Q) = Z(R)_S$ ، با استفاده از تساوی‌های فوق داریم

هم‌چنین فرض کنیم $w \in [a/1]_Q$ و $z \in [b/1]_Q$ به ترتیب تصاویر x و y تحت φ باشند. کافیت نشان دهیم $xy = 0$ اگر و تنها اگر $wz = 0$ می‌دانیم که

$$ann_Q(y) = ann_Q(b) = ann_Q(z) \quad , \quad ann_Q(x) = ann_Q(a) = ann_Q(w)$$

بنابراین

$$xy = 0 \Leftrightarrow y \in ann_Q(x) = ann_Q(w) \Leftrightarrow yw = 0 \Leftrightarrow w \in ann_Q(y) = ann_Q(z) \Leftrightarrow wz = 0.$$

از این رو $\Gamma(R)$ و $\Gamma(Q(R))$ گراف‌های ایزومورف هستند. $\square$

فرض کنیم A یک زیرحلقه از حلقه جابجایی B باشد. در این صورت $\Gamma(A)$ یک زیر گراف القایی $\Gamma(B)$ است. می‌نویسیم $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$ بدیهی است که $g(\Gamma(A)) \geq g(\Gamma(B))$.

لم بعدی نتیجه مستقیمی از قضیه قبل است ولی اثبات دیگری از آن را در زیر ارائه می‌دهیم.

لم ۱۰.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل آن باشد. در این صورت

$$diam(\Gamma(Q(R))) = diam(\Gamma(R)) \text{ و } gr(\Gamma(Q(R))) = gr(\Gamma(R))$$

برهان. قرار می‌دهیم $Q = Q(R)$. واضح است که $diam(\Gamma(Q)) = 1$ اگر و فقط اگر $diam(\Gamma(R)) = 1$.

فرض کنیم $diam(\Gamma(Q)) = 2$. در این صورت $diam(\Gamma(R)) \geq 2$. فرض کنیم $a, b \in Z^*(R)$ به‌طوری

که $a \neq b$ و $ab \neq 0$. در این صورت به ازای بعضی $q \in Z^*(Q) - \{a, b\}$ ، $aq = 0 = bq$. فرض

کنیم $q = c/t$ که $c \in R$ و $t \in R - Z(R)$. در این صورت $ac = 0 = bc$. بنابراین $d(a, b) = 2$.

و در نتیجه $diam(\Gamma(R)) = 2$. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد، اگر $diam(\Gamma(R)) = 2$ ، آن‌گاه

$$diam(\Gamma(Q)) = 2. \text{ بدین ترتیب حکم با توجه به قضیه ۴.۱.۲ برقرار است.}$$

چون $\Gamma(R)$ یک زیر گراف $\Gamma(Q)$ است، واضح است که $gr(\Gamma(Q)) \leq gr(\Gamma(R))$.

فرض کنیم $gr(\Gamma(Q)) = 3$. در این صورت عناصر ناصفر متمایز $q_1, q_2, q_3 \in Q$ وجود دارند به‌طوری

که $q_1 q_2 = q_2 q_3 = q_3 q_1 = 0$. فرض کنیم هر $q_i = a_i/t$ به‌طوری که $a_i \in R$ و $t \in R - Z(R)$.

در این صورت a_1, a_2, a_3 عناصر متمایز در R هستند که $a_1 a_2 = a_2 a_3 = a_3 a_1 = 0$. به این ترتیب $a_1 - a_2 - a_3 - a_1$ یک مثلث در $\Gamma(R)$ است؛ بنابراین $gr(\Gamma(R)) = 3$. به طور مشابه، اگر $gr(\Gamma(Q)) = 4$ ، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) = 4$. $\square$

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل آن باشد. در این صورت $\Gamma(M_n(R)) \cong \Gamma(M_n(Q(R)))$.

برهان. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $A \in M_n(R)$. قرار می‌دهیم:

$$ann_R(A)^R = \{X \in M_n(R) \mid AX = 0\} \quad \text{و} \quad ann_R(A)^L = \{X \in M_n(R) \mid XA = 0\}$$

برای $A, B \in M_n(R)$ تعریف می‌کنیم:

$$A \sim B \Leftrightarrow (ann_R(A)^L = ann_R(B)^L \quad \text{و} \quad ann_R(A)^R = ann_R(B)^R)$$

رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $M_n(R)$ است و به یک رابطه هم‌ارزی روی $Z^*(M_n(R))$ محدود می‌شود به طوری که مجموعه رئوس از $\Gamma(M_n(R))$ است. قرار می‌دهیم $Q = Q(R)$. رابطه هم‌ارزی تعریف شده فوق روی $Z^*(M_n(R))$ و $Z^*(M_n(Q))$ را به ترتیب با $\sim_R$ و $\sim_Q$ ، و کلاس هم‌ارزی مربوط به آن‌ها را با $[A]_R$ و $[A]_Q$ نمایش می‌دهیم.

اگر $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ و $s \in R - Z(R)$ ، آن‌گاه A/s را با ماتریس $(a_{ij}/s) \in M_n(Q)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $A \in Z(M_n(Q))$ اگر و تنها اگر $A = B/s$ که $B \in Z(M_n(R))$ و $s \in R - Z(R)$. داریم

$$Z^*(M_n(Q)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [A_\lambda / 1]_Q \quad \text{و} \quad Z^*(M_n(R)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [A_\lambda]_R$$

هر دو اجتماع مجزا هستند. همچنین یک تابع دوسویی بین مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی $\sim_R$ و $\sim_Q$ با ضابطه $[A_\lambda]_R \mapsto [A_\lambda / 1]_Q$ وجود دارد و برای هر $A \in Z^*(M_n(R))$ داریم $||[A]_R|| = ||[A / 1]_Q||$. بنابراین تابع دوسویی $\phi_\lambda : [A_\lambda]_R \rightarrow [A_\lambda / 1]_Q$ برای هر $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد.

اگر $X \in [A_\lambda]_R$ ، آن‌گاه نگاشت $\phi : Z^*(M_n(R)) \rightarrow Z^*(M_n(Q))$ را با ضابطه $\phi(X) = \phi_\lambda(X)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت ϕ از $\Gamma(M_n(R))$ به $\Gamma(M_n(Q))$ یک تابع دوسویی است. نشان می‌دهیم در $Z^*(M_n(R))$ ، $XY = 0$ اگر و فقط اگر در $Z^*(M_n(Q))$ ، $\phi(X)\phi(Y) = 0$. فرض کنیم $X \in [A]_R$ و $Y \in [B]_R$. همچنین فرض کنیم $W \in [A/1]_Q$ و $Z \in [B/1]_Q$ تصاویر X و Y تحت ϕ باشند. داریم

$$\text{ann}_Q(Y)^L = \text{ann}_Q(B)^L = \text{ann}_Q(Z)^L \quad \text{و} \quad \text{ann}_Q(X)^R = \text{ann}_Q(A)^R = \text{ann}_Q(W)^R.$$

بنابراین

$$XY = 0 \Leftrightarrow Y \in \text{ann}_Q(X)^R = \text{ann}_Q(W)^R \Leftrightarrow WY = 0,$$

$$\Leftrightarrow W \in \text{ann}_Q(Y)^L = \text{ann}_Q(Z)^L \Leftrightarrow WZ = 0.$$

□ در نتیجه $\Gamma(M_n(R)) \cong \Gamma(M_n(Q(R)))$.

نتیجه ۱۲.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل آن باشد. در این صورت

$$\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = \text{diam}(\Gamma(M_n(Q(R))))$$

□ برهان. اثبات از قضیه قبل نتیجه می‌شود.

این بخش را با ارائه یک نتیجه مقدماتی درباره کمر $\bar{\Gamma}(M_n(R))$ به پایان می‌رسانیم.

گزاره ۱۳.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $g(\bar{\Gamma}(M_n(R))) = 3$.

برهان. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$C = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

□ A, B و C ماتریس‌های ناصفر متمایز $Z(M_n(R))$ هستند به طوری که $AB = BC = CA = 0$.

۳.۲ رابطه بین قطر $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$

در این بخش به نتایج به دست آمده درباره گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی برای مشخص کردن $diam(\Gamma(M_n(R)))$ برحسب $diam(\Gamma(R))$ می‌پردازیم. ابتدا دو لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و A عضوی از $Z^*(M_n(R))$ باشد، اگر عناصر R یا وارون‌پذیر و یا مقسوم‌علیه صفر باشند، آنگاه ماتریس وارون‌پذیر $P \in M_n(R)$ وجود دارد به طوری که هر درایه‌ی سطر اول ماتریس PA (یا آخرین ستون ماتریس AP) مقسوم‌علیه صفر است.

برهان. فرض کنیم هر سطر ماتریس A حداقل شامل یک عنصر وارون‌پذیر باشد؛ در غیر این صورت، می‌توانیم مکان سطر i را که فقط شامل مقسوم‌علیه صفر است را به سطر اول تغییر دهیم.

فرض کنیم x_n اولین عنصر وارون‌پذیر در آخرین سطر ماتریس A از سمت چپ باشد. با ضرب کردن آخرین سطر با عنصر مناسبی از R و اضافه کردن آن به بقیه سطرها، می‌توان ماتریس A را به ماتریس A_1 تبدیل کرد به طوری که همه‌ی عناصر ستون شامل x_n به جز x_n صفر باشند. اگر ماتریس A_1 سطر i داشته باشد که فقط شامل مقسوم‌علیه صفر باشد مکان آن سطر را به سطر اول تغییر می‌دهیم. در غیر این صورت فرض می‌کنیم x_{n-1} یک عنصر وارون‌پذیر در سطر $n-1$ باشد. به طور مشابه می‌توان A_1 را به ماتریس A_2 تبدیل کرد به طوری که همه درایه‌های ستون شامل x_n و ستون شامل x_{n-1} به جز x_n و x_{n-1} صفر باشند.

با ادامه این روند، به یک ماتریس A_k می‌رسیم که سطر اول فقط شامل مقسوم‌علیه صفر است

$(1 \leq k \leq n-1)$ ، یا به ماتریس A_{n-1} می‌رسیم که همه درایه‌های سطر اول آن صفر هستند به جز

احتمالا x_1 ، البته ممکن است برای عنصر x_1 دو حالت رخ دهد.

حالت اول: اگر x_1 مقسوم علیه صفر باشد، آن گاه تمام درایه های سطر اول ماتریس A_{n-1} مقسوم علیه صفر هستند و نتیجه حاصل است.

حالت دوم: اگر x_1 مقسوم علیه صفر نباشد، آن گاه وارون پذیر است و چون در هر سطر A_{n-1} فقط یک عنصر ناصفر وارون پذیر وجود دارد لذا A_{n-1} وارون پذیر است.

بنابراین x_1 یک مقسوم علیه صفر است. لذا ماتریس وارون پذیر P وجود دارد که هر درایه سطر اول PA مقسوم علیه صفر است. $\square$

لم ۲.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. اگر هر مجموعه متناهی از مقسوم علیه های صفر R یک پوچساز ناصفر داشته باشد، آن گاه $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$.

برهان. می دانیم که حلقه کسرهای کامل $Q(R)$ از R تنها شامل عناصری است که هر کدام وارون پذیرند یا مقسوم علیه صفر هستند. چون $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = \text{diam}(\Gamma(M_n(Q(R))))$ ، لذا کافیت نشان دهیم $\text{diam}(\Gamma(M_n(Q(R)))) = ۲$. همچنین طبق فرض، هر مجموعه متناهی از مقسوم علیه های صفر R یک پوچساز ناصفر دارد، لذا هر مجموعه متناهی از مقسوم علیه های صفر $Q(R)$ هم باید یک پوچساز ناصفر داشته باشد. فرض کنیم $A, B \in Z^*(M_n(Q(R)))$. در این صورت با استفاده از لم ۱.۳.۲، ماتریس های وارون پذیر $P, Q \in M_n(Q(R))$ وجود دارند به طوری که آخرین ستون ماتریس AP و اولین سطر ماتریس QB به طور کلی شامل مقسوم علیه صفر هستند. فرض کنیم S مجموعه مقسوم علیه های صفر ستون آخر ماتریس AP و سطر اول ماتریس QB باشد لذا طبق فرض یک پوچساز ناصفر دارد. فرض کنیم a پوچساز ناصفر S باشد. هم چنین قرار می دهیم:

$$C = P \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} Q.$$

در این صورت $C \neq \cdot$ و $AC = CB = \cdot$ لذا $\text{diam}(\Gamma(M_n(Q(R)))) = ۲$. بنابر نتیجه ۱.۲.۲.۲،

$\square$

$$\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$$

نتیجه ۳.۳.۲. اگر F یک میدان باشد، آن‌گاه $\text{diam}(\Gamma(M_n(F))) = 2$.

می‌توان این نتیجه را به حوزه صحیح نیز تعمیم داد.

گزاره ۴.۳.۲. فرض کنیم R یک حوزه صحیح باشد. در این صورت $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$.

برهان. فرض کنیم $Q(R)$ میدان کسرهای حلقه R باشد. با استفاده از نتیجه ۱۲.۲.۲ و نتیجه ۳.۳.۲ داریم

$$\square \quad \text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = \text{diam}(\Gamma(M_n(Q(R)))) = 2$$

در این مرحله، به حلقه‌هایی می‌پردازیم که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها کامل است. یادآوری می‌کنیم که $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in Z(R)$ داشته باشیم $xy = 0$. به‌عنوان مثال حلقه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر آن $(0, 1), (1, 0)$ می‌باشد و واضح است که گراف حاصل تنها شامل یک یال است و در حقیقت گراف کامل دو رأسی می‌باشد.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر

$$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{یا برای هر } x, y \in Z(R) \quad xy = 0.$$

برهان. ($\Rightarrow$) طبق تعریف واضح است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $\Gamma(R)$ کامل باشد اما $x \in Z(R)$ موجود باشد به‌طوری که $x^2 \neq 0$. نشان می‌دهیم

$x^2 = x$. فرض کنیم این چنین نباشد. در این صورت چون $\Gamma(R)$ کامل است پس x و x^2 به یکدیگر متصل هستند. لذا $x^3 = x^2x = 0$ چون $x^2 \neq 0$ و $x^2(x + x^2) = 0$ بنابراین $x + x^2 \in Z(R)$.

اگر $x + x^2 = x$ ، آن‌گاه $x^2 = x(x + x^2) = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین $x + x^2 \neq x$ پس

$x^2 = x^2 + x^3 = x(x + x^2)$ ولی چون $\Gamma(R)$ کامل است مقدار $x(x + x^2)$ برابر صفر است، بنابراین

$x^2 = 0$ که باز هم یک تناقض است. لذا $x^2 = x$. در نتیجه $R \cong Rx \oplus R(1 - x)$. بنابراین می‌توان

فرض کرد $R = R_1 \times R_2$. اما در این صورت چون $(1, 0) \in Z(R)$ و $\Gamma(R)$ کامل است، پس برای هر

$c \in R_1 = Rx$ داریم $(c, 0) = (1, 0)(c, 0) = (0, 0)$ ، یعنی $c = 0$ لذا $Rx \cong \mathbb{Z}_2$. به همین

$\square$

ترتیب $R(1 - x) \cong \mathbb{Z}_2$ بنابراین $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

آنچه که مورد توجه است این است که اگر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R کامل باشد و آن حلقه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ نباشد، آن‌گاه حاصل ضرب هر دو عنصر از $Z(R)$ مانند x و y صفر می‌باشد، به‌خصوص برای $x \in Z(R)$ داریم $x^2 = 0$ ، این یعنی همه اعضای $Z(R)$ پوچ‌توان هستند و در نتیجه $Z(R)^2 = 0$. پس $Z(R)$ یک ایده‌آل است زیرا برای هر $x, y \in Z(R)$ ، چون $x(x - y) = 0$ لذا $x - y \in Z(R)$ هم‌چنین برای هر $r \in R$ واضح است که $rx \in Z(R)$. بنابراین $Z(R) = \text{nil}(R)$ یک ایده‌آل اول R است.

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد به‌طوری که $R \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. هم‌چنین فرض کنیم

$$\text{diam}(\Gamma(R)) = 1. \text{ در این صورت } \text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2.$$

برهان. از آنجائی که $R \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، لذا برای هر $x, y \in Z^*(R)$ ، بایستی xy برابر صفر باشد زیرا $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$. بنابراین هر مجموعه متناهی از مقسوم‌علیه‌های صفر در R یک پوچساز ناصفر دارد.

لذا از لم ۲.۳.۲ داریم $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = 2$. $\square$

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$. در این صورت دقیقاً یکی از گزاره‌های زیر برقرار است.

۱. $Z(R)$ یک ایده‌آل اول R است.

۲. $Q(R) = K_1 \times K_2$ ، به‌طوری که هر K_i یک میدان است.

برهان. فرض کنیم $Q = Q(R)$. گزاره (۱) برقرار است اگر و تنها اگر Q یک ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد داشته باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$. هم‌چنین فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آل اول R نباشد. در این صورت ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز M و N از Q وجود دارند. چون $M \subsetneq M + N \subseteq Q$ ماکسیمال است لذا $M + N = Q$ ، بنابراین به ازای بعضی $x \in M$ و $y \in N$ داریم $x + y = 1$ ، و بنابراین $\text{ann}(x) \cap \text{ann}(y) = \{0\}$ زیرا اگر $t \in \text{ann}(x) \cap \text{ann}(y)$ ، آن‌گاه $tx = 0$ و $ty = 0$ ، از طرفی $x + y = 1$ لذا $tx + ty = t$ و در نتیجه $t = 0$. پس $\text{ann}(x) \cap \text{ann}(y) = \{0\}$ از آنجائی که $\Gamma(R)$ و $\Gamma(Q(R))$

ایزومورف هستند، داریم $diam(\Gamma(Q(R))) = diam(\Gamma(R)) \leq ۲$. پس باید داشته باشیم $xy = ۰$ و در نتیجه x و y خودتوان هستند زیرا

$$x + y = ۱ \Rightarrow x^۲ + xy = x \Rightarrow x^۲ = x.$$

بنابراین $Q = Q_۱ \times Q_۲$. فرض کنیم $Z^*(Q_۱)$ ناتهی باشد و c یک عنصر در $Z^*(Q_۱)$ باشد. در این صورت $a = (c, ۱)$ و $b = (۱, ۰)$ عناصر $Z^*(Q)$ هستند به‌طوری که فاصله بین آن‌ها حداقل ۳ است که با فرض $diam(\Gamma(Q)) \leq ۲$ تناقض دارد. بنابراین $Z^*(Q_۱)$ باید تهی باشد. در نتیجه $Q_۱$ باید یک حوزه صحیح باشد. در حقیقت $Q_۱$ یک میدان است. به طور مشابه $Q_۲$ یک میدان است. بنابراین $Q(R) = K_۱ \times K_۲$ به‌طوری که هر K_i یک میدان است. لذا گزاره (۲) برقرار است. $\square$

قضیه ۸.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $Q(R) = K_۱ \times K_۲$ ، به‌طوری که هر K_i یک میدان باشد. در این صورت $diam(\Gamma(M_n(R))) = ۳$.

برهان. می‌دانیم که $M_n(K_۱ \times K_۲) \cong M_n(K_۱) \times M_n(K_۲)$. همچنین، $(A_۱, A_۲)$ یک مقسوم‌علیه صفر $Z(M_n(K_۱) \times M_n(K_۲))$ است اگر و تنها اگر $A_۱ \in Z(M_n(K_۱))$ یا $A_۲ \in Z(M_n(K_۲))$.

فرض کنیم $A = (A_۱, A_۲)$ و $B = (B_۱, B_۲)$ ماتریس‌هایی از $M_n(K_۱ \times K_۲)$ باشند به‌طوری که $A_۱$ و $B_۲$ ماتریس‌های همانی هستند و $A_۲$ و $B_۱$ ماتریس‌هایی هستند که تنها درایه ناصفر آن‌ها ۱ است که در بالای گوشه سمت چپ ظاهر می‌شود (با علامت $E_{۱۱}$ این ماتریس را نشان می‌دهیم). هر دو ماتریس A و B در حلقه $M_n(K_۱) \times M_n(K_۲)$ مقسوم‌علیه صفر هستند و $AB \neq ۰$. همچنین متذکر می‌شویم که $A_۱$ و $B_۲$ وارون‌پذیرند و $A_۲ \in Z^*(M_n(K_۲))$ و $B_۱ \in Z^*(M_n(K_۱))$.

اگر $C = (C_۱, C_۲) \in Z^*(M_n(K_۱) \times M_n(K_۲))$ وجود داشته باشد طوری که $AC = ۰$ و $CB = ۰$ ، آنگاه باید $C_۱ = ۰$ و $C_۲ = ۰$. بنابراین $diam(\Gamma(M_n(Q(R)))) \geq ۳$ و لذا $diam(\Gamma(M_n(Q(R)))) = ۳$. چون $diam(\Gamma(M_n(R))) = diam(\Gamma(M_n(Q(R)))) = ۳$ ، پس نتیجه حاصل است. $\square$

قضیه ۹.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد به طوری که $\text{diam}(\Gamma(R)) = ۲$. اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$.

برهان. با توجه به قضیه ۲۷.۳.۱، $Z(R)$ توسط یک عنصر منحصر به فرد مانند a ، پوچ می‌شود. هم‌چنین با استفاده از لم ۲.۳.۲ خواهیم داشت $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$. $\square$

البته، اگر $\text{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ و $Z(R)$ یک ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه نوتری بودن R شرط لازم برای اینکه $\text{diam}(\Gamma(M_n(R)))$ برابر ۲ شود، نیست. یادآوری می‌کنیم که R یک حلقه مک‌کوی است اگر هر ایده‌آل متناهی تولید شده در R که مشمول در $Z(R)$ است، یک پوچساز ناصفر داشته باشد.

قضیه ۱۰.۳.۲. حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ یک حلقه مک‌کوی است.

گزاره ۱۱.۳.۲. اگر R یک حلقه مک‌کوی باشد به طوری که $\text{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ و نیز $Z(R)$ یک ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$.

برهان. فرض کنیم S یک مجموعه متناهی از مقسوم‌علیه‌های صفر R و I یک ایده‌آل تولید شده توسط عناصر S باشد. چون $Z(R)$ یک ایده‌آل است لذا $I \subseteq Z(R)$ ، بنابراین I یک پوچساز ناصفر دارد. با استفاده از لم ۲.۳.۲ داریم $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$. $\square$

هنگامی که R یک حلقه جابجایی باشد که $\text{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ ، $Z(R)$ یک ایده‌آل اول باشد و R مک‌کوی نباشد، این سوال که آیا در این صورت باز هم $\text{diam}(\Gamma(M_n(R))) = ۲$ ، هم‌چنان حل نشده باقی مانده است.

فصل ۳

کاربردهایی از گراف مقسوم علیه‌های صفر

این فصل برگرفته از مرجع [۵] می‌باشد و شامل ۳ بخش است. در این فصل، حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها دارای کمتری به طول چهار یا فاقد دور می‌باشند. همچنین حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها قطری کوچکتر یا مساوی دو دارند. در بخش اول، ابتدا نشان می‌دهیم برای یک حلقه تقلیل یافته R ، $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است اگر و تنها اگر $Q(R)$ فون نیومن منظم باشد. همچنین نشان می‌دهیم برای یک حلقه R با عناصر پوچ توان ناصفر، $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است اگر و تنها اگر $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره باشد. به علاوه چنین گرافی دارای یک یا دو یال است یا نامتناهی است. بالاخره نشان می‌دهیم $\Gamma(R)$ گرافی متمم شده است (اما نه منحصرأ متمم شده) اگر و تنها اگر $R \cong D \times B$ ، که در آن D حوزه صحیح و B حلقه $\mathbb{Z}_4$ یا $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ می‌باشد. از این نتایج برای مشخص کردن حلقه‌هایی که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها دارای کمتری به طول چهار یا فاقد دور هستند استفاده می‌کنیم. در بخش دوم به بررسی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه چندجمله‌ای‌ها، حلقه سری‌های توانی و توسیع حلقه R توسط R -مدول M می‌پردازیم. در بخش سوم به معرفی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر برای توسیع حلقه R توسط R -مدول M می‌پردازیم. زمانی که R حوزه صحیح باشد، $\Gamma(R)$ یک گراف تهی است لذا همواره فرض بر آن است که R حوزه صحیح نباشد.

۱.۳ گراف متمم شده و منحصرأ متمم شده

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم G یک گراف (بدون جهت) باشد. برای رئوس a و b از G ، گوئیم $a \leq b$ اگر رئوس a و b مجاور نباشند و هر رأس دیگر از G که با b مجاور است با a نیز مجاور باشد.

تعریف ۲.۱.۳. گوئیم $a \sim b$ هرگاه $a \leq b$ و $b \leq a$. بنابراین $a \sim b$ اگر و تنها اگر a و b مجاور نباشند ولی همسایه‌های یکسانی داشته باشند. به عبارت دیگر برای $a, b \in Z^*(R)$ در $\Gamma(R)$ ، گوئیم $a \sim b$ اگر و تنها اگر $ann(a) - \{a\} = ann(b) - \{b\}$.

تعریف ۳.۱.۳. گوئیم رئوس متمایز a و b در گراف G متعامد هستند و می‌نویسیم $a \perp b$ ، هرگاه a و b مجاور باشند و هیچ رأس دیگری مانند c وجود نداشته باشد که با هر دو رأس a و b مجاور باشد، به عبارت دیگر، یال $a - b$ بخشی از یک مثلث در G نباشد. بنابراین برای رئوس متمایز $a, b \in Z^*(R)$ ، $a \perp b$ در $\Gamma(R)$ اگر و تنها اگر $ab = 0$ و

$$\text{ann}(a) \cap \text{ann}(b) \subset \{0, a, b\}.$$

تعریف ۴.۱.۳. گوئیم G متمم شده است اگر برای هر رأس a از G ، یک رأس b از G (که یک متمم a نامیده می‌شود) موجود باشد به طوری که $a \perp b$.

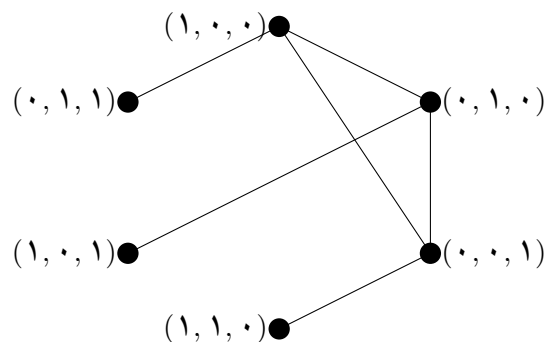
تعریف ۵.۱.۳. گراف G را منحصرأ متمم شده گوئیم، اگر G متمم شده باشد و هرگاه $a \perp b$ و $a \perp c$ ، $b \sim c$ آن‌گاه $b \sim c$.

مثال ۶.۱.۳. گراف‌های ستاره، منحصرأ متمم شده هستند.

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم $|\Gamma(R)| \geq 2$. در این صورت، اگر $gr(\Gamma(R)) = 4$ یا $gr(\Gamma(R)) = \infty$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ متمم شده است.

عکس قضیه ۷.۱.۳ برقرار نیست. زیرا اگر $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ (منحصرأ) متمم شده

است ولی $gr(\Gamma(R)) = 3$.



لم ۸.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $a, b \in Z^*(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

شکل ۱.۳: $(gr(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))) = 3$

$$۱. a \perp b, a^2 \neq 0 \text{ و } b^2 \neq 0.$$

$$۲. ab = 0 \text{ و } a + b \text{ یک عنصر منظم } R \text{ است.}$$

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم (۱) برقرار باشد. چون $a \perp b$ پس $ab = 0$. کفایت نشان دهیم $a + b$ یک عنصر منظم R است. فرض کنیم برای $c \in R$ داشته باشیم $(a + b)c = 0$. در این صورت $ac + bc = 0$. قرار می‌دهیم $y = ac = -bc$. در این صورت چون $ab = 0$ لذا $ya = yb = 0$. چون $a \perp b$ بنابراین $y \in \{0, a, b\}$.

اگر $y = a$ ، آن‌گاه $a^2 = ay = 0$ که ممکن نیست زیرا فرض کردیم $a^2 \neq 0$. به‌طور مشابه، از $y = b$ نتیجه می‌گیریم $b^2 = 0$ ، که دوباره به تناقض می‌رسیم. پس باید $y = 0$ باشد. در این صورت $ac = bc = 0$ و چون $a \perp b$ لذا $c \in \{0, a, b\}$.

اگر $c = a$ ، آن‌گاه $a^2 = ac = 0$ که یک تناقض است. به‌طور مشابه، اگر $c = b$ ، آن‌گاه $b^2 = 0$ نیز یک تناقض است. در نتیجه $c = 0$. بنابراین $a + b$ یک عنصر منظم R است.

$$(۲ \Leftarrow ۱) \text{ فرض کنیم (۲) برقرار باشد. چون } a + b \text{ یک عنصر منظم } R \text{ است لذا } a \neq b.$$

اگر $a^2 = 0$ ، آن‌گاه $a(a + b) = a^2 + ab = 0$ چون $a + b$ منظم است پس $a = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $a^2 \neq 0$ و به‌طور مشابه $b^2 \neq 0$.

حال نشان می‌دهیم $a \perp b$. فرض کنیم به ازای بعضی $c \in R$ داشته باشیم $ca = cb = 0$. در این صورت

$$\square \quad c(a + b) = 0 \text{ و چون } a + b \text{ عنصر منظم } R \text{ است پس } c = 0. \text{ چون } ab = 0, \text{ لذا } a \perp b.$$

لم ۹.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و تقلیل یافته باشد و $a, b, c \in Z^*(R)$. اگر $a \perp b$ و $a \perp c$ ، آن‌گاه $c \sim b$. بنابراین $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است اگر و تنها اگر $\Gamma(R)$ متمم شده باشد.

برهان. چون $a \perp b$ و $a \perp c$ لذا $ab = ac = 0$. ابتدا نشان می‌دهیم $bc \neq 0$ ، یعنی b و c مجاور نیستند.

اگر $bc = 0$ ، آن‌گاه چون $a \perp b$ و $a \perp c$ در نتیجه $c = a$ یا $c = b$. چون R تقلیل یافته است لذا هریک از

انتخاب‌ها به تناقض می‌رسند زیرا اگر $c = a$ ، چون $a^2 = ac = 0$ ، لذا $a = 0$ و به طریق مشابه $b = 0$. پس $bc \neq 0$.

حال فرض کنیم به ازای بعضی $d \in Z^*(R)$ داشته باشیم $db = 0$. در این صورت $d(ac) = d(ca) = 0$ و $(dc)a = d(ac) = 0$. از $(dc)b = (db)c = 0$ نتیجه می‌شود که رأس dc با هر دوی a و b مجاور است (چون R تقلیل یافته است لذا $dc \neq a$ یا $dc \neq b$)، ولی این امکان ندارد زیرا $a \perp b$ ؛ پس $dc = 0$. بنابراین $c \leq b$ و به‌طور مشابه $b \leq c$ و در نتیجه $b \sim c$. جمله آخر لم واضح است. $\square$

فرض کنیم R فون نیومن منظم باشد. در این صورت بنابر نتیجه ۲۱.۳.۱، برای هر $a \in Z^*(R)$ ، $a = ue$ ، $u \in U(R)$ و $e \in R$ خودتوان است. واضح است که $ue \perp (1 - e)$. بنابراین اگر R یک حلقه فون نیومن منظم باشد، آنگاه $\Gamma(R)$ متمم شده است. در حقیقت $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است زیرا یک حلقه فون نیومن منظم، تقلیل یافته است. لذا بنابر لم قبل، $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\Gamma(R) \cong \Gamma(Q(R))$ منحصرأ متمم شده است اگر $Q(R)$ فون نیومن منظم باشد. عکس این مطلب نیز زمانی برقرار است که R یک حلقه جابجایی و تقلیل یافته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. $Q(R)$ فون نیومن منظم است.

۲. $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است.

۳. $\Gamma(R)$ متمم شده است.

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم $Q(R)$ فون نیومن منظم باشد. فرض کنیم $a \in Z^*(R)$. با توضیحات قبلی، $b \in Q(R)$ ضرورتاً ناصفر موجود است به‌طوری که در $\Gamma(Q(R))$ ، $a \perp b$. $s \in R - Z(R)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $sb \in R$. به آسانی دیده می‌شود که در $\Gamma(R)$ ، $a \perp sb$. پس $\Gamma(R)$ متمم شده است و چون R تقلیل یافته است لذا $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده می‌باشد.

(۲ $\Leftarrow$ ۳) برای هر گرافی برقرار است.

(۳ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $x \in R$ ؛ می‌توان فرض کرد $x \in Z^*(R)$. در این صورت یک $y \in Z^*(R)$ موجود است به‌طوری که $x \perp y$. چون R تقلیل یافته است لذا $x^2 \neq 0$ و $y^2 \neq 0$. با استفاده از لم ۸.۱.۳، $xy = 0$ و $x + y$ یک عنصر منظم R است. چون R تقلیل یافته است در نتیجه $Q(R)$ نیز تقلیل یافته است. لذا کافیسیت نشان دهیم $Q(R)$ صفر-بعدی است. برای این کار نشان می‌دهیم هر ایده‌آل اول غیر مینیمال R مانند Q شامل یک عنصر منظم R است.

فرض کنیم $P \subset Q$ ایده‌آل‌های اول متمایز در R باشند. برای $x \in Q - P$ ، یک $y \in R$ وجود دارد به‌طوری که $xy = 0$ و $x + y$ یک عنصر منظم R است لذا $y \in P \subset Q$ پس $x + y \in Q$. بنابراین Q شامل یک عنصر منظم R است لذا $Q(R)$ صفر-بعدی است و در نتیجه $Q(R)$ فون نیومن منظم است. $\square$

فرض کنیم R عنصر پوچ‌توان ناصفر داشته باشد. در قضیه ۱۶.۱.۳ نشان خواهیم داد، $\Gamma(R)$ منحصرا متمم شده است اگر و تنها اگر یک گراف ستاره باشد. به‌علاوه، هنگامی که $\{0, x\} = \text{nil}(R)$ ، $\Gamma(R)$ یک یا دو یال دارد، یا اینکه یک گراف ستاره نامتناهی با مرکز x است. ابتدا تعدادی مثال و یک لم کلیدی را بیان می‌کنیم.

مثال ۱۱.۱.۳. ۱. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2, x^3) = \mathbb{Z}[\bar{x}]$. در این صورت $\text{nil}(R) = \{0, \bar{x}\}$ و $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره نامتناهی با مرکز $\bar{x}$ است.

۲. فرض کنیم D یک حوزه صحیح باشد و $R = D \times \mathbb{Z}_4$. در این صورت $\text{nil}(R) = \{(0, \bar{0}), (0, \bar{2})\}$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $\Gamma(R)$ متمم شده است. اگرچه، $\Gamma(R)$ منحصرا متمم شده نخواهد بود زیرا $\text{ann}((1, \bar{0})) - \{(1, \bar{0})\} \neq \text{ann}((1, \bar{2})) - \{(1, \bar{2})\}$ اما $(0, \bar{2}) \perp (1, \bar{2})$ و $(0, \bar{2}) \perp (1, \bar{0})$ لذا $(1, \bar{2}) \approx (1, \bar{0})$. به‌طور مشابه، اگر $R = D \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ متمم شده است اما منحصرا متمم شده نیست.

به‌خصوص، اگر $R = \mathbb{Z}_2 \times B$ که $B = \mathbb{Z}_4$ یا $B = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، آن‌گاه $|R| = 8$ ، $|\text{nil}(R)| = 2$ و

$\Gamma(R)$ متمم شده است اما منحصرًا متمم شده نیست.

تعریف ۱۲.۱.۳. فرض کنیم x یک عنصر پوچ‌توان در حلقه R باشد. گوئیم x دارای اندیس پوچ‌توانی n است، هرگاه n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد به‌طوری که $x^n = 0$.

لم ۱۳.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $0 \neq \text{nil}(R)$.

۱. اگر $\Gamma(R)$ متمم شده باشد، آن‌گاه $|R| = 8$ ، $|R| = 9$ یا $|R| > 9$ و به ازای بعضی از $x \in R$ ، $0 \neq x$ ،
 $\text{nil}(R) = \{0, x\}$.

۲. اگر $\Gamma(R)$ منحصرًا متمم شده باشد و $|R| > 9$ ، آن‌گاه هر متمم عنصر پوچ‌توان ناصفر R ، یک رأس پایانی است.

برهان. ۱. فرض کنیم $\Gamma(R)$ متمم شده باشد، هم‌چنین فرض می‌کنیم $a \in \text{nil}(R)$ دارای اندیس پوچ‌توانی $n \geq 3$ باشد. فرض کنیم $y \in Z^*(R)$ یک متمم a باشد. در این‌صورت داریم $ay = 0 = a^{n-1}a$ ؛ چون $a \perp y$ ، بنابراین $y = a^{n-1}$. لذا $\text{ann}(a) = \{0, a^{n-1}\}$ زیرا اگر $z \in \text{ann}(a)$ ، آن‌گاه $za = 0$ و در نتیجه $za^{n-1} = 0$ و از طرفی $a \perp a^{n-1}$ لذا z با هردوی a و a^{n-1} مجاور است یعنی $a - a^{n-1}$ بخشی از یک مثلث است و این امکان ندارد پس $\text{ann}(a) = \{0, a^{n-1}\}$. به‌طور مشابه، برای هر $1 \leq i \leq n-2$ داریم $a^i \perp a^{n-1}$.

حال فرض کنیم $n > 3$. در این‌صورت $a^{n-2} + a^{n-1}$ با هردوی a^{n-2} و a^{n-1} مجاور است اما از آنجا که $a^{n-2} \perp a^{n-1}$ و $a^{n-2} + a^{n-1} \notin \{0, a^{n-2}, a^{n-1}\}$ لذا به تناقض می‌رسیم. بنابراین اگر R یک عنصر پوچ‌توان با اندیس پوچ‌توانی $n \geq 3$ داشته باشد، آن‌گاه باید $n = 3$. در این حالت، $Ra^2 = \{0, a^2\}$ زیرا هر $z \in Ra^2$ مجاور با هردو عنصر a و a^2 است و $a \perp a^2$. هم‌چنین، $\text{ann}(a^2) = \{0, a, a^2, a + a^2\}$. (اگر $za^2 = 0$ ، آن‌گاه $\text{ann}(a^2) = \{0, a^2\}$)؛ $za \in \text{ann}(a) = \{0, a^2\}$ ، آن‌گاه $za = 0$ یا $za = a^2$. اگر $za = 0$ ، آن‌گاه $z = 0$ یا $z = a^2$ ، هنگامی که $za = a^2$ ، آن‌گاه $(z-a)a = 0$ و بنابراین $z = a$ یا $z = a + a^2$. بنابر (۲۶.۳.۱)، $|R| = 8$ چون $Z(R) = \text{ann}(a^2)$.

پس $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. از طرفی $\Gamma(R) (= Z(R)^*)$ متناهی است پس R نیز متناهی است در نتیجه $Z(R)$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R می‌باشد پس R موضعی است و $ann(a^2) = Z(R) = nil(R)$ ایده‌آل ماکسیمال آن است و $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است با دو یال که مرکز آن a^2 است.

حال فرض کنیم اندیس پوچ توان هر عنصر پوچ توان ناصفر R برابر ۲ داشته باشد. همچنین فرض کنیم $0 \neq y \in nil(R)$ متممی مانند $z \in Z(R)^*$ داشته باشد. برای هر $r \in R$ ، $(ry)y = 0 = (ry)z$ ، بنابراین $Ry \subset \{0, y, z\}$. ابتدا فرض می‌کنیم $2y \neq 0$. در این صورت بایستی $z = 2y$ زیرا $2y \in Ry \subset \{0, y, z\}$ ، همچنین $ann(y) = \{0, y, 2y\}$ زیرا $y \perp 2y$. لذا $Ry = \{0, y, 2y\}$ پس $|R| = 9$. در نتیجه R موضعی است، $Z(R) = nil(R) = ann(y)$ ایده‌آل ماکسیمال آن است و $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره با یک یال است.

حال فرض کنیم هر عنصر پوچ توان ناصفر R اندیس پوچ توانی برابر ۲ داشته باشد و $|R| \neq 9$. با آنچه در بالا بیان شد باید داشته باشیم $2y = 0$. نشان می‌دهیم $nil(R) = \{0, y\}$. فرض کنیم z یک عنصر پوچ توان ناصفر دیگر R باشد؛ لذا $z^2 = 0$. در این صورت $y + z$ پوچ توان با اندیس پوچ توان برابر ۲ می‌باشد. با توجه به توضیحات قبل، $Ry \subset \{0, y, y'\}$ و $Rz \subset \{0, z, z'\}$ ، به طوری که y' و z' به ترتیب متمم‌های y و z هستند. داریم $yz = 0$ زیرا اگر $yz \neq 0$ ، آن‌گاه $yz = y' = z' \neq 0$. بنابراین $Ry = ann(y) = \{0, y, yz\}$ و لذا $|R| = 9$ که به تناقض می‌رسیم.

فرض کنیم w یک متمم $y + z$ باشد. واضح است که w برابر y یا z نیست. پس $wy = y$ یا $wy = y'$ ، زیرا در غیر این صورت y مجاور هر دو عنصر w و $y + z$ است. به علاوه، اگر y' یک ضریب y باشد، آن‌گاه با توجه به مطالبی که در بالا دیدیم بایستی داشته باشیم $|R| = 9$ ، که یک تناقض است. لذا $wy = y$ و به طور مشابه $wz = z$. اما در این صورت $w(y + z) = wy + wz = y + z \neq 0$ متناقض با $w \perp (y + z)$ می‌باشد. بنابراین R یک عنصر پوچ توان ناصفر یکتا دارد.

۲. فرض کنیم $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده باشد و $|R| > 9$. فرض کنیم x عنصر پوچ توان ناصفر یکتا

R مطابق با آنچه که در قسمت (۱) بیان شد، باشد. همچنین فرض کنیم y یک متمم x باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $x + y$ نیز یک متمم x است. واضح است که $x(x + y) = 0$ زیرا $x^2 = 0$ و $x \perp y$ در نتیجه $x + y \in Z^*(R)$. فرض کنیم به ازای بعضی $w \in Z^*(R)$ داشته باشیم $w = x$ یا $w = y$ و لذا $wy = 0$ در این صورت $wx = 0 = w(x + y) = wx + wy$ و اگر $w = y$ ، آن‌گاه $y^2 = 0$ که متناقض با منحصر به فرد بودن x است. بنابراین $w = x$ و لذا هیچ رأس دیگری که با هردوی x و $(x + y)$ مجاور باشد، وجود ندارد پس $x \perp (x + y)$. لذا بنابر فرض، $x + y \sim y$. حال ثابت می‌کنیم y یک رأس پایانی است. فرض کنیم به ازای بعضی $z \in Z^*(R) - \{x\}$ داشته باشیم $zy = 0$. در این صورت $z \neq y$ زیرا $y^2 \neq 0$ و چون $x + y \sim y$ لذا طبق تعریف، $z(x + y) = 0$. بنابراین چون $zy = 0$ پس $zx = 0$ ، اما در این صورت با $x \perp y$ در تناقض است. بنابراین چنین z نمی‌تواند وجود داشته باشد پس y یک رأس پایانی است.

□

تذکر ۱۴.۱.۳. اثبات **لم ۱۳.۱.۳** (۱) نشان می‌دهد که اگر $\Gamma(R)$ متمم شده باشد و $2 < |nil(R)|$ ، آن‌گاه $|R| = 8$ که در این حالت $|nil(R)| = 4$ و یک گراف ستاره با دو یال است، یا $|R| = 9$ که در این حالت $|nil(R)| = 3$ و یک گراف ستاره با یک یال است. بنابراین $\Gamma(R)$ منحصراً متمم شده نیز هست زیرا در هر دو حالت $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است. در بقیه موارد، اگر $\Gamma(R)$ متمم شده و $nil(R)$ ناصفر باشد، آن‌گاه $|nil(R)| = 2$.

لم ۱۵.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $nil(R) = \{0, x\}$. در این صورت $ann(x)$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است. به‌خصوص، اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $ab \in nil(R)$ ، آن‌گاه $ax = 0$ یا $bx = 0$. به علاوه اگر $nil(R) = \{0, x\}$ یک ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $Z(R) = ann(x)$.

برهان. فرض کنیم S ایده‌آلی شامل $ann(x)$ باشد و نیز $s \in S$ موجود باشد که $s \notin ann(x)$. در این صورت $sx \neq 0$. از آنجا که $sx \in nil(R)$ پس $sx = x$ لذا $(1 - s)x = 0$ پس $1 - s \in ann(x)$ و در نتیجه

$s \in S - 1$. در این صورت $1 \in S$. این مطلب نشان می‌دهد که $ann(x)$ ماکسیمال است.

حال فرض کنیم $ab \in nil(R)$. در این صورت $ab = 0$ یا $ab = x$.

اگر $ax \neq 0$ ، با توجه به اینکه $ax \in nil(R)$ لذا $ax = x$. حال اگر $ab = 0$ به وضوح $0 = bax = bx$ ، پس می‌توان فرض کرد $ab \neq 0$ یعنی $ab = x$. اگر $bx = 0$ چیزی برای اثبات نداریم. لذا فرض می‌کنیم $bx = x$. چون $ax = x$ لذا $bax = bx = x$ و چون $ab = x$ در نتیجه $x^2 = x$ ، که با $x \in nil(R)$ متناقض است لذا $bx = 0$. $\square$

قضیه ۱۶.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $nil(R) \neq 0$. اگر $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده باشد، آنگاه $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره با حداکثر دو یال است، یا اینکه $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره نامتناهی با مرکز x است به طوری که $nil(R) = \{0, x\}$.

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده باشد. همچنین فرض کنیم $nil(R)$ ناصفر باشد. اگر $|R| \leq 9$ ، آنگاه با توجه به لم (۱۳.۱.۳) (۱) و تذکر (۱۴.۱.۳)، یا $|R| = 8$ ، که در این حالت $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره با دو یال است و یا $|R| = 9$ ، که در این حالت $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره با یک یال است. بنابراین فرض می‌کنیم $|R| > 9$. بنابر لم (۱۳.۱.۳) (۱)، به ازای بعضی $0 \neq x \in R$ داریم $nil(R) = \{0, x\}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\Gamma(R)$ نامتناهی است. فرض کنیم c یک متمم x باشد؛ با توجه به لم (۱۳.۱.۳) (۲)، چون c یک رأس پایانی است لذا $ann(c) = \{0, x\}$. حال نشان می‌دهیم که c^2 نیز یک متمم x است. فرض کنیم این‌طور نباشد. در این صورت یک عنصر مانند $y \in Z^*(R) - \{c^2, x\}$ وجود دارد به طوری که $xy = 0 = c^2y$ لذا $(cy)^2 = c^2y^2 = 0$ که نتیجه می‌دهد $cy \in nil(R)$ لذا $cy = 0$ یا $cy = x$.

اگر $cy = 0$ ، آنگاه $ann(c) = \{0, x\}$ که متناقض با انتخاب y است. بنابراین $cy = x$. اما در این صورت $cy^2 = xy = 0$ لذا $cy^2 \in ann(c) = nil(R)$ پس $y^2 \in nil(R) = \{0, x\}$ که دوباره به تناقض می‌رسیم. در نتیجه c^2 نیز متمم x است یعنی $c^2 \perp x$ و در نتیجه $ann(c^2) = \{0, x\} = ann(c)$. بدین ترتیب برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، $c^{2^n} \perp x$ ، از آنجا که برای هر $1 \leq i \leq j$ ، $ann(c^i) \subset ann(c^j)$ ، لذا

برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، داریم $ann(c^n) = \{0, x\}$. پس هر c^n یک رأس پایانی است، هم‌چنین c^n ها همگی متمایزند زیرا اگر برای بعضی $j \leq i < j$ داشته باشیم $c^i = c^j$ ، آن‌گاه $c^i(c^{j-i} - 1) = 0$ و از آنجائی که $ann(c^i) = ann(c)$ و $c \in Z^*(R)$ ، در نتیجه $c^{j-i} - 1 = x$ اما در این صورت $c^{j-i} = 1 + x \in U(R)$ زیرا $x \in nil(R)$ و در نتیجه $c \in U(R)$ که یک تناقض با انتخاب c است. لذا $\Gamma(R)$ نامتناهی است.

حال نشان می‌دهیم که $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره (نامتناهی) با مرکز x است. فرض کنیم c یک متمم x باشد؛ با استفاده از لم ۱۳.۱.۳ (۲)، چون c یک رأس پایانی است لذا $ann(c) = \{0, x\}$.

(برهان خلف) فرض کنیم $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره نباشد. در این صورت با استفاده از لم ۱۳.۱.۳ (۲)، یک $a \in Z^*(R) - \{c, x\}$ چنان وجود دارد که $ax = 0$ ولی a متمم x نیست؛ پس $\{0, x\}$ به طور کامل در $ann(a)$ قرار دارد. بنا به فرض، به ازای بعضی $y \in Z^*(R)$ $a \perp y$. متذکر می‌شویم که a, x, y و همگی متمایزند. به آسانی می‌توان نشان داد که $cy \in Z(R) - \{0, a, c, x, y\}$ و $a(cy) = (ay)c = 0$ و $x(cy) = (xc)y = 0$. بنا به فرض، عنصری مانند $z \in Z^*(R)$ وجود دارد به‌طوری که $z \perp cy$. می‌توان بررسی کرد که $z \notin \{0, a, c, x, y, cy\}$. کفایت نشان دهیم $zx = 0$ در این صورت $zx = 0 = (cy)x$ و لذا z و cy متعامد نیستند که به تناقض می‌رسیم.

فرض می‌کنیم $zx \neq 0$. در این صورت چون $zx \in nil(R) = \{0, x\}$ لذا $zx = x$. از آنجا که $z \perp cy$ لذا $(zy)c = z(cy) = 0$ و در نتیجه $zy = 0$ یا $zy = x$ زیرا $ann(c) = \{0, x\}$. اگر $zy = 0$ ، آن‌گاه $xy = (zx)y = (zy)x = 0$. اما این مطلب یک تناقض است زیرا $ax = 0$ و $a \perp y$. به طور مشابه، از $zy = x$ نتیجه می‌شود $x^2 = (zx)y = (zy)x = x^2 = 0$ و در نتیجه $xy = (zx)y = 0$ ، که دوباره متناقض با $a \perp y$ می‌باشد. بنابراین $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره نامتناهی با مرکز x است. $\square$

نتیجه ۱۷.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده است اگر و تنها اگر $Q(R)$ فون نیومن منظم باشد یا $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره باشد.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۰.۱.۳ برای حلقه‌های تقلیل یافته و با استفاده از قضیه ۱۶.۱.۳ برای حلقه‌هایی

با عناصر پوچ توان ناصفر، نتیجه حاصل است. $\square$

حال به آن دست از حلقه‌های جابجایی R می‌پردازیم که $\Gamma(R)$ آن‌ها متمم شده است اما منحصرا متمم شده نیست، به خصوص، چنین حلقه‌هایی (همان گونه که در مثال ۱۱.۱.۳ نیز به آن اشاره کردیم) به فرم $D \times B$ هستند که در آن D یک حوزه صحیح است و $B \cong \mathbb{Z}_4$ یا $B \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$. ابتدا لم زیر را در این باره ثابت می‌کنیم.

لم ۱۸.۱.۳. فرض کنیم $R = A \times B$ ، که A یک حلقه جابجایی تقلیل یافته و B یک حلقه جابجایی باشد و $0 \neq \text{nil}(B)$. در این صورت $\Gamma(R)$ متمم شده است اما منحصرا متمم شده نیست، اگر و تنها اگر A یک حوزه صحیح و $B \cong \mathbb{Z}_4$ یا $B \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$.

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R)$ متمم شده باشد اما منحصرا متمم شده نباشد. داریم $\text{nil}(B) = \{0, b\}$ زیرا بنابر لم ۱۳.۱.۳ (۱) و تذکر ۱۴.۱.۳، داریم $|\text{nil}(R)| = 2$ ، می‌دانیم که $\text{nil}(A \times B) = \text{nil}(A) \times \text{nil}(B)$. ابتدا نشان می‌دهیم $|B| = 4$. در این صورت B با $\mathbb{Z}_4$ یا با $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ایزومورف است. چون $Bb = \{0, b\}$ ، لذا کافیت نشان دهیم که $\text{ann}(b) = \{0, b\}$.

فرض کنیم $a \in \text{ann}(b) - \{0, b\}$ موجود باشد. در این صورت ادعا می‌کنیم که $y = (1, b)$ هیچ متممی ندارد. هر متمم y فرمی به صورت $z = (0, c)$ به ازای بعضی $c \in B$ و $c \neq 0$ خواهد داشت. اگر $c = b$ ، آن‌گاه $(0, a)$ با هر دوی y و z مجاور است. همچنین اگر $c \neq b$ ، آن‌گاه $(0, b)$ با هر دوی y و z مجاور خواهد بود. بدین ترتیب درستی ادعا ثابت می‌شود، پس بایستی داشته باشیم $|B| = 4$.

حال نشان می‌دهیم که A یک حوزه صحیح است. اگر این چنین نباشد، آن‌گاه چون A تقلیل یافته است، عناصر ناصفر $c, d \in A$ وجود دارند به طوری که $cd = 0$ و $c \neq d$. در این صورت ادعا می‌کنیم که $y = (c, b)$ هیچ متممی ندارد. هر متمم y به فرم $z = (r, s)$ می‌باشد، که $cr = 0$ ، $s = 0$ یا $s = b$. اگر $r \neq 0$ ، آن‌گاه $(0, b)$ با هر دوی y و z مجاور است؛ در حالی که اگر $r = 0$ ، آن‌گاه (d, b) با هر دوی y و z مجاور است. بدین ترتیب A بایستی یک حوزه صحیح باشد.

□

در مثال ۱۱.۱.۳ (۲) به عکس این قضیه پرداخته‌ایم.

قضیه ۱۹.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ متمم شده است اما منحصر/متمم شده نیست، اگر و تنها اگر R با $D \times B$ که D یک حوزه صحیح و $B = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ یا $B = \mathbb{Z}_4$ ایزومورف باشد.

برهان. با توجه به مثال ۱۱.۱.۳ (۲)، اگر $R = D \times B$ که D و B به همان فرمی که در مثال مذکور بیان شد باشند، آن‌گاه R متمم شده است اما منحصر/متمم شده نیست.

برعکس، فرض کنیم $\Gamma(R)$ متمم شده باشد اما منحصر/متمم شده نباشد. ابتدا نشان می‌دهیم که $R/\text{nil}(R)$ یک عنصر خودتوان نابديهی دارد. بنابر لم ۱۳.۱.۳ (۱) و تذکر ۱۴.۱.۳ (۱)، داریم $\text{nil}(R) = \{0, b\}$. چون $\Gamma(R)$ متمم شده است اما منحصر/متمم شده نیست، لذا بنابر لم ۹.۱.۳، یک رأس مانند a با متمم‌های متمایز y و z و یک رأس w که مجاور y است اما با z مجاور نیست، وجود دارد. بنابراین $wz \neq 0$.

چون $y(wz) = 0$ ، $a(wz) = 0$ و $a \perp y$ و $wz \neq 0$ ، لذا $wz = a$ یا $wz = y$. بنابراین $a^2 = 0$ یا $y^2 = 0$ و لذا $a = b$ یا $y = b$.

فرض کنیم $a = b$. قرار می‌دهیم $v = w^2 - w$. واضح است که $vy = 0$ زیرا $wy = 0$. چون $b \perp y$ ، لذا باید داشته باشیم $wb \neq 0$. چون $wb \in \text{nil}(R)$ بنابراین $wb = b$ و لذا $wb = w^2b - wb = b - b = 0$. چون $vy = 0$ ، $vb = 0$ و $b \perp y$ لذا باید داشته باشیم $v = 0$ یا $v = y$ یا $v = b$. اگر $v = y$ ، آن‌گاه $y^2 = 0$ که یک تناقض است. بدین ترتیب $v = w^2 - w \in \text{nil}(R)$ و در نتیجه $w + \text{nil}(R)$ خودتوان نابديهی مورد نظر است.

حالتی که $y^2 = 0$ و لذا $y = b$ ، تنها با قرار دادن $v = z^2 - z$ اثبات به طور مشابه خواهد بود. بنابراین $R/\text{nil}(R)$ یک خودتوان نابديهی دارد و لذا R یک خودتوان نابديهی دارد. بنابراین می‌توان فرض کرد $R = A \times B$. چون $|\text{nil}(R)| = 2$ و $\text{nil}(A \times B) = \text{nil}(A) \times \text{nil}(B)$ ، پس می‌توان فرض کرد A

□ تقلیل یافته است و $nil(B) = \{0, b\}$. در نتیجه اثبات از لم قبل حاصل می‌شود.

حال حلقه‌هایی را که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها دارای کم‌ری به طول چهار یا فاقد دور هستند را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۲۰.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

$$1. \quad g(\Gamma(R)) = 4.$$

$$2. \quad Q(R) = K_1 \times K_2, \text{ به‌طوری‌که هر } K_i \text{ یک میدان است و } |K_i| \geq 3.$$

$$3. \quad \Gamma(R) = K^{m,n}, \text{ با } m, n \geq 2.$$

برهان. $(1 \Leftarrow 2)$ فرض کنیم $g(\Gamma(R)) = 4$. در این صورت $\Gamma(R)$ متمم شده است. بنابر قضیه ۱۰.۱.۳، $Q = Q(R)$ فون نیومن منظم است و یک میدان نیست زیرا میدان مقسوم‌علیه صفر نابدی‌هی ندارد. بنابراین Q یک خودتوان نابدی‌هی دارد پس $Q = Q_1 \times Q_2$. فرض کنیم $0 \neq x, y \in Q_1$ موجود باشند به‌قسمی که $xy = 0$ (از آنجا که R و در نتیجه Q تقلیل یافته است لذا x نمی‌تواند برابر y باشد).

لذا $(x, 0) - (y, 0) - (0, 1) - (x, 0) \in \Gamma(Q)$ خواهد بود که با $g(\Gamma(Q)) = g(\Gamma(R)) = 4$ در تناقض است. بنابراین Q_1 یک حوزه صحیح است، در حقیقت بنابر لم ۲۲.۳.۱، Q_1 یک میدان است. به‌طور مشابه، Q_2 نیز یک میدان است. در نتیجه $Q = K_1 \times K_2$ که K_1 و K_2 میدان هستند. حال اگر K_1 یا K_2 فقط دو عضو داشته باشد، آن‌گاه $\Gamma(Q)$ یک گراف ستاره است پس $g(\Gamma(Q)) = \infty$ ، که با $g(\Gamma(Q)) = g(\Gamma(R)) = 4$ در تناقض است.

$(2 \Leftarrow 3)$ از آنجا که $\Gamma(R) \cong \Gamma(Q)$ پس $\Gamma(K_1 \times K_2) = K^{m,n}$ به‌طوری‌که $m = |K_1| - 1$ و

$$n = |K_2| - 1.$$

□ $(3 \Leftarrow 1)$ بدیهی است.

قضیه ۲۱.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $0 \neq \text{nil}(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

$$1. \text{ } gr(\Gamma(R)) = 4$$

۲. $R \cong D \times B$ ، که D یک حوزه صحیح است با $|D| \geq 3$ و $B = \mathbb{Z}_2$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. (بدین

$$\text{ترتیب } Q(R) \cong Q(D) \times B)$$

$$3. \text{ برای } m \geq 2, \Gamma(R) = \overline{K}^{m,3}$$

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم $gr(\Gamma(R)) = 4$. در این صورت $\Gamma(R)$ متمم شده است. اگر $\Gamma(R)$ منحصرًا متمم شده باشد، آنگاه بنابر قضیه ۱۶.۱.۳، $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است و در نتیجه $gr(\Gamma(R)) = \infty$ که یک تناقض است. اگر $\Gamma(R)$ منحصرًا متمم شده نباشد، آنگاه بنابر قضیه ۱۹.۱.۳، $R \cong D \times B$ که D یک حوزه صحیح است و $B = \mathbb{Z}_2$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. بنابراین $\Gamma(R) = \overline{K}^{m,3}$ ، که $m = |D| - 1$. البته باید داشته باشیم $|D| \geq 3$ زیرا در غیر این صورت $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است و در نتیجه $gr(\Gamma(R)) = \infty$ ، که دوباره به تناقض می‌رسیم.

□

(۲ $\Leftarrow$ ۳) و (۳ $\Leftarrow$ ۱) هر دو واضح هستند.

قضیه ۲۲.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

$$1. \text{ } \Gamma(R) \text{ یک گراف ناتهی است و } gr(\Gamma(R)) = \infty$$

$$2. \text{ } Q(R) = \mathbb{Z}_2 \times K, \text{ که } K \text{ یک میدان است.}$$

$$3. \text{ برای هر } n \geq 1, \Gamma(R) = K^{1,n}$$

برهان. (۲ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $gr(\Gamma(R)) = \infty$ و $\Gamma(R) \neq \emptyset$. در این صورت $|\Gamma(R)| \geq 2$ زیرا R تقلیل یافته است و در نتیجه $\Gamma(R)$ متمم شده است. در اثبات (۱ $\Leftarrow$ ۲) قضیه ۲۰.۱.۳، برای هر دو میدان K_1 و

K_2 داریم $Q(R) = K_1 \times K_2$. اگر هردو میدان حداقل سه عضو داشته باشند، آن گاه با استفاده مجدد از قضیه ۲۰.۱.۳، $gr(\Gamma(R)) = 4$ که یک تناقض است. لذا K_1 بایستی دو عضو داشته باشد پس $K_1 = \mathbb{Z}_2$ (۲ $\Leftarrow$ ۳) چون $\Gamma(R)$ و $\Gamma(Q(R))$ ایزومورف هستند و $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times K) = K^{1,n}$ که $n = |K| - 1$ لذا حکم برقرار است.

□

(۳ $\Leftarrow$ ۱) اثبات بدیهی است.

قضیه ۲۳.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $0 \neq nil(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

$$1. \quad gr(\Gamma(R)) = \infty.$$

۲. $R \cong B$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times B$ که $B = \mathbb{Z}_4$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ یا $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است.

۳. $\Gamma(R)$ تک عضوی است یا $\Gamma(R) = \overline{K}^{1,3}$ یا برای بعضی $n \geq 1$ $\Gamma(R) = K^{1,n}$.

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم $gr(\Gamma(R)) = \infty$. اگر $\Gamma(R)$ تک نقطه‌ای باشد، آن گاه $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_4$. حال فرض کنیم $\Gamma(R)$ حداقل دو عضو داشته باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ متمم شده است. اگر $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم شده باشد، آن گاه بنابر قضیه ۱۶.۱.۳، $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است. اگر $\Gamma(R)$ منحصرأ متمم نشده نباشد، آن گاه بنابر قضیه ۱۹.۱.۳، $R \cong D \times B$ که D یک حوزه صحیح است و $R \cong \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. اگر $|D| \geq 3$ ، آن گاه بنابر قضیه ۲۱.۱.۳، $gr(\Gamma(R)) = 4$ که با فرض در تناقض است. بنابراین $|D| = 2$ ؛ لذا $D = \mathbb{Z}_2$.

□

(۲ $\Leftarrow$ ۳) و (۳ $\Leftarrow$ ۱) هردو واضح هستند.

اگر R متناهی باشد، آن گاه $Q(R) = R$. بنابراین قضایای ۲۰.۱.۳، ۲۱.۱.۳، ۲۲.۱.۳ و ۲۳.۱.۳ آن دسته از حلقه‌های متناهی R را مشخص می‌کنند که $gr(\Gamma(R)) = 4$ یا $gr(\Gamma(R)) = \infty$. اما تنها موردی که در قضایای مذکور صریحا به آن نپرداختیم هنگامی است که R تقلیل یافته نیست و $\Gamma(R)$ یک گراف

ستاره است. در این مورد، $|\Gamma(R)| \leq 3$. اگر $\Gamma(R) = K^{1,1}$ ، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_9$ یا $R \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$. اگر $|\Gamma(R)| \leq 3$ ، $\Gamma(R) = K^{1,2}$ ، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_8$ ، $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2 - 2)$. لذا $|\Gamma(R)| \leq 3$. قضیه ۲۴.۱.۳، نشان می‌دهد که اگر $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره نامتناهی باشد، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D یک حوزه صحیح است، یا $nil(R) = \{0, x\}$ به‌طوری که $Z(R) = ann(x)$.

قضیه ۲۴.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد. در این صورت رأسی از $\Gamma(R)$ موجود است که با بقیه رئوس مجاور است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D حوزه صحیح است، یا $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچساز است (و در نتیجه اول است).

برهان. ($\Leftarrow$) ابتدا فرض می‌کنیم $x \in Z(R)$ ، $x \neq 0$ رأسی از $\Gamma(R)$ است که با همه رئوس دیگر مجاور باشد. همچنین فرض کنیم $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچساز نباشد. به وضوح $ann(x) = I$ زیرا در غیر این صورت $Z(R) = I$ که برخلاف فرض است. از آنجا که x با همه رئوس $\Gamma(R)$ همسایه است، I در بین ایده‌آل‌های پوچساز ماکسیمال است لذا بنابر لم ۲۴.۳.۱، اول می‌باشد. اگر $x^2 \neq x$ داریم $x^3 = x^2x = 0$ ، لذا $x \in I$ که یک تناقض است. بنابراین $x^2 = x$ پس $R = Rx \oplus R(1-x)$. بنابراین می‌توان فرض کرد $R = R_1 \times R_2$. بنابراین $(1, 0)$ با همه رئوس دیگر $R_1 \times R_2$ مجاور است. اگر $c \in R_1$ ، $c \neq 1$ ، $(c, 0)$ مقسوم‌علیه صفر می‌باشد بنابراین $(1, 0)(c, 0) = (c, 0)$ و لذا $c = 0$. بنابراین $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$. اگر R_2 حوزه صحیح نباشد، آن‌گاه عنصر غیر صفر $b \in Z(R_2)$ موجود است. لذا $(1, b)$ مقسوم‌علیه صفری از R است که با $(1, 0)$ مجاور نیست که تناقض است. پس R_2 حوزه صحیح است.

($\Rightarrow$) اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D یک حوزه صحیح باشد، آن‌گاه $(\bar{1}, 0)$ عنصری از $Z(R)$ است که با همه رئوس $\Gamma(R)$ مجاور است. اگر برای عنصر ناصفر $x \in R$ ، $Z(R) = ann(x)$ ، آن‌گاه x با بقیه رئوس $\Gamma(R)$ مجاور است. $\square$

تذکر ۲۵.۱.۳. اگر $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره باشد، $gr(\Gamma(R)) = \infty$ و $|nil(R)| \leq 4$. اگر $|nil(R)| = 2$ ، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D یک حوزه صحیح است. اگر $|nil(R)| = 3$ ، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$ یا

$R \cong \mathbb{Z}_9$ و اگر $|nil(R)| = 4$ ، آن گاه $R \cong \mathbb{Z}_8$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2 - 2)$.

حال به $diam(\Gamma(R))$ می پردازیم. در قضیه ۷.۳.۲ ثابت کردیم اگر R یک حلقه جابجایی باشد و $diam(\Gamma(R)) \leq 2$ ، آن گاه دقیقا یکی از گزاره های زیر برقرار است.

۱. $Z(R)$ یک ایده آل اول R است.

۲. $Q(R) = K_1 \times K_2$ ، به طوری که هر K_i یک میدان است.

قضیه ۲۶.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی (تقلیل یافته) باشد که حوزه صحیح نیست به طوری که

R یک زیرحلقه $D_1 \times D_2$ باشد، که هر D_i یک حوزه صحیح است. در این صورت $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (و در

نتیجه ۱ $diam(\Gamma(R)) = 1$ یا $diam(\Gamma(R)) = 2$).

برهان. اگر $diam(\Gamma(R)) = 1$ ، آن گاه بنابر قضیه ۵.۳.۲، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. بنابراین فرض می کنیم

$diam(\Gamma(R)) \geq 2$. فرض کنیم $x, y \in Z(R)^*$ عناصر متمایزی باشند به طوری که $xy \neq 0$. در

این صورت می توان فرض کرد که $x, y \in D_1 \times \{0\}$. چون $x \in Z(R)^*$ و R نیز تقلیل یافته است، لذا

یک $z \in Z(R)^* - \{x, y\}$ وجود دارد به طوری که $xz = 0$. اما در این صورت $z \in \{0\} \times D_2$ ؛ بنابراین

$xz = yz = 0$ و در نتیجه $d(x, y) = 2$. بدین ترتیب $diam(\Gamma(R)) = 2$. $\square$

لم ۲۷.۱.۳. $diam(\Gamma(R)) = 0$ اگر و تنها اگر $\Gamma(R)$ تک نقطه ای باشد، هم چنین R ایزومورف با $\mathbb{Z}_4$ یا

ایزومورف با $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ است.

برهان. فرض کنیم a تنها مقسوم علیه صفر ناصفر R باشد. چون $Z(R) = \{0, a\}$ پس لزوماً $a^2 = 0$ ،

زیرا اگر عنصر ناصفر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $ax = 0$ ، آن گاه $x \in \{0, a\}$ پس $x = a$. از طرفی

چون اعضای مجموعه Ra و $Ann(a)$ همگی مقسوم علیه صفر هستند، پس $Ra = Ann(a) = \{0, a\}$.

بنابر لم ۲۵.۳.۱، برای هر $a \in R$ ، $[R : Ann(a)] = |Ra|$ ، در نتیجه $|R| = 4$. چون R یک دار است لذا

$R = \{0, 1, a, 1+a\}$. به وضوح $2 \in \{0, a\}$. اگر $2 = 0$ ، آن گاه $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ (برای تعریف

یکریختی کافیس a را به x بفرستیم). اگر $2 = a$ ، آن گاه $R \cong \mathbb{Z}_4$. $\square$

قضیه ۲۸.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه تقلیل یافته باشد. اگر R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشند به طوری که (a, b) هیچ پوچساز ناصفري نداشته باشد، آن‌گاه

$$\text{diam}(\Gamma(R)) = 3.$$

برهان. فرض کنیم R شامل یک جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر مانند a و b باشد به طوری که $ab \neq 0$ و $(0 : (a, b)) = (0)$. در این صورت $d(a, b) = 3$ و در نتیجه $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. حال فرض کنیم R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشند به طوری که $ab = 0$ و $(0 : (a, b)) = (0)$. هر ایده‌آل اول مینیمال از R حداقل یکی از دو عنصر a و b را شامل می‌شود اما شامل هردو عنصر نیست زیرا $(0 : (a, b)) = (0)$. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، می‌توانیم فرض کنیم که ایده‌آل‌های اول مینیمال P, Q و N موجودند به طوری که $a \in (Q \cap N) \setminus P$ و $b \in P \setminus (Q \cup N)$. فرض کنیم $q \in (Q \cap P) \setminus N$ و جفت $a + bq$ و b را در نظر می‌گیریم. چون R تقلیل یافته است، $ab = 0$ و هیچ‌کدام از b و q مشمول در N نیست لذا $b^2q = b(a + bq) \neq 0$. به عبارت دیگر، $(a, b) = (a + bq, b)$ ایده‌آلی است که هیچ پوچساز ناصفري ندارد. بنابراین $d(a + bq, b) = 3$ و در نتیجه $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. $\square$

قضیه ۲۹.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه تقلیل یافته باشد. اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد، آن‌گاه

$$\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2 \text{ اگر و تنها اگر } R \text{ دقیقا دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد.}$$

برهان. فرض کنیم $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد. در این صورت عناصر $a, b \in Z(R)$ موجودند به طوری که $a + b$ مقسوم‌علیه صفر نیست و در نتیجه ایده‌آل (a, b) هیچ پوچساز ناصفري ندارد. همچنین، چون R تقلیل یافته است لذا باید حداقل دو ایده‌آل مینیمال مانند P و Q داشته باشد. به علاوه، $Z(R)$ اجتماع ایده‌آل‌های اول مینیمال R است. اگر R بیش از دو ایده‌آل مینیمال داشته باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه قبل داریم

$$\text{diam}(\Gamma(R)) = 3.$$

برعکس، اگر P و Q تنها ایده‌آل‌های اول مینیمال R باشند، آن‌گاه $Z(R) = P \cup Q$ و می‌توانیم فرض کنیم $a \in P \setminus Q$ و $b \in Q \setminus P$. واضح است که $ab \in P \cap Q = (0)$ زیرا R تقلیل یافته است. فرض

کنیم $r, s \in Z(R)$ عناصر متمایزی باشند. چون هیچ عنصر ناصفری نمی‌تواند در هر دوی P و Q باشد، لذا $rs = 0$ یا دقیقاً یکی از ایده‌آل‌های P و Q شامل ایده‌آل (r, s) است.

اگر $rs = 0$ ، آن‌گاه $d(r, s) = 1$. اگر $rs \neq 0$ ، آن‌گاه $br = 0 = bs$ اگر $P \supseteq (r, s)$ و $ar = 0 = as$ اگر $Q \supseteq (r, s)$.

بنابراین اگر $rs \neq 0$ ، آن‌گاه $d(r, s) = 2$. در نتیجه $diam(\Gamma(R)) \leq 2$. $\square$

با توجه به قضیه ۲۹.۱.۳، اگر R یک حلقه تقلیل یافته باشد و دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، آن‌گاه $Z(R)$ نمی‌تواند یک ایده‌آل باشد.

۲.۳ بررسی قطر و کمر $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$

متذکر می‌شویم که $\Gamma(R)$ زیرگرافی از $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[x])$ زیرگرافی از $\Gamma(R[[x]])$ است. مک‌کوی در سال ۱۹۴۲ ثابت کرد که چندجمله‌ای $f(x)$ یک مقسوم‌علیه صفر در $R[x]$ است اگر و تنها اگر عنصر ناصفری مانند r از R موجود باشد به طوری که $rf(x) = 0$.

ابتدا $gr(\Gamma(R[x]))$ و $gr(\Gamma(R[[x]]))$ را برحسب $gr(\Gamma(R))$ مشخص می‌کنیم. در گام اول، نشان می‌دهیم $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ همواره شامل یک دور هستند.

قبلاً بیان کردیم که $\Gamma(R)$ گراف تهی است اگر و تنها اگر R حوزه صحیح باشد. لذا اگر R حوزه صحیح باشد، آن‌گاه واضح است که $gr(\Gamma(R)) = gr(\Gamma(R[x])) = gr(\Gamma(R[[x]])) = \infty$.

لم ۱۰.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد که یک حوزه صحیح نیست. در این صورت $gr(\Gamma(R[x]))$ و $gr(\Gamma(R[[x]]))$ ، هریک ۳ یا ۴ هستند. اگر R تقلیل یافته نباشد، آن‌گاه گراف‌های فوق کمری به طول ۳ دارند.

برهان. اگر برای عناصر متمایز $a, b \in Z^*(R)$ داشته باشیم $ab = 0$ ، آن‌گاه $a - b - aX - bX - a$ یک دور به طول ۴ است؛ و اگر برای هر $a \in Z^*(R)$ داشته باشیم $a^2 = 0$ (یعنی R تقلیل یافته نباشد)، آن‌گاه $a - aX - aX^2 - a$ یک دور به طول ۳ خواهد بود. $\square$

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد.

۱. فرض کنیم $\Gamma(R)$ ناتهی باشد و $gr(\Gamma(R)) = \infty$.

(الف) اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۴$.

(ب) اگر R تقلیل یافته نباشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۳$.

۲. اگر $gr(\Gamma(R)) = ۳$ ، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۳$.

۳. فرض کنیم $gr(\Gamma(R)) = ۴$.

(الف) اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۴$.

(ب) اگر R تقلیل یافته نباشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۳$.

برهان. در لم ۱.۲.۳، دیدیم که اگر R تقلیل یافته نباشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R[X])) = gr(\Gamma(R[[X]])) = ۳$.

لذا گزاره (۱-ب) و گزاره (۳-ب) برقرار هستند.

گزاره (۲) به وضوح برقرار است زیرا $\Gamma(R) \subseteq \Gamma(R[X]) \subseteq \Gamma(R[[X]])$. لذا حکم برقرار است.

حال فرض کنیم R تقلیل یافته باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $gr(\Gamma(R)) = ۴$. چون $\Gamma(R) \subseteq \Gamma(R[X])$ ،

در این صورت $gr(\Gamma(R[X])) \leq ۴$. همچنین از قضیه ۲.۰.۱.۳ داریم $R \subseteq Q(R) = K_1 \times K_2$ ، لذا

$R[X] \subseteq (K_1 \times K_2)[X] \subseteq K_1[X] \times K_2[X]$. بنابراین $\Gamma(R[X]) \subseteq \Gamma(K_1[X] \times K_2[X])$ شامل هیچ

مثلی نیست لذا $gr(\Gamma(R[X])) = ۴$ و به طور مشابه $gr(\Gamma(R[[X]])) = ۴$. در نتیجه گزاره (۳-الف)

برقرار است.

سرانجام، فرض کنیم $gr(\Gamma(R)) = \infty$. با استفاده از لم ۱.۲.۳ داریم $gr(\Gamma(R[X])) \leq ۴$. به علاوه،

از قضیه ۲.۲.۱.۳ داریم $R \subseteq Q(R) = \mathbb{Z}_2 \times K$ که K یک میدان است. بنابراین $R[X] \subseteq \mathbb{Z}_2[X] \times K[X]$

و در نتیجه $\Gamma(R[X]) \subseteq \Gamma(\mathbb{Z}_2[X] \times K[X])$ شامل هیچ مثلی نیست. لذا $gr(\Gamma(R[X])) = ۴$ و به طور

مشابه $gr(\Gamma(R[[X]])) = ۴$. بنابراین گزاره (۱-الف) نیز برقرار است. $\square$

حال قطر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه چندجمله‌ایها یا حلقه سری‌های توانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همواره $R[X] \subseteq Q(R)[X] \subseteq Q(R[X])$. چون $\Gamma(R) \cong \Gamma(Q(R))$ ، لذا قطر و کمر یکسان دارند پس $diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(Q(R)[X])) = diam(\Gamma(Q(R[X])))$.
همچنین همواره $diam(\Gamma(R)) \leq diam(\Gamma(R[X]))$ و $diam(\Gamma(R)) \leq diam(\Gamma(R[[X]]))$ ، [۱۶] و [۶]. بنابراین هرگاه $diam(\Gamma(R)) = ۳$ ، آن‌گاه $diam(\Gamma(R)) = diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]]))$.
و اگر $diam(\Gamma(R)) = ۰$ ، آن‌گاه $R \cong \mathbb{Z}_2[Y]/(Y^2)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2$ و بنابراین $\Gamma(R[X])$ و $\Gamma(R[[X]])$ هر دو گراف‌های کامل هستند و $diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]])) = ۱$ زیرا برای هر $a \in Z^*(R)$ یک مسیر به طول ۱ در $\Gamma(R[X])$ و $\Gamma(R[[X]])$ است.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی (تقلیل یافته) باشد و $Q(R)$ فون نیومن منظم باشد. اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $diam(\Gamma(R)) < diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]])) = ۲$. در غیر این صورت $diam(\Gamma(R)) = diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]]))$. (برابر ۲ است اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، و برابر ۳ است اگر R حداقل سه ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد).

برهان. فرض کنیم $Q = Q(R)$ فون نیومن منظم باشد. پس $R[X]$ و $R[[X]]$ همگی تقلیل یافته‌اند. اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $diam(\Gamma(R)) = ۱$ ، لذا $\Gamma(R)$ گراف کامل است و در نتیجه $R[X] \cong \mathbb{Z}_2[X] \times \mathbb{Z}_2[X]$ و $R[[X]] \cong \mathbb{Z}_2[[X]] \times \mathbb{Z}_2[[X]]$. بنابراین $diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]])) = ۲$. حال فرض کنیم $diam(\Gamma(R)) = ۲$. در این صورت R دقیقاً ۲ ایده‌آل اول مینیمال دارد و R تقلیل یافته است پس نمی‌تواند یک ایده‌آل باشد در نتیجه بنابر قضیه ۷.۳.۲، $Q = K_1 \times K_2$ که هر K_i یک میدان است. بنابراین $R[X] \subseteq K_1[X] \times K_2[X]$ و $R[[X]] \subseteq K_1[[X]] \times K_2[[X]]$. بنابرین با استفاده از قضیه ۲۶.۱.۳، $diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]])) = ۲$. اگر R حداقل سه ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۷.۳.۲، داریم $diam(\Gamma(R)) = ۳$ و در نتیجه

$$diam(\Gamma(R[X])) = diam(\Gamma(R[[X]])) = ۳.$$

□

۳.۳ بررسی قطر و کمر $\Gamma(R(+)M)$

در این بخش قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ای که حاصل از توسیع حلقه R توسط R -مدول M است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به اختصار ساختار این توسیع را بیان می‌کنیم. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول (یکانی) باشد. قرار می‌دهیم:

$$R(+)M := \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ \cdot & a \end{pmatrix} \mid a \in R, m \in M \right\}.$$

جمع و ضرب روی $R(+)M$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند. می‌توان هر عنصر از $R(+)M$ را با علامت (a, m) نیز نمایش داد بنابراین جمع و ضرب روی $R(+)M$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n) \quad , \quad (a, m)(b, n) = (ab, an + bm).$$

لازم است مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر $R(+)M$ را بشناسیم. در قضایای زیر نشان خواهیم داد که

$ann(M) = \{r \in R \mid \forall m \in M, rm = \cdot\}$ به طوری که $Z(R(+)M) = (Z(R) \cup Z(M))(+)M$ و $\{ \}$ برای بعضی $m \in M, \cdot \neq m, \cdot \neq rm \in R$. $Z(M) = \{r \in R \mid rm = \cdot, \cdot \neq m \in M\}$ همواره فرض می‌کنیم M ناصفر است، در نتیجه $R(+)M$ تقلیل یافته نخواهد بود زیرا $nil(R(+)M) \subseteq \{\cdot\}(+)M$. هم‌چنین از علامت θ هم برای عنصر صفر M و هم برای زیرمدول صفر M استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. در این صورت $(a, m) \in Z(R(+)M)$ اگر و تنها اگر $a \in Z(R) \cup Z(M)$.

برهان. فرض کنیم $(a, m) \in Z(R(+)M)$. می‌توان فرض کرد $a \neq \cdot$. در این صورت عنصر ناصفر $(b, n) \in R(+)M$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(a, m)(b, n) = (ab, bm + an) = (\cdot, \theta)$. اگر $b = \cdot$ ، آن‌گاه $(a, m)(\cdot, n) = (\cdot, an)$ و در نتیجه $a \in Z(M)$ ؛ و اگر $b \neq \cdot$ ، آن‌گاه چون $ab = \cdot$ در نتیجه $a \in Z(R)$.

برعکس، فرض کنیم $(a, m) \in R(+)M$ و فرض کنیم $a \in Z(R) \cup Z(M)$. اگر $a \in Z(R)$ ، عنصر ناصفر $b \in R$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $ab = 0$.

اگر $b \in \text{Ann}(M)$ ، آن‌گاه $(a, m)(b, \theta) = (0, \theta)$ و در نتیجه $(a, m) \in Z(R(+)M)$.

اگر $b \notin \text{Ann}(M)$ ، عنصر $c \in M$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $bc \neq \theta$. لذا $(a, m)(0, bc) = (0, \theta)$

و در نتیجه $(a, m) \in Z(R(+)M)$.

اگر $a \in Z(M)$ ، آن‌گاه برای بعضی عناصر ناصفر $c \in M$ داریم $ac = \theta$. لذا $(a, m)(0, c) = (0, \theta)$

در نتیجه $(a, m) \in Z(R(+)M)$. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت $gr(\Gamma(R(+)M)) = 4$ اگر و تنها اگر $R \cong D \times \mathbb{Z}_2$ ، که D یک حوزه صحیح است و $|D| \geq 3$ و $M \cong \mathbb{Z}_2$ (بنابراین $gr(\Gamma(R)) = \infty$).

برهان. بنابر قضیه ۲.۱.۳، $S = R(+)M \cong D \times B = T$ که D یک حوزه صحیح است و $|D| \geq 3$

و $B = \mathbb{Z}_4$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. بنابراین $|nil(S)| = |nil(T)| = 2$ ؛ پس R باید تقلیل یافته باشد

و $M \cong \mathbb{Z}_2$. لذا $nil(S) = \{0\}(+)M$ و $nil(T) = \{0\} \times C$ به طوری که $C \cong \mathbb{Z}_2$. در نتیجه

$$R \cong R(+)M / \{0\}(+)M \cong D \times B / \{0\} \times C \cong D \times \mathbb{Z}_2$$

لذا نگاشت $\varphi : (D \times \mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2 \rightarrow D \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ با ضابطه $\varphi(((d, a), b)) = (d, a + bX)$

یک یکرختی است. $\square$

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت

$$gr(\Gamma(R(+)M)) = \infty \text{، اگر و تنها اگر دقیقاً یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد.}$$

$$1. \quad M \cong \mathbb{Z}_3 \text{ و } R \cong \mathbb{Z}_3$$

$$2. \quad R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ یا } R \text{ یک حوزه صحیح باشد و } M \cong \mathbb{Z}_2$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = R(+)M$. بنابر قضیه ۲۳.۱.۳، $gr(\Gamma(A)) = \infty$ اگر و تنها اگر $A \cong B$ یا $A \cong \mathbb{Z}_2 \times B$ که $B = \mathbb{Z}_4$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ یا $B = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ یک گراف ستاره است. اگر $A \cong B$ ، آن‌گاه $|A| = 4$ ؛ بنابراین A باید $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ باشد. اگر $A \cong \mathbb{Z}_2 \times B$ ، آن‌گاه A باید $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2(+) \mathbb{Z}_2$ باشد. حال فرض کنیم $\Gamma(A)$ یک گراف ستاره باشد. با توجه به تذکر ۲۵.۱.۳، $|nil(A)| \leq 4$. ابتدا فرض می‌کنیم $|nil(A)| = 2$. بنابر قضیه ۲.۳.۳، $M \cong \mathbb{Z}_2$ و R یک حوزه صحیح است یا R تقلیل یافته است (و حوزه صحیح نیست) به‌طوری که $gr(\Gamma(R)) = \infty$. در مورد دوم، بنابر قضیه ۲۲.۱.۳، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times K$ که K یک میدان است. می‌توانیم فرض کنیم که R روی M با $(a, b)m = am$ عمل کند. اگر $|K| \geq 3$ ، آن‌گاه $((0, 1), 0) - ((0, 0), 1) - ((0, a), 0) - ((1, 0), 0) - ((0, 1), 0) \in \Gamma(A)$ یک دور به طول ۴ در $\Gamma(A)$ برای $a \in K - \{0, 1\}$ است. بنابراین $gr(\Gamma(A)) \leq 4$ که تناقض است زیرا فرض کردیم $\Gamma(A)$ یک گراف ستاره است.

اگر $|nil(A)| = 3$ ، آن‌گاه $A \cong \mathbb{Z}_9$ یا $A \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$. پس A باید $\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$ باشد.

اگر $|nil(A)| = 4$ ، آن‌گاه $A \cong \mathbb{Z}_8$ ، $A \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$ یا $A \cong \mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2 - 2)$ باشد. بنابراین $|R| = 4$ و $M \cong \mathbb{Z}_2$ (اگر $|M| = 4$)، آن‌گاه برای عناصر ناصفر متمایز m_1, m_2, m_3 و m_4 از M ، $(0, m_1) - (0, m_2) - (0, m_3) - (0, m_4) \in \Gamma(A)$ یک دور به طول ۳ خواهد بود لذا $gr(\Gamma(A)) = 3$ که با فرض در تناقض است. در این مورد، $R \cong \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ و در هر مورد $gr(\Gamma(A)) = 3$ که دوباره به تناقض می‌رسیم. $\square$

تذکر ۴.۳.۳. الف) با استفاده از قضیه ۳.۳.۳ و اثباتش، برای توسیع $A = R(+)M$ مواردی را که $gr(\Gamma(A)) = \infty$ به صورت زیر است:

۱. $\Gamma(A)$ یک نقطه است، اگر و تنها اگر $A = \mathbb{Z}_2(+) \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

۲. $\Gamma(A) = \overline{K}^{1,3}$ ، اگر و تنها اگر $A = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)(+) \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

۳. $\Gamma(A) = K^{1,1}$ ، اگر و تنها اگر $A = \mathbb{Z}_3(+)\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$.

۴. برای $n \geq 2$ ، $\Gamma(A) = K^{1,n}$ ، اگر و تنها اگر $A = R(+)\mathbb{Z}_2$ که R یک حوزه صحیح نامتناهی است.

در مورد آخر، R یک حوزه صحیح با ایده‌آل ماکسیمال N است به طوری که $R/N \cong \mathbb{Z}_2$ (بنابراین

R باید نامتناهی باشد و میدان نیست) و $R(+)\mathbb{Z}_2 \cong R[X]/(NX, X^2)$.

ب) بنابر قضیه ۲۴.۱.۳، فرض کنیم R یک حلقه جابجایی نامتناهی باشد. اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه

$\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است، اگر و تنها اگر برای بعضی از دامنه‌های صحیح نامتناهی D ، $R \cong D \times \mathbb{Z}_2$. لذا

با توجه به (الف)، توسیع حلقه R توسط R -مدول M یک گراف ستاره است اگر و تنها اگر $R \cong D(+)\mathbb{Z}_2$

که D یک حوزه صحیح نامتناهی است.

این بخش را با ارائه تعدادی قضیه درباره قطر $\Gamma(R(+)M)$ به پایان می‌رسانیم. یادآوری می‌کنیم که

اگر M ناصفر باشد، آن‌گاه $R(+)M$ تقلیل یافته نیست زیرا $nil(R(+)M) \subseteq \{0\}(+)M$ و بنابراین

$diam(\Gamma(R(+)M)) \leq 2$. لذا از قضیه ۷.۳.۲ نتیجه می‌شود که $Z(R(+)M) = (Z(R) \cup Z(M))(+)M$

یک ایده‌آل $R(+)M$ است (و بنابراین $Z(R) \cup Z(M)$ یک ایده‌آل R است).

واضح است که $diam(\Gamma(R(+)M)) = 0$ ، اگر و تنها اگر $R(+)M \cong \mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

ابتدا مشخص می‌کنیم چه هنگام $diam(\Gamma(R(+)M)) \leq 1$.

قبل از هر چیز شرط لازم و کافی روی R و M برای کامل بودن $\Gamma(R(+)M)$ را مشخص می‌کنیم.

در قضیه ۵.۳.۲ ثابت کردیم اگر $R \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر $(Z(R))^2 = 0$.

در مثال‌های زیر نشان می‌دهیم که ممکن است $(Z(R))^2 = 0$ اما $(Z(R(+)M))^2 \neq 0$. بنابراین کامل

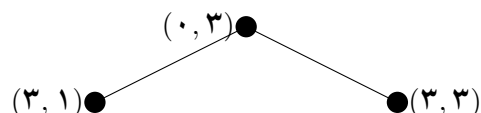
بودن $\Gamma(R)$ تضمینی برای کامل بودن $\Gamma(R(+)M)$ نیست.

مثال ۵.۳.۳. تحت عمل معمولی مدول، $\mathbb{Z}_9(+)\mathbb{Z}_9$ را در نظر می‌گیریم. داریم $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = 1$ اگر

۳. کاربردهایی از گراف مقسوم‌علیه‌های صفر
 $r \in \mathbb{Z}_9 - Z(\mathbb{Z}_9)$ ، آن‌گاه $rm = 0$ اگر و تنها اگر $m = 0$. بنابراین برای $r \in \mathbb{Z}_9 - Z(\mathbb{Z}_9)$ داریم
 $(r, m) \notin Z(\mathbb{Z}_9(+)\mathbb{Z}_9)^*$.

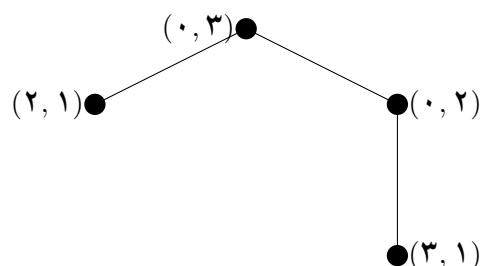
حال برای هر $(r, m) \in Z(\mathbb{Z}_9(+)\mathbb{Z}_9)^*$ داریم $(0, 3)(r, m) = 0$ و $(3, 1)(3, 3) \neq 0$ ، بنابراین

$$\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_9(+)\mathbb{Z}_9)) = 2$$



شکل ۲.۳: $(\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_9(+)\mathbb{Z}_9)) = 2)$

مثال ۶.۳.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$. چون $Z^*(R) = \{ax \mid a \in \mathbb{Z}^*\}$ ، لذا $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$. فرض کنیم $M = \mathbb{Z}_6$ و تعریف می‌کنیم $(a+bx)m = am$. داریم $(2, 1), (3, 1) \in Z^*(R(+)\mathbb{Z}_6)$. واضح است که $\text{ann}((2, 1)) = \{(0, 3), (0, 0)\}$ ، در حالی که $\text{ann}((3, 1)) = \{(0, 2), (0, 0), (0, 4)\}$. لذا
 $d((2, 1), (3, 1)) = 3$ ، پس $\text{diam}(\Gamma(R(+)\mathbb{Z}_6)) = 3$.



شکل ۳.۳: $(\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}[x]/(x^2)(+)\mathbb{Z}_6)) = 3)$

سه شرط زیر را باید در نظر بگیریم تا $\Gamma(R(+)\mathbb{Z}_6)$ یک گراف کامل باشد.

$$1. (Z(R))^2 = 0.$$

$$2. \text{ برای هر } r \in R - Z(R), rm \neq 0 \text{ برای هر } m \in M^*.$$

$$3. \text{ اگر } r \in Z^*(R), \text{ آن گاه } rM = 0.$$

شرط (۲) و شرط (۳) به ترتیب معادل با $Z(M) \subseteq Z(R)$ و $Z(R) \subseteq \text{ann}(M)$ است.

در مثال ۵.۳.۳، حلقه $\mathbb{Z}_9$ شرط سوم و در مثال ۶.۳.۳، حلقه $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ شرط دوم را ندارند.

قضیه ۷.۳.۳. فرض کنیم $\Gamma(R) \neq \emptyset$. در این صورت $\Gamma(R(+)M)$ کامل است اگر و تنها اگر $R(+)M$ سه شرط (۱)، (۲) و (۳) را دارا باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $\Gamma(R(+)M)$ کامل باشد. فرض کنیم $r, s \in Z^*(R)$ و $m \in M^*$. در این صورت $(r, m), (s, \cdot) \in Z^*(R(+)M)$ ؛ بنابراین $(r, m)(s, \cdot) = (\cdot, \cdot)$. لذا برای هر $r, s \in Z^*(R)$ ، $rs = 0$ و $Z(R)^2 = 0$.

اگر به ازای بعضی $r \in R - Z(R)$ و $m \in M^*$ داشته باشیم $rm = 0$ ، آن گاه $(r, \cdot) \in Z^*(R(+)M)$ زیرا $(r, \cdot)(\cdot, m) = (\cdot, \cdot)$. بنابراین فرض می‌کنیم $a \in Z^*(R)$. چون $\Gamma(R(+)M)$ کامل است لذا $(r, \cdot)(a, \cdot) = (\cdot, \cdot)$ که یک تناقض است. حال اگر به ازای بعضی $a \in Z^*(R)$ یک $m \in M^*$ موجود باشد که $am \neq 0$ ، آن گاه $(a, \cdot), (\cdot, m) \in Z^*(R(+)M)$ اما $(a, \cdot)(\cdot, m) = (\cdot, am) \neq (\cdot, \cdot)$ که دوباره به تناقض رسیدیم.

($\Rightarrow$) فرض کنیم شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) برقرار باشند. بنابراین

$$Z^*(R(+)M) = \{(\cdot, m) \mid m \in M^*\} \cup \{(a, n) \mid a \in Z^*(R), n \in M\}.$$

فرض کنیم $(r, m), (s, n) \in Z^*(R(+)M)$. اگر $r = s = 0$ ، آن گاه واضح است که $(r, m)(s, n) = 0$.

اگر $s = 0$ و $r \in Z^*(R)$ ، آن گاه از شرط (۳) داریم $rM = 0$. پس $(r, m)(\cdot, n) = (\cdot, \cdot)$.

اگر $r, s \in Z(R)^*$ ، آن‌گاه با استفاده از شرط (۱) داریم $rs = 0$ و با استفاده از شرط (۳) داریم $rM = sM = 0$ ، بنابراین $(r, m)(s, n) = (0, 0)$. لذا $\Gamma(R(+)M)$ کامل است. $\square$

نتیجه ۸.۳.۳. $\Gamma(R(+)M)$ کامل است اگر و تنها اگر $0 = (Z(R(+)M))^2$.

برهان. اثبات از قضیه قبل نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند.

۱. $\Gamma(R(+)M)$ یک گراف کامل است.

۲. $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 1$.

۳. $Z(R)^2 = \{0\}$ و $Z(R) = Z(M) = \text{ann}(M)$.

۴. $Z(R(+)M)^2 = \{0\}$.

برهان. (۱ $\Leftrightarrow$ ۲) واضح است.

(۲ $\Leftrightarrow$ ۳) فرض کنیم $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 1$. فرض کنیم $a \in Z^*(R)$ ، $b \in Z^*(M)$ و

$0 \neq m \in M$ در این صورت $(a, 0), (b, m) \in (Z(R) \cup Z(M))(+)M = Z(R(+)M)$ متمایزند و

لذا در $\Gamma(R(+)M)$ مجاور هستند. بنابراین $(a, 0)(b, m) = (ab, am)$. این مطلب نشان می‌دهد

که $Z(R) \subseteq \text{ann}(M)$ ، $Z(R) \subseteq Z(M)$ و $Z(M) \subseteq Z(R)$. چون $\text{ann}(M) \subseteq Z(M)$ همواره

برقرار است، لذا $Z(R) = Z(M) = \text{ann}(M)$ و $Z(R)^2 = \{0\}$.

(۳ $\Leftrightarrow$ ۴) فرض کنیم $Z(R) = Z(M) = \text{ann}(M)$ و نیز $Z(R)^2 = \{0\}$. در این صورت داریم

$Z(R(+)M)^2 = \{0\}$ که $Z(R(+)M) = (Z(R) \cup Z(M))(+)M = Z(R)(+)M$ را نتیجه می‌دهد.

$\square$

(۴ $\Leftrightarrow$ ۱) واضح است.

قضیه ۱۰.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت

$$\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 2 \text{ اگر و تنها اگر برای هر } x, y \in Z(R) \cup Z(M),$$

۱. یک $z \in \text{ann}(M), z \neq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $xz = yz = 0$ ؛ یا

۲. یک $m \in M, m \neq 0$ وجود داشته باشد که $xm = ym = 0$.

برهان. فرض کنیم $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 2$. فرض کنیم $x, y \in Z(R) \cup Z(M)$. همچنین فرض کنیم

گزاره (۲) برقرار نباشد. در این صورت برای $m \in M$ ، از $xm = ym = 0$ نتیجه می شود $m = 0$.

ابتدا فرض می کنیم که $x \in Z(M)$. در این صورت به ازای بعضی $m \in M, m \neq 0$ ، $xm = 0$ و در

نتیجه $ym \neq 0$ پس $(y, 0), (x, m) \in Z^*(R(+)M)$ متمایزند و مجاور نیستند؛ بنابراین عنصری مانند

$(z, b) \in Z^*(R(+)M)$ وجود دارد که با هر دوی آنها مجاور است. لذا

$$(0, 0) = (y, 0)(z, b) = (yz, yb) \text{ و } (0, 0) = (x, m)(z, b) = (xz, xb + mz)$$

از تساوی $xz = yz = 0$ نتیجه می شود برای هر $n \in M$ ، $x(zn) = y(zn) = 0$. از توضیحات قبل

داریم $zn = 0$ ؛ بنابراین $z \in \text{ann}(M)$.

به همین ترتیب از $xb = yb = 0$ نتیجه می شود $b = 0$ ؛ بنابراین $z \neq 0$.

اگر $x \in Z(R) - Z(M)$ ، آنگاه کافیت استدلال بالا را برای $(x, 0)$ و (y, m) و هر $m \in M, m \neq 0$

تکرار کنیم. بنابراین گزاره (۱) برقرار است.

برعکس، فرض کنیم برای هر $x, y \in Z(R) \cup Z(M)$ ، گزاره (۱) یا (۲) برقرار باشد. فرض کنیم

$(x, a), (y, b) \in Z^*(R(+)M)$ متمایز باشند و مجاور نباشند؛ در این صورت $x, y \in Z(R) \cup Z(M)$.

اگر گزاره (۱) برقرار باشد، آنگاه عنصر ناصفیری مانند $(z, 0)$ مجاور با هر دوی آنها وجود دارد.

اگر گزاره (۲) برقرار باشد، آنگاه یک عنصر ناصفر مانند $(0, m)$ مجاور با هر دوی آنها وجود دارد.

□

بنابراین $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 2$.

متذکر می شویم که $Z(R) \subseteq Z(M)$ یا $Z(M) \subseteq Z(R)$ اگر $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 2$.

فرض کنیم $Z(R) \not\subseteq Z(M)$ و $Z(M) \not\subseteq Z(R)$. $x \in Z(R) - Z(M)$ و $y \in Z(M) - Z(R)$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $x, y \in Z(R) \cup Z(M)$ در هیچ‌یک از گزاره‌های (۱) و (۲) قضیه ۱۰.۳.۳ صدق نمی‌کند.

در قضایای پایانی این بخش، بر اساس شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) که قبلاً به آن‌ها اشاره کردیم، دو شرط کافی برای اینکه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۳.۳. اگر در $R(+)M$ شرط (۲) و شرط (۳) برقرار باشد اما شرط (۱) برقرار نباشد، آنگاه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$.

برهان. ابتدا متذکر می‌شویم که $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -مدول M نمی‌تواند شرط (۳) را دارا باشد. به ازای بعضی $m \in M^*$ ، $(1, 1).m = m$ اما $((1, 0) + (0, 1)).m = (1, 1).m = m$ ، چون $R \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $(Z(R))^2 \neq 0$ ، باید داشته باشیم $\text{diam}(R) > 1$ و در نتیجه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) > 1$. اگر $r \in Z^*(R)$ ، آنگاه برای هر $m, n \in M$ داریم $(r, m)(0, n) = 0$. به این ترتیب برای هر $(r, m), (s, n) \in Z^*(R(+)M)$ داریم $d((r, m), (s, n)) \leq 2$. در نتیجه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$. $\square$

قضیه ۱۲.۳.۳. اگر $R(+)M$ شرط (۱) و شرط (۲) را دارا باشد اما شرط (۳) نداشته باشد، آنگاه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$.

برهان. فرض کنیم $R(+)M$ شرط‌های (۱) و (۲) را داشته باشد، برای بعضی $a \in Z^*(R)$ و $m \in M^*$ داریم $am \neq 0$. برای هر $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in Z^*(R(+)M)$ داریم $(r_1, n_1)(0, am) = (0, 0) = (r_2, n_2)(0, am)$.

لذا $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) \leq 2$ و چون $(a, 0)(0, m) \neq (0, 0)$ ، در نتیجه $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$. $\square$ در قضایای ۱۱.۳.۳ و ۱۲.۳.۳ دو شرط کافی برای این که $\text{diam}(\Gamma(R(+)M)) = 2$ را بیان کردیم. چون شرط‌های (۲) و (۳) به ترتیب با $Z(M) \subseteq Z(R)$ و $Z(R) \subseteq \text{ann}(M)$ معادل هستند، لذا اگر

$Z(R) = Z(M) = ann(M)$ و $Z(R)^2 \neq \{0\}$ ، آن گاه $diam(\Gamma(R(+)M)) = 2$. (این مطلب، گزاره

(۲) قضیه ۱۰.۳.۳ را نتیجه می دهد) و بنابر قضیه ۱۲.۳.۳، $diam(\Gamma(R(+)M)) = 2$ اگر

$Z(R) = Z(M)$ ، $Z(R) \not\subseteq ann(M)$ و $Z(R)^2 = \{0\}$ (متذکر می شویم که اگر $Z(R)^2 = \{0\}$ ،

آن گاه $Z(R) \subseteq Z(M)$ که این مطلب گزاره (۱) قضیه ۱۰.۳.۳ را نتیجه می دهد.

فصل ۴

گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه‌ی
ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌های
جابجایی

در این فصل به بررسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌های جابجایی بپردازیم. این فصل که برگرفته از مرجع [۱۰] می‌باشد، شامل یک بخش است. همواره فرض می‌کنیم که R یک حلقه جابجایی و یک‌دار و $M_n(R)$ و $T_n(R)$ به ترتیب حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و حلقه ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی حلقه R باشد. همچنین فرض می‌کنیم E_{ij} ماتریس واحد باشد به‌طوری که در مکان (i, j) عدد ۱ قرار دارد که تنها درایه ناصفرش است.

۱.۴ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی

در قضیه ۹.۲.۲ نشان دادیم که $\Gamma(R)$ و $\Gamma(Q(R))$ ایزومورف هستند و در نتیجه این دو گراف، قطر و کمر یکسان دارند. همچنین درستی مطالبی مشابه را برای $\Gamma(M_n(R))$ و $\Gamma(M_n(Q(R)))$ بررسی کردیم. حال نشان می‌دهیم $\Gamma(T_n(R))$ و $\Gamma(T_n(Q(R)))$ نیز گراف‌های ایزومورف هستند.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $Q(R)$ حلقه کسرهای کامل آن باشد. در این صورت $\Gamma(T_n(Q(R))) \simeq \Gamma(T_n(R))$.

برهان. اثباتی مشابه به اثبات قضیه ۱۱.۲.۲ ارائه می‌دهیم. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $A \in T_n(R)$. قرار می‌دهیم:

$$ann_R(A)^R = \{X \in T_n(R) \mid AX = 0\} \quad \text{و} \quad ann_R(A)^L = \{X \in T_n(R) \mid XA = 0\}$$

برای $A, B \in T_n(R)$ تعریف می‌کنیم:

$$A \sim B \Leftrightarrow (ann_R(A)^L = ann_R(B)^L \quad \text{و} \quad ann_R(A)^R = ann_R(B)^R)$$

واضح است که رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $T_n(R)$ است و به یک رابطه هم‌ارزی روی $Z(T_n(R))$ محدود می‌شود به‌طوری که مجموعه رئوس از $\Gamma(T_n(R))$ است.

قرار می‌دهیم $S = R - Z(R)$ و $Q = Q(R)$. رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف شده فوق روی $Z(T_n(R))$ و $Z(T_n(Q))$ را به ترتیب با $\sim_R$ و $\sim_Q$ ، و کلاس هم‌ارزی مربوط به آن‌ها را با $[A]_R$ و $[A]_Q$ نمایش می‌دهیم.

اگر $A = (a_{ij}) \in T_n(R)$ و $s \in R - Z(R)$ ، A/s را با ماتریس $(a_{ij}/s) \in T_n(Q)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $A \in Z(T_n(Q))$ اگر و تنها اگر $A = B/s$ ، به ازای $B \in Z(T_n(R))$ و $s \in R - Z(R)$. چون برای هر $s, t \in S$ ، $(a_{ij}/s) \sim_Q (a_{ij}/t)$ لذا داریم:

$$Z^*(T_n(Q)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [A_\lambda / 1]_Q \quad \text{و} \quad Z^*(T_n(R)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [A_\lambda]_R$$

یک تابع دوسویی بین مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی $\sim_R$ و $\sim_Q$ با ضابطه‌ی $[A_\lambda]_R \mapsto [A_\lambda / 1]_Q$ وجود دارد. هر دو اجتماع مجزا هستند و می‌توان نشان داد

$$\forall A \in Z^*(T_n(R)) \quad ; \quad |[A]_R| = |[A/1]_Q|.$$

اثبات آن دقیقاً نظیر اثبات قضیه ۹.۲.۲ می‌باشد. بنابراین تابع دوسویی $\phi_\lambda : [A_\lambda]_R \rightarrow [A_\lambda / 1]_Q$ برای هر $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد.

اگر $X \in [A_\lambda]_R$ ، نگاشت $\phi : Z^*(T_n(R)) \rightarrow Z^*(T_n(Q))$ را با ضابطه $\phi(X) = \phi_\lambda(X)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت ϕ از $\Gamma(T_n(R))$ به $\Gamma(T_n(Q))$ یک دوسویی است. نشان می‌دهیم در $Z^*(T_n(R))$ ، $XY = \bullet$ اگر و فقط اگر در $Z^*(T_n(Q))$ ، $\phi(X)\phi(Y) = \bullet$.

فرض کنیم $X \in [A]_R$ و $Y \in [B]_R$. همچنین فرض کنیم $W \in [A/1]_Q$ و $Z \in [B/1]_Q$ تصاویر X و Y تحت ϕ باشند. لازم است متذکر شویم

$$\text{ann}_Q(Y)^L = \text{ann}_Q(B)^L = \text{ann}_Q(Z)^L \quad \text{و} \quad \text{ann}_Q(X)^R = \text{ann}_Q(A)^R = \text{ann}_Q(W)^R$$

بنابراین

$$XY = \bullet \Leftrightarrow Y \in \text{ann}_Q(X)^R = \text{ann}_Q(W)^R \Leftrightarrow WY = \bullet$$

$$\Leftrightarrow W \in \text{ann}_Q(Y)^L = \text{ann}_Q(Z)^L \Leftrightarrow WZ = \bullet.$$

□

در نتیجه $\Gamma(T_n(R)) \simeq \Gamma(T_n(Q(R)))$.

در فصل دوم متذکر شدیم که برخلاف گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های جابجایی، گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های ناجابجایی الزاما همبند نیستند. همچنین ثابت کردیم $\Gamma(M_n(R))$ برای هر حلقه جابجایی R همبند است. حال نشان می دهیم این مطلب برای $\Gamma(T_n(R))$ نیز برقرار است.

قضیه ۲.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(T_n(R))$ همبند است و

$$\text{diam}(\Gamma(T_n(R))) \leq 3.$$

برهان. از قضیه ۹.۱.۲ داریم، یک گراف مقسوم علیه صفر از حلقه ناجابجایی R همبند است اگر و تنها اگر

$$Z_l(R) = Z_r(R). \text{ همچنین اگر گراف همبند باشد، آنگاه } \text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3.$$

چون $\Gamma(T_n(R)) \simeq \Gamma(T_n(Q(R)))$ ، این تساوی نشان می دهد که $\Gamma(T_n(Q(R)))$ همبند است و

$$\text{diam}(\Gamma(T_n(Q(R)))) \leq 3. \text{ قضیه را برای } \Gamma(T_n(Q(R))) \text{ ثابت می کنیم. یادآوری می کنیم که ماتریس } A$$

یک مقسوم علیه صفر چپ یا یک مقسوم علیه صفر راست در $M_n(R)$ است اگر و تنها اگر $\det(A) \in Z(R)$.

همچنین متذکر می شویم که عناصر $Q(R)$ یا وارون پذیرند یا مقسوم علیه صفر هستند. کفایت نشان دهیم

$$Z_l(T_n(Q(R))) = Z_r(T_n(Q(R)))$$

برای $A \in Z_l(T_n(Q(R)))$ داریم $a_{11}a_{22}...a_{nn} \in Z(Q(R))$ ، لذا به ازای بعضی $i \in 1, 2, \dots, n$

داریم $a_{ii} \in Z(Q(R))$. اگر $a_{11} \in Z(Q(R))$ ، آنگاه می توان $b \in Q(R)^*$ یافت به طوری که $a_{11}b = 0$.

قرار می دهیم $B = bE_{11}$. در این صورت $AB = a_{11}b = 0$. چون R جابجایی است در نتیجه

$$A \in Z_r(T_n(Q(R)))$$

اگر به ازای بعضی $k < n$ داشته باشیم $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \in U(Q(R))$ و $a_{k+1, k+1} \in Z(Q(R))$

آنگاه بعضی $b \in Q(R)^*$ وجود دارد به طوری که $a_{k+1, k+1}b = 0$. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی

ماتریس ها، می توان تعدادی ماتریس وارون پذیر مانند $P_1, P_2, \dots, P_s$ در $T_n(Q(R))$ یافت به طوری که

$$AP_1 P_2 \dots P_s = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & a_{k+1,k+1} & \dots & * \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

دستگاه $C = bE_{(k+1)n} \neq 0$ ، لذا به آسانی می‌توان بررسی کرد $AP_1 P_2 \dots P_s C = 0$ و $P_1 P_2 \dots P_s C \neq 0$.

بنابراین $A \in Z_r(T_n(Q(R)))$ در نتیجه $\Gamma(T_n(Q(R)))$ همبند است و

$$\text{diam}(\Gamma(T_n(Q(R)))) = \text{diam}(\Gamma(T_n(R))) \leq 3.$$

□

به خوبی می‌توان دید که حتی اگر R شامل مقسوم‌علیه صفر نباشد، $T_n(R)$ شامل مقسوم‌علیه صفر است. می‌توان همواره A, B متمایز در $Z^*(T_n(R))$ یافت به‌طوری که $AB \neq 0$. بنابراین برای هر حلقه جابجایی

$$\text{diam}(\Gamma(T_n(R))) \geq 2, R$$

گزاره ۳.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq \text{diam}(\Gamma(T_n(R)))$

برهان. برای هر $a \in Z^*(R)$ نگاشت $\phi : Z^*(R) \rightarrow Z^*(T_n(R))$ با ضابطه $\phi(a) = aE_{11}$ تعریف می‌کنیم.

نگاشت ϕ یک دوسویی از $\Gamma(R)$ به $\Gamma(T_n(R))$ است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $ab = 0$ اگر و تنها

اگر $\phi(a)\phi(b) = 0$. لذا $\Gamma(R)$ با زیرگرافی از $\Gamma(T_n(R))$ ایزومورف است. از آنجا که $\Gamma(R)$ همبند است،

□

می‌توان نتیجه گرفت $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq \text{diam}(\Gamma(T_n(R)))$.

قضیه ۴.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. همچنین فرض کنیم برای هر $a, b \in Z(R)$ ، (a, b)

یک پوچساز ناصفر داشته باشد. در این صورت $\text{diam}(\Gamma(T_n(R))) = 2$.

برهان. از آنجا که $\Gamma(T_n(R)) \simeq \Gamma(T_n(Q(R)))$ و قطر یک گراف پایاست، لذا کافیت نشان دهیم

$$\text{diam}(\Gamma(T_n(Q(R)))) = 2$$

برای هر $det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn} \in Z(Q(R))$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in Z^*(T_n(Q(R)))$ همچنین $det(B) = b_{11}b_{22}...b_{nn} \in Z(Q(R))$. لذا بعضی $i, j \in 1, 2, ..., n$ وجود دارند به‌طوری که $a_{ii}, b_{jj} \in Z(Q(R))$ برای هر $j < s$ فرض کنیم $a_{ss} \in Z(Q(R))$ و $a_{jj} \in U(Q(R))$. همچنین برای هر $t > j$ فرض کنیم $b_{tt} \in Z(Q(R))$ و $b_{jj} \in U(Q(R))$.

بنابراین می‌توان تعدادی $P_1, ..., P_r, Q_1, ..., Q_l \in U(T_n(Q(R)))$ را طوری بیابیم که

$$AP_1P_2...P_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & a_{22} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & a_{s-1,s-1} & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & a_{s,s} & \dots & * \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Q_1Q_2...Q_lB = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} & \dots & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ & & b_{tt} & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

بنا به فرض، برای $a_{ss}, b_{tt} \in Z(Q(R))$ ، عنصر ناصفر $c \in Q(R)$ وجود دارد به‌طوری که $a_{ss}c = b_{tt}c = \cdot$. قرار می‌دهیم $C = cE_{st}$ ، در این صورت $P_1P_2...P_rCQ_1Q_2...Q_l \in Z(T_n(Q(R)))$ و در نتیجه $A \rightarrow C \rightarrow B$ یک مسیر از A به B در $\Gamma(Q(R))$ است، لذا نتیجه حاصل است. $\square$

نتیجه ۵.۱.۴. اگر R یک حوزه صحیح باشد، آنگاه $diam(\Gamma(T_n(R))) = 2$.

گزاره ۶.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت

$$gr(\bar{\Gamma}(T_n(R))) = gr(\Gamma(T_n(R))) = 3.$$

برهان. کافیت نشان دهیم $gr(\Gamma(T_n(R))) = 3$ فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & 1 & * & \dots & * \\ * & 1 & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

و

$$C = \begin{pmatrix} * & 1 & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

که A ، B و C ماتریس‌های متمایز در $Z^*(T_n(R))$ هستند به‌طوری که $AB = BC = CA = *$. بنابراین

□ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ یک دور جهت‌دار به طول ۳ است، لذا نتیجه حاصل است.

مراجع

- [1] D. D. Anderson and M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra* **159** (1993) 500-514.
- [2] D. F. Anderson and A. Badawi, Divisibility conditions in commutative rings with zero-divisors, *Comm. Algebra* **30** (2002) 4031-4047.
- [3] D. F. Anderson, R. Levy and J. Shapiro, Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **180** (2003) 221-241.
- [4] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999) 434-447.
- [5] D. F. Anderson and S. B. Mulay, On the diameter and girth of a zero-divisor graph, *J. Pure Appl. Algebra* **210** (2007) 543-550.
- [6] M. Axtel, J. Coykendall and J. Stickles, Zero-divisor graphs of polynomials and power series over commutative rings, *Comm. Algebra* **33** (2005) 2043-2050.
- [7] M. Axtel and J. Stickles, Zero-divisor graphs of idealizations, *J. Pure Appl. Algebra* **204** (2006) 235-243.
- [8] I. Beck, coloring of a commutative ring, *J. Algebra* **116** (1988) 208-226.
- [9] B. Bollobás, *Graph Theory, An Introductory Course*, Springer-Verlag, New York, (1979).
- [10] L. Bingjun, Zero-divisor graph of triangular matrix rings over commutative rings, *International J of algebra* **5**(2011) 255-260.
- [11] W. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc (1993).
- [12] I. Bozic and Z. Petrovic, Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings, *Comm. Algebra* **37** (2002) 1186-1192.
- [13] J. A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker, New York, Basel, (1988).
- [14] J. A. Huckaba and J. M. Keller, Annihilation of ideals in commutative rings, *Pac. J. Math* **83** (1974) 375-379.
- [15] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, rev. ed., University of Chicago Press, Chicago, (1974).
- [16] T. G. Lucas, The diameter of a zero-divisor graph, *J. Algebra* **301** (2006) 174-193.
- [17] S. B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisors, *Comm. Algebra* **30** (2002) 3533-3558.
- [18] S. Redmond, The zero-divisor graph of a noncommutative ring, *International J. Commutative Rings* **1**(2002) 203-211.
- [19] T. Wu, On directed zero-divisor graphs of finite rings, *Discrete Math*, **296** (2005) 73-86.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

index of nilpotency	اندیس پوچتوانی
prime ideal	ایده‌آل اول
minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
nilpotent ideal	ایده‌آل پوچتوان
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
dim	بعد
undirected	بی جهت
end	پایانی
nil	پوچ
nilpotent	پوچ‌توان
annihilator	پوچساز
directed	جهت‌دار
reduced ring	حلقه ی تقلیل یافته
commutative ring	حلقه جابجایی
polynomial ring	حلقه ی چندجمله‌ای
von Neumann regular ring	حلقه ی فون نیومن منظم
total quotient ring	حلقه ی کسرهای کامل

upper triangular matrix ring	حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی
matrix ring	حلقه‌ی ماتریسی
McCoy ring	حلقه‌ی مک‌کوی
noncommutative ring	حلقه ناجابجایی
idempotent	خودد توان
integral domain	دامنه صحیح
cycle	دور
nilradical	رادی‌کال پوچ
vertex	رأس
subgraph induced	زیرگراف القایی
zero-dimensional	صفر-بعدی
element	عنصر
distance	فاصله
diameter	قطر
complete	کامل
girth	کمر
graph	گراف
complete bipartite graph	گراف دو قسمتی کامل
star graph	گراف ستاره
orthogonal	متعامد
distinct	متمایز
complemented	متمم شده

finite	متناهی
adjacent	مجاور
path	مسیر
zero-divisor	مقسوم علیه صفر
left zero-divisor	مقسوم علیه صفر چپ
right zero-divisor	مقسوم علیه صفر راست
uniquely complemented	منحصراً متمم شده
regular	منظم
infinite	نامتناهی
Noetherian	نوتری
connected	همبند
π -regular	π -منظم

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacent	مجاور
annihilator	پوچساز
commutative ring	حلقه جابجایی
complemented	متمم شده
complete	کامل
complete bipartite graph	گراف دو قسمتی کامل
connected	همبند
cycle	دور
diameter	قطر
dimensional	بعد
directed	جهت‌دار
distance	فاصله
distinct	متمايز
element	عنصر
end	پایانی
finite	متناهی
girth	کمر

graph	گراف
idempotent	خودتوان
index of nilpotency	اندیس پوچتوانی
infinite	نامتناهی
integral domain	دامنه صحیح
left zero-divisor	مقسوم علیه صفر چپ
matrix ring	حلقه‌ی ماتریسی
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
McCoy ring	حلقه‌ی مک‌کوی
minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
prime ideal	ایده‌آل اول
nil	پوچ
nilpotent	پوچ‌توان
nilpotent ideal	ایده‌آل پوچتوان
nilradical	رادیکال پوچ
Noetherian	نوتری
noncommutative ring	حلقه ناجابجایی
orthogonal	متعامد
path	مسیر
polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای
reduced ring	حلقه‌ی تقلیل یافته
regular	منظم

right zero-divisor	مقسوم علیه صفر راست
star graph	گراف ستاره
subgraph induced	زیرگراف القایی
total quotient ring	حلقه‌ی کسرهای کامل
upper triangular matrix ring	حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی
undirected	بی جهت
uniquely complemented	منحصراً متمم شده
vertex	رأس
von Neumann regular ring	حلقه‌ی فون نیومن منظم
zero-dimensional	صفر-بعدی
zero-divisor	مقسوم علیه صفر
π -regular	π -منظم

Surname: paseban khamari

Name: khadijeh

Title: Zero-Divisor Graphs of Matrices over Commutative Rings

Supervisor: Dr.Ebrahim Hashemi

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Algebra

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013

Number of pages: [81](#)

Keywords: commutative ring, noncommutative ring, zero-divisor graph, matrix rings, triangular matrix rings

Abstract

In this thesis first, we recall the definitions and basic properties of zero-divisor graphs of commutative and noncommutative rings. Then we showed that $\Gamma(R)$ and $\Gamma(Q(R))$ were isomorphic as graphs, and as a consequence it followed that these two graphs has the same diameter and girth.

Also, We investigate the properties of (directed) zero-divisor graphs of matrix rings. Then we use these results to discuss the relation between the diameter of the zero-divisor graph of a commutative ring R and that of the matrix ring $M_n(R)$.

Also, we characterize when either $diam(\Gamma(R)) \leq 2$ or $gr(\Gamma(R)) \geq 4$. We then use these results to investigate the diameter and girth for the zero-divisor graphs of polynomial rings, power series rings, and idealizations.

Fainally, we investigate the zero-divisor graph of triangular matrix rings over commutative rings.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Zero-Divisor Graphs of Matrices over Commutative Rings

Supervisor

Dr.Ebrahim Hashemi

by

khadijeh paseban khamari

2013