

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ

الرَّحِيمِ



دانشکده: علوم ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

کنترل سیستم های توسیع یافته خطی و پایداری آن

دانشجو: عصمت بابامحمدی

استاد راهنما:

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور:

دکتر مهدی فاتح

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ماه ۱۳۹۲



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم عضویت بابامحمدی رشته ریاضی کاربردی گرایش کنترل تحت عنوان کنترل سیستم های توسیع یافته خطی و پایداری آن که در تاریخ ۱۳۹۲/۰۴/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود	☐ دفاع مجدد	☒ قبول (با درجه: <u>خوب</u> امتیاز: <u>۱۷,۸۴۵</u>)
--------------------------------	------------------------------------	---

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۲- استاد مشاور	محمد مهدی فاتح	استاد	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	سید رضا موسوی	مربی	
۴- استاد ممتحن	اکبر هاشمی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	علیرضا ناظمی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره



تقدیر و تشکر:

سپاس سزاوار پروردگار عالمیان است که روشنی عقل و آگاهی را بر زشتی جهل برتری داد. اینک که با یاری خدای خوب و مهربانم نگارش پایان نامه ام را به اتمام رسانده ام برخود لازم می دانم از زحمات بزرگوارانی که با راهنمایی های خود سهم عظیمی در تدوین این پایان نامه داشته اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

اینجانب مراتب تشکر و سپاس فراوان خود را از استاد محترم آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که قبول زحمت فرموده و راهنمایی این پایان نامه را پذیرفتند ابراز می دارم. و همچنین از کلیه اساتید بزرگوار و دوستانی که به نحوی اینجانب را در مسیر این پایان نامه یاری نموده اند تشکر می کنم، از خداوند بزرگ آرزوی موفقیت و سربلندی برای همه این عزیزان دارم.

عصمت بابامحمدی

تیرماه ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجناب عصمت بابامحمدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه کنترل سیستم های توسیع یافته خطی و پایداری آن تحت راهنمائیکجناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجناب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده

در این پایان نامه کنترل پذیری، مشاهده پذیری و پایداری سیستم های توسعه یافته مورد بررسی قرار می گیرید. با استفاده از تبدیلات هم ارز متعامد صورت های فشرده ای را معرفی می کنیم که منظم بودن سیستم را مشخص می کند و از روی منظم بودن سیستم، مشاهده پذیری و کنترل پذیری آن را مورد بررسی قرار می دهیم.

از آنجا که کار کردن با یک سیستم استاندارد بسیار آسان تر از سیستم توسعه یافته می باشد لذا با استفاده از پس خورد حالت مشتق و گزاره ای سیستم توسعه یافته را به یک سیستم استاندارد تبدیل می کنیم.

همچنین در این پایان نامه روشی جدید برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتر خطی با استفاده از تبدیلات تشابهی معرفی می گردد، سپس ماتریس پس خورد حالت با کمترین نرم به گونه ای تعیین می گردد که سیستم پایدار بماند.

کلمات کلیدی: سیستم های توسعه یافته، پس خورد حالت، منظم بودن، مشاهده پذیری، کنترل پذیری، پایداری، تبدیلات تشابهی، فرم همدم برداری.

فهرست مطالب

۱	فصل اول تعاریف و پیش نیازها	۱
۱-۱	ماتریس ها	۲
۱-۱-۱	مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و زیرفضاهای ناورد	۲
۱-۱-۲	ماتریس های خاص	۳
۱-۱-۳	برخی تجزیه های ماتریسی	۳
۲-۱	مدادهای ماتریس	۵
۱-۲-۱	برخی تجزیه های پایه ای از مدادهای ماتریس	۶
۳-۱	تعاریف و پیش نیازهای کنترل	۷
۱-۳-۱	کنترل پذیری	۸
۲-۳-۱	مشاهده پذیری	۸
۳-۳-۱	پایداری سیستم های کنترل	۹
۲	فصل دوم مقدمه ای بر سیستم های توسعه یافته	۱۲
۱-۲	مقدمه	۱۳
۲-۲	دو مثال و کاربردها	۱۴
۱-۲-۲	مدل سازی یک مدار الکتریکی	۱۴
۲-۲-۲	کنترل روبات	۱۹
۳-۲	تعاریف پایه ای برای سیستم های توسعه یافته	۲۱
۴-۲	حل یک سیستم توسعه یافته	۲۲
۵-۲	کنترل پذیری و مشاهده پذیری یک سیستم توسعه یافته	۲۴
۶-۲	دامنه فراوانی تحلیلات	۲۶
۱-۶-۲	تبدیلات لاپلاس و تابع انتقال	۲۶
۳	فصل سوم تخصیص پس خورد برای سیستم های توسعه منظم	۲۹

۱-۳	مقدمه	۳۰
۲-۳	دو مثال	۳۱
۳-۳	شرط های کنترل پذیری و مشاهده پذیری	۳۳
۴-۳	صورت های فشرده	۳۶
۵-۳	منظم سازی	۴۳
۱-۵-۳	پس خورد گزاره ای	۴۴
۲-۵-۳	پس خورد گزاره ای و مشتق	۴۶
۴	فصل چهارم طرحی از کنترل پس خورد حالت مشتق برای سیستم های توسیع یافته	۵۰
۱-۴	شرح برنامه	۵۱
۲-۴	طرح استفاده از پس خورد حالت مشتق	۵۲
۳-۴	مثال ها	۵۳
۴-۴	کنترل پذیری - ناوردهای کرونکر - فرم استاندارد اشلون	۵۹
۱-۴-۴	تبدیل فضای حالت به کمک یک تبدیل تشابهی	۵۹
۲-۴-۴	طریقه بدست آوردن ماتریس تبدیل T	۶۰
۳-۴-۴	ناوردهای کرونکر	۶۲
۴-۴-۴	ناوردهای کرونکر منظم و نامنظم	۶۳
۵-۴-۴	ناوردهای کرونکر منظم و فرم استاندارد اشلون	۶۴
۶-۴-۴	ناوردهای کرونکر نامنظم و فرم استاندارد اشلون	۶۷
۷-۴-۴	بدست آوردن فرم استاندارد اشلون به روش عددی	۶۷
۸-۴-۴	عملیات سطری و ستونی مقدماتی روی زوج (M, N)	۶۸
۵-۴	تبدیلات تشابهی فضای حالت	۷۴
۱-۵-۴	فرم همدم برداری	۷۴
۲-۵-۴	زوج های هم ارز	۷۵
۳-۵-۴	به دست آوردن فرم همدم برداری	۷۶

۶-۴	تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت	۷۸
۷-۴	پارامتر سازی ماتریس پس خورد با استفاده از گراف	۷۹
۱-۷-۴	گراف مربوط به ماتریس $N + MF_d$	۷۹
۲-۷-۴	اضافه کردن یال به g_p	۸۱
۸-۴	الگوریتم برای ماتریس پس خورد حالت با مینیمم نرم فروبنیوس	۸۲
۱-۸-۴	الگوریتم	۸۳
۹-۴	مثال	۸۴
۵	فصل پنجم طرحی از کنترل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای برای سیستم های توسیع یافته	۸۷
۱-۵	مقدمه	۸۸
۲-۵	شرح مسئله	۸۸
۳-۵	طرح کنترل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای با استفاده از پس خورد حالت	۸۹
۴-۵	مثال	۹۰
۵-۵	مقایسه و مزیت های استفاده از این روش	۹۱
۶	خلاصه و نتایج	۹۴
۱-۶	خلاصه	۹۴
۲-۶	نتیجه گیری	۹۴
۳-۶	پیشنهادهای	۹۵
۷	پیوست A	۹۶
۸	پیوست B	۹۹
۹	پیوست C	۱۰۵
۱۰	منابع	۱۱۰

پیشگفتار

بازنمایی سیستم های پویا باعث به وجود آمدن مدل های توسعه یافته گردیده است. همچنین یک سیستم توسعه یافته یک فرم خاص از یک مدل فضای حالت تعمیم یافته می باشد و به سیستم های تکین، سیستم های ضمنی، سیستم های فضای حالت تعمیم یافته، سیستم های دیفرانسیل جبری نیز نسبت داده می شود. مسأله بررسی سیستم های توسعه یافته سالها مورد توجه قرار گرفته است. این نوع سیستم ها اغلب در سیستم های متنوعی مانند سیستم های توانی، سیستم های مکانیکی، مدارهای الکتریکی، مهندسی شیمی، سیستم های چند بدنه، روبات و... مطرح می شوند. در اینجا ما به بررسی این سیستم ها و تحلیل پایداری و کنترل پذیری آنها می پردازیم.

سیستم های توسعه یافته بطور طبیعی در یک تنوع از شرایط عملی شان به وجود آمدند و ابتدا در دامنه ی وسیعی توسط "روزن بروک"^۱ (۱۹۷۴) مطرح شده اند. سپس در دو زمان پیوسته و گسسته توسط اشخاصی از قبیل "لئون برگر"^۲ (۱۹۷۷)، "کامپ بل"^۳ (۱۹۷۶ و ۱۹۷۷)، "ورجس"^۴ (۱۹۷۸ و ۱۹۷۹) مورد مطالعه قرار گرفتند. همچنین مثال های کاربردی زیادی از مدل های توسعه یافته که نشان از برتری این سیستم ها بود توسط "لئون برگر" (۱۹۷۷) مطرح شدند. از طرفی فرم مربعی این سیستم ها با تحقیقات "دای"^۵ (۱۹۸۹) بدست آمدند و بعدها در سال (۱۹۹۷) حالت غیرمربعی توسط "بایرز"، کانکر^۶ و مهرمان^۷ به حالت مربعی تقلیل داده شد. در ادامه مطالعه بر روی سیستم های توسعه یافته با پس خورد حالت توسط "لی ویس"^۸ (۱۹۸۲) و "کوب"^۹ (۱۹۸۳) انجام گرفت. پس خورد حالت مشتق و گزاره ای توسط خیلی از مولف ها مورد مطالعه قرار گرفت، برای نمونه می توان پایداری و منظم سازی توسعه یافته توسط "دوان"^{۱۰} و ژانگ^{۱۱} (۲۰۰۳) و "کو"^{۱۲} و لین^{۱۳} (۲۰۰۴)، کنترل پس خوردی سیستم های تکین "جینگ"^{۱۴} (۱۹۹۴)، کنترل غیر

Rosenbrock ^۱

Luenberger ^۲

Campbell ^۳

Verghese ^۴

Dai ^۵

Byers ^۶

Kunker ^۷

Mehrmann ^۸

Lewis ^۹

Cobb ^{۱۰}

Duan ^{۱۱}

Zhang ^{۱۲}

Kuo ^{۱۳}

Lin ^{۱۴}

Jing ^{۱۵}

خطی با خطی سازی دقیق پس خورد "بوکاز" ^۱ و هابت لر ^۲ (۲۰۰۴)، H_∞ -کنترل سیستم های پیوسته زمانی با حالت تاخیری "فریدمن" ^۳ و شاکد ^۴ (۲۰۰۲)، طراحی ناظرهای PD "دوآن" (۲۰۰۷) را اشاره کرد. همچنین برخی از اهداف این نوع پس خوردها و کاربردهای آن با تخصیص قطب توسط "بانس جریست نر" ^۵ و مهرمان و نیکولز ^۶ (۱۹۹۲ و ۱۹۹۹) مطرح شدند. و در انتها هم از جمله کارهای اخیر انجام شده روی سیستم های توسیع یافته می توان به کارهای "اگزیزو" ^۷ و زهای ^۸ (۲۰۰۹) در زمینه ی تجزیه پایداری سیستم های توسیع یافته کلیدی اشاره کرد.

در این پایان نامه ما فقط حالت مربعی این سیستم ها را در نظر می گیریم.

فصل اول این پایان نامه شامل برخی مفاهیم اولیه از جبرخطی و کنترل است که در فصل های بعدی به آنها نیاز داریم. در فصل دوم به معرفی سیستم های توسیع یافته و تعاریف اولیه ی کنترل برای این نوع سیستم ها می پردازیم و دو مثال کاربردی از این سیستم ها را مطرح می کنیم. در فصل سوم یک سیستم توسیع یافته با خروجی را مطرح می کنیم و کنترل پذیری و مشاهده پذیری آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم و با استفاده از آنها پایداری سیستم را بررسی می کنیم. در فصل چهارم به بیان یک سیستم توسیع یافته با پس خورد حالت مشتق می پردازیم و با کاری جدید، نرم ماتریس پس خورد حالت آن را مینیمم می کنیم. در فصل پنجم که اصلی ترین فصل این پایان نامه و کار جدید ما می باشد، پس خورد حالت را به فرم مشتق و گزاره ای، برای یک سیستم توسیع یافته تعریف می کنیم و پایداری این نوع سیستم ها را با پس خورد تعریف شده نشان می دهیم. در انتها، فصل آخر خلاصه و نتایج این تحقیق را بیان می کنیم.

^۱ Boukas

^۲ Habetler

^۳ Fridman

^۴ Shaked

^۵ Bunse-Gerstner

^۶ Nichols

^۷ Xu

^۸ Zhai

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل برخی مفاهیم اولیه از جبرخطی و کنترل را یادآوری می کنیم.

۱-۱ ماتریس ها

در این بخش برخی ویژگی های طیفی اصلی از ماتریس ها را یادآوری می کنیم و همچنین برخی تجزیه های مهم ماتریسی را شرح می دهیم [۱۳].

۱-۱-۱ مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و زیرفضاهای ناورد

تعریف ۱-۱: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. مجموعه ریشه های چند جمله ای

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I),$$

را که به چند جمله ای مشخصه ی ماتریس A مرسوم است، طیف^۱ ماتریس A نامیده می شود و اغلب با نماد $\Lambda(A)$ نشان داده می شود. یک عضو از $\Lambda(A)$ مقدار ویژه ی^۲ ماتریس A گفته می شود. به عبارت دیگر، λ یک مقدار ویژه ی ماتریس A است، اگر و فقط اگر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد بطوری که

$$Ax = \lambda x,$$

بردار x را بردار ویژه ی^۳ متناظر با مقدار ویژه ی λ گوئیم.

تعریف ۱-۲: (زیر فضای ناورد^۴). زیر فضای $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ زیر فضای ناوردای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامیده می شود اگر

$$A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}.$$

نکته ۱-۱: هر مجموعه ترکیبی از بردارهای ویژه ماتریس A یک زیر فضای ناورد از A را پدید می آورد.

تعریف ۱-۳: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. زیر فضای تولید شده توسط ستون (سطر) های ماتریس A را فضای ستونی (سطری) A می گوئیم.

- بعد فضای ستونی A را رتبه ی^۵ ماتریس A می نامیم.
- ماتریس A را رتبه کامل^۶ ستونی (سطری) می نامیم، هرگاه ستون (سطر) هایش مستقل خطی باشند.
- ماتریس A را رتبه کامل می نامیم، هرگاه یا رتبه کامل سطر یا رتبه کامل ستونی باشد.

^۱ Spectrum

^۲ Eigenvalue

^۳ Eigenvector

^۴ Invariant Subspace

^۵ Rank

^۶ Full Rank

۱-۱-۲ ماتریس های خاص

تعریف ۱-۴: (ماتریس نامنفرد). ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را نامنفرد^۱ (معکوس پذیر) گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$\det(A) \neq 0,$$

قضیه ۱-۱: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه شرایط زیر هم ارزند:

$$-۱ \quad \det(A) \neq 0,$$

$$-۲ \quad \text{rank}(A) = n,$$

-۳ به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\lambda_i \neq 0$ ، که λ_i یک مقدار ویژه ی ماتریس A است.

تعریف ۱-۵: (ماتریس بالا مثلثی). ماتریس مربعی A را بالا مثلثی گویند هرگاه عناصر زیر قطر آن صفر باشد، یعنی

$$a_{ij} = 0, \quad i > j$$

تعریف ۱-۶: (ماتریس مقدماتی). ماتریس مربعی A از مرتبه n را مقدماتی نامند هرگاه A از انجام یک عمل سطری مقدماتی بر روی I_n حاصل شده باشد.

تعریف ۱-۷: (ماتریس های متشابه). دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را متشابه گوییم، هرگاه ماتریس نامنفرد $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ موجود باشد که در آن

$$T^{-1}AT = B.$$

تعریف ۱-۸: (ماتریس متعامد). ماتریس مربعی A را متعامد گوییم هرگاه $A^t = A^{-1}$.

تعریف ۱-۹: (ماتریس های بلوکی). یک ماتریس را می توان با رسم خطوط افقی و عمودی به ماتریس هایی با مراتب پایین تر که زیرماتریس نامیده می شوند افراز نمود. به این ماتریس افراز شده ماتریس بلوکی می گوییم.

۱-۱-۳ برخی تجزیه های ماتریسی

قضیه ۱-۲: (فرم کانونیکال جردن^۲). هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ با یک تغییر اساسی می تواند به فرم کانونیکال جردن تبدیل شود. ماتریس ناتکین $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارد بطوری که

^۱ Nonsingular

^۲ Jordan Canonical Form

$$J := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_r \end{bmatrix}, \quad (1-1)$$

که در آن زیرماتریس های $J_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ از فرم

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (2-1)$$

می باشند.

نکته ۱-۲: با تبدیل ماتریس A به فرم کانونیکال جردن ممکن است ساختار ویژه ی کامل آن ظاهر شود، با این وجود، امکان دارد ماتریس تبدیل T بدحالت باشد زیرا یک محاسبه پایای عددی از (۱-۱)-(۲-۱) وجود ندارد.

قضیه ۱-۳: (تجزیه مقدار تکین^۱ SVD). فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ با $\text{rank}(A) = r$. آنگاه ماتریس های متعامد $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود دارند بطوری که:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \quad (3-1)$$

که در آن $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ با مقادیر تکین $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. تجزیه (۳-۱) تجزیه مقدار تکین یا مختصراً SVD نامیده می شود.

قضیه ۱-۴: (تجزیه QR). هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ می تواند بفرم

$$A = QR,$$

تجزیه شود، که در آن $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ متعامد و $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ بالا مثلثی می باشد.

قضیه ۱-۵: (تجزیه شور حقیقی^۲). فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، آنگاه ماتریس متعامد Q وجود دارد بطوری که

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & & R_{1k} \\ & R_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & R_{kk} \end{bmatrix}, \quad (4-1)$$

در فرم شبه بالا مثلثی است و هر بلوک R_{ii} ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، یا 1×1 یا یک مقدار ویژه ی حقیقی از A و یا 2×2

^۱ Singular Value Decomposition

^۲ Real Schur Decomposition

با زوج مقادیر ویژه A می باشد.

۲-۱ مدادهای ماتریس

ما تعمیمی از ماتریس ها را که نقش مهمی در تحلیل سیستم های توسیع یافته دارند را در اینجا بیان می کنیم [۱۳].

تعریف ۱۰-۱: (مداد ماتریس)^۱. یک زوج از ماتریس های (A, E) با $A, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، مداد ماتریس نامیده می شود. روش های زیادی برای تعریف مداد ماتریس وجود دارد. در اینجا ما مداد ماتریس را توسط $A - \lambda E$ تعریف می کنیم.

تعریف ۱۱-۱: (طیف، مقدار ویژه، بردار ویژه). فرض کنیم $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ باشند. مجموعه ریشه های چند جمله ای مشخصه

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda E),$$

طیف مداد ماتریس $A - \lambda E$ نامیده می شود. طیف را با نماد $\Lambda(A, E)$ نشان می دهیم. یک عضو از $\Lambda(A, E)$ مقدار ویژه λ (تعمیم یافته) $A - \lambda E$ گفته می شود. به عبارت دیگر، λ یک مقدار ویژه $A - \lambda E$ است، اگر و فقط اگر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد بطوری که

$$Ax = \lambda Ex,$$

بردار x را بردار ویژه λ (تعمیم یافته) متناظر با مقدار ویژه λ می نامیم.

تعریف ۱۲-۱: (مداد ماتریس منظم^۲ یا تکین^۳). فرض کنیم $A - \lambda E$ یک مداد ماتریس مربعی باشد. مداد ماتریس منظم گفته می شود اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ موجود باشد بطوری که $\det(A - \lambda E) \neq 0$. در غیر این صورت مداد ماتریس تکین گفته می شود.

نکته ۳-۱: توجه کنید که ماتریس E در مداد $A - \lambda E$ ممکن است تکین باشد. در این صورت طیف $\Lambda(A, E)$ شامل مقادیر ویژه λ نامتناهی است.

مثال ۱-۱:

(i) مداد ماتریس 3×3 زیر را در نظر بگیرید:

^۱ Matrix pencil

^۲ Regular

^۳ Singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

با یک محاسبه ی ساده مقادیر ویژه بصورت $\Lambda(A, E) = \{1, 2, \infty\}$ بدست می آید.

(ii) مداد ماتریس 3×3 دیگری را در نظر می گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

می بینیم که برای همه $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\det(A - \lambda E) = 0$ بنابراین $\Lambda(A, E) = \mathbb{C}$ بدین معنی است که مداد ماتریس تکین است.

حال به یک تعمیمی از زیرفضاهای ناوردای ماتریس ها می رسیم.

تعریف ۱-۱۳: (زیر فضای تقلیل یافته). فرض کنیم $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ باشند. زیر فضای $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ یک زیر فضای تقلیل یافته مداد ماتریس $A - \lambda E$ گفته می شود اگر زیر فضای دیگری $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ از همان بعد $\mathcal{U}$ موجود باشد بطوریکه

$$A\mathcal{U} \subset \mathcal{V}, \quad E\mathcal{U} \subset \mathcal{V},$$

یا بطور هم ارز

$$A\mathcal{U} + E\mathcal{U} = \mathcal{V}.$$

نکته ۱-۴: مشابه با حالت ماتریسی، هر مجموعه ترکیب شده از بردارهای ویژه تعمیم یافته مداد ماتریس $A - \lambda E$ یک زیر فضای تقلیل یافته از $A - \lambda E$ را تولید می کند.

۱-۲-۱ تجزیه های پایه ای از مدادهای ماتریس

قضیه ۱-۶: (تبدیل به فرم کانونیکال وایرستراس^۱ [۲۵]). هر مداد منظم $A - \lambda E$ می تواند به فرم کانونیکال وایرستراس تبدیل شود، به عبارت دیگر ماتریس های ناتکین $W, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارند بطوری که:

$$A = W \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_\infty} \end{bmatrix} T, \quad E = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T, \quad (5-1)$$

که در آن I_m ماتریس همانی از رتبه m و J و N در فرم کانونیکال جردن و ماتریس N ماتریسی پوچ توان با اندیس پوچ توانی $\mathcal{V}$ می باشند. همچنین n_f و n_∞ بعدهای زیرفضاهای تقلیل یافته $A - \lambda E$ متناظر با مقادیر ویژه ی به ترتیب متناهی و نامتناهی می باشند.

^۱ Weierstras Canonical Form

نکته ۵-۱: با تبدیل مداد ماتریس به فرم کانونیکال وایرشراس ممکن است دوباره همه ی ساختار ویژه ی آن ظاهر شود. در خصوص جزئیات تجزیه، مداد ماتریس به دو زیر مداد، $J - \lambda I_{n_f}$ که شامل همه مقادیر ویژه متناهی و زیر مداد $I_{n_\infty} - \lambda N$ که شامل همه مقادیر ویژه ی نامتناهی مداد $A - \lambda E$ می باشند تبدیل می شود. در هر صورت فرم کانونیکال وایرشراس شامل بلوک های جردنی است که با روش های پایای عددی محاسبه آن ممکن است.

قضیه ۷-۱: (تجزیه شور حقیقی تعمیم یافته). فرض کنیم $A - \lambda E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ مداد مفروض باشد، آنگاه ماتریس های متعامد $Q, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود دارند که

$$Q^T(A - \lambda E)Z = S - \lambda T,$$

که در آن T بالا مثلثی و S شبه بالا مثلثی است.

۳-۱ تعاریف و پیش نیازهای کنترل

در مبحث کنترل خطی، معادلات حالت

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (۶-۱)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (۷-۱)$$

توصیف کننده ی سیستم های چند متغیره ای هستند که در آن ها t متغیر زمان، $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ بردار حالت^۱، $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ بردار ورودی و $y \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ بردار خروجی است. ماتریس های $A(t)$ ، $B(t)$ ، $C(t)$ و $D(t)$ را ماتریس های سیستم می نامیم که به ترتیب دارای ابعاد $n \times n$ ، $n \times m$ ، $p \times n$ و $p \times m$ می باشند.

تعریف ۱۴-۱: مجموعه مقادیر $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ را حالت سیستم می گوییم اگر در لحظه ی $t = t_0$ ، این مقادیر معین باشند و به ازای $t \geq t_0$ ، ورودی های سیستم نیز معلوم باشند، در هر لحظه ی دیگر $t \geq t_0$ ، این مجموعه مشخص می گردد.

تعریف ۱۵-۱: اگر همه ی ماتریس های سیستم معادلات (۶-۱) و (۷-۱) ثابت باشند آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی^۲ گوییم.

تعریف ۱۶-۱: سیستم کنترلی مجموعه معادلات (۶-۱) و (۷-۱) را یک سیستم خطی پیوسته-زمانی گوییم. چنانچه در این سیستم بجای $\dot{x}(t)$ ، $x(t+1)$ قرار دهیم، سیستم را گسسته-زمانی می نامیم.

^۱ State vector

^۲ Time invariant

قرارداد: سیستم های مورد بحث در این پایان نامه، خطی، چند متغیره، پیوسته-زمانی و ناوردای زمانی می باشند.

۱-۳-۱ کنترل پذیری

تعریف ۱-۱۷: سیستم خطی ناوردای زمانی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (۸-۱)$$

را به ازای $t \geq t_0$ ، با حالت اولیه $x(t_0) = x_0$ در نظر می گیریم. هرگاه ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$ ، حالت اولیه x_0 را در زمان t_1 به حالت تعادل منتقل نماید، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر گوییم. اگر تمام مقادیر x_0 به ازای هر t_0 کنترل پذیر باشند، سیستم را کاملاً کنترل پذیر یا بطور ساده کنترل پذیر گوییم. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

تعریف ۱-۱۸: سیستم خطی ناوردای زمانی (۸-۱) را کاملاً "کنترل پذیر" گوییم، اگر و تنها اگر برای ماتریس کنترل پذیری

$$Q = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]_{n \times mn},$$

داشته باشیم $rank(Q) = n$.

اگر سیستم فقط دارای یک ورودی باشد یعنی $m = 1$ ، شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری سیستم این است که ماتریس Q نامنفرد باشد.

کنترل پذیری یک سیستم اهمیتی اساسی دارد. زیرا باید مسائلی مورد مطالعه قرار گیرد که در آن ها هدف، انتقال سیستم از یک حالت اولیه y دلخواه به حالت تعادل می باشد، که این عمل باید با مینیمم کردن شاخص رفتاری معینی انجام شود. در نتیجه کنترل پذیری شرط لازم وجود جواب است. همچنین، کاملاً کنترل پذیری به این معناست که تمام ورودی های سیستم قابل کنترل می باشند.

۱-۳-۲ مشاهده پذیری

تعریف ۱-۱۹: سیستم خطی ناوردای

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \quad (۹-۱)$$

$$y = Cx$$

را که در آن A, B, C بترتیب ماتریس های $n \times n$, $n \times m$ و $p \times n$ می باشند در نظر می گیریم. اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده $y(t)$ در فاصله زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ تعیین کرد، سیستم را کاملاً^۱ مشاهده پذیر^۱ گوییم. بنابراین سیستمی کاملاً^۱ مشاهده پذیر است که هر تغییر حالتی سرانجام بر تمام درایه های بردار خروجی تأثیر بگذارد.

تعریف ۳-۱-۲: سیستم تعریف شده (۳-۱) را کاملاً^۱ مشاهده پذیر گوییم، اگر و تنها اگر برای ماتریس مشاهده پذیری

$$E = [C^T | A^T C^T | \dots | (A^T)^{n-1} C^T]_{n \times np}$$

داشته باشیم، $rank(E) = n$.

مفهوم مشاهده پذیری نیز همچون کنترل پذیری بسیار مهم است زیرا مشکل کنترل پس خورد حالت در عمل این است که برخی از متغیرهای حالت در دسترس مستقیم قرار ندارند، بنابراین برای ساختن سیگنال های کنترل باید این متغیرهای خارج از دسترس را تخمین زد. تخمین متغیرهای حالت تنها زمانی ممکن است که سیستم کاملاً^۱ مشاهده پذیر باشد.

۳-۳-۱ پایدارى سیستم های کنترل

در طراحی سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. مهمترین مشخصه ی رفتار دینامیکی سیستم های کنترل، پایداری مطلق است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه ی جدید به آن به حالت تعادل خود برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

یک سیستم کنترل خطی را پایدار بحرانی گوییم هرگاه نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد و در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه ی جدید به آن، خروجی بطور بیکران واگرا شود.

حال به بررسی مفهوم ریاضی پایداری در سیستم های کنترل می پردازیم.

سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی (۳-۱) با بردار ورودی

^۱ Observable

$$u(t) = Kx(t), \quad (10-1)$$

موسوم به قانون کنترل که در آن $u(t)$ متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شده است، در نظر می گیریم. در این صورت سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس خورد حالت و $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را ماتریس پس خورد حالت^۱ گوییم.

چنانچه $u(t)$ متناسب با بردار خروجی $y(t)$ انتخاب شود یعنی:

$$u(t) = Ky(t), \quad (11-1)$$

آن گاه، سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس خورد خروجی و $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ را ماتریس پس خورد خروجی^۲ گوییم.

با ترکیب معادلات (۸-۱) و (۱۰-۱) رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (12-1)$$

در این رابطه ماتریس A را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه ی آن را مقادیر ویژه ی سیستم حلقه باز گوییم. همچنین ماتریس $A + BK$ را ماتریس سیستم حلقه بسته و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه ی حلقه بسته می نامیم.

تعریف ۲۱-۱: سیستم هایی که در آنها خروجی بر عملکرد کنترل تاثیر ندارد را سیستم های کنترل حلقه-باز گوییم. همه ی سیستم هایی که بر اساس زمانبندی کار می کنند سیستم های حلقه-باز هستند. چراغ های راهنمایی یک نمونه از این سیستم ها می باشند.

تعریف ۲۲-۱: سیستم های کنترل پس خوردی را عموماً سیستم های کنترل حلقه بسته می نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته، استفاده از پس خورد برای کاهش خطا و رسیدن به پایداری است.

قضیه ۸-۱: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. به ازای هر بردار حالت اولیه ی x_0 ، سیستم خطی ناوردای زمانی

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0$$

دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت،

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

^۱ State Feedback Matrix

^۲ Output Feedback Matrix

می باشد.

با استفاده از این قضیه و انتخاب بردار حالت اولیه ی x_0 جواب سیستم حلقه بسته را به صورت زیر بدست می آوریم

$$x(t) = e^{(A+BK)t} x_0.$$

چنانچه تمام مقادیر ویژه ی حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(A+BK)t} = 0,$$

این رابطه بیان می کند که با گذر زمان هر حالت اولیه در صورتی به حالت تعادل برده می شود که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ی ماتریس حلقه بسته منفی باشند. بنابراین شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم خطی پیوسته زمانی ، وجود ماتریس پس خورد K ، به گونه ای است که همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

تعریف ۱-۲۳: سیستم کنترل خطی توصیف شده توسط مجموعه معادلات (۸-۱) و (۱۰-۱) را یک سیستم پایدار مجانبی می نامیم هر گاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته منفی باشد. در صورتی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این دو صورت سیستم را ناپایدار نامیم.

تعریف ۱-۲۴: مساله یافتن ماتریس پس خورد K ، برای سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط مجموعه معادلات (۸-۱) و (۱۰-۱) به گونه ای که سیستم پایدار مجانبی باشد را مساله تخصیص مقادیر ویژه^۱ گوییم.

فصل دوم

مقدمه ای بر سیستم های توسعه یافته

۱-۲ مقدمه

در طبیعت و بخش های مهندسی، مدل سازی و مشابه سازی عددی، ثلث ستون تحقیق را در بر دارد. از طرفی، برنامه های خیلی پیچیده را نمی توان بطور تحلیلی با دست انجام داد. فقط حل یک معادله جزئی مشخص را در نظر بگیرید، حتی امتحانش اغلب پر هزینه و زمان بر است و در حقیقت قابل اجرا نیست. از این رو در سال های گذشته مشابه سازی در جامعه علمی خیلی مهم بوده است. روش های ریاضی و برنامه های حل عددی، مدل سازی را با سرعت زیاد تکمیل می کند، نظر به اینکه بدون اینها مدل سازی غیر قابل تصور است. غالباً، دینامیک های سیستم های مدل شده به کمک معادلات دیفرانسیل نشان داده می شوند. آنها می توانند به فرم معادلات دیفرانسیل جزئی باشند اما ما در اینجا فقط با حالت ساده ای از معادلات دیفرانسیل معمولی (با ضریب ثابت) کلنجر می رویم. گاهی وقت ها، محدودیت های جبری، سیستم را از خیلی حالت های ممکن دست یافتنی باز می دارد. برای نمونه یک آونگ ساده را در نظر بگیرید. این آونگ به حرکت روی یک دایره واداشته شده است، بنابراین نمی تواند به هر مکان ممکن در فضا دسترسی پیدا کند. کار ما در این چارچوب صحبت کردن از معادلات دیفرانسیل-جبری (یا سیستم های توسیع یافته)

$$E\dot{x}(t) = Ax(t),$$

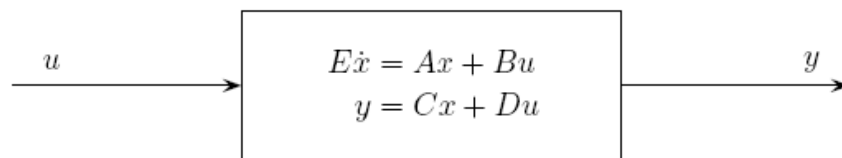
با ماتریس تکین E است. بطور معمول تحلیل معادلات دیفرانسیل-جبری با حل معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی تفاوت دارد. از این گذشته شخصی که مشابه سازی را انجام می دهد، در بهینه سازی یا کنترل سیستم تمایل دارد خواص یک سیستم مشخص را کسب کند. در این روش ما کنترل u را با حالت لازم بدست می آوریم، یعنی:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

تقریباً اغلب ما همه مقادیر حاصل از متغیرهای حالت داخلی x را نمی دانیم، اما می توانیم با استفاده از اطلاعات سیستم برخی مقادیر را بدست آوریم، بنابراین داریم:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

که در آن y بردار خروجی تعریف می شود. همچنین، یک سیستم توسیع یافته می تواند به صورت یک دستگاه (شکل ۱-۲) تفسیر شود، که یک ورودی را می گیرد و نسبت به دستور مشخصی که به آن داده می شود یک خروجی به ما می دهد.



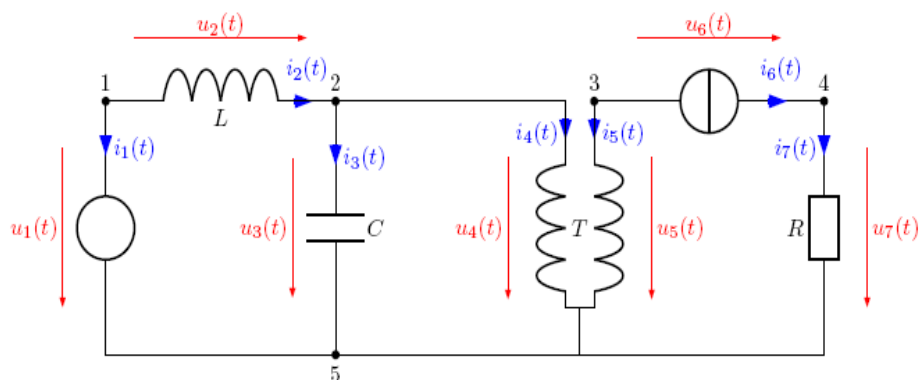
شکل ۱-۲: تفسیر دستگاه از یک سیستم توسعه یافته

در بخش بعد برخی کاربردهای سیستم های توسعه یافته را توصیف می کنیم. ابتدا در یک روش مستقیم، معادلات را برای یک مدار الکتریکی مدل سازی می کنیم و سپس مختصراً کنترل روبات را شرح می دهیم.

۲-۲ دو مثال و کاربردها

۱-۲-۲ مدل سازی یک مدار الکتریکی

هدف از مدل سازی: اهمیت سیستم های توسعه یافته را با یک مثال، که مدل سازی مدارهای الکتریکی را نشان می دهد شرح می دهیم. مدار شکل ۲-۲ را در نظر بگیرید [۲۳]. آن شامل یک منبع ولتاژ با $u_V(t)$ و یک منبع شدت جریان $i_I(t) = i_6(t)$ که منطبق بر ورودی های سیستم است می باشد، به عبارت دیگر این پارامترها ممکن است در یک دامنه تغییرات مناسب توسط کاربر انتخاب شود. بنابراین مدار شامل یک سیم پیچ با ضریب خودالقایی L ، یک خازن با ظرفیت C ، یک مقاومت با مقاومت R و یک مبدل خودکار ایده آل $T = \frac{N_1}{N_2}$ با نسبت بطور متناظر عددی از چرخش نخستین و چرخش دومی می باشد. هدف از مدل سازی، بدست آوردن ولتاژها و شدت جریان های همه قطعات الکتریکی مدار، مانند ولتاژ در منبع شدت جریان u_I و شدت جریان در منبع ولتاژ i_V است.



شکل ۲-۲: مدار مثال با شدت جریان ها و ولتاژ ها روی هر قطعه

قوانین ترکیب کننده^۱: ابتدا قوانین فیزیک را برآورد می کنیم، سپس ولتاژ یک قطعه خاص از مدار مثال را می بندیم. رابطه های زیر را داریم [۲۲ و ۲۳]:

^۱ Component Laws

$$\begin{cases} u_1(t) = u_V(t), \\ u_2(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t), \\ i_3(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_3(t), \\ u_5(t) = T \cdot u_4(t), \\ i_4(t) = T \cdot i_5(t), \\ i_6(t) = i_I(t), \\ u_7(t) = R \cdot i_7(t). \end{cases} \quad (1-2)$$

کاربرد قوانین کیرشهف^۱: بعداً ما رابطه‌ی بین قطعات را بیان می‌کنیم. برای این منظور ما ابتدا برخی مفاهیم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: (برخی مفاهیم مرتبط با شبکه‌های الکتریکی)

- (i) یک شبکه الکتریکی^۲، هر اتصال از مولدهای الکتریکی است.
- (ii) یک گره^۳ از یک شبکه، یک نقطه است که خط‌های بین مولدهای تلاقی شبکه را بهم وصل می‌کند و بصورت یک نقطه نمایش داده می‌شود.
- (iii) یک شاخه^۴، مسیر شدت جریان مستقیم بین دو گره از شبکه است و آن عبارت است از قسمتی از یک گره با مولد الکتریکی و قسمتی از مولد با گره دیگر و بصورت یک خط نمایش داده می‌شود.
- (iv) یک دور یا شبکه^۵، یک اتصال بسته داخل شبکه است که عبارت است از یک تعدادی دلخواه از شاخه‌های مرتبط بهم.
- (v) یک مجموعه برش^۶ از شبکه الکتریکی، یک زیر مدار است، که از حذف شاخه‌های مدار اولیه ساخته می‌شود.

نکته ۱-۲: در تمام شبکه از فرضیه‌ی نظریه الکتریکی استفاده می‌کنیم. بدین معنی که برای مثال اتصال بین مولدها مانند گره‌ها، مقاومتی ندارند و عکس‌العملی بین شاخه‌های مجاور یا مولدهای بدون اتصال وجود ندارد.

حال می‌توانیم بررسی شدت جریان‌های شبکه را شروع کنیم. برای این منظور ما نیاز داریم ماتریس وقوع شبکه را که چگونگی اتصال مولدهای مدار را بیان می‌کند تعریف کنیم [۲۳].

^۱ Kirchhoff's Laws

^۲ Electrical Network

^۳ Node

^۴ Branch

^۵ Loop or Mesh

^۶ Cut-Set

تعریف ۲-۲: ماتریس وقوع^۱. ماتریس وقوع $A = (a_{ij})$ مدار الکتریکی ساختاری به صورت زیر دارد زامین شاخه شروع شده در گره i

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{زامین شاخه شروع شده در گره } i \\ -1 & \text{زامین شاخه تمام شده در گره } i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

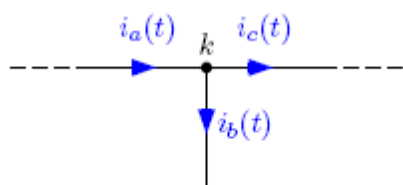
اکنون می توانیم قضیه بنیادی مهندسی زیر را بکار ببریم.

قضیه ۱-۲: (قانون شدت جریان کیرشهف^۲ KCL). جمع جبری پیمایش شدت جریان هر مجموعه برش از شبکه در هر زمان ثابت بایستی صفر شود.

حالت خاص: جمع جبری شدت جریان های خارج شده از هر گره مدار، صفر است

$$A \cdot I(t) = 0,$$

با ماتریس وقوع A و بردار شدت جریان های شاخه $I(t)$.



شکل ۲-۳: مثال برای KCL

مثال ۱-۲: برای مثال گره شکل ۲-۳ را با یک شدت جریان وارد شده $i_a(t)$ و دو شدت جریان خارج شده $i_b(t)$ و $i_c(t)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از KCL داریم:

$$-i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0.$$

با اعمال KCL به مدار مثال، بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2-2)$$

به آسانی مشاهده می شود که سطرهای ماتریس وقوع در

(۲-۲) بطور خطی وابسته اند، بنابراین برای مثال می توانیم آخرین سطر ماتریس A را حذف کنیم و یک سیستم خطی از معادلات با ماتریس وقوع تحویل یافته $\tilde{A}$ بدست آوریم.

^۱ Incidence Matrix

^۲ Kirchhoff's Current Law

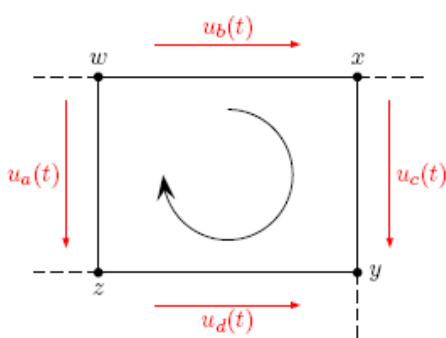
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{:=\tilde{A}} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-2)$$

در گام بعد، ولتاژ شبکه مثال مان را تحلیل می کنیم. از قانون زیر استفاده می کنیم.

قضیه ۲-۲: (قانون ولتاژ کیرشهف^۱ KVL). جمع جبری ولتاژهای داخل هر مدار از شبکه در هر زمان ثابت بایستی برابر صفر باشد. این اغلب برای بدست آوردن رابطه بین ولتاژ شاخه و ولتاژ گره استفاده می شود.

$$A^T \cdot u(t) = U(t), \quad (4-2)$$

با ماتریس وقوع A ، بردار متناظر با ولتاژ شاخه $U(t)$ و بردار متناظر با ولتاژ گره $u(t)$.



شکل ۴-۲: مثال برای KVL

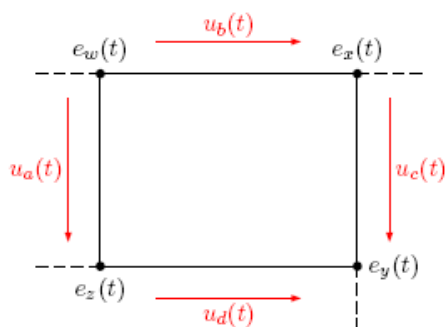
مثال ۲-۲: دور مثال شکل ۴-۲، با دو ولتاژ u_b و u_c در جهت ولتاژ و دو ولتاژ u_a و u_d در عکس جهت را در نظر بگیرید. بنابراین KVL برقرار است و داریم:

$$-u_a(t) + u_b(t) + u_c(t) - u_d(t) = 0.$$

با بدست آوردن رابطه بین ولتاژهای شاخه و ولتاژهای گره می توانیم ولتاژهای شاخه را بصورت دیفرانسیلی از ولتاژهای گره بیان کنیم.

مثال ۳-۲: دوری مشابه دور مثال شکل ۴-۲ را در نظر می گیریم. یک فرمول نویسی هم ارز برای شکل ۵-۲ با استفاده از KVL و بیان ولتاژهای هر شاخه بصورت دیفرانسیلی از پتانسیل های گره، به تناظر گره های وارد شده و خارج شده به صورت زیر می باشد:

^۱ Kirchhoff's Voltage Law



$$u_a(t) = e_w(t) - e_z(t),$$

$$u_b(t) = e_w(t) - e_x(t),$$

$$u_c(t) = e_x(t) - e_y(t),$$

$$u_d(t) = e_z(t) - e_y(t).$$

شکل ۵-۲: مثال برای KVL (فرمول

سازی معادلات)

اکنون ما به هر گره i ($i = 1, \dots, 5$) مدار مثال مان یک پتانسیل گره $e_i(t)$ اختصاص می دهیم با تحلیل ساختار شبکه، نتایج زیر را برای بیان ولتاژهای شاخه $u_j(t)$ ، $j = 1, \dots, 7$ توسط دیفرانسیل هایی از پتانسیل های گره بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{:=A^T} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}. \quad (5-2)$$

نکته ۲-۲: در مثال، معادله (۴-۲) هم ارز با معادله (۵-۲) می شود.

وقتی فقط دیفرانسیل های پتانسیل ها یکتا هستند اما پتانسیل ها خودشان یکتا نیستند، مناسب است که یکی را بعنوان گره مرجع انتخاب کنیم و مجموعه پتانسیل های آنها را صفر در نظر بگیریم. برای شرایط ما مجموعه $e_5(t) = 0$. این بدین معنی است که گره ۵ یک گره مرجع است. در مفروضات مدارمان، سیستم تحویل یافته معادلات $\tilde{A}^T$ را به صورت ماتریس سیستم زیر بدست می آوریم

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{:=\tilde{A}^T} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix}. \quad (6-2)$$

ساختاری از سیستم توسعه یافته: با استفاده از قوانین ترکیب کننده (۱-۲) و دو سیستم خطی معادلات (۳-۲) و (۶-۲) می توانیم همه ولتاژها و برخی شدت جریان ها را با استفاده از جایگزینی حذف کنیم. نظر به اینکه تعداد معادلات برای تشریح تقریباً زیاد است فقط نتایج را بیان می کنیم [۲۳]. معادله زیر بصورت

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_1 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & T & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_1 \end{bmatrix}}_x \quad (7-2)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_V(t) \\ i_I(t) \end{bmatrix}}_u,$$

معادله حالت سیستم است. این معادله بیان می کند که رفتار بردار توسیع یافته x به ورودی سیستم u وابسته است. توجه کنید که E تکین است، بنابراین ما یک سیستم توسیع یافته "حقیقی" داریم. حال به یک معادله برای بردار خروجی y نیاز داریم، که عبارت است از

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_V(t) \\ u_I(t) \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_1 \end{bmatrix}}_x, \quad (8-2)$$

این معادله بیان می کند که شدت جریان در منبع ولتاژ و ولتاژ در منبع شدت جریان $u_I(t)$ به بردار حالت x بستگی دارد. معادلات (7-2) و (8-2)، فرم یک سیستم توسیع یافته را دارند. در ادامه اینها را در یک صورت خیلی معمولی بررسی می کنیم.

۲-۲-۲ کنترل روبات

اکنون مختصراً کاربردی از قضیه کنترل [۲ و ۲۰] را بیان می کنیم. اغلب ورودی سیستم از بی نظمی احتمالی برخوردار است. این بدین معنی است که ورودی به دو قسمت تقسیم می شود. بنابراین به جای $Bu(t)$ قرار می هیم

$$B_1 w(t) + B_2 u(t),$$

که در آن $w(t)$ ورودی است که ممکن است شامل اغتشاش، خطاهای خطی سازی و دینامیک های غیر مدل سازی باشد. بطور مشابه می توانیم خروجی را هم به دو قسمت تفکیک کنیم. به عبارت دیگر بجای

$y(t) = Cx(t) + Dy(t)$ قرار می دهیم

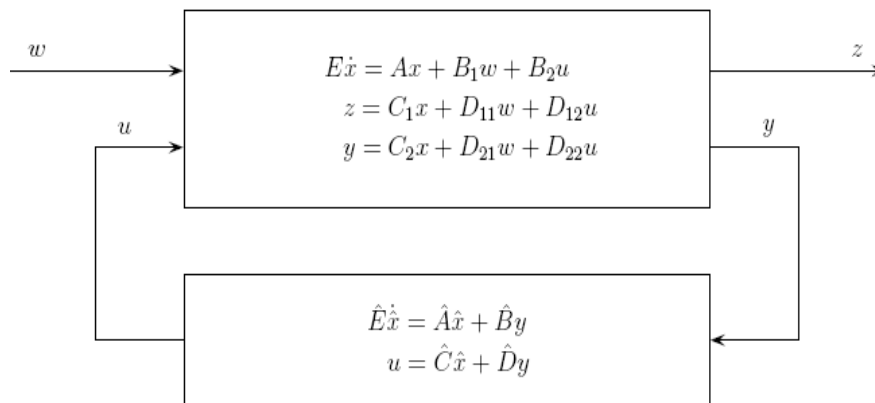
$$z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t),$$

$$y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t),$$

که در آن $z(t)$ معنی یک خروجی تنظیم شده یا یک خطای تخمینی را دارد. حال ورودی های کنترل را توسط خروجی های سنجیده سیستم، که بطور دینامیکی تحت تأثیر رفتار سیستم قرار گرفته اند تعیین می کنیم. این کار توسط کنترل گر دینامیکی به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۲ انجام می شود که یک سیستم توسیع یافته به فرم زیر است:

$$\hat{E}\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}y(t),$$

$$u(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}y(t).$$



شکل ۶-۲: نمودار حلقه بسته ی یک سیستم توسیع یافته و کنترل گر

هدف از کنترل روبات، پیدا کردن یک کنترل گر است که در آن، سیستم حلقه بسته ی حاصل از سیستم اولیه و کنترل گر شکل ۶-۲ که w ورودی و z خروجی است دارای ویژگی های زیر باشد:

(i) سیستم کنترل نشده بطور داخلی پایا باشد، به عبارت دیگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) \quad \hat{x}(t)]^T = 0 \quad \forall w(t) \equiv 0.$$

(ii) "اندازه ۱" آن برای بدترین حالت مؤثر ناشی از کوچکترین آشفتگی ممکن، کوچک باشد. منظور از اندازه، H_∞ -نرم متناظر با تابع انتقال است که یک حالت خاص L_∞ -نرم می باشد. این عبارات را بطور صریح در آینده تعریف می کنیم.

۳-۲ تعاریف پایه ای برای سیستم های توسیع یافته

در این پایان نامه ما سیستم توسیع یافته ناورداى زمانى خطى^۱ (LTI) را به صورت

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (9-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

برای زمان های پیوسته $t \in \mathbb{R}$ یا

$$Ex(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (10-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

برای زمان های گسسته $t \in \mathbb{Z}$ در نظر می گیریم که در آن $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y(t) \in \mathbb{R}^p$. توجه کنید که ماتریس E مجاز است تکین باشد.

تعریف ۳-۲ [۱۱]: یک سیستم توسیع یافته LTI را در نظر بگیرید

۱- معادلات اول (۹-۲) و (۱۰-۲) بطور متناظر معادلات حالت، و دومی ها معادلات خروجی یا ناظر نامیده می شوند.

۲- بردارها به صورت زیر نامگذاری می شوند:

- $x(t)$ بردار توسیع یافته
- $u(t)$ بردار کنترل یا ورودی
- $y(t)$ بردار خروجی

۳- ماتریس های موجود در سیستم به صورت زیر تعریف می شوند

- E ماتریس توسیع یافته
- A ماتریس حالت
- B ماتریس کنترل یا ورودی
- C و D ماتریس های خروجی

۴- عدد متغیر توسیع یافته، یعنی طول $x(t)$ ، رتبه سیستم توسیع یافته نامیده می شود.

۵- اندیس پوچ توانی ماتریس N در فرم کانونیکال وایرشراس مداد ماتریس $A - \lambda E$ ، اندیس جبری (یا فقط اندیس) نامیده می شود.

گاهی وقت ها شایسته است که سیستم بالا را به صورت یک ۵-تایی $(E; A, B, C, D)$ نشان دهیم. توجه کنید

از آنجا که ماتریس E می تواند تکین باشد، باز هم ممکن است سیستم ها در کنار معادلات دیفرانسیلی یا تفاضلی شامل معادلات جبری نیز باشند.

تعریف ۴-۲: (هم ارزی سیستم محدود^۱ $[10]$). دو سیستم $(E; A, B, C, D)$ و $(\tilde{E}; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ هم ارز سیستم محدود نامیده می شوند، اگر علاوه بر اینکه رتبه، عدد ورودی و خروجی شان مساوی باشد، ماتریس های ناتکین P و Q به گونه ای وجود داشته باشند که $\tilde{E} = PEQ, \tilde{A} = PAQ, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CQ, \tilde{D} = D$.

نکته ۳-۲: یک تغییر و تبدیل بین دو سیستم r.s.e از طریق ماتریس های ناتکین P و Q باز هم یک تبدیل فضای حالت تعمیم یافته نامیده می شود.

نکته ۴-۲: در بخش های بعدی نشان می دهیم که دو سیستم هم ارز سیستم محدود، تابع انتقال مشابه دارند و بدین ترتیب رفتارشان یکسان است.

یک ویژگی خیلی مهم سیستم های دینامیکی پایداری مجانبی آنها است.

تعریف ۵-۲: (پایداری مجانبی^۲ $[10]$ و $[25]$). سیستم توسعه یافته $(9-2)$ یا $(10-2)$ بطور مجانبی پایدار است اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ برای همه جواب های x از سیستم کنترل نشده $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ یا بطور متناظر $Ex(t+1) = Ax(t)$.

پایداری مجانبی همچنین می تواند توسط شروط معینی که بایستی برای مداد ماتریس حفظ شوند نیز بیان می شود.

قضیه ۳-۲ [۲۷]: (شروط هم ارز برای پایداری مجانبی). شروط زیر هم ارزند:

- (i) سیستم توسعه یافته $(9-2)$ یا $(10-2)$ مجانباً پایدار است.
- (ii) در حالت پیوسته زمانی، همه مقادیر ویژه منتهای $A - \lambda E$ در نیم صفحه باز چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند به عبارت دیگر $\Lambda(A, E) \subset \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ ؛ در حالت گسسته زمانی، همه مقادیر ویژه منتهای $A - \lambda E$ روی قرص واحد قرار داشته باشند، به عبارت دیگر $\Lambda(A, E) \subset D_1^0(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

۴-۲ حل یک سیستم توسعه یافته

در این بخش برای مسیر حل سیستم های توسعه یافته برخی فرمول ها و اختلاف عمده با سیستم های استاندارد را بیان می کنیم، در بخش بعد به مفاهیم کنترل پذیری و مشاهده پذیری نیاز داریم [۲۶].

^۱ Restricted System Equivalence

^۲ Asymptotic Stability

سیستم توسعه یافته (۹-۲) را در نظر می گیریم، و تبدیل فضای حالت تعمیم یافته را طوری انجام می دهیم که مداد ماتریس $A - \lambda E$ به فرم کانونیکال وایرستراس تبدیل شود (قضیه ۱-۶ را ببینید). با استفاده از تعریف ۴-۲ یک سیستم r.s.e بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= Jx_1(t) + B_1u(t), \\ N\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{۱۱-۲}$$

که در آن J و N در فرم کانونیکال جردن هستند و N پوچ توان با اندیس پوچ توانی v می باشد، و

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Q^{-1}x(t), \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB, \quad [C_1 \ C_2] = CQ,$$

با ماتریس تبدیل P و Q . سیستم (۱۱-۲) به دو زیر سیستم تبدیل می شود

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= Jx_1(t) + B_1u(t), \\ y_1(t) &= C_1x_1(t),\end{aligned}\tag{۱۲-۲}$$

و

$$\begin{aligned}N\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2u(t), \\ y_2(t) &= C_2x_2(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{۱۳-۲}$$

که به ترتیب زیر سیستم کند و سریع معادله (۱۱-۲) نامیده می شوند. زیر سیستم کند (۱۲-۲) یک سیستم استاندارد است از این رو، به ازای هر مقدار اولیه $x_1(0)$ و هر ورودی قطعه وار پیوسته $u(t)$ یک جواب منحصر بفرد به صورت زیر دارد:

$$x_1(t) = e^{Jt}x_1(0) + \int_0^t e^{J(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau.\tag{۱۴-۲}$$

برای زیر سیستم سریع، یک صورت از ساختار دیفرانسیل آن را بدست می آوریم. فرض کنید u ، بطور قطعه وار پیوسته v بار مشتق پذیر باشد. با فرض، بطور پیوسته مشتق پذیری دو طرف رابطه (۱۳-۲) نسبت به t ، و همچنین ضرب دو طرف از چپ در ماتریس N ، بدست می آوریم [۱۰]:

$$\begin{aligned}N\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2u(t), \\ N^2\ddot{x}_2(t) &= N\dot{x}_2(t) + NB_2\dot{u}(t), \\ &\vdots\end{aligned}\tag{۱۵-۲}$$

$$N^v x_2^{(v)}(t) = N^{v-1} x_2^{(v-1)}(t) + N^{v-1} B_2 u^{(v-1)}(t),$$

با توجه به پوچ توانی N داریم $N^v = 0$ و رابطه بازگشتی، حلی از زیر سیستم سریع به صورت زیر به دست می آید:

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{v-1} N^i B_2 u^{(i)}(t). \quad (16-2)$$

با مقایسه (14-2) و (16-2) می بینیم که $x_1(t)$ نشان دهنده یک اثر تراکمی روی بازه $0 \leq \tau \leq t$ ، در حالی که $x_2(t)$ فقط مبتنی بر مقادیر u و مشتق های آن در لحظه های ثابتی از زمان t می باشد. بر اساس همین ویژگی ها سیستم های (12-2) و (13-2) به ترتیب زیر سیستم کند و سریع نامیده می شوند.

نکته 2-5: حل سیستم های گسسته زمانی از فرم (10-2) نیز کاملاً مشابه است. می دانیم که حل زیر سیستم کند با مقدار اولیه $x_1(0)$ به صورت زیر می باشد [11].

$$x_1(t) = J^t x_1(0) + \sum_{i=0}^{t-1} J^{t-1-i} B_1 u(i).$$

برای محاسبه جواب زیر سیستم سریع مجبوریم i -مین مشتق $x_2(t)$ و $u(t)$ در (15-2) را به ترتیب با $x_2(t+1)$ و $u(t+1)$ جایگزین کنیم. داریم:

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{v-1} N^i B_2 u(t+i),$$

در این روش حل $x_2(t)$ در زمان مفروض به ورودی های بعدی وابسته است، اگر برای هر $i > 0$ ، $N^i B_2 \neq 0$ آنگاه زیر سیستم توسعه یافته اصلی غیر سببی نامیده می شود. در غیر این صورت، اگر حل در زمان t فقط به ورودی های قبلی وابسته باشد سیستم سببی نامیده می شود.

2-5 کنترل پذیری و مشاهده پذیری یک سیستم توسعه یافته

در این بخش قصد داریم برخی قوانین مهم پیرامون کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم های توسعه یافته را معرفی کنیم. با توجه به اینکه ما فقط کنترل پذیری و مشاهده پذیری کامل را نیاز داریم، در ادامه این بخش فقط به توصیف آنها می پردازیم. یک منبع خوب برای این کار در [26] و همچنین یک مقدمه جزئی در [10] می تواند یافت شود.

تعریف 2-6: (C-کنترل پذیری). سیستم (9-2) کنترل پذیر کامل¹ (C-کنترل پذیر) گفته می شود، اگر برای هر $w \in \mathbb{R}^n$ و شرط اولیه $x(0) \in \mathbb{R}^n$ و هر زمان مفروض $t_1 > 0$ ، کنترل v مشتق قطعه وار پیوسته ای $u \in \mathcal{C}_p^v$ وجود داشته باشد بطوری که $x(t_1) = w$.

¹ Completely Controllable

در مطابقت با سیستم های استاندارد، می توانیم شرایط هم ارزی را برای C-کنترل پذیری یک سیستم فرموله کنیم:

قضیه ۴-۲ [۱۰]: (شرایط هم ارزی برای C-کنترل پذیری). گزاره های زیر هم ارزند:

- (i) سیستم (۹-۲) C-کنترل پذیر است؛
- (ii) هر دو زیر سیستم کند و سریع C-کنترل پذیرند؛
- (iii) $rank[sE - A \ B] = n$ برای هر $s \in \mathbb{C}$ و $rank[E \ B] = n$ ■

نکته ۴-۲: می توان نشان داد که زیر سیستم کند (۹-۲) C-کنترل پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $s \in \mathbb{C}$ ، $rank[sE - A \ B] = n$ و زیر سیستم سریع آن C-کنترل پذیر است اگر و فقط اگر $rank[E \ B] = n$. C-کنترل پذیری زیر سیستم سریع اغلب "کنترل پذیری در بینهایت"^۱ نیز گفته می شود [۱۰].

تعریف ۷-۲: (C-مشاهده پذیری). سیستم (۹-۲) مشاهده پذیر کامل^۲ (C-مشاهده پذیر) گفته می شود، اگر شرط اولیه ی $x(0)$ بتواند بطور منحصر بفرد از $u(t)$ و $y(t)$ ، $0 \leq t < \infty$ تعیین شود. همچنین شروط هم ارز برای این ویژگی در قضیه بعد خلاصه می شوند.

قضیه ۵-۲ [۱۰]: (شرایط هم ارزی برای C-مشاهده پذیری). گزاره های زیر هم ارزند:

- (i) سیستم (۹-۲) C-مشاهده پذیر است؛
- (ii) هر دو زیر سیستم کند و سریع C-مشاهده پذیرند؛
- (iii) $rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ و $rank \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n$ برای هر $s \in \mathbb{C}$ ■

نکته ۷-۲: می توان نشان داد که زیر سیستم کند (۹-۲) C-مشاهده پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $s \in \mathbb{C}$ ، $rank \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n$ و زیر سیستم سریع آن C-مشاهده پذیر است اگر و فقط اگر $rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$. C-مشاهده پذیری زیر سیستم سریع اغلب "مشاهده پذیری در بینهایت"^۳ نیز گفته می شود [10].

نکته ۸-۲: وقتی سیستم به صورت گسسته زمانی از فرم (۱۰-۲) در نظر گرفته می شود، شرط مشتق پذیری تعریف ۶-۲ حذف می شود. در مقابل مجبوریم فرض کنیم که در زمان مشخص مفروض t کنترل $u(t+i)$ قبلا برای $i = 1, \dots, v-1$ مشخص شده است. حکم های دیگر بدون محدودیت برای سیستم های گسسته زمانی به خوبی حفظ می شوند.

^۱ Controllability At Infinity

^۲ Completely Observable

^۳ Observability At Infinity

۲-۶ دامنه فراوانی تحلیلات

اغلب بررسی یک سیستم توسیع یافته در دامنه فراوانی خیلی معمول است. این روند مخصوصا در میان مهندس ها خیلی عمومیت دارد [۱۰ و ۲۶].

۲-۶-۱ تبدیلات لاپلاس و تابع انتقال

مجددا ابتدا سیستم توسیع یافته را به صورت نوردای زمانی خطی و پیوسته زمانی در نظر می گیریم.

تعریف ۲-۸: (تبدیلات لاپلاس)^۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع مفروض باشد. تابع $L\{f\}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ که به صورت

$$L\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

تعریف می شود تبدیل لاپلاس f نامیده می شود، اگر این انتگرال وجود داشته باشد.

در ادامه دو ویژگی از تبدیلات لاپلاس را که مستقیما از تعریف نتیجه می شوند، بیان می کنیم:

۱- اگر $h = \alpha f + \beta g$ آنگاه $L\{h\} = \alpha L\{f\} + \beta L\{g\}$ برای تابع دلخواه f, g و ثابت های $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

۲- اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد و $g = f'$ آنگاه $L\{g\}(s) = sf - f(b)$

استفاده از تبدیلات لاپلاس به هر یک از بردارهای x, u و y از سیستم توسیع یافته (۲-۹) و تعریف $Y := L\{y\}, U := L\{u\}, X := L\{x\}$ بدست می آوریم:

$$sEX(s) - Ex(0) = AX(s) + BU(s), \quad (2-17)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

با فرض منظم بودن مداد ماتریس $A - \lambda E$ می توانیم X را از (۲-۱۷) حذف کنیم و بدست آوریم:

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}(Ex(0) + BU(s)) + DU(s).$$

با در نظر گرفتن $Ex(0) = 0$ به عبارت دیگر $x(0) \in \ker E$ رابطه ورودی خروجی زیر را بدست می آوریم:

$$Y(s) = (C(sE - A)^{-1}B + D)U(s).$$

تعریف ۲-۹: (تابع انتقال)^۲. تابع

$$G(s) := C(sE - A)^{-1}B + D$$

^۱ Laplace Transform

^۲ Transfer Function

تابع انتقال سیستم توسعه یافته (۲-۹) نامیده می شود.

اغلب تابع انتقال در مقدارهای $i\omega$ برآورد می شود. وقتی w تعبیر فیزیکی یک دنباله را دارد. در اینجا اغلب از w زیر استفاده می کنیم [۲۶].

لم ۱-۲: (پایایی تابع انتقال). فرض کنید $(E; A, B, C, D) \rightarrow (PEQ; PAQ, PB, CQ, D) := (\tilde{E}; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ تعمیمی از تبدیل فضای حالت باشد. آنگاه سیستم های $(E; A, B, C, D)$ و $(\tilde{E}; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ تابع انتقال مشابه دارند. به تعبیری دیگر، دو سیستم r.s.e توابع انتقال مشابه دارند.

اثبات: روابط زیر برای توابع انتقال متناظر برقرارند:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &:= \tilde{C}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D \\ &= CQ(P(sE - A)Q)^{-1}PB + D \\ &= CQQ^{-1}(sE - A)^{-1}P^{-1}PB + D \\ &= C(sE - A)^{-1}B + D = G(s).\end{aligned}$$

■

یک ویژگی خاص سیستم های توسعه یافته این است که حتی اگر قطب ها روی محور موهومی نباشند، ممکن است تابع انتقال روی iR کراندار نباشد.

مثال ۲-۴: تابع انتقال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}G(s) &= [1 \quad 1 \quad 1] \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -s + 2 + \frac{1}{s-1},\end{aligned}$$

به آسانی مشاهده می کنیم که $\lim_{w \rightarrow \infty} |G(iw)| = \infty$.

این تعریف زیر را در پی دارد.

تعریف ۱-۲: (تابع انتقال اکیدا سره/ناسره). تابع انتقال G سره نامیده می شود، اگر $\lim_{w \rightarrow \infty} \|G(iw)\| < \infty$ و اکیدا سره است اگر $\lim_{w \rightarrow \infty} \|G(iw)\| = 0$ به ازای هر نرم ماتریسی القایی $\|\cdot\|$. در غیر اینصورت ناسره نامیده می شود [۲۶].

بنابراین با داشتن یک روش عددی، امتحان سره یا ناسره بودن یک سیستم توسعه یافته مفروض

$(E; A, B, C, D)$ امکان پذیر است. .

تعریف ۱۱-۲: $(L_\infty\text{-نرم})$. برای ماتریس F ، L_∞ به صورت زیر تعریف می شود

$$\|F\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(F(iw))$$

بطوری که $\sigma_{\max}(M)$ ماکزیمم مقدار تکین ماتریس M است و $\operatorname{ess\,sup}_{t \in N} h(t)$ سوپریمم اساسی تابع h برآورده شده روی مجموعه N می باشد.

فصل سوم

تخصیص پس خورد برای سیستم های

توسیع یافته منظم

۳-۱ مقدمه

معرفی سیستم های دینامیکی باعث به وجود آمدن مدل های توسیع یافته ناوردای زمانی خطی (فضای حالت تعمیم یافته) از فرم

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad (۱-۳)$$

$$y = Cx. \quad (۲-۳)$$

می باشد، که در آن $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u \in \mathbb{R}^m$ ، $y \in \mathbb{R}^p$ و $\dot{x} = dx/dt$. برای سهولت در نماد گذاری، یک سیستم توسیع یافته از فرم (۱-۳) – (۲-۳) به صورت (E, A, B, C) تعریف می شود.

ما کنترل پس خورد سیستم را از نوع خروجی گزاره ای و مشتق به صورت

$$u = Fy + G\dot{y} + v = FCx + GC\dot{x} + v,$$

که در آن $F, G \in \mathbb{R}^{m \times p}$. با سیستم حلقه بسته داده شده داریم:

$$(E + BGC)\dot{x} = (A + BFC)x + Bv. \quad (۳-۳)$$

کنترل پس خورد خروجی گزاره ای، حالت خاص $G=0$ ، کنترل پس خورد خروجی مشتق، حالت خاص $F=0$ و کنترل پس خورد حالت مستقیم $C=0$ می باشد.

پاسخ یک سیستم توسیع یافته می تواند در قالب ساختار ویژه ی مداد ماتریسی $\alpha E - \beta A$ توصیف شود. مداد و سیستم متناظر (۱-۳) – (۲-۳) منظم گفته می شوند اگر $\det(\alpha E - \beta A) \neq 0$ برای $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

برای همه کنترل های $u(t)$ به اندازه کافی هموار و شرایط اولیه سازگار $x(t_0)$ همه سیستم های منظم یک جواب قابل قبول دارند [۶، ۱۰ و ۳۳].

برای مدادهای منظم، مقادیر ویژه تعمیم یافته زوجی از $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ هستند که در آن $\det(\alpha E - \beta A) \neq 0$. اگر $\beta \neq 0$ آنگاه زوج معرف مقدار ویژه متناهی $\lambda = \alpha/\beta$ و اگر $\beta = 0$ آنگاه (α, β) معرف یک مقدار ویژه نامتناهی است.

تعریف ۳-۱: ماتریس مولد، یکامتعامد، ستونی فضای پوچ راست ماتریس M را توسط $S_\infty(M)$ و ماتریس مولد یکامتعامد ستونی فضای پوچ چپ ماتریس M را با $T_\infty(M)$ نمایش می دهیم.

توجه کنید که تعیین این ماتریس ها یکتا نیست هر چند مطابق فضاها هستند.

برای مدادهای منظم جواب معادلات سیستم می تواند در قالب فرم کانونیکال وایرستراس توصیف شود.

تعریف ۳-۲: اندیس مداد، اندیس توان پوچ ماتریس پوچ توان N در فرم کانونیکال وایرستراس است. به عبارت دیگر مداد از اندیس v است اگر $N^{v-1} \neq 0$ و $N^v = 0$ بر طبق قرارداد، اگر E نامفرد باشد مداد از اندیس صفر گفته می شود. یک سیستم توسعه یافته، منظم و از اندیس حداکثر ۱ است اگر فقط اگر دقیقاً $q = \text{rank}(E)$ مقدار ویژه متناهی داشته باشد.

تعریف ۳-۳: اگر یک سیستم توسعه یافته توسط پس خورد بتواند به یک سیستم حلقه بسته منظم با اندیس حداکثر ۱ تبدیل شود آنگاه سیستم، منظم پذیر^۱ گفته می شود. منظم پذیری، سیستمی را توصیف می کند که با استفاده از پس خورد بتواند منظم شود.

لم زیر خصوصیات مهم منظم بودن و اندیس ۱ مداد را بیان می کند.

لم ۳-۱۸: عبارات زیر هم ارزند:

۱. مداد $\alpha E - \beta A$ منظم و از اندیس حداکثر ۱ است.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} E \\ T_{\infty}^T(E)A \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(E + T_{\infty}(E)T_{\infty}^T(E)A) = n \quad ۲.$$

$$\text{rank}([E, AS_{\infty}(E)]) = \text{rank}(E + AS_{\infty}(E)S_{\infty}^T(E)) = n \quad ۳.$$

$$T_{\infty}^T(E)AS_{\infty}(E) \text{ ناتکین است.} \quad ۴.$$

۵. اگر

$$U^T E V = \begin{pmatrix} r & n-r \\ U_1 & U_2 \end{pmatrix}^T E \begin{pmatrix} r & n-r \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار تکین E (با ماتریس متعامد $U, V \in R^{n \times n}$ و ماتریس قطری نا تکین $\Sigma_r \in R^{r \times r}$) باشد

آنگاه ماتریس $(n-r) \times (n-r)$ $A_{22} = U_2^T A V_2$ ناتکین است. ■

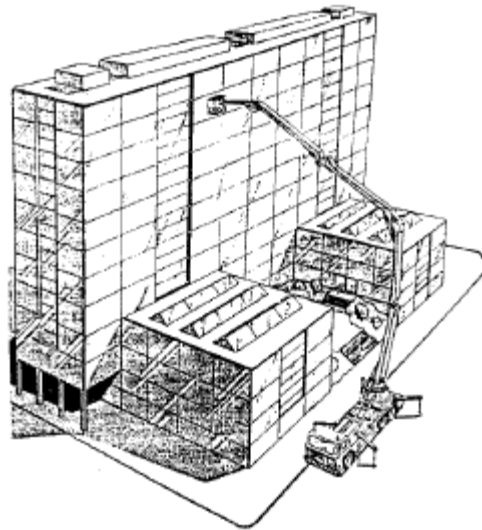
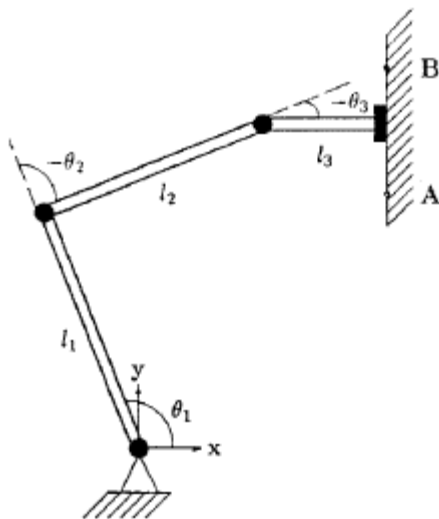
۳-۲ دو مثال :

مثال های کاربردی زیادی از دو سیستم توسعه یافته گسسته زمانی و پیوسته زمانی وجود دارد . در اینجا دو نمونه مدل را بیان می کنیم. اولی مدلی از یک دست ماشینی چند پیونده^۲ که معرف روبات خودکار تمیز کردن پنجره هاست [۱۴] و دیگری یک مدل از مدار الکتریکی ساده [۱۰] است.

مثال ۳-۱: یک مدل خطی ساده شده ی دست ماشینی متحرک سه پیونده دو بعدی (شکل ۳-۱) را در نظر بگیرید

^۱ Regularizable

^۲ Multi-link constrained manipulator



شکل ۳-۱: دست ماشینی سیال سه پیونده

معادلات لاگرانژین حرکت به صورت زیر فرض شده است

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = u + F^T \mu,$$

$$\psi(\theta) = 0.$$

که در آن $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$ بردار جابجایی های اتصالات و $u \in \mathbb{R}^3$ بردار کنترل گشتاورهای اتصالات است، $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ماتریس جرم و $C \in \mathbb{R}^3$ بردار گریز از مرکز و $G \in \mathbb{R}^3$ بردار ثقل (جاذبه زمین) می باشد تابع محدودیت ψ هم به صورت زیر فرض شده است.

$$\psi(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}.$$

$F = \partial\psi/\partial\theta$ ، $\mu \in \mathbb{R}^2$ معرف ضریب لاگرانژ و $F^T \mu$ نیروی محدودیت تعمیم یافته می باشد. بازنویسی سیستم در دستگاه مختصات دکارتی و بازدهی خطی مدل به صورت

$$M_0 \delta \dot{z} + D_0 \delta \dot{z} + K_0 \delta z = S_0 \delta u + F_0^T \delta \mu,$$

$$F_0 \delta z = 0.$$

بدست می آید [۱۴].

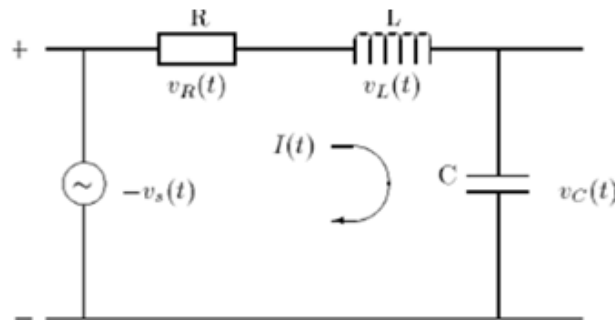
حال فرض کنید $x = \begin{bmatrix} \delta z \\ \delta \dot{z} \\ \delta \mu \end{bmatrix}$ و $u = \delta u$ ، یک سیستم توسعه یافته به شکل

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -K_0 & -D_0 & F_0^T \\ F_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ S_0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

به دست می آید.

سرانجام می توان خروجی $y = Cx$ را به سیستم اضافه کرد.

مثال ۲-۳: این مثال یک مدار الکتریکی RLC ساده است (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳: یک مدار الکتریکی ساده

منبع ولتاژ $V_s(t)$ ورودی کنترل است، R ، L و C به ترتیب مقاومت، ضریب خودالقایی و ظرفیت الکتریکی (توان) می باشند. به تناظر ولتاژهای کاهش یافته به ترتیب تعریف می شوند توسط $v_C(t)$ ، $v_L(t)$ ، $v_R(t)$ و I هم شدت جریان می باشد. با توجه به قوانین کیرشهف معادله مدار زیر را بدست می آوریم.

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{v}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \\ \dot{v}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ v_L(t) \\ v_C(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v_s(t).$$

اگر ولتاژ خازن را خروجی فرض کنیم، معادله خروجی به صورت زیر است.

$$Y(t) = Cx(t) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]x(t).$$

۳-۳ شرط های کنترل پذیری و مشاهده پذیری

سیستم توسعه یافته (۳-۱) و (۲-۳) مفروض است، شروط زیر را در نظر بگیرید

$$C_0: \text{rank}[\alpha E - \beta A, B] = n \text{ for all } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$$

$$C_1: \text{rank}[\lambda E - A, B] = n \text{ for all } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4-3)$$

$$C_2: \text{rank}[E, AS_\infty(E), B] = n.$$

برای سیستم هایی که منظم هستند، این شروط کنترل پذیری آنها را مشخص می کند.

اگر $\alpha E - \beta A$ یک مداد منظم باشد آنگاه سه تایی (E, A, B) و بطور متناظر سیستم توسعه یافته کاملاً کنترل پذیر یا C -کنترل پذیر گفته می شود، اگر و فقط اگر C_0 برقرار باشد. یک سیستم توسعه یافته در شرط C_0 صدق می کند، به عبارت دیگر کاملاً کنترل پذیر است تنها اگر

$$\text{rank}[E, B] = n. \quad (5-3)$$

اگر برای هر حالت اولیه و نهایی مفروض x_0 و x_f یک کنترل قابل قبول وجود داشته باشد که x_0 را در زمان متناهی به x_f انتقال دهد کنترل پذیر کامل بدست می آید. بنابراین می توان انتظار داشت سیستم هایی که کاملاً کنترل پذیرند، ویژگی های مشابهی با سیستم های استاندارد داشته باشند.

اگر $\alpha E - \beta A$ یک مداد منظم باشد آنگاه سه تایی (E, A, B) و بطور متناظر سیستم توسعه یافته کنترل پذیر قوی یا S -کنترل پذیر گفته می شود، اگر و فقط اگر شروط C_1 و C_2 برقرار باشند. اگر سیستم در یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ از بعد $\text{rank}[E, B]$ کاملاً کنترل پذیر باشد کنترل پذیر قوی بدست می آید (فضای جواب).

ما اظهار می کنیم که C -کنترل پذیری S -کنترل پذیری را در بر دارد. به وضوح شرط C_1 از شرط C_0 بدست می آید، برای هر $\beta \neq 0$ و $\lambda = \alpha/\beta$. شرط C_2 نیز از شرط (5-3) بدست می آید ولی ضعیف است.

سیستم های منظمی که در شرط C_2 صدق می کنند کنترل پذیر در بی نهایت یا کنترل پذیر ضربه ای نامیده می شوند. این سیستم ها توسط یک پس خورد خطی مناسب می توانند از حالت اغتشاش خارج شوند. شرط C_2 به طور بسته مربوط به شرط دوم لم 3-1 است که سیستم های منظم از اندیس حداکثر را مشخص می کند. یک سیستم منظم از اندیس حداکثر 1 کنترل پذیر در بی نهایت است.

مشاهده پذیری سیستم های توسعه یافته را به صورت شروط زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} O_0: \text{rank} \begin{bmatrix} \alpha E - \beta A \\ C \end{bmatrix} &= n \text{ for all } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \\ O_1: \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} &= n \text{ for all } \lambda \in \mathbb{C}, \\ O_2: \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ T_{\infty}^T(E)A \\ C \end{bmatrix} &= n. \end{aligned} \quad (6-3)$$

اگر $\alpha E - \beta A$ یک مداد منظم باشد آنگاه سه تایی (E, A, B) و بطور متناظر سیستم توسعه یافته، کاملاً مشاهده پذیر یا C -مشاهده پذیر گفته می شود، اگر و فقط اگر O_0 برقرار باشد. یک سیستم توسعه یافته در شرط O_0 صدق می کند، به عبارت دیگر کاملاً مشاهده پذیر است تنها اگر

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (۷-۳)$$

اگر $\alpha E - \beta A$ یک مداد منظم باشد آنگاه سه تایی (E, A, B) و بطور متناظر سیستم توسعه یافته مشاهده پذیر قوی یا S -مشاهده پذیر است اگر O_1 و O_2 برقرار باشد. یک سیستم منظم که شرط O_2 در آن برقرار باشد مشاهده پذیر در بی نهایت یا مشاهده پذیر ضربه ای گفته می شود.

به وضوح C -مشاهده پذیری S -مشاهده پذیری را در بر دارد.

توجه کنید که شرط های $(۴-۳)$ - $(۶-۳)$ نسبت به تبدیلات هم ارز سیستم و نسبت به پس خورد حالت و خروجی پایدار هستند. به عبارت دیگر اگر سیستم در شروط C_0, C_1 یا C_2 صدق کند آنگاه برای هر $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ نامنفرد و برای هر $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ سیستم $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ با تعریف

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E} &= UEV, \quad \tilde{A} = UAV, \quad \tilde{B} = UBW, \\ &\text{یا} \\ \tilde{E} &= E, \quad \tilde{A} = A + BF, \quad \tilde{B} = B, \\ &\text{یا} \\ \tilde{E} &= E, \quad \tilde{A} = A + BFC, \quad \tilde{B} = B, \end{aligned} \right\} \quad (۸-۳)$$

نیز در شروط C_0, C_1 یا C_2 صدق می کند. خواص مشابه برای O_0, O_1 و O_2 برقرار است. شروط C_0, C_1, O_0 نیز برای هر $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ نسبت به تبدیلات پس خورد حالت و خروجی از فرم

$$\tilde{E} = E + BG, \quad \tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = B,$$

یا

$$\tilde{E} = E + BGC, \quad \tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = B,$$

پایدار هستند. توجه کنید که ممکن است شرط C_2 نسبت به پس خورد مشتق پایدار نباشد، مثال زیر این موضوع را نشان می دهد.

مثال ۳-۳: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

که در آن $[E, AS_\infty(E), B]$ رتبه کامل و سیستم منظم است، بنابراین کنترل پذیر در بینهایت است. با پس خورد $G = I$ بدست می آوریم:

$$E + BGC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\infty}(E + BGC) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

9

$$\text{rank}[E + BGC, AS_{\infty}(E + BGC), B] = 2,$$

پس شرط C_2 نسبت به پس خورد مشتق پایدار نیست.

یک مثال مشابه نشان میدهد که شرط O_2 هم نسبت به پس خورد مشتق پایدار نیست.

در این بخش ما حالت هایی را که منجر به کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم های توسیع یافته می شوند را معرفی می کنیم. کنترل پذیری و مشاهده پذیری مستلزم منظم بودن سیستم و در مجموع برقراری شرط های (۴-۳) و (۶-۳) می باشد. در اینجا منظم بودن سیستم حلقه بسته مفروض است.

در بخش بعد ما صورت های فشرده^۱ ای را امتحان می کنیم که هدف از سیستم و طرح پس خورد آن را تصریح می کند.

برخلاف صورت کانونیکال وایرستراس، صورت های فشرده توسط الگوریتم های معتبر عددی قابل محاسبه اند.

۳-۴ صورت های فشرده:

تبدیلات هم ارز (۸-۳) می تواند جهت ساده سازی سیستم به صورت های کانونیکال و فشرده که ویژگی های کنترل پذیری و مشاهده پذیری را تصریح می کند استفاده شود. این بخش، صورت های فشرده نسبت به تبدیلات هم ارز متعامد را نشان می دهد. بخش بعد چگونگی استفاده از این صورت ها را با امتحان اینکه آیا سیستم می تواند منظم شود و همچنین چگونگی مینیمم سازی اندیس را نشان می دهد. همچنین پس خورد های منظم ساز هم می توانند از صورت های فشرده بدست آیند.

ما صورت های فشرده ای شبیه صورت شور برای ماتریس ها، نسبت به هم ارزی یکانی [۱۳] یا فرم پلکانی [۳۱] را پیدا می کنیم. این نوع صورت های فشرده بیشتر در مسائل مربوط به پایداری ظاهر می شوند. آنها می توانند با استفاده از الگوریتم هایی که به طور عددی در جهت خطای گرد کردن پایا هستند، محاسبه شوند. صورت فشرده محاسبه شده، همان چیزی است که با استفاده از حساب دقیق یک اختلال کوچک خطای گرد کردن سیستم اولیه بدست می آید.

ما سه صورت فشرده از این نوع را بیان می کنیم. در همه این صورت ها برای سادگی فرض می کنیم که B و C^T رتبه ستونی کامل اند. اگر این حالت برقرار نباشد آنگاه با معرفی بردارهای ورودی، خروجی جدید به آسانی می توان این حالت را ایجاد کرد.

در اینجا Σ_j نماد ماتریس قطری $j \times j$ نامنفرد میباشد و همچنین O را ماتریس صفر از هر بعدی تعریف می کنیم.

ما با استفاده از یک دنباله محدود، از تجزیه مقدار تکین و تعیین رتبه زیر ماتریس های تبدیل شده E, A, B و C ، اثبات ها را به طور واضح به الگوریتم های عددی انتقال می دهیم و روش های پایای عددی را برای محاسبه فرم های فشرده بدست می آوریم.

از این رو، الگوریتم های عددی بایستی بعدهای ماتریس را از رتبه های زیر ماتریس ها بدست آورند. این یک برنامه متفاوت است، زیرا اختلالات کوچک دلخواه یک ماتریس رتبه ناقص، ممکن است رتبه آن را تغییر دهد. هر عدم اطمینان از اطلاعات، هر خطای گرد کردن، ممکن است رتبه را پیچیده و مبهم کند. یک راه خیلی مطمئن تعیین رتبه ماتریس $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $m \geq n$ این است که با استفاده از یک روش عددی مطمئن مقادیر تکین $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ محاسبه شوند [۱۵]، در نتیجه تعداد مقادیر تکین ناصفر، رتبه (عددی) ماتریس می باشد.

فرم فشرده اول در قضیه زیر معرفی شده است [۴].

قضیه ۳-۱ [۴]: فرض کنید $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ بطوری که B و C به ترتیب رتبه ستونی و سطری کامل اند. آنگاه ماتریس های متعامد $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $Y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ وجود دارند که در آن:

$$U^T EV = \begin{matrix} t_1 & n-t_1 \\ n-t_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9-3)$$

$$U^T BW = \begin{matrix} & k_1 & k_2 \\ t_1 & & \\ t_2 & & \\ t_3 & & \\ n-t_1-t_2-t_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \\ B_{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10-3)$$

$$Y^T CV = \begin{matrix} t_1 & s_2 & t_5 & n-t_1-s_2-t_5 \\ l_1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ l_2 & C_{21} & 0 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11-3)$$

$$U^T AV = \begin{matrix} & t_1 & s_2 & t_5 & t_4 & t_3 & s_6 \\ t_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ t_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ t_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \Sigma_{t_3} & 0 \\ t_4 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \Sigma_{t_4} & 0 & 0 \\ t_5 & A_{51} & 0 & \Sigma_{t_5} & 0 & 0 & 0 \\ t_6 & A_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad (12-3)$$

ماتریس B_{12} رتبه ستونی کامل و C_{21} رتبه سطری کامل می باشند و ماتریس های

$$\begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} \in C^{k_1 \times k_1}, [C_{12} \ C_{13}] \in C^{l_1 \times l_1}$$

مربعی و غیر تکین اند و به ترتیب از بعد $k_1 = t_2 + t_3$ و $l_1 = s_2 + t_5$ می باشند.

اینجا t_j, s_j, k_j و l_j صحیح نامنفی اند و تعداد سطرها یا ستون های، سطر یا ستون بلوک متناظر ماتریس تعریف می شوند. یک مقدار صفر، یکی از این عددهای صحیح مربوط به سطر یا ستون بلوک متناظری است که ظاهر نشده است.

اثبات: به صورت الگوریتم در پیوست A داده شده است. ■

یک التزام مستقیم از این قضیه، نتیجه زیر است که حالت های معرفی شده در بخش ۳ را مشخص می کند.

نتیجه ۱-۳: سیستم (E, A, B, C) در صورت فشرده $(9-3)-(12-3)$ از قضیه ۳-۳ را در نظر بگیرید:

۱. زوج (E, A) منظم و از اندیس حداکثر ۱ است اگر و فقط اگر $s_6 = t_6 = 0$ و $A_{22} - A_{24}\Sigma_{t_4}^{-1}A_{42}$ نامنفرد باشد.

۲. حالت C_2 برقرار است اگر و فقط اگر $t_6 = 0$.

۳. حالت O_2 برقرار است اگر و فقط اگر $s_6 = 0$.

۴. $rank [E, B] = t_1 + t_2 + t_3$ و بنابراین $rank [E, B] = n$ اگر و فقط اگر $t_4 = t_5 = t_6 = 0$.

۵. $rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = t_1 + s_2 + t_5$ و بنابراین $rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ اگر و فقط اگر $t_4 = t_3 = s_6 = 0$.

۶. $rank \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = t_1 + t_2 + s_2 + t_3 + t_5 + \min(l_2, k_2)$.

اثبات: برای اثبات ۱ قرار می دهیم

$$\hat{A}_{22} = \begin{bmatrix} t_2 A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ t_3 A_{32} & A_{33} & A_{34} & \Sigma_{t_3} & 0 \\ t_4 A_{42} & A_{43} & \Sigma_{t_4} & 0 & 0 \\ t_5 0 & \Sigma_{t_5} & 0 & 0 & 0 \\ t_6 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{12} = \begin{bmatrix} t_2 A_{21} \\ t_3 A_{31} \\ t_4 A_{41} \\ t_5 A_{51} \\ t_6 A_{61} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{21} = t_1 [A_{12} \quad A_{13} \quad A_{14} \quad A_{15} \quad A_{16}].$$

در این صورت داریم

$$U^T A V = \begin{bmatrix} t_1 & \hat{A}_{12} \\ n - t_1 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},$$

بدست می آوریم

$$[E, AS_{\infty}(E)] = \begin{bmatrix} \Sigma_{t_1} & 0 & \hat{A}_{12} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E \\ T_{\infty}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{t_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

حال فرض می کنیم که $s_6 = t_6 = 0$ و $\hat{A}_{22}$ ناتکین باشد در این صورت $\alpha E - \beta A$ هم ارز می شود با

$$\alpha \begin{bmatrix} \Sigma_{t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} A_{11} - \hat{A}_{12} \hat{A}_{22}^{-1} \hat{A}_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

که به وضوح منظم و از اندیس حداکثر ۱ است.

برعکس، حال اگر $\alpha E - \beta A$ مداد منظم و از اندیس حداکثر ۱ باشد آنگاه $\alpha E - \beta A$ می تواند به صورت فشرده کانونیکال زیر بازنویسی شود

$$\alpha \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

و به راحتی اثبات می شود که $rank [E, AS_{\infty}(E)] = n$ و این وقتی امکان پذیر است که $\hat{A}_{22}$ ناتکین باشد.

بقیه ی گزاره ها از صورت فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳) واضح است [۴]. ■

در ساخت صورت های فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳) ابتدا تجزیه مقدار تکین E را بدست می آوریم و سپس

ماتریس های باقیمانده را اصلاح می کنیم. در این مرحله $S_\infty(E)$ و $AS_\infty(E)$ مشخص می شوند، بنابراین سیستم های منظم با اندیس حداکثر ۱ به آسانی در مراحل کار شناسایی می شوند. اگر منظم سازی ضروری باشد، بلافاصله می توان یک پس خورد گزاره ای منظم ساز ایجاد کرد. برای پس خورد مشتق مناسب تر است با تجزیه مقدار تکین B و C شروع کنیم سپس E را به یک مجموعه از مؤلفه ها که در چپ ثابت اند و یک مجموعه از مؤلفه هایی که این مجموعه می تواند مقادیر دلخواهی توسط پس خورد مشتق باشد تفکیک می کنیم. این صورت فشرده زیر را در پی دارد:

قضیه ۲-۳: فرض کنید $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، B و C نیز بترتیب رتبه ستونی و سطری کامل باشند. آنگاه ماتریس های متعامد $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $Y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ وجود دارند بطوریکه:

$$U^T E V = \tilde{E} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \tilde{s}_1 & \tilde{t}_4 & \tilde{t}_3 & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_5 & \tilde{s}_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_3 \\ \tilde{t}_4 \\ \tilde{t}_5 \\ \tilde{t}_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} & \tilde{E}_{23} & \Sigma_{\tilde{t}_2} & 0 & 0 \\ \tilde{E}_{31} & \tilde{E}_{32} & \Sigma_{\tilde{t}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{\tilde{t}_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (۱۳-۳)$$

$$U^T B W = \tilde{B} = \begin{matrix} & m \\ \begin{matrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ n - \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (۱۴-۳)$$

$$Y^T C V = \tilde{C} = p \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 & \tilde{t}_4 & n - \tilde{s}_1 - \tilde{t}_4 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۵-۳)$$

$$U^T A V = \tilde{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \tilde{s}_1 & \tilde{t}_4 & \tilde{t}_3 & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_5 & \tilde{s}_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_3 \\ \tilde{t}_4 \\ \tilde{t}_5 \\ \tilde{t}_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{15} & \tilde{A}_{16} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{25} & \tilde{A}_{26} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{35} & \tilde{A}_{36} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} & \tilde{A}_{45} & \tilde{A}_{46} \\ \tilde{A}_{51} & \tilde{A}_{52} & \tilde{A}_{53} & \tilde{A}_{54} & \Sigma_{\tilde{t}_5} & 0 \\ \tilde{A}_{61} & \tilde{A}_{62} & \tilde{A}_{63} & \tilde{A}_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (۱۶-۳)$$

که در آن $\tilde{s}_1 + \tilde{t}_4 = p$ و $\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 = m$ و ماتریس های $\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$ مربعی و نامنفردند.

اثبات: با یک تغییر ساده از اثبات صورت فشرده قضیه ۱-۳ بدست می آید [۴]. ■

نتیجه مستقیم زیر وضعیت های کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم را مشخص می کند.

نتیجه ۲-۳: سیستم (E, A, B, C) در صورت فشرده قضیه ۲-۳ را در نظر بگیرید خواص زیر را داریم:

۱. $\tilde{t}_6 = \tilde{t}_5 = 0$ اگر و بنابرین $\text{rank}[E, B] = n$ و $\text{rank}[E, B] = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 + \tilde{t}_4$.

۲. $\tilde{s}_6 = \tilde{t}_5 = 0$ اگر و بنابرین $\text{rank}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ و $\text{rank}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \tilde{s}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 + \tilde{t}_4$.

۳. $\text{rank}\begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \tilde{s}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 + \tilde{t}_4$.

۴. اگر $\tilde{t}_6 = 0$ ، آنگاه C_2 برقرار است.

۵. اگر $\tilde{s}_6 = 0$ ، آنگاه O_2 برقرار است.

اثبات: از صورت فشرده (۱۳-۳)-(۱۶-۳) واضح است [۴]. ■

صورت فشرده بعدی که ما معرفی می کنیم ابتدا در مقاله الگوریتم های تخصیص قطب برای سیستم های توسیع یافته "میمینایز" معرفی شده است [۲۱] و بلافاصله (بطور مستقیم) توسط چندین مؤلف اثبات شد [۵ و ۹]. این صورت متفاوت از صورت های فشرده قبلی است، بطوری که همه خواص کنترل پذیری در آن ظاهر نشده است. از این رو، در تفکیک سیستم هایی که اندیس بزرگی دارند اما کنترل پذیر یا مشاهده پذیر در بینهایت نیستند استفاده می شود.

قضیه ۳-۳: فرض کنید $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ بطوری که B و C به ترتیب رتبه ستونی و سطری کامل باشند. آنگاه ماتریس های متعامد $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $Y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ وجود دارند بطوریکه:

$$U^T E V = \begin{matrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{t}_3 & \hat{t}_4 \\ \hat{t}_1 \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 & E_{14} \\ 0 & 0 & 0 & E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}, \end{matrix}$$

$$U^T A V = \begin{matrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{t}_3 & \hat{t}_4 \\ \hat{t}_1 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \end{matrix} \quad (۱۷-۳)$$

$$U^T B = \begin{matrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{t}_3 & \hat{t}_4 \\ \hat{t}_1 \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{matrix} \quad C V = p \begin{matrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{t}_3 & \hat{t}_4 \\ C_1 & C_2 & 0 & C_4 \end{matrix},$$

با خواص زیر

$$1. \text{rank}(E_{11}) = \hat{t}_1,$$

$$2. \text{rank}(C_2) = \hat{t}_2,$$

$$3. A_{33} \text{ پایین مثلثی بلوکی است،}$$

$$4. E_{33} \text{ پایین مثلثی بلوکی، با بلوک های قطری صفر، افراز شده مطابق با } A_{33} \text{ می باشد،}$$

$$5. A_{44} \text{ بالا مثلثی بلوکی است،}$$

$$6. E_{44} \text{ بالا مثلثی بلوکی، با بلوک های قطری صفر، افراز شده مطابق با } A_{44} \text{ می باشد،}$$

$$7. \text{ زیر سیستم بدست آمده توسط حذف آخرین سطرو ستون بلوکی (۱۷-۳) در } C_2 \text{ صدق می کندو}$$

$$8. \text{ زیر سیستم بدست آمده توسط حذف دو سطرو ستون بلوکی آخر (۱۷-۳) در } C_2 \text{ و } O_2 \text{ صدق می کند.}$$

اثبات: با یک تغییر ساده از اثبات صورت فشرده قضیه ۱-۳ بدست می آید [۵]. ■

می بینیم که سه صورت فشرده از قضیه ۱-۳، ۲-۳ و ۳-۳ ویژگی های متفاوتی از سیستم را تصریح می کنند.

صورت فشرده قضیه ۳-۳ نشان می دهد که چه سیستمی منظم و از اندیس حداکثر ۱ است و شروط لازم و کافی برای حفظ C_2 و O_2 را بیان می کند. صورت فشرده قضیه ۲-۳ فقط شروط کافی را بیان می کند. مثال زیر نشان می دهد که این شرط ها ضروری نیستند.

مثال ۳-۴: فرض کنید

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

این سیستم در صورت فشرده (۱۳-۳)-(۱۶-۳) با $\tilde{s}_6 = \tilde{t}_6 = 1$ می باشد. با این وجود C_2 و O_2 هر دو برقرارند.

بخش ۵ نشان می دهد که سه صورت معرفی شده می تواند استفاده شود جهت اینکه آیا سیستم می تواند منظم ساخته شود و یا با استفاده از پس خورد گزاره ای یا مشتق منظم با اندیس ۱ شود یا نه. چنین پس خورد منظم سازی منبهد می تواند از صورت فشرده ساخته شود. صورت فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳) در قضیه ۱-۳ نشان می دهد چگونه سیستم می تواند توسط پس خورد گزاره ای به یک سیستم منظم از اندیس ۱ تبدیل شود. صورت فشرده (۱۳-۳)-(۱۶-۳) از قضیه ۲-۳ نشان می دهد چگونه یک سیستم منظم با اندیس ۱ توسط پس خورد گزاره ای و مشتق از فرم $u(t) = G\dot{y}(t) + Fy(t)$ (بطوری که رتبه های سیستم حلقه بسته $E+BGC$ قابل دسترس باشند) می تواند بدست آید. سرانجام صورت فشرده (۱۷-۳) از قضیه ۳-۳

نشان می دهد که چگونه سیستم می تواند منظم ساخته شود (اما لزوماً اندیس ۱ نباشد) و چگونه اندیس قابل کاهش است.

بنابراین رفتار سیستم هایی که نمی توانند منظم یا اندیس ۱ شوند، از قضیه ۳-۳ قابل تحلیل است، اما از دو صورت فشرده دیگر نه.

هر یک از سه صورت فشرده مزیت و معایب هایی دارند، اما این موضوع که همه ویژگی ها نمی تواند توسط یک صورت فشرده منحصر به فرد ظاهر شود مشکل اصلی این صورت های فشرده است. بنابراین استفاده از تبدیلات هم ارز غیرمتعامد که اطلاعات بیشتری را بیان می کند، تضعیف قوی صورت های فشرده یا کانونیکال را در پی دارد [۱۹]. تبدیلات هم ارز متعامد گاهی وقت ها بدووضع هستند. بنابراین همیشه محاسبه ی چنین صورت های فشرده یا کانونیکال در یک روش پایای عددی ممکن نیست.

ما بطور عددی صورت های فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳) و (۱۳-۳)-(۱۶-۳) را برای دست ماشینی سیال سه پیونده با معلومات داده شده در مثال ۱-۳ و مدار الکتریکی مثال ۲-۳ محاسبه کردیم. (لیست آنها در پیوست B).

در این بخش چندین صورت فشرده، که در یک روش پایای عددی توسط تبدیلات هم ارز متعامد حقیقی محاسبه شده است را معرفی می کنیم. از این فرم های فشرده می توانیم کنترل پذیری، مشاهده پذیری و دیگر ویژگی های سیستم را بررسی کنیم. در بخش بعد منظم سازی را از طریق پس خورد بررسی می کنیم.

۳-۵ منظم سازی

در بخش ۱ اشاره کردیم، ممکن است سیستم های منظمی داشته باشیم که از اندیس حداکثر ۱ باشند. اگر صورت های فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳) را محاسبه کنیم، آنگاه می توانیم منظم و اندیس حداکثر ۱ بودن سیستم را بررسی کنیم. در حالتی که منظم نباشد، اغلب برای حصول منظم بودن و اندیس ۱، می توانیم یک کنترل پس خورد پیدا کنیم، سپس شرایط مساعد را بدست آوریم. در این بخش چگونگی منظم سازی سیستم توسط پس خورد را بررسی می کنیم.

۳-۵-۱ پس خورد گزاره ای

قضیه ۳-۴ [۴]: سیستم (E, A, B, C) داده شده در فرم $(۳-۱)-(۳-۲)$ را در نظر بگیرید. یک ماتریس $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ وجود دارد بطوری که مداد $\alpha E - \beta(A + BFC)$ منظم و از اندیس حداکثر ۱ است اگر و فقط اگر شروط O_2 و C_2 برقرار باشند.

اثبات: فرض می کنیم یک ماتریس $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ وجود داشته باشد بطوری که مداد $\alpha E - \beta(A + BFC)$ منظم و از اندیس حداکثر ۱ باشد به عبارت دیگر فقط از پس خورد گزاره ای استفاده شود آنگاه فضای پوچ چپ و راست E یعنی $S_\infty(E)$ و $T_\infty(E)$ تغییر نمی کنند بنابراین

$$\text{rank}[E, AS_\infty(E), B] = \text{rank}[E, (A + BFC)S_\infty(E), B] =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ T_\infty^T(E)A \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ T_\infty^T(E)(A + BFC) \\ C \end{bmatrix} = n$$

بنابراین شروط O_2 و C_2 برقرار است و برعکس. ■

قضیه ۳-۴، شروط لازم و کافی جهت اینکه سیستم توسط پس خورد خروجی گزاره ای منظم و از اندیس ۱ ساخته شود را می دهد، اما اغلب در عمل این شرط ها حفظ نمی شوند. مثال ۳-۱ یک نمونه از این نوع است (پیوست B را ببینید). یک سؤال طبیعی این است که آیا سیستم توسط پس خورد می تواند منظم و از هر اندیسی ساخته شود؟ اینجا از قضیه ۳-۳ استفاده می کنیم.

قضیه ۳-۵: فرض کنید (E, A, B, C) در صورت فشرده $(۳-۱۷)$ از قضیه ۳-۳ باشد. سیستم توسط پس خورد خروجی گزاره ای منظم ساخته می شود، یعنی یک ماتریس پس خورد F وجود دارد بطوری که مداد $\alpha E - \beta(A + BFC)$ منظم است اگر و فقط اگر A_{44} و A_{33} ناتکین باشند.

اثبات: اثبات در [۵ و ۹] آمده است. ■

توجه کنید که ممکن است مستقیماً از $(۳-۱۷)$ بتوان تعیین کرد که آیا سیستم توسط پس خورد گزاره ای می تواند منظم ساخته شود. از $(۳-۹)-(۳-۱۲)$ یا $(۳-۱۳)-(۳-۱۶)$ می توانیم منظم سازی و اندیس حداکثر ۱ سیستم را امتحان کنیم اما $(۳-۹)-(۳-۱۲)$ یا $(۳-۱۳)-(۳-۱۶)$ به طور باز منظم سازی سیستم با اندیس بزرگتر را آشکار نمی کند. مزیت دیگر صورت فشرده $(۳-۱۷)$ این است که مینیمم اندیس قابل اجرا توسط سیستم را نمایش می دهد [۵].

قضیه ۳-۶: سیستم (E, A, B, C) در صورت فشرده $(۳-۱۷)$ از قضیه ۳-۳ را در نظر بگیرید، اگر A_{44} و A_{33} ناتکین باشند. آنگاه پس خورد خروجی گزاره ای $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ وجود دارد بطوری که مداد $\alpha E - \beta(A + BFC)$

منظم و اندیس مداد مساوی با ماکزیمم اندیس پوچ توان

$$\theta = \begin{pmatrix} \hat{t}_2 & \hat{t}_3 \\ \hat{t}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (۱۸-۳)$$

و اندیس پوچ توان E_{44} است.

اثبات: چون E_{44} اکیدا بالا مثلثی و A_{44} ناکین است واضح است که اندیس مساوی با ماکزیمم اندیس پوچ توان است و اندیسی از

$$\alpha \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} - \beta \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

که اندیس معادله بالا در $[\Delta]$ نشان داده شده است که با اندیس مفروض θ برابر است. ■

قضیه ۷-۳: فرض کنید (E, A, B, C) در صورت فشرده $(۱۷-۳)$ از قضیه ۳-۳ باشد:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 & E_{14} \\ 0 & 0 & 0 & E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (۱۹-۳)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

اگر این سیستم بتواند توسط یک پس خورد خروجی گزاره ای منظم ساخته شود و اگر شرط های اولیه پایدار باشند آنگاه x_4 مقید به صفر است و ممکن است رفتار تکانشی x_3 در خروجی مشاهده نشود

اثبات: اثبات در $[\Delta]$ آمده است. ■

نتیجه می شود که هر سیستم قابل تنظیم از یک زیر سیستم که کنترل پذیر و مشاهده پذیر در بینهایت است و اجزای جواب (حالت ها) که در یک سیستم هم رتبه مناسب، مقید به صفر می باشند یعنی حالت هایی که در تحرک های سیستم شرکت نمی کنند، باضافه حالت هایی که ممکن است رفتار تکانشی داشته باشند اما در خروجی مشاهده نشوند تشکیل می شود. حالت هایی که مقید با صفر می باشند می توانند از سیستم حذف شوند، و از یک نقطه عملی از سیستم های مورد نظر با حالت های محدود غیرقابل ملاحظه اجتناب می شود.

بنابراین توجه کنید، نتایجی که ما بررسی کردیم نسبت به اختلال خطاهای روش، مانند خطاهای گردکردن

در محاسبات عددی خیلی حساس هستند. در (۳-۱۹) x_4 مقید به صفر است اما یک اختلال یا تابع بدون مدل اجباری، ممکن است باعث شود وجود x_4 ایجاد نمو تکانشی کند.

۳-۵-۲ پس خورد گزاره ای و مشتق

قضیه های ۳-۵ و ۳-۷ فقط با حالتی که پس خورد گزاره ای باشد سرو کار دارند، اما در بالا اشاره شد که پس خورد مشتق هم ممکن است استفاده شود و منظم بودن سیستم را تغییر دهد. چون پس خورد مشتق $u(t) = G\dot{y}(t) + v(t)$ یک سیستم حلقه بسته با مداد $(E + BGC, A)$ خواهد داشت می بینیم که فضای پوچ چپ و راست S_∞ و T_∞ از E ممکن است تغییر کند. از طرفی این ممکن است ویژگی هایی از سیستم مثلاً G_2 و O_2 را تغییر دهد. همچنین رتبه $E + BGC$ ممکن است بیشتر یا کمتر از رتبه E شود. اگر سیستم حلقه بسته منظم با اندیس ۱ باشد آنگاه در حل گسسته سیستم اصلی $N = 0$ و سیستم به اندازه $rank(E + BGC)$ معادله دیفرانسیل و $n - rank(E + BGC)$ معادله جبری برمی گردد. در تبدیلات ممکن است تمایل به داشتن معادلات دیفرانسیل بیشتر یا کمتر باشد. برای حالت پس خورد خروجی برد کاملی از رتبه های ممکن $E + BGC$ توسط نتیجه زیر داده شده است.

لم ۳-۲ [۹]: فرض کنید سیستم توسیع یافته خطی (E, A, B, C) از فرم (۳-۱)-(۳-۲) داده شده باشد. اگر r در رابطه زیر صدق کند

$$\begin{aligned} rank[E, B] + rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} - rank \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ \leq r \leq \min \left(rank[E, B], rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (۳-۲۰)$$

آنگاه یک ماتریس پس خورد $G \in R^{m \times n}$ وجود دارد بطوری که $rank(E + BGC) = r$ ■

رتبه ها در (۳-۲۰) از صورت فشرده (۳-۹)-(۳-۱۲) و (۳-۱۳)-(۳-۱۶) قابل دستیابی اند. نتایج ۳-۱ و ۳-۲ را ببینید.

با وجود رتبه های احتمالی E مشخص شد که حال می توانیم بپرسیم که آیا سیستم می تواند منظم و از اندیس حداکثر ۱ برای هر $rank(E + BGC) = r$ مطابق رابطه (۳-۲۰) ساخته شود. تعجب آور نیست که جواب نه است. در برخی حالات اندیس موردنظر منظم ۱، ممکن است خیلی از آزادی های کوچک را در انتخاب پس خورد از دست بدهد.

مثال ۳-۵: فرض کنید سیستم داده شده توسط

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

مداد $(E + BGC, A + BFC)$ منظم با اندیس ۲ است و $rank(E + BGC) = 1$ برای تمام F و G ها بجز $G = [-1]$. برای $G = [-1]$ ، $rank(E + BGC) = 0$ و برای هر F مداد $(E + BGC, A + BFC)$ منظم و از اندیس ۱ است.

با بدست آوردن یک شناخت کامل از رتبه های قابل انجام $E + BGC$ ، در سیستم های حلقه بسته ای که منظم و از اندیس حداکثر ۱ هستند مجبوریم برخی نمادهای دیگر را معرفی کنیم.
فرض کنید:

$$T_b = T_\infty \left(\left[E, AS_\infty \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}, B \right] \right),$$

$$S_b = S_\infty \left(\left[\begin{array}{c} E \\ (T_\infty [E, B])^T A \\ c \end{array} \right] \right), \quad (21-3)$$

و فرض کنید:

$$T_a = T_\infty(ES_\infty(C)),$$

$$S_a = S_\infty((T_\infty(B))^T E), \quad (22-3)$$

با اینکه شکل این ماتریس ها پیچیده نشان داده شده است، آنها به آسانی از صورت فشرده $(13-3)-(16-3)$ بدست می آیند.

قضیه ۳-۸ [۴]: فرض کنید سیستم توسعه یافته خطی (E, A, B, C) از فرم $(1-3)-(2-3)$ داده شده باشد. هم ارزی های زیر را داریم:

(i) ماتریس های پس خورد $F, G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود دارند که مداد حلقه بسته $(E + BGC, A + BFC)$ منظم و از اندیس حداکثر ۱ است.

(ii) $T_a^T AS_b$ رتبه ستونی کامل و $T_b^T AS_a$ رتبه سطری کامل دارند.

بعلاوه اگر مداد حلقه بسته $(E + BGC, A + BFC)$ منظم و از اندیس حداکثر ۱ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
\text{rank}[E, B] + \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} - \text{rank} \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\
\leq \text{rank}(E + BGC) \\
\leq \text{rank}[E, B] - \text{rank}(T_a^T AS_b) \\
= \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} - \text{rank} T_b^T AS_a
\end{aligned} \tag{۲۳-۳}$$

مثال زیر قضیه ۸-۳ را نشان می دهد.

مثال ۶-۳: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$E = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = C^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

این سیستم هم اکنون در فرم فشرده (۱۳-۳)-(۱۶-۳) با $\tilde{t}_1 = \tilde{s}_1 = 2$ ، $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_3 = \tilde{t}_4 = \tilde{t}_6 = \tilde{s}_6 = 1$ و $\tilde{t}_5 = 0$ می باشد. بردی از رتبه های $E + BGC$ طبق حالت های لم ۲-۳ بدون توجه به منظم بودن و اندیس بصورت

$$0 \leq \text{rank}(E + BGC) \leq 2,$$

و بردی از رتبه های (۲۳-۳) بصورت

$$0 \leq \text{rank}(E + BGC) \leq 1,$$

می باشد.

بنابراین طبق قضیه ۸-۳ سیستم حلقه بسته با هر کدام از $\text{rank}(E + BGC) = 0$ یا $\text{rank}(E + BGC) = 1$ می تواند منجر به منظم بودن با اندیس ۱ شود. درستی این موضوع به راحتی قابل بررسی است. برای مثال با انتخاب $G=0$ و

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یک سیستم حلقه بسته منظم، اندیس ۱ با $\text{rank}(E + BGC) = 0$ داریم و انتخاب

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و $F=0$ یک سیستم حلقه بسته منظم، اندیس ۱ با $\text{rank}(E + BGC) = 1$ خواهیم داشت.

همچنین برطبق قضیه ۸-۳، ممکن است مداد حلقه بسته منظم، اندیس ۱ با $\text{rank}(E + BGC) = 2$ بدست آید علی رغم این حقیقت که بردی از (۲۰-۳) برابر ۲ می باشد. برای مثال، اگر $\text{rank}(E + BGC) = 2$ آنگاه

$S_{\infty}(E + BGC) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و بدون توجه به انتخاب F ، $(E + BGC, (A + BFC)S_{\infty}(E + BGC))$ رتبه کامل نیست،

چون یک سطر صفر دارد. بر طبق قضیه ۲-۳ سیستم حلقه بسته نمی تواند منظم با اندیس ۱ بدست آید.

هنوز به صراحت با ساختار ماتریس های پس خورد سیستم منظم و اندیس حداکثر ۱ متفاوت است. اول از همه در انتخاب F و G آزادی های زیادی وجود دارد که بایستی بررسی شوند. دوم، تولید ماتریس های پس خورد در یک روش پایای عددی ممکن نیست. همچنین مهم است که نتیجه، به طور قوی سیستم حلقه بسته ای از اندیس حداکثر ۱ باشد.

فصل چهارم

طرحی از کنترل پس خورد حالت مشتق برای

سیستم های توسیع یافته

۴-۱ شرح برنامه

سیستم توسیع یافته ی خطی کنترل پذیر زیر را در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = 0, \quad (۴-۱)$$

که در آن $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل باشد، فرض کنید که $1 \leq m \leq n$ و همچنین، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس های ناوردای زمانی باشند. حال کنترل پس خورد حالت مشتق را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (۴-۲)$$

پس هدف برنامه بدست آوردن پس خورد حالت مشتق K_d ، با استفاده از روش های پس خورد حالت است که قطب های سیستم کنترل شده ی (۴-۱) و (۴-۲) بطور دلخواه می باشند و از مجموعه ی $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ انتخاب شده اند که در آن $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\lambda_i \neq 0$. این سیستم حلقه بسته ی کنونی یک عملکرد قابل قبول دارد. انگیزه ی مطرح کردن این بحث، مزایای استفاده از پس خورد حالت مشتق به جای استفاده از پس خورد حالت است، این روش اجازه ی استفاده از طرح های تخصیص قطب^۱ را برای پس خورد حالت می دهد ([۸ و ۲۹ و ۳۰]). مفروضات زیر را در نظر بگیرید:

$$rank[E|B] = n \quad (A)$$

$$rank[A] = n \quad (B)$$

$$rank[B] = m \quad (C)$$

مشخص است که اگر پیش فرض (A) برقرار باشد آنگاه K_d وجود دارد که ([۳ و ۱۲]):

$$rank[E + BK_d] = n \quad (۴-۳)$$

پیش فرض (B) و (C) بدین معنی می باشند که A و B ماتریس های رتبه کامل می باشند [۱].

برای K_d که در (۴-۳) صدق می کند، از (۴-۲) نتیجه می گیریم که سیستم (۴-۱) می تواند به صورت سیستم خطی زیر باز نویسی شود:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_d \dot{x}(t), \quad (۴-۴)$$

$$\dot{x}(t) = (E + BK_d)^{-1} Ax(t). \quad (۴-۵)$$

از (۵-۴) متوجه می شویم که اگر $rank(A) < n$ باشد آنگاه سیستم کنترل شده ی (۱-۴) و (۲-۴) ناپایدار می شوند، زیرا حداقل یک قطب آن برابر صفر می باشد. برنامه ی پایداری برای سیستم های توسیع یافته پیچیده تر از سیستم های استاندارد می باشد زیرا در این سیستم ها نه فقط پایداری بلکه منظم بودنش هم ضروری است ([۳۲ و ۳]).

۴-۲ طرح استفاده از پس خورد حالت مشتق

لم ۱-۴: ماتریس $z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را با $rank(z) = n$ و مقادیر ویژه ای برابر با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ در نظر بگیرید. آنگاه مقادیر ویژه ی Z^{-1} برابراند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$

اثبات: برای هر مقدار ویژه ی $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ از Z یک بردار ویژه ی v وجود دارد که:

$$Zv = \lambda v, \quad (۴-۶)$$

فرض شده $rank(Z) = n$ پس $\lambda \neq 0$ بنابراین از (۴-۶) داریم:

$$v = Z^{-1}\lambda v \Rightarrow \lambda^{-1}v = Z^{-1}v, \quad (۴-۷)$$

و بنابراین λ^{-1} یک مقدار ویژه ی Z^{-1} است.

نکته ۱-۴: $\lambda = a + jb$ را یک مقدار ویژه ی Z در نظر بگیرید آنگاه از لم ۱-۴

$$\lambda^{-1} = (a + jb)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

یک مقدار ویژه ی Z^{-1} است. بنابراین توجه کنید که قسمت حقیقی λ و λ^{-1} هم علامتند. پس اگر Z هرویتز باشد (قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ی آن صفر باشد) آنگاه Z^{-1} نیز هرویتز است.

اکنون نتیجه ی اصلی این بخش را مطرح می کنیم:

قضیه ۱-۴: ماتریس های زیر را تعریف می کنیم :

$$N = A^{-1}E, \quad M = -A^{-1}B, \quad (۴-۸)$$

و فرض می کنیم که زوج (N, M) کنترل پذیر باشند. و فرض کنید K_d بهره ی پس خورد حالتی باشد که مجموعه $\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ قطب های سیستم حلقه بسته ی زیر باشند

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t), \quad (۴-۹)$$

$$w(t) = -K_d z(t), \quad (۱۰-۴)$$

که در آن $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ و بطور دلخواه انتخاب شده اند. آنگاه برای پس خورد K_d ، مجموعه ی $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قطب هایی از سیستم کنترل پذیر (۱-۴) با پس خورد حالت مشتق (۲-۴) هستند و همچنین شرط (۳-۴) نیز پایدار است.

اثبات: فرض کنید (N, M) کنترل پذیر باشند آنگاه یک پس خورد حالت K_d می توان یافت که سیستم کنترل پذیر باقی بماند. از مفروضات (۹-۴) و (۱۰-۴) به دست می آوریم:

$$\dot{z}(t) = (N - MK_d)z(t), \quad (۱۱-۴)$$

و همچنین قطب ها برابراند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$. حال از $N = A^{-1}E$ ، $M = -A^{-1}B$ و برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$(N - MK_d)^{-1} = [A^{-1}(E + BK_d)]^{-1} \quad (۱۲-۴)$$

$$= (E + BK_d)^{-1}A, \quad (۱۳-۴)$$

پس از (۱۱-۴) و لم ۱-۴، نتیجه می شود $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای از $(E + BK_d)^{-1}A$ است بنابراین (۳-۴) برقرار بوده و این قطب ها، قطب هایی از پس خورد حالت مشتق سیستم (۱-۴) و (۲-۴) تلفیق شده در (۵-۴) می باشند.

۳-۴ مثال ها

کارایی روش های پیشنهاد شده با استفاده از مدل سازی در مثال های زیر نشان داده شده است.

مثال ۱-۴: یک نمونه مدار الکتریکی، می تواند توسط سیستم توسیع یافته ی خطی زیر تعریف شود [۸]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (۱۴-۴)$$

که در آن x_1 شدت جریان و x_2 پتانسیل یک خازن است. در این سیستم داریم:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (۱۵-۴)$$

در این مثال قطب های حلقه بسته ی مناسب برای کنترل پذیری سیستم (۱۴-۴) با پس خورد حالت (۲-۴) هستند:

$$\lambda_1 = -2 + 1i, \quad \lambda_2 = -2 - 1i,$$

با مفروضات A، B و C و از (۸-۴) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (۱۶-۴)$$

و (N, M) کنترل پذیرند.

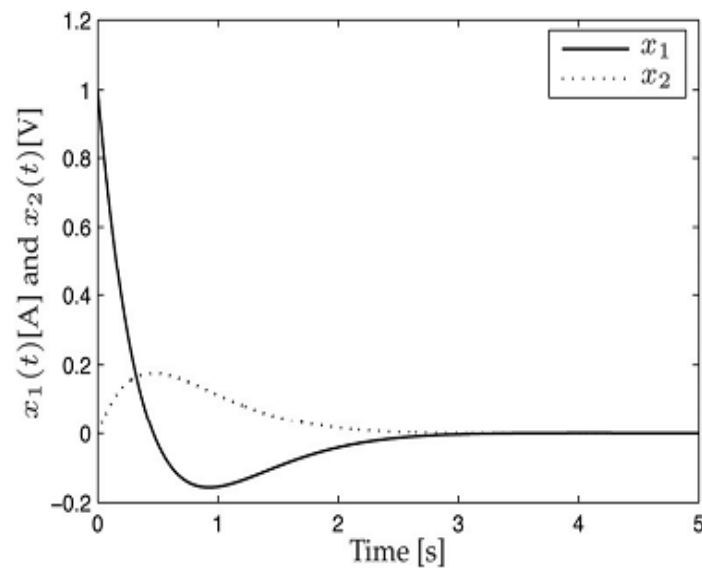
از قضیه ۱-۴، قطب ها برای سیستم حلقه بسته ی جدید با پس خورد حالت (۸-۴) و (۹-۴) با M و N داده شده در (۱۶-۴) هستند:

$$\lambda_1^{-1} = -0.40 - 0.20i, \quad \lambda_2^{-1} = -0.40 + 0.20i.$$

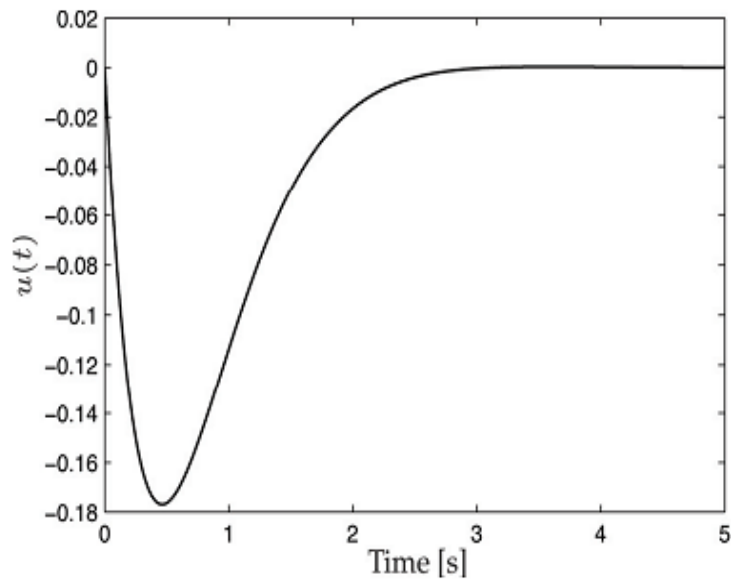
بنابراین با استفاده از نرم افزار متلب ماتریس پس خورد K_d برابر خواهد بود با:

$$K_d = [0.20 \quad -0.80], \quad (۱۷-۴)$$

شکل های ۱-۴ و ۲-۴ نتایج شبیه سازی سیستم کنترل شده ی (۵-۴) با شرط اولیه $x(0) = [0 \quad 1]^T$ را نشان می دهند. در این مثال قوت وسادگی روش پیشنهاد شده را می توان مشاهده کرد.



شکل ۱-۴: پاسخ گذرای سیستم کنترل شده (مثال ۱-۴) برای $x_0 = [1 \ 0]^T$.



شکل ۲-۴: ورودی کنترل سیستم کنترل شده (مثال ۱-۴) برای $x_0 = [1 \ 0]^T$

مثال ۲-۴: یک سیستم MI توسیع یافته خطی توسط معادله زیر توصیف شده است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.800 & 0.020 \\ -0.020 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.050 & 1 \\ 0.001 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (۱۸-۴)$$

بطوری که $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$.

قطب های مناسب با قانون کنترل $u(t) = -K_d \dot{x}(t)$ برای سیستم حلقه بسته داده شده برابرند با:

$$\lambda_1 = -2 + 1i, \quad \lambda_2 = -2 - 1i,$$

مشاهده می شود که سیستم (۱۸-۴) با صدق قانون (۲-۴) کنترل پذیر است. مفروضات A, B و C را در نظر بگیرید، از (۸-۴) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} -50 & 0 \\ -2000 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.050 & 0 \\ -0.500 & -50 \end{bmatrix}, \quad (۱۹-۴)$$

و (N, M) کنترل پذیرند.

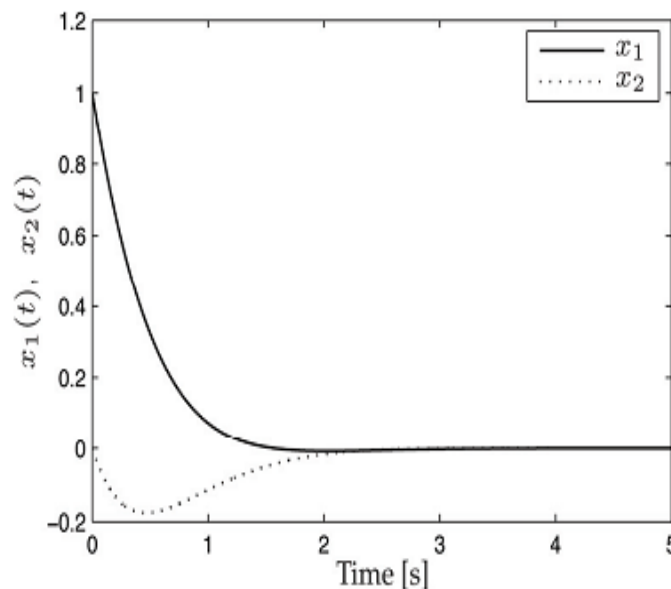
از قضیه ۱-۴، قطب های سیستم حلقه بسته ی جدید با پس خورد حالت (۱۱-۴) و N, M مفروض در (۱۹-۴) برابرند با:

$$\lambda_1^{-1} = -0.40 - 0.20i, \quad \lambda_2^{-1} = -0.40 + 0.20i,$$

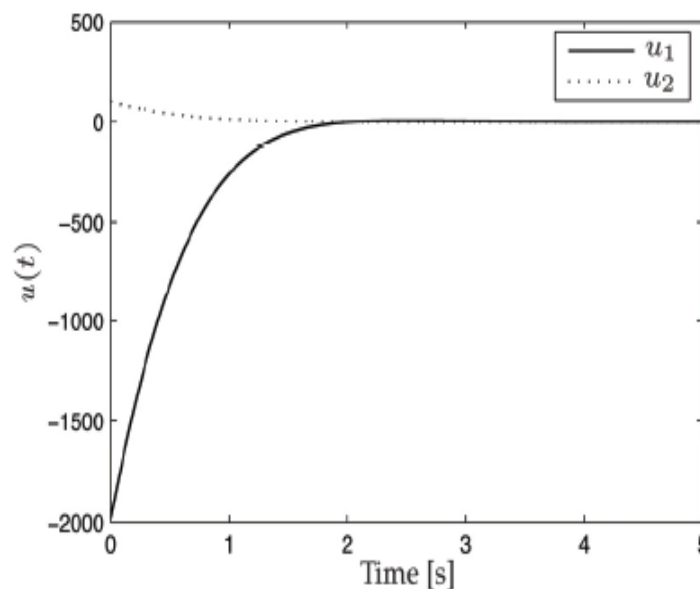
بنابراین با این پارامترها و با استفاده نرم افزار متلب ماتریس پس خورد K_d به صورت زیر خواهد بود:

$$K_d = \begin{bmatrix} -992.0000 & 4.0000 \\ 49.9240 & -0.0480 \end{bmatrix}. \quad (۲۰-۴)$$

شکل های ۳-۴ و ۴-۴ نتایج شبیه سازی از سیستم کنترل پذیر با پس خورد حالت مشتق (۲-۴)، توصیف شده توسط (۱۸-۴) و (۲۰-۴) با استفاده از (۵-۴) و شرط اولیه $x_0 = [1 \ 0]^T$ را نشان می دهند.



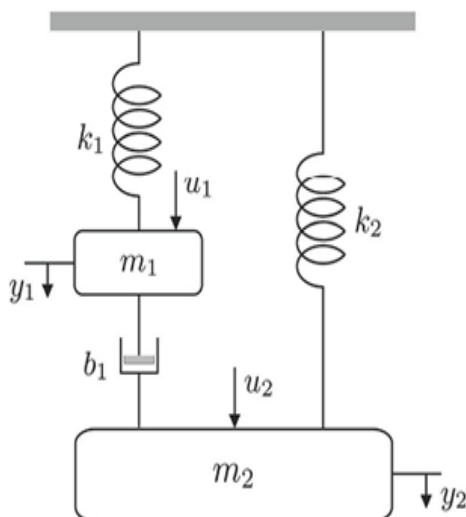
شکل ۳-۴: پاسخ گذرای سیستم کنترل شده (مثال ۲-۴) برای $x_0 = [1 \ 0]^T$



شکل ۴-۴: ورودی کنترل سیستم کنترل شده (مثال ۲-۴) برای $x_0 = [1 \ 0]^T$

مثال ۳-۴: در این مثال $E = I$ در نظر گرفته شده است بنابراین سیستم (۱-۴) در فرم فضای حالت استاندارد می باشد. تحقیقات نشان داده است برای حالتی که $\det(E) \neq 0$ روش پیشنهادی قابل قبول است.

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۴-۵ را در نظر بگیرید. آن یک مدل ساده از فنر ارتعاشی کنترل شده، در جهت تقلیل نوسانات جرم m_1 و m_2 می باشد. در این حالت مدل شامل دو کنترل ورودی $u_1(t)$ و $u_2(t)$ می باشد.



شکل ۴-۵: سیستم جرم و فنر (MI) چند متغیره میرا

این سیستم توسط معادلات زیر توصیف می شود [۷]:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) + b_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + k_1 y_1(t) = u_1(t), \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + b_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 y_2(t) = u_2(t), \end{cases} \quad (۴-۲۱)$$

فرم فضای حالت مکانیکی در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، در معادله (۴-۱) بردارهای حالت فرض شده

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T \text{ که در آن}$$

$$u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t)]^T \text{ و } x_1(t) = y_1(t), x_2(t) = \dot{y}_1(t), x_3(t) = y_2(t), x_4(t) = \dot{y}_2(t)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-b_1}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (۴-۲۲)$$

برای یک شبیه سازی دیجیتالی از سیستم کنترل، فرض کنید: $m_1 = 10kg$ و $m_2 = 30kg$ و $k_1 = 2.5kN/m$ و $k_2 = 1.5kN/m$ و $b_1 = 30Ns/m$. در این مثال قطب های حلقه بسته مناسب برای سیستم کنترل شده را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -15, \quad \lambda_{3,4} = -2 \pm 10i,$$

با این پارامترها و از (۸-۴) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} -0.0120 & -0.0040 & 0.0120 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0200 & 0 & -0.0200 & -0.0200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23-4)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.4000 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.6667 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و (N, M) کنترل پذیرند.

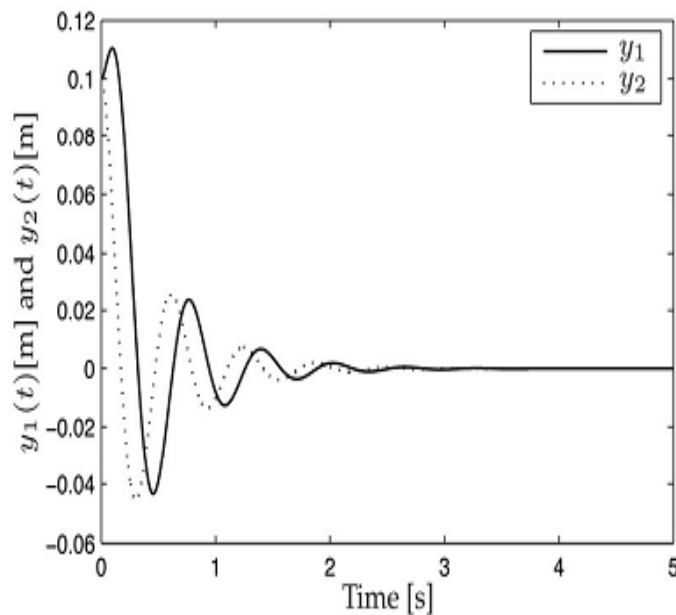
از قضیه ۴-۱، قطب ها برای سیستم حلقه بسته جدید با پس خورد حالت (۴-۱۱) و M, N داده شده در (۲۳-۴) برابرند با:

$$\lambda_1^{-1} = -0.1000, \quad \lambda_2^{-1} = -0.0667, \quad \lambda_{3,4}^{-1} = -0.0192 \pm 0.0962i$$

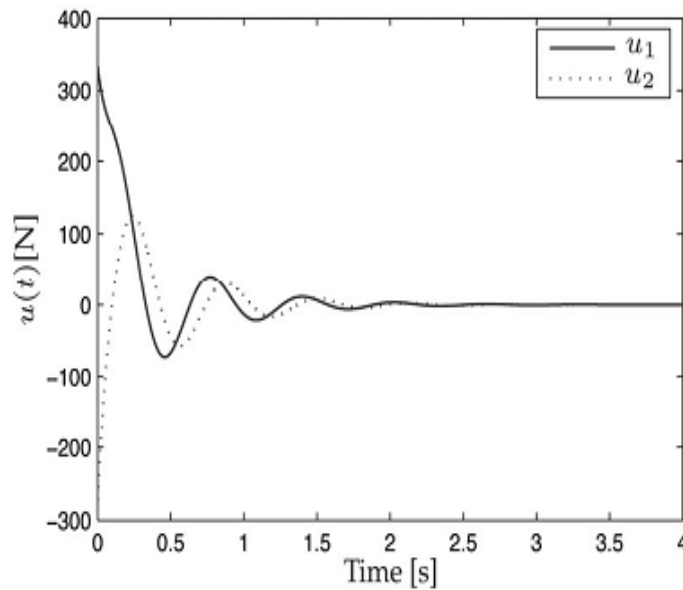
پس با این پارامترها و با استفاده از دستورات متلب ماتریس پس خورد K_d را به صورت زیر داریم:

$$K_d = \begin{bmatrix} 178.9532 & -6.4647 & 323.3542 & 19.8478 \\ -79.6370 & -11.4321 & 152.3204 & -26.1863 \end{bmatrix}. \quad (24-4)$$

شکل های ۴-۶ و ۴-۷ نتایج شبیه سازی سیستم کنترل پذیر با پس خورد حالت مشتق (۴-۲) توصیف شده توسط (۴-۲۲) و (۴-۲۳) که از (۴-۵) به دست می آیند را با شرط اولیه $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ نشان می دهد.



شکل ۴-۶: پاسخ گذرای سیستم کنترل شده (مثال ۴-۳) برای $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$



شکل ۴-۷: ورودی کنترل سیستم کنترل شده (مثال ۴-۳) برای $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$

۴-۴ کنترل پذیری - ناوردهای کرونکر - فرم استاندارد اشلون

در این بخش، تبدیل فضای یک سیستم توسعه یافته را توسط یک عملگر خطی متشابه بررسی خواهیم کرد. این عملگر خطی ماتریسی است که از n ستون مستقل خطی ماتریس کنترل پذیر سیستم به دست می آید. و اعداد صحیحی، برای سیستم کنترل پذیر توسعه یافته به نام ناوردهای کرونکر به دست می آوریم که ماتریس های M و N تعریف شده در (۴-۸) در فضای حالت جدید، بسته به ناوردهای کرونکر و اختلاف بین آنها شکل خاصی خواهند داشت.

در این رابطه، ناوردهای کرونکر منظم و نامنظم را بحث خواهیم کرد و همچنین فرم استاندارد اشلون برای زوج (N, M) هم از روی تعریف ماتریس کنترل پذیری و هم به صورت عددی بحث خواهد شد.

فرض بر این است که ماتریس N یک ماتریس مربعی $n \times n$ و M یک ماتریس مربعی $n \times m$ است، که N می تواند ماتریس منفرد نیز باشد ولی در مورد ماتریس M ، فرض خواهیم کرد که $\text{rank } M = m$. همچنین فرض خواهد شد که $m \leq n$.

۴-۴-۱ تبدیل فضای حالت به کمک یک تبدیل تشابهی

فرض می کنیم T یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی باشد، که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است و $z(t)$ عضو دلخواهی از فضای حالت سیستم زیر باشد که M و N به صورت تعریف شده در (۴-۸) می باشند.

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t),$$

$$\bar{Q} = [m_1, \dots, m_m, N m_1, \dots, N m_m, \dots, N^{n-1} m_1, \dots, N^{n-1} m_m],$$

از آنجا که سیستم کنترل پذیر است، پس می توان n ستون از اولین ستون های Q را طوری به دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان تر، ستون های ماتریس Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد، به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$Q = \begin{bmatrix} N^0 m_1 & N^0 m_2 & \dots & N^0 m_m \\ N^1 m_1 & N^1 m_2 & \dots & N^1 m_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{n-1} m_1 & N^{n-1} m_2 & \dots & N^{n-1} m_m \end{bmatrix}, \quad (30-4)$$

که هر عضو واقع در بلوک یک بردار از فضای $\mathbb{R}^n$ می باشد. به دست آوردن ماتریس از روی بلوک (30-4) به صورت زیر خواهد بود:

با شروع از گوشه چپ بالای بلوک (30-4) به طرف راست و پایین بردارهایی که با بردارهای ماقبل وابسته خطی اند، از بلوک حذف می کنیم و اگر برداری حذف شد، همه بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می شوند و این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی به دست آمده برابر n باشد و در این حالت همه بردارهای باقیمانده غیر از n بردار بدست آمده را از بلوک حذف می کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را مرتباً ستون های ماتریس T قرار دهیم، آنگاه T معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر ما به دست می آید.

در فرآیند فوق، وقتی عضوی از بلوک حذف می شود، گفتیم که بلافاصله عناصر زیر آن نیز باید حذف شوند. دلیل این کار در گزاره زیر آمده است.

گزاره 4-4-1: اگر بردار $A^k b_i$ با بردارهای ماقبل خودش وابسته خطی باشد، آنگاه بردارهای $A^j b_i$ نیز ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود هستند، اگر j هر عدد صحیح بزرگتر از k باشد.

اثبات: بلوک (30-4) را دوباره در نظر می گیریم و سه سطر متوال از آنرا به صورت زیر می نویسیم:

$$A^{k-1} b_1, \dots, A^{k-1} b_{i-1}, A^{k-1} b_i, A^{k-1} b_{i+1}, \dots, A^{k-1} b_m$$

$$A^k b_1, \dots, A^k b_{i-1}, A^k b_i, A^k b_{i+1}, \dots, A^k b_m$$

$$A^{k+1} b_1, \dots, A^{k+1} b_{i-1}, A^{k+1} b_i, A^{k+1} b_{i+1}, \dots, A^{k+1} b_m,$$

طبق فرض می توان نوشت:

$$A^k b_i = [(c_{0,1} A^0 b_1 + c_{0,2} A^0 b_2 + \dots + c_{0,m} A^0 b_m)]$$

$$\begin{aligned}
& + (c_{1,1}A^1b_1 + c_{1,2}A^1b_2 + \dots + c_{1,m}A^1b_m) \\
& \dots \\
& + (c_{k-1,1}A^{k-1}b_1 + c_{k-1,2}A^{k-1}b_2 + \dots + c_{k,m}A^{k-1}b_m) \\
& + (c_{k,1}A^kb_1 + c_{k,2}A^kb_2 + \dots + c_{k,m}A^kb_m),
\end{aligned}$$

حال طرفین این رابطه را در A ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned}
A^{k+1}b_i &= [(c_{0,1}A^1b_1 + c_{0,2}A^1b_2 + \dots + c_{0,m}A^1b_m) \\
& + (c_{1,1}A^2b_1 + c_{1,2}A^2b_2 + \dots + c_{1,m}A^2b_m) \\
& \dots \\
& + (c_{k-1,1}A^kb_1 + c_{k-1,2}A^kb_2 + \dots + c_{k,m}A^kb_m) \\
& + (c_{k,1}A^{k+1}b_1 + c_{k,2}A^{k+1}b_2 + \dots + c_{k,m}A^{k+1}b_m)],
\end{aligned}$$

این رابطه به وضوح نشان می دهد که بردار $A^{k+1}b_i$ به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای مقابل خود است و باید از بلوک حذف گردد. ■

به همین روش می توان نشان داد که باید همه بردارهای $N^j m_i$ که در آن $j > k$ از بلوک (۴-۳۰) حذف گردند، بلوک باقیمانده یعنی بلوکی که فرایند فوق روی آن اعمال شده است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& N^0 m_1 \quad N^0 m_2 \quad \dots \quad N^0 m_i \quad \dots \quad N^0 m_m \\
& \vdots \\
& N^{p_1-1} m_1 \quad N^{p_2-1} m_2 \quad \dots \quad N^{p_i-1} m_i \quad \dots \quad N^{p_m-1} m_m,
\end{aligned}$$

که تعداد بردارهای واقع در این بلوک n است.

۳-۴-۴ ناوردهای کرونگر

در بخش قبلی به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس M است عددی صحیح مانند p_i مربوط می شود که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\forall i, 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq p_i \leq n.$$

از طرفی p_i تعداد بردارهای باقیمانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد کل بردارهای واقع در ستون های بلوک برابر است با

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m,$$

و از طرفی این تعداد برابر n است، لذا:

$$n = p_1 + p_2 + \dots + p_m. \quad (31-4)$$

که این را بطله توسط (پوپوف^۱-۱۹۷۲) بدست آمده است.

تعریف می کنیم:

$$v = \max\{p_1, p_2, \dots, p_m\}. \quad (32-4)$$

v را اندیس کنترل پذیری سیستم می نامند، زیرا هر بردار غیر صفری از فضای حالت را می توان در حداکثر v تکرار به حالت تعادل رساند [۱۵]. (یعنی کوچکترین توانی که ماتریس حلقه بسته صفر شود).

تعریف ۴-۱: اعداد p_i که برای هر یک از ستون های m_i $i = 0, 1, \dots, m$ از ماتریس M مربوط می شوند ناوردهای کرونکر زوج (M, N) نامیده می شوند.

در زیر دو حالت از ناوردهای کرونکر را بحث می کنیم:

الف: وقتی که ناوردهای کرونکر زوج (M, N) همگی با هم برابر باشند:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = v = \frac{n}{m}, \quad (33-4)$$

آنگاه ماتریس پس خورد حالت منحصر بفرد خواهد بود [۱۵].

ب: وقتی که ناوردهای کرونکر زوج (M, N) با هم برابر نباشند، آنگاه ماتریس حالت و ماتریس پس خورد حالت منحصر بفرد نخواهند بود.

۴-۴-۴ ناوردهای کرونکر منظم و نامنظم

تعریف ۴-۲: ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (M, N) را منظم می نامند، هرگاه اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم آنها حداکثر برابر واحد باشد

$$p_{\max} - p_{\min} \leq 1.$$

اگر ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (M, N) منظم نباشند، آنگاه آنها را نامنظم می نامند [۱۵]. ملاحظه می شود که حالتی که ناوردهای کرونکر با هم برابرند، حالت خاصی از ناوردهای کرونکر منظم می باشد.

۵-۴-۴ ناوردهای کرونگر منظم و فرم استاندارد اشلون

فرض می کنیم که برای زوج کنترل پذیر (M, N) ناوردهای کرونگر منظم باشد. می توان در صورت لزوم ستونهای ماتریس M را جابجا کرد و یا بطور معادل ماتریس M را با ماتریس MP که $P_{m \times m}$ یک ماتریس جایگشتی است، جایگزین ساخت تا ناوردهای کرونگر زوج (MP, N) در رابطه زیر صدق کنند

$$\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2 \geq \dots \geq \bar{p}_m, \quad (34-4)$$

که اگر p_i ها ناوردهای کرونگر زوج (M, N) و $\bar{p}_i$ ها ناوردهای کرونگر زوج (MP, N) فرض شوند، آنگاه $\bar{p}_i$ ها همان p_i ها هستند، با این تفاوت که ترتیب آنها عوض شده است و ماتریس P را می توان از روی p_i ها به صورت زیر به دست آورد:

ستون های ماتریس I_m را به صورت زیر با هم عوض می کنیم:

اگر عدد p_j با عدد p_k عوض شود، آنگاه ستون I_m با ستون k ام آن عوض می شود.

وهنگامی که این اعداد جابجا شدند و به صورت مرتب:

$$p_{i1} \geq p_{i2} \geq \dots \geq p_{im},$$

در آمدند، آنگاه ماتریس P به دست آمده است و قرار می دهیم:

$$\bar{p}_1 = p_{i1}, \bar{p}_2 = p_{i2}, \dots, \bar{p}_m = p_{im},$$

که اعداد صحیح $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$ ناوردهای کرونگر زوج (MP, N) خواهند بود.

گزاره ۴-۴-۲: اگر زوج (M, N) کنترل پذیر باشد، آنگاه زوج (MP, N) نیز کنترل پذیر است و برعکس.

اثبات: می دانیم که اگر Q ماتریس کنترل پذیر زوج (M, N) باشد و $\bar{Q}$ ماتریس کنترل پذیری زوج (MP, N) باشد آنگاه

$$Q = [M, NM, \dots, N^{n-1}M],$$

$$\bar{Q} = [MP, NMP, \dots, N^{n-1}MP],$$

و چون P یک ماتریس جایگشت است، پس می توان گفت که $\bar{Q}$ همان Q است با این تفاوت که ستون های آن جابجا شده است و اگر رتبه Q برابر n باشد، آنگاه رتبه $\bar{Q}$ نیز برابر n است و برعکس. ■

گزاره ۴-۴-۳: اندیس کنترل پذیری زوج (M, N) با اندیس کنترل پذیری زوج (MP, N) برابر است.

اثبات: با توجه به رابطه

$$\max\{p_1, p_2, \dots, p_m\} = \max\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m\},$$

بدیهی است. ■

گزاره ۴-۴-۴: اگر $P_{m \times m}$ ماتریس معکوس پذیری باشد و

$$F_0 \in \{F | (N + MF)^v = 0\},$$

آنگاه

$$P^{-1}F_0 \in \{F | (N + MPF)^v = 0\},$$

و برعکس (v عدد صحیح نامنفی دلخواه و P ماتریس جایگشتی از مرتبه m است).

اثبات: فرض می کنیم که

$$(N + MF_0)^v = 0,$$

پس می توان نوشت

$$(N + MPP^{-1}F_0)^v = 0,$$

و از اینجا نتیجه می شود که

$$P^{-1}F_0 \in \{F | (N + MPF)^v = 0\}.$$

عکس آن نیز به آسانی ثابت می شود. ■

نتیجه ۴-۱: حل مسئله کنترل بهینه زمانی سیستم به روش پس خورد حالت برای زوج (M, N) با حل همان مسئله برای زوج (MP, N) معادل است، هرگاه P ماتریس معکوس پذیر باشد.

با این نتیجه گیری و برای سادگی در نوشتن فرض می کنیم که $p_1, p_2, \dots, p_m$ ناوردهای زوج (M, N) هستند که مرتب شده اند، یعنی:

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m,$$

و فرض می کنیم که

$$p_1 = p_2 = \dots = p_r = q + 1, \quad (۴-۳۵)$$

$$p_{r+1} = p_{r+2} = \dots = p_m = q. \quad (۴-۳۶)$$

$$m - r = s, \quad (37-4)$$

یعنی r تا از ناورداهای کرونکر برابر $q+1$ و s تایی دیگر برابر q هستند.

می توان نوشت:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = r(q+1) + sq = (r+s)q + r = n,$$

و نیز می دانیم که $r \leq m$.

اگر $r = m$ آنگاه $s = 0$ است و داریم:

$$rq + r = m(q+1) = n.$$

اندیس کنترل پذیری برابر است با:

$$v = q + 1 = n/m = [n/m], \quad (38-4)$$

که حالت خاصی است که همه ناورداهای کرونکر با هم برابرند.

اگر $r < m$ آنگاه خواهیم داشت:

$$n = mq + r,$$

و در نتیجه:

$$q = [n/m],$$

و اندیس کنترل پذیری در این حالت برابر است با:

$$v = [n/m] + 1. \quad (39-4)$$

در این قسمت می خواهیم ساختار ماتریس های $T^{-1}NT, T^{-1}M, T$ را در مورد ناورداهای کرونکر منظم بررسی کنیم.

ماتریس افزوده $[M, N]$ را برای زوج (M, N) تشکیل می دهیم. این ماتریس دارای n سطر و $n+m$ ستون است.

می دانیم که ماتریس T به صورت زیر خواهد بود:

$$T = [m_1, \dots, m_m, \dots, N^{q-1}m_{r+1}, \dots, N^{q-1}m_{r+s}, N^q m_1, \dots, N^q m_r], \quad (40-4)$$

اگر ماتریس $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ را به دست آوریم، داریم:

$$NT = [Nm_1, \dots, Nm_m, \dots, N^q m_{r+1}, \dots, N^q m_{r+s}, N^{q+1} m_1, \dots, N^{q+1} m_r], \quad (41-4)$$

$$\begin{aligned} [T^{-1}M, T^{-1}NT] \\ = [m_1, \dots, m_m, Nm_1, \dots, Nm_m, \dots, N^q m_{r+1}, \dots, N^q m_{r+s}, N^{q+1} m_1, \dots, N^{q+1} m_r], \end{aligned}$$

$$[T^{-1}M, T^{-1}NT] = T^{-1}[T, N^q m_{r+1}, \dots, N^q m_{r+s}, N^{q+1} m_1, \dots, N^{q+1} m_r], \quad (42-4)$$

$$[T^{-1}M, T^{-1}NT] = [I_n, T^{-1}N^q m_{r+1}, \dots, T^{-1}N^q m_{r+s}, T^{-1}N^{q+1} m_1, \dots, T^{-1}N^{q+1} m_r].$$

در حالتیکه ناوردهای کرونکر منظم هستند ملاحظه می شود که ماتریس $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ دارای ساختار خاصی است و در واقع ستونهای ماتریس همانی I_n به ترتیب در n ستون اول ماتریس $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ ظاهر می شوند.

۴-۴-۶ ناوردهای کرونکر نامنظم و فرم استاندارد اشلون

در حالتی که ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (M, N) نامنظم باشند، نمی توان فرم استاندارد اشلون را طوری به دست آورد که ماتریس $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ به فرم (۴-۴۲) باشد. در این حالت، ستون های I_n در ماتریس $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ به طور پراکنده ظاهر خواهند شد.

۴-۴-۷ بدست آوردن فرم استاندارد اشلون به روش عددی

فرض کنیم که زوج (M, N) کنترل پذیر باشند و S تبدیل خطی معکوس پذیر دلخواه باشد.

اولاً: ناوردهای کرونکر زوج (M, N) با ناوردهای کرونکر زوج $(S^{-1}M, S^{-1}NS)$ برابر هستند زیرا:

اگر ماتریس کنترل پذیر زوج (M, N) به صورت زیر باشد

$$Q = [M, NM, \dots, N^{n-1}M],$$

آنگاه ماتریس کنترل پذیر زوج $(S^{-1}M, S^{-1}NS)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} Q &= [S^{-1}M, (S^{-1}NS)S^{-1}M, \dots, (S^{-1}NS)^{n-1}S^{-1}M] \\ &= [S^{-1}M, (S^{-1}NS)S^{-1}M, \dots, \underbrace{((S^{-1}NS) \dots (S^{-1}NS))}_{n-1} S^{-1}M] \\ &= [S^{-1}M, S^{-1}NM, \dots, S^{-1}N^{n-1}M] \\ &= S^{-1}[M, NM, \dots, N^{n-1}M] \\ &= S^{-1}Q. \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که ماتریس کنترل پذیر زوج $(S^{-1}M, S^{-1}NS)$ با $S^{-1}Q$ برابر است و چون S^{-1} معکوس پذیر است، لذا تعیین n ستون اول مستقل خطی از Q با تعیین n ستون اول مستقل خطی از $S^{-1}Q$ فرق نمی کند. به این ترتیب ثابت می شود که ناوردهای کرونکر برابر خواهند بود.

ثانیاً: اگر n ستون از اولین ستون های مستقل خطی از Q را با T نشان دهیم و n ستون از اولین ستون های مستقل خطی از $S^{-1}Q$ را با T_s نشان دهیم، بدیهی است که:

$$T_s = S^{-1}T,$$

حال اگر S را طوری به دست آوریم که ماتریس T_s ماتریس همانی مرتبه n باشد، آنگاه S همان T خواهد بود، به بیان دیگر، اگر ماتریس معکوس پذیری مانند S بدست آوریم که وقتی n ستون مستقل خطی از اولین ستون های ماتریس کنترل پذیر زوج $(S^{-1}M, S^{-1}NS)$ را انتخاب می کنیم این n ستون به ترتیب همان n ستون I_n باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$S = T$$

و علاوه بر این فرم استاندارد اشلون نیز به دست آمده است، زیرا:

$$S^{-1}M = T^{-1}M, \quad S^{-1}NS = T^{-1}NT,$$

روش کار، به اینصورت خواهد بود که S را به صورت حاصلضری از ماتریس های مقدماتی بدست می آوریم.

۴-۴-۸ عملیات سطری و ستونی مقدماتی روی زوج (M, N)

الف- فرض می کنیم که عمل سطری زیر روی ماتریس (M, N) اعمال شود:

سطر i ام ماتریس (M, N) را با سطر j ام آن جابجا کنیم

در اینصورت در واقع یک ماتریس مقدماتی که معکوس پذیر می باشد، از چپ در ماتریس $[M, N]$ ضرب می شود. اگر این ماتریس را P_1^{-1} بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از:

$$P_1^{-1}[M, N] = [P_1^{-1}M, P_1^{-1}N],$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر را روی ماتریس $P_1^{-1}N$ اعمال کنیم:

ستون i ام ماتریس $P_1^{-1}N$ را با ستون j ام آن جابجا کنیم

در اینصورت در واقع یک ماتریس مقدماتی که همان P_1 است، از راست در $P_1^{-1}N$ ضرب می شود و ماتریس حاصل عبارتست از:

$$P_1^{-1}NP_1,$$

به این ترتیب با یک عمل سطری مقدماتی روی $[M, N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر بدست می آید:

$$[P_1^{-1}M, P_1^{-1}NP].$$

ب- فرض کنید که عمل سطری مقدماتی زیر روی ماتریس $[M, N]$ اعمال شود:

سطر i ام آن در عدد غیر صفر a ضرب شود

در واقع یک ماتریس معکوس پذیر از چپ در $[M, N]$ ضرب می شود که اگر آن را P_2^{-1} بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از:

$$P_2^{-1}[M, N] = [P_2^{-1}M, P_2^{-1}N],$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر را روی ماتریس $P_2^{-1}N$ اعمال کنیم:

ستون i ام آن را در a^{-1} ضرب کنیم

در واقع یک ماتریس معکوس پذیر که همان P_2 است، از راست در $P_2^{-1}N$ ضرب می شود و ماتریس حاصل عبارتست از:

$$P_2^{-1}NP_2,$$

به این ترتیب با یک عمل سطری مقدماتی روی $[M, N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر بدست می آید:

$$[P_2^{-1}M, P_2^{-1}NP].$$

ج- فرض کنید که عمل سطری زیر روی ماتریس $[M, N]$ اعمال شود:

سطر i ام آن را در عدد a ضرب کرده، با سطر j ام آن جمع می کنیم و حاصل را در سطر j ام جایگزین میکنیم در واقع یک ماتریس معکوس پذیر از چپ در $[M, N]$ ضرب می شود که اگر آن را P_3^{-1} بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از:

$$P_3^{-1}[M, N] = [P_3^{-1}M, P_3^{-1}N],$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر را روی ماتریس $P_3^{-1}N$ اعمال کنیم:

ستون زام ماتریس $P_3^{-1}N$ در $-a$ ضرب کرده و با ستون i ام آن جمع می کنیم و حاصل را در ستون i ام جایگزین می کنیم

در واقع یک ماتریس معکوس پذیر که همان P_3 است، از راست در $P_3^{-1}N$ ضرب می شود و ماتریس حاصل عبارتست از:

$$P_3^{-1}NP_3$$

به این ترتیب با یک عمل سطری روی $[M, N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر بدست می آید:

$$[P_3^{-1}M, P_3^{-1}NP]$$

ماتریس هایی که در بندهای «الف»، «ب»، «ج» بیان شدند یعنی ماتریس های P_1, P_2, P_3 ماتریس های مقدماتی هستند، یعنی از روی ماتریس های همانی تنها با یک عمل مقدماتی به دست آمده اند.

حال فرض کنید که برای زوج مفروض (M, N) دنباله ای متناهی از عملیات سطری و ستونی که در بندهای «الف»، «ب»، «ج» توضیح داده شدند، موجود باشند که با اعمال این عملیات به طور متوالی روی سطرهای ماتریس $[M, N]$ و ستون های N به روشی که توضیح داده شد، ماتریس های تغییر یافته M و N به ترتیب دارای فرم $(43-4)$ و $(44-4)$ باشند:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (43-4)$$

$$N = \begin{bmatrix} x & \dots & x & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ x & \dots & x & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & \dots & x & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x & \dots & x \end{bmatrix}, \quad (44-4)$$

علامت x نشانگر عناصری از ماتریس است که احتمالاً غیر صفر هستند.

فرض کنید که زوج (M, N) با دنباله متناهی از عملیات سطری و ستونی مقدماتی $P_1, P_2, \dots, P_k$ به فرم $(43-4)$ و $(44-4)$ در اینصورت این دو ماتریس را می توان به ترتیب به صورت:

$$P_k^{-1} \dots P_2^{-1} P_1^{-1} M = \widehat{M},$$

$$P_k^{-1} \dots P_2^{-1} P_1^{-1} N P_1 P_2 \dots P_k = \widehat{N},$$

نوشت.

اکنون با نامگذاری

$$P_1 P_2 \dots P_k = S,$$

بدیهی است که خواهیم داشت:

$$P_k^{-1} \dots P_2^{-1} P_1^{-1} = S^{-1},$$

$$S^{-1} M = \widehat{M},$$

$$S^{-1} N S = \widehat{N},$$

پس $\widehat{M}$ به فرم $(43-4)$ و $\widehat{N}$ به فرم $(44-4)$ می باشد و S حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی است و می توان برای به دست آوردن S و S^{-1} به این صورت عمل کرد:

عملیات ستونی را متوالیاً روی I_n اعمال کرده و عملیات سطری را نیز جداگانه روی I_n به طور متوالی اعمال می کنیم و وقتی M و N به دست آمدند، ماتریسی که با اعمال عملیات ستونی روی I_n به دست آمده است، ماتریس S و ماتریسی که با عملیات سطری روی I_n به دست آمده است، ماتریس S^{-1} خواهد بود.

در انتهای این بخش الگوریتم به دست آوردن S و S^{-1} و $S^{-1} M$ و $S^{-1} N S$ را ارائه خواهیم کرد. در این الگوریتم ابتدا ماتریس S_0 را که ماتریس پایین مثلثی است به دست می آوریم و همزمان با آن ماتریس های S_0^{-1} و $S_0^{-1} M$ و $S_0^{-1} N S_0$ به دست می آیند و سپس از روی زوج $(S_0^{-1} M, S_0^{-1} N S_0)$ ماتریس بالا مثلثی S_1 را بدست می آوریم و همزمان با آن ماتریس های S_1^{-1} و $S_1^{-1} S_0^{-1} M$ و $S_1^{-1} S_0^{-1} N S_0 S_1$ به دست می آیند، کافی است قرار دهیم:

$$S = S_0 S_1, \quad S^{-1} = S_1^{-1} S_0^{-1}$$

مزیت این روش در این است که بلافاصله پس از به دست آوردن ماتریس های S_0^{-1} و $S_0^{-1} M$ و $S_0^{-1} N S_0$ شرط کنترل پذیری زوج (M, N) بررسی می شود و در صورت کنترل پذیر بودن زوج (M, N) قسمت بعدی الگوریتم که مربوط به محاسبه S_1^{-1} و $S_1^{-1} S_0^{-1} M$ و $S_1^{-1} S_0^{-1} N S_0 S_1$ می شود اجرا خواهد شد.

الگوریتم (الف)

قرار دهید: $H = [M, N]$ و $X = Y = I_n$ و شروع کنید:

گام اول: قرار دهید $i = 1$;

گام دوم: قرار دهید $j = 1$;

گام سوم: قرار دهید $M = \max\{|H_{k,j}| \mid k = i, \dots, n\}$

اگر $M = |H_{k,j}|$ قرار دهید $k = k$

گام چهارم: اگر $M = 0$ آنگاه $j = j + 1$;

در غیر اینصورت برو به گام ششم

گام پنجم: اگر $j \leq n + m$ برو به گام سوم

در غیر اینصورت برو به پایان

گام ششم: اگر $k_0 \neq i$ آنگاه

$Row(i) \leftrightarrow Row(k_0)$ on H and X

$Column(i) \leftrightarrow Column(k_0)$ on Y

$Column(i + m) \leftrightarrow Column(k_0 + m)$ on H

گام هفتم: اگر $H_{i,j} \neq 1$ آنگاه

$Row(i) \leftrightarrow Row(i)/H_{i,j}$ on H and X

$Column(i) \leftrightarrow Column(i) \times H_{i,j}$ on Y

$Column(i + m) \leftrightarrow Column(i)(i + m)H_{i,j}$ on H

گام هشتم: اگر $i < n$ آنگاه

برای $k = i + 1, \dots, n$

$Row(k) \leftrightarrow Row(k) - H_{k,j} \times Row(i)$ on H and X

$Column(i) \leftrightarrow Column(i) + H_{k,j} \times Column(k)$ on Y

$Column(i + m) \leftrightarrow Column(i + m)H_{k,j} \times Column(k + m)$ on H

گام نهم: $i = i + 1$; $j = j + 1$;

گام دهم: اگر $i \leq n + m$ برو به گام سوم

پایان.

بعد از اجرای الگوریتم (الف) ماتریس های $H = [S_0^{-1}M, S_0^{-1}N]$ و $X = S_0^{-1}$ و $Y = S_0$ به دست می آیند. فرض کنید عناصر محوری در فرآیند الگوریتم (الف) به ترتیب در محلهای:

$$(i(1), j(1)), \dots, (i(n_0), j(n_0))$$

از ماتریس H قرار گرفته باشند $(n_0 \leq n)$.

اکنون الگوریتم (ب) را به صورت زیر روی ماتریس های $H = [S_0^{-1}M, S_0^{-1}NS_0]$ و $X = S_0^{-1}$ و $Y = S_0$ اجرا می کنیم.

الگوریتم (ب)

برای $i = i(2), \dots, i(n_0)$

برای $j = j(2), \dots, j(n_0)$

انجام بده

برای $k = i - 1, \dots, 1$

$$\begin{aligned} \text{Row}(k) &\leftrightarrow \text{Row}(k) - H_{i,j} \times \text{Row}(i) && \text{on H and X} \\ \text{Column}(i) &\leftrightarrow \text{Column}(i) + H_{i,j} \times \text{Column}(k) && \text{on Y} \\ \text{Column}(i + m) &\leftrightarrow \text{Column}(i + m) + H_{i,j} \times \text{Column}(k + m) && \text{on H} \end{aligned}$$

بعد از اجرای الگوریتم ماتریس های $H = [S_1^{-1}S_0^{-1}M, S_1^{-1}S_0^{-1}NS_0S_1]$ و $X = S_1^{-1}S_0^{-1}$ و $Y = S_0S_1$ به دست می آیند و به این ترتیب فرم استاندارد اشلون برای زوج (M, N) به همراه ماتریس های $S = S_0S_1$ و $S^{-1} = S_1^{-1}S_0^{-1}$ محاسبه می شود.

بعد از اجرای الگوریتم (الف) دو حالت زیر را ممکن است داشته باشیم:

حالت ۱- ماتریس $S_0^{-1}NS_0$ که همان n ستون آخر ماتریس H است دارای عناصر واحد محوری (عناصری که به عنوان عناصر محوری در الگوریتم بوده اند) در روی قطر اصلی یا بالای آن باشد. در اینصورت زوج (M, N) کنترل پذیر نیست و قسمت بعدی حل مسئله را دنبال می کنیم.

حالت ۲- عناصر واحد محوری در زیر قطر اصلی ماتریس $S_0^{-1}NS_0$ واقع شوند، در این صورت زوج (M, N) کنترل پذیر است و الگوریتم (ب) را روی آن اجرا می کنیم تا فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) را به دست

آوریم. اگر در این حالت سطرهای صفری در $n-m$ ستون آخر ماتریس ظاهر شوند، نتیجه می گیریم که ماتریس کنترل پذیری سیستم دارای رتبه کامل نیست که می توان با محاسبه ماتریس کنترل پذیری برای زوج $(S_0^{-1}M, S_0^{-1}NS_0)$ این واقعیت را نشان داد. وقتی که زوج (M, N) کنترل پذیر باشد، ماتریس $N'_{n \times n}$ را از روی ماتریس $S_0^{-1}NS_0$ به صورت زیر به دست می آوریم:

همه عناصر N' را به جز عناصری که در محل متناظر با عناصر محوری ماتریس $S_0^{-1}NS_0$ قرار دارند، برابر صفر گرفته و درایه هایی از N' که در محل متناظر با عناصر محوری ماتریس $S_0^{-1}NS_0$ قرار دارند، برابر واحد قرار می دهیم.

محاسبه ناوردهای کرونگر زوج $(S_0^{-1}M, N')$ خیلی ساده خواهد بود. به این ترتیب می توانیم ناوردهای کرونگر زوج (M, N) که با ناوردهای کرونگر زوج $(S_0^{-1}M, N')$ برابر هستند به دست آوریم. اگر N' دارای سطر یا سطرهای صفری در $n-m$ سطر آخر باشد، آنگاه ناوردهای کرونگر قابل تعریف نبوده و در نتیجه قابل محاسبه نیستند. در اینصورت، اندیس کنترل پذیری زوج (M, N) را نیز نمی توان تعیین کرد، به این علت اندیس کنترل پذیری زوج (M, N) را اندیس پوچ توانی ماتریس N' تعریف می کنیم.

۴-۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت

در این بخش، ابتدا صورت خاصی از (M, N) را که محاسبه ماتریس پس خورد برای این فرم به آسانی امکان پذیر است بیان می کنیم و قاعده به دست آوردن ماتریس پس خورد را برای این فرم بیان می کنیم و سپس به دست آوردن این فرم را برای زوج کنترل پذیر (M, N) که به فرم دلخواه باشد، توضیح می دهیم. این فرم از (M, N) که آن را فرم همدم برداری می نامند از روی فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) قابل محاسبه است. پس فرض خواهیم کرد که زوج مفروض (M, N) خود به فرم استاندارد اشلون باشد و بالاخره قاعده ای به دست می آوریم که به کمک آن ماتریس پس خورد به صورت پارامتری به سادگی قابل محاسبه باشد.

۴-۵-۱ فرم همدم برداری

اگر زوج (M, N) دارای ساختاری به صورت زیر باشد:

$$M = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}, \quad (45-4)$$

که در آن M_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی و معکوس پذیر است و G_0 ماتریس دلخواه $m \times n$ و G_1 ماتریس $(n-m) \times n$ است که دارای خصوصیات زیر است:

۱- آخرین ستون G_1 برابر صفر است.

۲- بقیه ستون های G_1 ستون هایی از ماتریس I_{n-m} هستند.

۳- اگر $e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$ به ترتیب ستون های اول تا $n-m$ ماتریس I_{n-m} باشند، آنگاه این بردارها به ترتیب اندیششان در ستون های G_1 ظاهر می شوند، یعنی اگر $j > i$ باشد، آنگاه e_j قبل از e_i در G_1 ظاهر نشود.

اگر M و N دارای ساختاری به صورتی که توضیح داده شده باشند، آنگاه می گویند که زوج (M, N) به فرم همدم برداری هستند [۱۵]. با این مفروضات اگر قرار دهیم:

$$F_d = -M_0^{-1}G_0, \quad (46-4)$$

آنگاه به راحتی می توان نشان داد که ماتریس $N + MF_d$ پوچ توان است:

$$\begin{aligned} N + MF_d &= \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \end{bmatrix} (-M_0^{-1}G_0) \\ &= \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (47-4)$$

در صورتیکه همه ستون های I_{n-m} در ماتریس G_1 ظاهر نشوند، نشان خواهیم داد که ماتریس کنترل پذیری زوج (M, N) دارای رتبه کامل نیست، در حالیکه زوج (M, N) کنترل پذیر است.

۴-۵-۲ زوج های هم ارز

رابطه ای به صورت زیر بین مجموعه زوج های (M, N) تعریف می کنیم.

زوج (M_1, N_1) با زوج (M_2, N_2) در رابطه است، اگر ماتریس معکوس پذیری مانند S موجود باشد که:

$$M_2 = S^{-1}M_1, \quad N_2 = S^{-1}N_1S,$$

در اینصورت قرار می دهیم:

$$(M_1, N_1) \sim (M_2, N_2).$$

به آسانی می توان نشان داد که این رابطه یک رابطه هم ارزی است.

اگر مسئله تعیین ماتریس پس خورد حالت برای یکی از اعضای یک کلاس هم ارزی حل شود، آنگاه برای همه اعضای آن کلاس حل شده است، زیرا اگر v کوچکترین عدد صحیح نامنفی باشد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$(N_1 + M_1 F_{d1})^v = 0,$$

و S ماتریس معکوس پذیری باشد که:

$$S^{-1}M_1 = M_2; \quad S^{-1}N_1S = N_2,$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$(S^{-1})^v(N_1 + M_1F_{d1})^vS^v = 0,$$

$$(S^{-1}(N_1 + M_1F_{d1})S)^v = 0,$$

$$(S^{-1}N_1S + S^{-1}M_1F_{d1}S)^v = 0,$$

$$(N_2 + M_2F_{d1}S)^v = 0,$$

کافی است قرار دهیم:

$$F_{d2} = F_{d1}S,$$

ملاحظه می شود که

$$(N_2 + M_2F_{d2})^v = 0.$$

۴-۵-۳ به دست آوردن فرم همدم برداری

در این بخش تبدیل خطی W را برای زوج داده شده (M, N) که کنترل پذیر باشد اعمال می کنیم که W معکوس پذیر بوده و زوج $(W^{-1}M, W^{-1}NW)$ دارای ساختاری به صورت (۴-۴۵) باشد. این تبدیل را از روی فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) به دست می آوریم، یعنی ابتدا برای زوج داده شده فرم استاندارد اشلون را به دست می آوریم و آنرا با $(\hat{M}, \hat{N})$ همانطور که در بخش های قبل بیان کردیم نشان می دهیم و سپس از روی زوج $(\hat{M}, \hat{N})$ فرم همدم برداری را به دست می آوریم. فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) که در (۴-۴۳) و (۴-۴۴) نشان داده شده است را در نظر می گیریم.

اکنون با دنباله ای از عملیات ستونی مقدماتی روی $\hat{N}$ و عملیات سطری مقدماتی روی $[\hat{M}, \hat{N}]$ فرم همدم برداری را برای زوج (M, N) به دست می آوریم که به ترتیب این عملیات در زیر توضیح داده شده است:

فرض کنید که ستون های ماتریس I_n که در $\hat{N}$ ظاهر شده اند، به ترتیب در ستون های $j(1), j(2), \dots, j(n_0 - m)$ از $\hat{N}$ قرار بگیرند، یعنی ستون $j(k)$ از ماتریس $\hat{N}$ برابر با e_{m+k} باشد، با این فرض $j(1), j(2), \dots, j(n_0 - m)$ اعداد صحیح مثبتی هستند که در رابطه زیر صدق می کنند:

$$j(1) \leq j(2) \leq \dots \leq j(n_0 - m) \leq n - 1$$

تعداد عناصری که در $n_0 - m$ سطر آخر N احتمالاً غیر صفر هستند (غیر از عناصر واحد در ستون هایی از

N که شماره این ستون ها $j(1), j(2), \dots, j(n_0 - m)$ هستند می توان با استفاده از اعداد $j(1), j(2), \dots, j(n_0 - m)$ بصورت زیر شمرد:

$$a = (n - j(1)) + (n - j(2)) + \dots + (n - j(n_0 - m))$$

$$a = (n_0 - m)n - j(1) - j(2) - \dots - j(n_0 - m)$$

اکنون الگوریتم زیر را روی ماتریس های N و M بصورت زیر اعمال می کنیم:

for $i = j(1), j(2), \dots, j(n_0 - m)$

for $k = n, n - 1, \dots, i + 1$

$$Column(k) - \hat{N}_{i,k} Column(i) \leftrightarrow Column(k) \quad \text{on } \hat{N}$$

$$Row(i) + \hat{N}_{i,k} Row(k) \leftrightarrow Row(i) \quad \text{on } [\hat{M}, \hat{N}]$$

تحت این عملیات سطری و ستونی مقدماتی که تعداد آنها از a تجاوز نمی کند، می توانیم زوج $(\hat{M}, \hat{N})$ را به فرم همدم برداری تبدیل کنیم.

در الگوریتم فوق اگر ماتریس مقدماتی D با عمل ستونی زیر از I_n نتیجه شود:

$$Column(k) + c \times Column(i) \leftrightarrow Column(k) \quad \text{on } I_n$$

آنگاه D معکوس پذیر است و معکوس آن به صورت زیر به دست می آید:

$$Row(i) - cRow(k) \leftrightarrow Row(i) \quad \text{on } I_n$$

پس ماتریس های به دست آمده از اجرای الگوریتم عبارتند از:

$$S^{-1}\hat{M}, \quad S^{-1}\hat{N}S,$$

که ماتریس های S و S^{-1} را نیز می توان با عملیات سطری روی I_n و عملیات ستونی روی I_n به دست آورد. در واقع بعد از اجرای الگوریتم فوق روی زوج $(\hat{M}, \hat{N})$ ماتریس به دست آمده به صورت زیر است:

$$[S^{-1}T^{-1}M, S^{-1}T^{-1}NTS],$$

که در آن $[T^{-1}M, T^{-1}NT]$ فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) فرض شده است. اکنون با فرض:

$$T = TS, \quad (4-48)$$

زوج $(T^{-1}M, T^{-1}NT)$ در فرم همدم برداری خواهد بود و برای سادگی قرار می دهیم:

$$T^{-1}NT = \tilde{N}, \quad T^{-1}M = \tilde{M}, \quad (49-4)$$

به این ترتیب زوج $(\tilde{M}, \tilde{N})$ هم ارز با زوج (M, N) بوده و در فرم همدم برداری است.

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \\ I_{n-m}, 0_{n-m,m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_{n-m,m} \end{bmatrix}. \quad (50-4)$$

خصوصیت مهم ماتریس S که موجب به دست آمدن فرم های همدم برداری مختلفی می گردد این است که در حالت کلی نمی توان گفت که ماتریس S منحصر بفرد است، زیرا می توانیم عناصر محوری را در عملیات سطری و ستونی تغییر دهیم و عناصر دیگری را به عنوان عناصر محوری به کار ببریم و ماتریس های معکوس پذیر مختلفی به دست آوریم که به فرم همدم برداری باشد. این تغییر دادن عناصر محوری باعث به دست آمدن فرم های همدم برداری مختلفی می گردد که در نتیجه ماتریس های پس خورد حالت مختلفی را برای زوج (M, N) می توان به دست آورد.

با این مفروضات ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را برای زوج تبدیل یافته (M, N) به سیستم تخصیص می دهد به صورت

$$w(t) = -M_0^{-1}G_0\tilde{z}(t) = \tilde{F}_d\tilde{z}(t), \quad (51-4)$$

می باشد و در نتیجه ماتریس پس خورد حالت اولیه برای زوج (M, N) به صورت:

$$F_d = \tilde{F}_dT^{-1}, \quad (52-4)$$

است. ماتریس حلقه بسته تبدیل یافته $\tilde{F} = \tilde{N} + \tilde{M}\tilde{F}_d$ به شکل یک فرم جردن فشرده با مقادیر ویژه صفر به صورت زیر می باشد

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0_{m,n} \\ I_{n-m} & 0_{n-m,m} \end{bmatrix}. \quad (53-4)$$

۴-۶ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت

معادله حالت سیستم را به فرم (۹-۴) یعنی

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t)$$

با کنترل ورودی (۱۰-۴) در نظر می گیریم. و فرض می کنیم $rank(M) = m$ ، $(m \leq n)$ و ناورداهای کرونکر منظم و مرتب باشند: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m$.

در این بخش هدف از کنترل سیستم یافتن ماتریس پس خورد حالت مشتق K_d به گونه ای است که مقادیر ویژه ی ماتریس حلقه بسته $\Gamma = N + MK_d$ ، در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ موسوم به طیف مقادیر ویژه باشند با این خاصیت که λ_i ها یا حقیقی اند و یا به صورت زوج های مزدوج مختلط

ظاهر می شوند، این مسئله را تخصیص مقادیر ویژه می گوئیم.

جهت محاسبه ماتریس پس خورد K_d ، ابتدا فرم همدم برداری معادله حالت و همچنین پس خورد اولیه $\tilde{F}_d = -M_0^{-1}G_0$ را به دست می آوریم و در نتیجه ماتریس حلقه بسته $\tilde{F}$ بصورت زیر می باشد.

$$\tilde{F} = \tilde{N} + \tilde{M}\tilde{F}_d = \begin{bmatrix} 0 & \\ I_{n-m} & 0 \end{bmatrix},$$

حال ماتریس قطری $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را در نظر می گیریم. تعریف می کنیم:

$$N_\lambda = (\tilde{N} + \tilde{M}\tilde{F}_d) + D, \quad (54-4)$$

واضح است که مقادیر ویژه ماتریس N_λ همان طیف Λ می باشد، حال با استفاده از عملیات تشابهی ستونی مقدماتی و سطری مقدماتی نظیر، N_λ را به فرم همدم برداری $\tilde{N}_\lambda$ به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{N}_\lambda = \begin{bmatrix} \tilde{G}_\lambda & \\ I_{n-m} & 0_{n-m,m} \end{bmatrix}, \quad (55-4)$$

که در آن $\tilde{G}_\lambda$ زیر ماتریس $m \times n$ از $\tilde{N}_\lambda$ می باشد. واضح است که $\tilde{N}_\lambda$ مجموعه ای از مقادیر ویژه ی از پیش تعریف شده را در بر دارد و در فرم کانونیکال مشابهی با $\tilde{N}$ قرار دارد.

بنابراین ماتریس پس خورد حالتی که منجر به تخصیص مقادیر ویژه می شود عبارت است از

$$K_d = F_d + M_0^{-1}\tilde{G}_\lambda T^{-1}. \quad (56-4)$$

باید توجه داشت که ترتیب قرار گرفتن λ_i ها در ماتریس قطری D باعث می شود G_λ های متفاوتی به دست آیند.

۴-۷ پارامتر سازی ماتریس پس خورد با استفاده از گراف

در این بخش می خواهیم پارامتری سازی ماتریس پس خورد F را برای زوج کنترل پذیر (M, N) به روشی که مبتنی بر نظریه گراف است انجام دهیم. در بخش های قبل روش به دست آوردن فرم همدم برداری را برای زوج کنترل پذیر (M, N) شرح دادیم. در این بخش با توجه به این که مشکلی برای به دست آوردن فرم همدم برداری زوج (M, N) وجود ندارد فرض می کنیم که زوج (M, N) در فرم همدم برداری باشد و ماتریس پس خورد پارامتری را به دست می آوریم.

۴-۷-۱ گراف مربوط به ماتریس $N + MF_d$

فرض کنید (M, N) به فرم همدم برداری باشند به عبارت دیگر

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 & \\ I_{n-m} & 0_{n-m,m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_{n-m,m} \end{bmatrix},$$

می توان به آسانی ماتریس پس خورد K_d را از سیستم (۴-۹) و (۴-۱۰) به دست آورد، که مقادیر ویژه ی $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ را به سیستم اختصاص دهد. با توجه به ساختار $\tilde{M}, \tilde{N}$ و نحوه ی بدست آوردن $\tilde{K}_d$ ملاحظه می شود که درایه های ماتریس $\tilde{T} = \tilde{N} + \tilde{M}\tilde{K}_d$ صفر و یا یک هستند. روشی ساده برای محل یابی پارامترها، روش گراف تبدیل حالت^۱ (STG) [۳]، قابل اجرا به فرم جردن فشرده می باشد. بنابراین، تبدیلی از بردارهای واحد را که به عنوان ورودی های ماتریس حلقه بسته $\tilde{T}$ می باشد را در نظر بگیرید، این تبدیل یک گراف معرفی می کند. پارامترهای آزاد به صورت یال هایی که رؤس را به یکدیگر متصل می کنند تعیین می شوند، بطوری که هیچ دو مسیری روی هم منطبق نشوند و یا با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند. پس می توان گرافی را برای آن متناظر کرد که رؤس آن را بردارهای پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام بردار صفر تشکیل می دهند. در گراف مربوط یالی از e_i به e_j در نظر می گیریم، اگر e_i توسط $\tilde{T}$ به بردار e_j نگاشته شود یعنی $\tilde{T}e_i = e_j$ و اگر $i + m > n$ آنگاه $\tilde{T}e_i = 0$.

گرافی که بدین صورت برای ماتریس $N + MK_d$ بدست می آید را با g_p نشان خواهیم داد. چون $N + MK_d$ پوچ توان است می توان نشان داد که از دو رأس غیر صفر g_p مسیری به صفر وجود دارد و علاوه بر این در g_p هیچ طوقه و دوری وجود ندارد.

می توان برای هر e_i عدد k_i را مربوط ساخت که k_i فاصله ماکزیمم رأس e_i با صفر است و می توان نتایج زیر را براحتی بدست آورد:

(۱) هر k_i عددی صحیح است که در رابطه زیر صدق می کند

$$1 \leq k_i \leq n.$$

(۲) اندیس پوچ توانی $N + MK_d$ برابر است با

$$v = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}.$$

(۳) در گراف g_p به هیچ یک از رؤس $e_1, e_2, \dots, e_n$ یالی منتهی نمی شود.

(۴) اندیس پوچ توانی $N + MK_d$ برابر است با

$$v = \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\},$$

یا

$$v = \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\} \geq v = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}.$$

۴-۷-۲ اضافه کردن یال به g_p :

ابتدا ماتریس G_α را به سمتی در نظر می گیریم که بعد G_α با بعد G_0 برابر است و باید شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

۱. در ابتدا تمام درایه های G_α را صفر در نظر می گیریم

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}. \quad (۵۷-۴)$$

۲. ابتدای هر یال ورودی هاست.

۳. این یالها ایجاد یک دور در گراف ننمایند.

۴. یالها روی هم قرار نگیرند.

۵. در صورت اهمیت اندیس پوچ توانی یالها به گونه ای اضافه شوند که طول مسیر تغییر نکند.

۶. حال اگر از e_i به e_j یک یال اضافه گردید درایه سطر i ام و ستون j ام G_α را پارامتر g_{ij} قرار می دهیم.

اگر اندیس پوچ توانی مهم نباشد ماتریس G_α ای را انتخاب می کنیم که تعداد پارامتر بیشتری دارد. پس داریم

$$\tilde{F}_\alpha = M_0^{-1} G_\alpha, \quad (۵۸-۴)$$

حال ماتریس پس خورد حالت پارامتری برابر خواهد بود با

$$F = K_d + F_\alpha, \quad (۵۹-۴)$$

که در آن

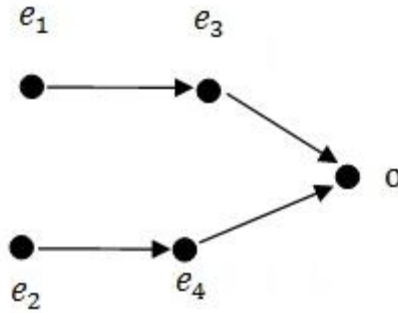
$$F_\alpha = M_0^{-1} G_\alpha T^{-1}, \quad (۶۰-۴)$$

و G_α یک ماتریس $m \times n$ شامل فقط پارامترهای آزاد است.

مثال: فرم جردن فشرده سیستم حلقه بسته با مقادیر صفر زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

گراف تبدیل حالت متناظر است با:



شکل ۴-۸: گراف تبدیل حالت

که در آن $\tilde{e}_1 = e_3$ ، $\tilde{e}_2 = e_4$ و $\tilde{e}_3 = \tilde{e}_4 = 0$. حال اگر از رأس e_1 به رأس e_4 یالی متصل کنیم و در ماتریس G_α پارامتر g_{14} ، همچنین، رأس e_2 را به رأس e_3 متصل کنیم و در ماتریس G_α پارامتر g_{23} قرار دهیم، اندیس پوچ توانی ماتریس حلقه بسته پایدار باقی می ماند. معهذا، از رأس e_1 به e_2 در یک ماتریس دیگری از G_α پارامتر g_{12} و یا از e_2 به e_1 ، g_{21} قرار دهیم در این صورت اندیس پوچ توانی ماتریس حلقه بسته یکی افزایش می یابد. بایستی تأکید شود که برای کنترل بهینه زمانی سیستم توسعه یافته استاندارد، اندیس پوچ توانی v بایستی پایدار بماند، از این رو فرم پارامتری G_α فقط شامل g_{14} و g_{23} می باشد. اما برای تخصیص مقدار ویژه وقتی اندیس پوچ توانی بی اهمیت است، فرم های پارامتری دیگر G_α مجاز هستند.

۴-۸ الگوریتم برای ماتریس پس خورد حالت با مینیمم نرم فروبنیوس

ماتریس پس خورد پارامتری مفروض

$$F = K_d + M_0^{-1} G_\alpha T^{-1},$$

را در نظر بگیرید. یک زیر ماتریس از G_α شامل مؤلفه های غیر صفر آن، یعنی فقط پارامترهایی که توسط H با مؤلفه های h_{pq} متناظر با g_{sr} ، $p \in \{s, s+1, \dots, m\}$ و $q \in \{r, r+1, \dots, n\}$ تعریف شده اند را در نظر بگیرید. آنگاه از عبارت $M_0^{-1} G_\alpha T^{-1}$ واضح است که، ستون s ام از M_0^{-1} و سطر r ام از ماتریس T^{-1} پارامترهای غیر صفری از G_α را تولید می کند که می تواند به مؤلفه های متناظر k_{ij} ، $(i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ اضافه شود. برای سهولت فرض می کنیم که، ستون هایی از M_0^{-1} که به g_{sr} تبدیل می شود در ماتریس V ، سطرهای T^{-1} که به g_{sr} تبدیل می شود در ماتریس Y و پارامترهای غیر صفر مؤثر G_α در ماتریس H ذخیره شوند. از این رو ماتریس پس خورد حالت پارامتری F عبارت است از:

$$F = K_d + VHY,$$

که نرم فروبنیوسی ماتریس F به صورت زیر بدست می آید:

$$\|F\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} F_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} (k_{d\ ij} + v_{is} h_{sr} y_{rj})^2,$$

در مینیمم نرم، برای هر $r \leq n, s \leq n$ بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial \|F\|^2}{\partial h_{sr}} = 0,$$

مشتق $\|F\|^2$ نسبت به h_{sr} برابر است با

$$V^T K_d Y^T + V^T V H Y Y^T = 0,$$

بنابراین، با تعریف

$$P = V^T V,$$

$$Q = Y Y^T,$$

$$C = V^T K_d Y^T,$$

و بنابراین

$$H = -P^{-1} C Q^{-1}.$$

در ادامه الگوریتمی ارائه می شود که توسط کرباسی [۱۵] مطرح شده است، و به روشنی در مثال ها مورد استفاده قرار می گیرد.

۴-۸-۱ الگوریتم

موضوع: بدست آوردن پارامترهای g_{rs} ، ذخیره کردن در ماتریس H ، مینیمم کردن نرم ماتریس بهره ی کنترل شده.

ورودی: زوج (N, M) ، ماتریس پس خورد اولیه K_d ، M_0^{-1} ، T^{-1} که می تواند توسط الگوریتم مفروض کرباسی و بل [۱۵ و ۱۶] بدست آید.

گام اول: تعیین سطرها و ستون های G_α بر حسب پارامترهایی که توسط s و r تعیین محل شده اند، ستون های M_0^{-1} را که با سطرهای g_{sr} سازگارند در V و سطرهای T^{-1} را که با ستون های g_{sr} سازگارند در ماتریس Y ذخیره شوند.

گام دوم: بدست آوردن $V^T V$ ، $Y Y^T$ ، $V^T K_d Y^T$ که به ترتیب در P ، Q و C ذخیره می شوند.

گام سوم: بدست آوردن

$$H = -P^{-1}CQ^{-1},$$

و قرار دادن مؤلفه های مربوط به H (که h_{pq} هستند) در G_α (که g_{rs} هستند) در مکان های مشخص شده گام ۱ به عنوان پارامترهای در نظر گرفته شده.

گام چهارم: بدست آوردن

$$F_\alpha = M_0^{-1}G_\alpha T^{-1}.$$

گام پنجم: خروجی

$$F = K_d + F_\alpha,$$

ماتریس بهینه کنترل شده با مینیمم نرم است.

۹-۴ مثال

سیستم توسیع یافته خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (۶۱-۴)$$

در این سیستم داریم:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

در این مثال قطب های حلقه بسته ی مناسب برای کنترل پذیری سیستم های (۲-۴) و (۱۰-۴) هستند:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_{3,4} = -2 \mp 2i$$

توجه کنید که سیستم (۶۱-۴) از راهنمایی کنترلی (۲-۴) پیروی می کند. با مفروضات A و B از (۸-۴) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

و (M, N) کنترل پذیرند.

از قضیه ۴-۱، قطب ها برای سیستم حلقه بسته ی جدید با پس خورد حالت (۴-۹) و (۴-۱۰) با M و N داده شده در (۴-۸) هستند:

$$\lambda_1^{-1} = -0.25, \quad \lambda_2^{-1} = -0.5, \quad \lambda_{3,4}^{-1} = -0.25 \pm 0.25i$$

در نتیجه ماتریس بهره ی پس خورد K_d برابر خواهد بود با:

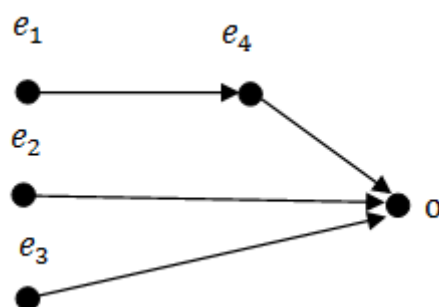
$$K_d = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 - 0.5i & 0 - 0.25i & 0 - 0.25i \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 1.25 + 0.25i & 0 & -0.25 & 0.25i \\ 0.25 - 0.25i & 0.25 & 0.25i & 0 \end{bmatrix},$$

که نرم آن ۲,۵۹۸۱ می باشد.

از طرفی داریم:

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و در نتیجه گراف ماتریس حلقه بسته به شکل زیر می باشد.



شکل ۴-۹: گراف ماتریس حلقه بسته

حال چون اندیس پوچ توانی مهم نیست G_α را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 0 & g_{34} \end{bmatrix}, \quad (۴-۶۲)$$

پس داریم:

$$H_{sr} = [h_{31} \quad h_{32} \quad h_{34}],$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$P = 1.25, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \\ -7 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = [2.5 + 1.125i \quad -2.5 + 0.5i \quad 2.75 - 0.75i],$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$H = [0.3273 - 0.2364i \quad 0.5909 - 0.2045i \quad 0.1818 - 0.2091i],$$

پس خواهیم داشت:

$$F_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.9999i & -0.3092 + 0.1455i & -0.0727 + 0.01364i & 0.0909 - 0.1046i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 + 0.1999i & 0.6183 + 0.2910i & -0.1455 - 0.0273i & 0.1818 + 0.2091i \end{bmatrix}, \quad (۶۳-۴)$$

ماتریس پس خورد پارامتری عبارت است از:

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.9999i & 1.1909 - 0.3545i & -0.0727 + 0.01364i & 0.0909 - 0.1046i \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0.25 - 0.0501i & 0.6183 + 0.2910i & -0.1045 - 0.2227i & 0.0682 + 0.0409i \end{bmatrix}, \quad (۶۴-۴)$$

که در نتیجه نرم F برابر خواهد بود با، $۱,۹۸۶۰$.

ملاحظه می شود که نرم ماتریس پس خورد پارامتری کمتر از نرم ماتریس پس خورد شد. توجه داشته باشید که با افزودن اندیس کنترل پذیری نرم ماتریس پس خورد کاهش قابل توجه تری خواهد داشت.

فصل پنجم

طرحی از کنترل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای برای
سیستم های توسیع یافته

۱-۵ مقدمه

در این فصل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای را برای یک سیستم توسیع یافته معرفی می کنیم و با یک مثال پایداری این روش را نشان می دهیم.

۲-۵ شرح مسئله

سیستم توسیع یافته ی خطی کنترل پذیر زیر را در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = 0, \quad (1-5)$$

که در آن $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت^۱ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل^۲ باشد فرض کنید که $1 \leq m \leq n$ و همچنین، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس های ناوردای زمانی باشند. حال کنترل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$u(t) = K_d \dot{x}(t) + K_p x(t), \quad (2-5)$$

که در آن K_p ماتریس پس خورد حالتی است که مقادیر ویژه ی غیر صفر و پایدار را به سیستم حلقه بسته ی معادله ی

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) &= K_p x(t) \end{aligned} \quad (3-5)$$

اختصاص دهد. پس هدف برنامه بدست آوردن حالت مشتق K_d ، با استفاده از روش های پس خورد حالت است که قطب های سیستم کنترل شده ی (۱-۵) و (۲-۵) بطور دلخواه می باشند و از مجموعه ی $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ انتخاب شده اند که $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، که این سیستم حلقه بسته ی کنونی یک عملکرد قابل قبول دارد.

مفروضات زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{rank}[E|B] = n;$$

$$\text{rank}[B] = m;$$

نکته ۱-۵ [۳]: اگر پیش فرض A برقرار باشد آنگاه K_d وجود دارد که:

$$\text{rank}[E - BK_d] = n. \quad (4-5)$$

برای K_d صادق در (۴-۵) از (۲-۵) نتیجه می گیریم که سیستم (۱-۵) می تواند به صورت سیستم خطی استاندارد زیر باز نویسی شود:

^۱ State vector

^۲ Control input vector

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B(K_d\dot{x}(t) + K_px(t)), \quad (5-5)$$

$$\dot{x}(t) = (E - BK_d)^{-1}(A + BK_p)x(t); \quad (6-5)$$

از (6-5) متوجه می شویم که اگر K_p بگونه ای باشد که مقادیر ویژه ی صفر را به سیستم حلقه بسته ی (3-5) اختصاص دهد آنگاه سیستم کنترل شده ی (1-5) و (2-5) ناپایدار می شوند، زیرا حداقل یک قطب آن برابر صفر می باشد. برنامه ی پایداری برای سیستم های توسعه یافته پیچیده تر از سیستم های استاندارد می باشد زیرا در این سیستم ها نه فقط پایداری بلکه منظم بودنش هم ضروری است [3].

5-3 طرح کنترل پس خورد حالت مشتق و گزاره ای با استفاده از پس خورد حالت

اکنون نتیجه ی اصلی این فصل را مطرح می کنیم :

قضیه 5-1: ماتریس های زیر را تعریف می کنیم :

$$N = (A + BK_p)^{-1} E, \quad M = -(A + BK_p)^{-1} B \quad (7-5)$$

و فرض می کنیم که زوج (N, M) کنترل پذیر باشند. فرض کنید K_d پس خورد حالتی باشد که مجموعه قطب های سیستم حلقه بسته ی زیر باشند:

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t) \quad (8-5)$$

$$w(t) = K_d z(t) \quad (9-5)$$

بطوری که $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ بطور دلخواه تخصیص داده شده اند. آنگاه برای پس خورد K_d مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قطب هایی از سیستم کنترل پذیر (1-5) با پس خورد حالت مشتق و گزاره ای (2-5) هستند و همچنین شرط (4-5) برقرار است.

اثبات: فرض کنید (N, M) کنترل پذیر باشند آنگاه پس خورد حالت K_d وجود دارد که سیستم (8-5) با پس خورد حالت (9-5) کنترل پذیر باقی بماند. فرض شده توسط

$$\dot{z}(t) = (N + MK_d)z(t), \quad (10-5)$$

قطب ها برابراند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$. حال از $N = (A + BK_p)^{-1} E$ و $M = -(A + BK_p)^{-1} B$ و $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم :

$$(N + MK_d)^{-1} = ((A + BK_p)^{-1} (E - BK_d))^{-1} \quad (11-5)$$

$$= (E - BK_d)^{-1} (A + BK_p), \quad (12-5)$$

از (10-5) و لم 4-1، نتیجه می شود $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای از $(E - BK_d)^{-1} (A + BK_p)$ هستند بنابراین (3-5) برقرار بوده و این قطب ها، قطب هایی از سیستم (1-5) و پس خورد حالت مشتق (2-5)

تلفیق شده در (۶-۵) می باشند. ■

۴-۵ مثال

کارایی از طرح های روش های پیشنهاد شده با استفاده از مدل سازی:

مثال: یک نمونه مدار الکتریکی، می تواند توسط سیستم توسیع یافته ی خطی زیر تعریف شود [۳]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (۱۳-۵)$$

که در آن x_1 شدت جریان و x_2 پتانسیل یک خازن است. در این سیستم داریم:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

در این مثال قطب های حلقه بسته ی مناسب برای کنترل پذیری سیستم های (۲-۵) و (۱۳-۵) هستند:

$$\lambda_1 = -2 + 1i, \quad \lambda_2 = -2 - 1i,$$

با استفاده از نرم افزار متلب با این مقادیر ویژه، K_p بدست می آید:

$$K_p = [1 \quad -2 - i]$$

توجه کنید که سیستم (۱۳-۵) از راهنمایی کنترلی (۲-۵) پیروی می کند. با مفروضات A و B و از (۷-۵) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 - 0.5i \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix}, \quad (۱۴-۵)$$

و (N, M) کنترل پذیرند.

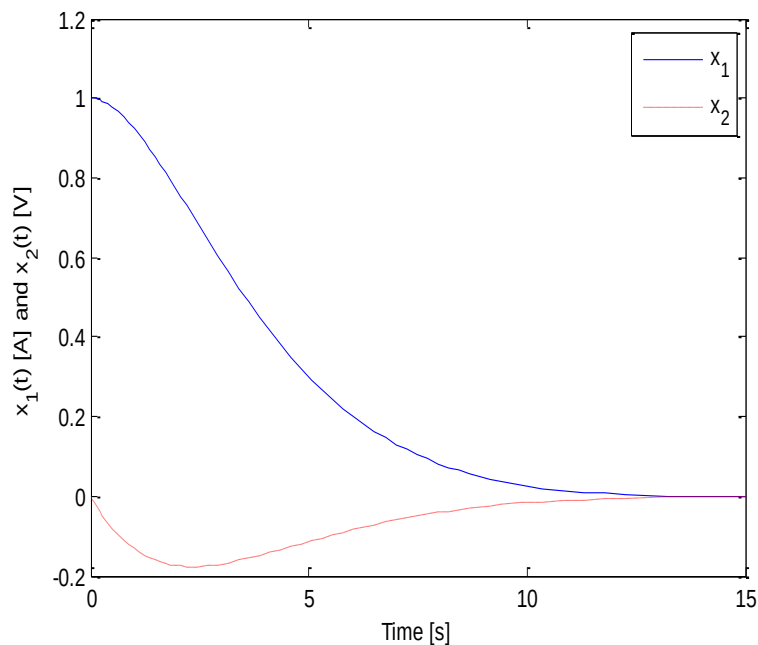
از قضیه ۱-۵، قطب ها برای سیستم حلقه بسته ی جدید با پس خورد حالت (۸-۵) و (۹-۵) با N و M داده شده در (۷-۵) عبارتند از:

$$\lambda_1^{-1} = -0.40 - 0.20i, \quad \lambda_2^{-1} = -0.40 + 0.20i,$$

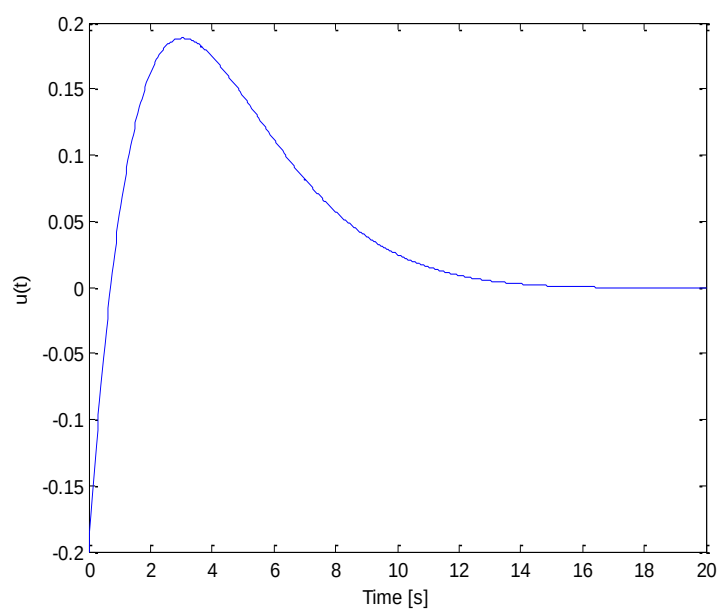
بنابراین با استفاده از نرم افزار متلب ماتریس بهره ی پس خورد K_d برابر خواهد بود با:

$$K_d = [0.2 - 0.2i \quad -1.8 - 0.8i]. \quad (۱۵-۵)$$

شکل های ۱-۵ و ۲-۵ نتایج شبیه سازی سیستم کنترل شده ی (۵-۵) با شرط اولیه $x(0) = [0 \quad 1]^T$ را نشان می دهند. در این مثال قوت وسادگی روش پیشنهاد شده را می توان مشاهده کرد.



شکل ۵-۱: پاسخ گذرای سیستم کنترل شده (مثال ۱)، برای $x_0 = [1 \ 0]^T$



شکل ۵-۲: ورودی کنترل سیستم کنترل شده (مثال ۲)، برای $x_0 = [1 \ 0]^T$.

۵-۵ مقایسه و مزیت های استفاده از این روش

همانطور که گفتیم استفاده از روش پس خورد حالت مشتق به ما این امکان را می دهد تا سیستم توسعه یافته را با یک سیستم استاندارد هم ارز کنیم. اما مزیت استفاده از پس خورد حالت مشتق و گزاره ای بجای

پس خورد حالت مشتق [۱] در این است که ، اینجا لزومی به رتبه کامل^۱ بودن A نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲: مدار الکتریکی مثال قبل را به صورت سیستم توسیع یافته زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (۱۶-۵)$$

در این سیستم داریم:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (۱۷-۵)$$

همانطور که ملاحظه می شود در این مثال A رتبه کامل نیست قطب های حلقه بسته ی مناسب برای کنترل پذیری سیستم های (۲-۵) و (۱۶-۵) هستند:

$$\lambda_1 = -1 + 1i, \quad \lambda_2 = -1 - 1i,$$

با استفاده از نرم افزار متلب با این مقادیر ویژه، K_p بدست می آید:

$$K_p = [1 \quad -2 - i].$$

توجه کنید که سیستم (۱۶-۵) از راهنمایی کنترلی (۲-۵) پیروی می کند. با مفروضات A و B از (۷-۵) داریم:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۱۸-۵)$$

و (M, N) کنترل پذیرند.

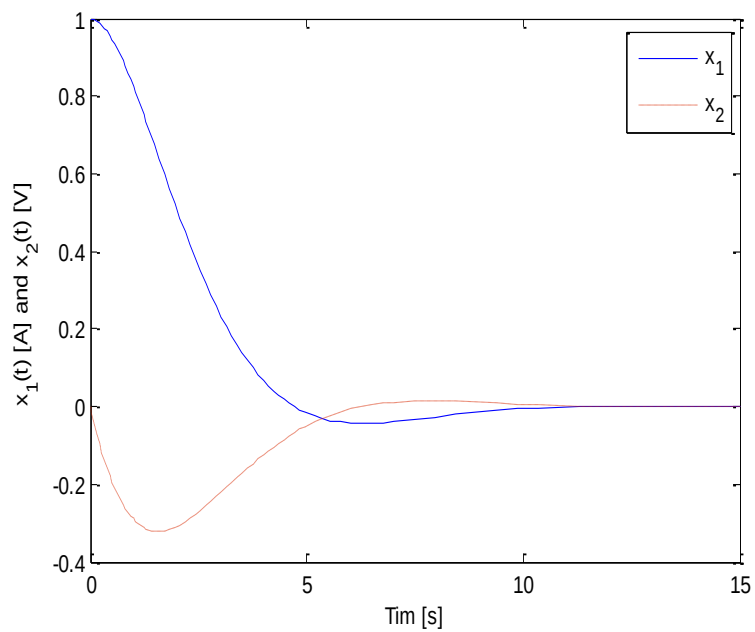
از قضیه (۱-۵)، قطب هایی برای سیستم حلقه بسته ی جدید با پس خورد حالت (۸-۵) و (۹-۵) با N و M داده شده در (۷-۵) هستند:

$$\lambda_1^{-1} = -0.50 - 0.50i, \quad \lambda_2^{-1} = -0.50 + 0.50i,$$

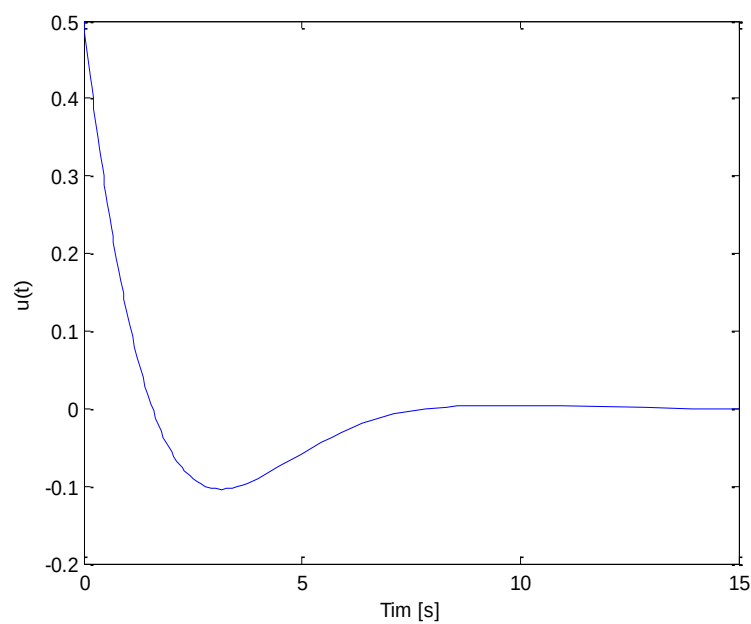
بنابراین با استفاده از نرم افزار متلب ماتریس بهره ی پس خورد K_d برابر خواهد بود با:

$$K_d = [0.50 \quad 1]. \quad (۱۹-۵)$$

شکل های ۳-۵ و ۴-۵ نتایج شبیه سازی سیستم کنترل شده ی (۵-۵) با شرط اولیه $x(0) = [0 \quad 1]^T$ را نشان می دهند.



شکل ۳-۵: پاسخ گذرای سیستم کنترل شده (مثال ۲)، برای $x_0 = [1 \ 0]^T$



شکل ۴-۵: ورودی کنترل سیستم کنترل شده (مثال ۲)، برای $x_0 = [1 \ 0]^T$.

خلاصه و نتایج

۶-۱ خلاصه

در این پایان نامه سیستم های توسعه یافته در دو بخش مجزای، خروجی و پس خورد حالت مورد بررسی قرار گرفتند. در ابتدا بررسی های انجام شده روی سیستم توسعه یافته با خروجی گزاره ای، و مشتق-گزاره ای را مطرح کردیم، در ادامه با ایده گرفتن از این طرح ها کارهای جدیدی روی پس خورد حالت مشتق و گزاره ای انجام دادیم.

کار جدیدی که ما در اینجا انجام دادیم، از پس خورد حالت مشتق معرفی شده استفاده کردیم و پس از تبدیل سیستم توسعه یافته به یک سیستم استاندارد، تبدیلات تشابهی را برای یک سیستم توسعه یافته مطرح کردیم. در ادامه با بکارگیری نظریه گراف ماتریس پس خورد حالت پارامتری را محاسبه نمودیم و در نتیجه توانستیم نرم ماتریس پس خورد یک سیستم توسعه یافته را کاهش دهیم. همچنین در این پایان نامه روشی جدید جهت آنالیز و کنترل سیستم های توسعه یافته با استفاده از پس خورد حالت مشتق و گزاره ای معرفی شد. در این روش پایداری سیستم های توسعه یافته مورد بررسی قرار گرفت. همچنین جهت تکمیل روش های معرفی شده، مثال هایی ارائه گردید.

۶-۲ نتیجه گیری

با توجه به وجود سیستم های توسعه یافته در بسیاری از برنامه های کاربردی، کنترل پذیری و پایداری این سیستم ها بسیار قابل توجه است. در این پایان نامه با استفاده از روشی جدید و بسط آن در حوزه ی تبدیلات تشابهی، کمینه سازی نرم ماتریس پس خورد حالت یک سیستم توسعه یافته را مطرح نمودیم، که همانطور که می دانید، مزیت آن کم کردن هزینه های وارده خواهد بود.

همچنین در این پایان نامه روشی جدید ارائه گردید، که در آن پس خورد حالت مشتق و گزاره ای مطرح شد. با استفاده از این روش می توان سیستم توسعه یافته را به راحتی به یک سیستم استاندارد معمولی تبدیل کرد. از آنجا که کارکردن با یک سیستم استاندارد و همچنین بررسی پایداری آن بسیار آسانتر از حالت توسعه یافته آن می باشد، خود امتیاز این روش بر روش های دیگر را بیان می کند. در نتیجه استفاده از این روش، علاوه بر سهولت، پرفکت و مقاوم نیز می باشد. از طرفی همانطور که دیدید در این روش لزومی

به رتبه کامل بودن A نداریم، و از این جهت بر روش پس خورد حالت مشتق نیز برتری دارد.

۶-۳ پیشنهادات

اولین مسئله ای که در اینجا می توان به آن اشاره کرد، مسئله ی تعمیم تمامی مباحث مطرح شده در این پایان نامه به سیستم های دو بعدی توسیع یافته می باشد و می توان با تکنیک های مطرح شده در این پایان نامه، پایداری آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. و اما مسائل دیگر، در اینجا ما تبدیلات تشابهی، ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی و مسأله ی کمینه نرم را فقط بر روی سیستم های توسیع یافته با پس خورد حالت مشتق مطرح کردیم، از طرفی پس خورد حالت مشتق و گزاره ای را معرفی کردیم. در نتیجه مسئله ی تبدیلات تشابهی، ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی و مسأله ی کمینه نرم بر روی سیستم های توسیع یافته با پس خورد حالت مشتق و گزاره ای قابل بحث و بررسی است. و در ادامه مبحثی که به چشم می آید، بحث ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیر خطی می باشد که بر روی سیستم توسیع یافته با پس خورد حالت مشتق یا پس خورد حالت مشتق و گزاره ای قابل بررسی بنظر می آید.

اما اصلی ترین موضوعی که قابل بحث و بررسی می باشد بیان این موضوع است که، حال که توانستیم سیستم توسیع یافته را با استفاده از یک پس خورد حالت مشتق و یا مشتق-گزاره ای با یک سیستم استاندارد هم ارز کنیم، پس می توان سیستم هایی که از روی سیستم استاندارد مطرح شده اند را به صورت توسیع یافته مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و پایداری آنها را بررسی کرد. برای نمونه سیستم های تأخیری توسیع یافته و همچنین سیستم های هم زمان توسیع یافته قابل بحث و بررسی می باشند.

پیوست A

ضمیمه برای فصل سوم

الگوریتم صورت فشرده

ورودی: ماتریس های $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

خروجی: ماتریس های واحد $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ بطوری که $U^T E V$ ، $U^T A V$ ، $Y^T C V$ و $U^T B W$ در صورت فشرده باشند.

قرار دهید: $Y := I_p$ و $W := I_m$ ، $V := I_n$ ، $U := I_n$.

گام اول: یک SVD به صورت $E = U_E \begin{bmatrix} \Sigma_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_E^T$ با Σ_E ناتکین انجام دهید و قرار دهید

$$E := U_E^T A V_E = \begin{bmatrix} \Sigma_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A := U_E^T A V_E = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}, B := U_E^T B = \begin{bmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{bmatrix} \text{ و } C := C V_E = [C_1^1 \quad C_2^1]$$

$$V := V V_E, \quad U := U U_E.$$

گام دوم: SVD های زیر را انجام دهید

$$B_2^1 = U_B \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B \quad \text{و} \quad C_2^1 = U_C \begin{bmatrix} \Sigma_C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_C.$$

با Σ_C و Σ_B ناتکین و قرار دهید

$$E := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & U_B^T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & U_B^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 \\ A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & U_B^T \end{bmatrix} B V_C = \begin{bmatrix} B_{11}^2 & B_{12}^2 \\ \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C := U_B^T C \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^2 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y := Y U_C, \quad U := U \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & U_B \end{bmatrix}, \quad V := V \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & V_C \end{bmatrix}, \quad W := W V_B.$$

گام سوم: SVD های زیر را انجام دهید

$$B_{12}^2 = U_{12} \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{12}^T \quad \text{و} \quad C_{21}^2 = U_{21} \begin{bmatrix} \Sigma_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{21}^T$$

با Σ_{21} و Σ_{12} ناتکین و قرار دهید

$$B := B \begin{bmatrix} I_{k_1} & 0 \\ 0 & V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^3 & B_{12}^3 & 0 \\ \Sigma_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = W \begin{bmatrix} I_{k_1} & 0 \\ 0 & V_{12} \end{bmatrix},$$

$$C := \begin{bmatrix} I_{l_1} & 0 \\ 0 & U_{21}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^3 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = Y \begin{bmatrix} I_{l_1} & 0 \\ 0 & U_{21} \end{bmatrix}.$$

گام چهارم: SVD زیر را انجام دهید

$$A_{33}^2 = U_A \begin{bmatrix} \Sigma_{44} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_A^T,$$

با Σ_{44} ناتکین و قرار دهید

$$E := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & U_A^T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & U_A^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{14}^3 \\ A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{23}^3 & A_{24}^3 \\ A_{31}^3 & A_{32}^3 & \Sigma_{44} & 0 \\ A_{41}^3 & A_{42}^3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & U_A^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_{11}^3 & B_{12}^3 & 0 \\ \Sigma_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U := U \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & U_A \end{bmatrix},$$

$$C := C \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^3 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V := V \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & V_A \end{bmatrix}.$$

گام پنجم: SVD های زیر را انجام دهید

$$A_{42}^3 = U_{42} \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{53} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{42}^T \quad \text{و} \quad A_{24}^3 = U_{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Sigma_{35} & 0 \end{bmatrix} V_{24}^T,$$

با Σ_{53} و Σ_{35} ناتکین و سرانجام فرمی به توسط تبدیلات زیر بدست آورید:

$$E := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{24}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{42}^T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{t_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{24} \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{24}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{42}^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{t_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{24} \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{24}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{42}^T \end{bmatrix} B, \quad C := C \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{t_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{24} \end{bmatrix},$$

$$U := U \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{24}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{42}^T \end{bmatrix}, \quad V := V \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{t_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{24} \end{bmatrix}.$$

پیوست B

ضمیمه برای فصل سوم

در این پیوست به صراحت صورت فشرده قضیه های ۳-۳ و ۵-۳ برای سیستم توسعه یافته مثال ۳-۱ و ۳-۲ نشان داده شده اند. محاسبات توسط متلب با دقت ماشینی $\mu = 2.22 \times 10^{-6}$ انجام گرفته است.

B.1. صورت فشرده برای مثال ۳-۱:

دست ماشینی متحرک سه پیونده مثال ۳-۱ در متغیرهای طبیعی مدل شده به یک سیستم توسعه یافته از فرم (۳-۱)-(۳-۲) بطوری که

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18.7532 & -7.9449 & 7.9449 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.9449 & 31.8182 & -26.8182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.9449 & -26.8182 & 26.8182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -67.4894 & -69.2393 & 69.2393 & 1.5214 & 1.5517 & -1.5517 & 1 & 0 \\ -69.8124 & -1.6862 & 1.6862 & -3.2206 & -3.2847 & 3.2847 & 0 & 0 \\ 69.8123 & 1.6862 & 68.2707 & 3.2206 & 3.2847 & -3.2847 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2166 & -0.0338 & 0.5547 \\ 0.4585 & -0.8452 & 0.3866 \\ -0.4585 & 0.8452 & 0.6134 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

9

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B.1. مثال ۳-۱: صورت فشرده (۳-۹)-(۳-۱۲)

صورت فشرده قضیه ۳-۳، (۳-۹)-(۳-۱۲)، به صورت

$k_2 = 3$ و $k_1 = 0, l_2 = 3, l_1 = 0, t_6 = s_6 = 2, s_2 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0, t_1 = 6$ افراز شده است.

ماتریس های تبدیل هستند

$$U^T EV = \text{diag}(59.3556, 15.6697, 2.3643, 1, 1, 1, 0, 0),$$

$$U^T AV$$

$$= \begin{bmatrix} -5.3776 & -6.4410 & 0.5521 & 77.0846 & -16.1536 & 61.6916 & 0.2665 & 0.6509 \\ 0.2935 & 0.3515 & -0.0301 & 91.0970 & 67.3167 & -56.7237 & -0.9631 & 0.1514 \\ 0.2134 & 0.2556 & -0.0219 & -7.8515 & -2.6995 & -49.3394 & 0.0371 & -0.7439 \\ 0.2665 & -0.9631 & 0.0371 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7108 & -0.2224 & -0.6673 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6509 & 0.1514 & -0.7439 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^T BW = \begin{bmatrix} -1.3567 & -0.0429 & 0.0314 \\ -0.1524 & -0.6033 & -0.1172 \\ 0.2314 & -0.6491 & 0.1068 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

9

$$Y^T CV = \begin{bmatrix} 0.9638 & 0.2663 & -0.0103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.0007 & 0.0183 & 0 & 0.9998 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & -0.0385 & -0.9991 & 0 & 0.0183 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تبدیلات هم ارز متعامد هستند

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2665 & -0.9631 & 0.0371 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7108 & -0.2224 & -0.6673 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6509 & 0.1514 & -0.7439 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2665 & -0.9631 & 0.0371 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7108 & -0.2224 & -0.6673 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6509 & 0.1514 & -0.7439 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.4829 & -0.0137 & -0.8755 \\ -0.8437 & -0.2750 & -0.4611 \\ -0.2345 & 0.9614 & -0.1443 \end{bmatrix},$$

9

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0.9998 & 0.0183 \\ -0.7375 & -0.0124 & 0.6752 \\ 0.6754 & -0.0135 & 0.7374 \end{bmatrix}.$$

چون $s_6, t_6 \neq 0$ ، اثبات می شود که نه $C2$ برای این سیستم برقرار است نه $O2$.

۲.۱B. مثال ۱-۳: صورت فشرده (۱۳-۳)–(۱۶-۳)

صورت فشرده قضیه ۳-۵ به صورت $\tilde{t}_5 = 0, \tilde{t}_4 = 1, \tilde{t}_2 = 1, \tilde{s}_1 = \tilde{s}_6 = \tilde{t}_1 = \tilde{t}_3 = \tilde{t}_6 = 2$ افراز شده است.

ماتریس های تبدیل هستند

$$U^T EV = \begin{bmatrix} 5.5655 & -2.1964 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7080 & 4.6188 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41.4580 & -38.4109 & 0 & 0 & 0 & 21.8615 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^T AV = \begin{bmatrix} -3.0583 & -0.0397 & -25.5347 & -33.0776 & 81.0042 & 2.1205 & 0.3487 & 0.1078 \\ -3.3107 & -0.0430 & -27.6423 & 37.0934 & 87.6899 & 2.2956 & 0.3775 & -0.9254 \\ -5.2583 & -0.0683 & 58.1691 & 83.5929 & -7.1513 & 3.6459 & -0.8578 & -0.3634 \\ 0.7162 & -0.6979 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6979 & 0.7162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^T BW = \begin{bmatrix} 0.8754 & -0.3828 & -0.1040 \\ 0.5975 & 0.7860 & -0.0275 \\ 0.8911 & -0.1509 & 0.1206 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

9

$$Y^T CV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6979 & 0.7162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7162 & 0.6979 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس های تبدیلات متعامد هستند

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3487 & 0.3775 & -0.8578 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9310 & -0.0342 & 0.3634 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1078 & -0.9254 & -0.3634 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.6979 & 0.7162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7162 & 0.6979 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.4829 & -0.0137 & -0.8755 \\ -0.8437 & -0.2750 & -0.4611 \\ -0.2345 & 0.9614 & -0.1443 \end{bmatrix},$$

و $Y=I$.

ما نمی توانیم هیچ نتیجه ای درباره کنترل پذیری و مشاهده پذیری در بینهایت بگیریم، چون شرط های ۴ و ۵ در نتیجه ۳-۶ فقط شرط های کافی هستند.

از صورت های فشرده توسط نتایج ۳-۴ و ۳-۶ به ترتیب بدست می آوریم که $rank[E \ B] = 6$ ، $rank \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 8$ و $rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 6$ بنابراین دامنه تغییرات برای $E + BGC$ در لم ۳-۱۲ هست $4 \leq r \leq 6$.

از قضیه ۳-۱۳ میبینیم که سیستم توسط پس خورد نمی تواند منظم و از اندیس حداکثر ۱ ساخته شود، چون در صورت فشرده قضیه ۳-۵ $T_a^T A S_b$ و $T_b^T A S_a$ 2×2 و هر دو رتبه صفر دارند. باین وجود، برای این سیستم با استفاده از فرم فشرده قضیه ۳-۷ فرآیند تقلیل از [۵] می تواند با حذف قسمتی از سیستم که کنترل پذیر و مشاهده پذیر در بی نهایت نیست بدست آید.

۲B. صورت های فشرده برای مثال ۳-۲

مدار الکتریکی مثال ۳-۲ در متغیرهای طبیعی، مدل شده به یک سیستم توسیع یافته از فرم (۳-۱)-(۳-۲) که در آن

$$E = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0];$$

۱.۲B. مثال ۲-۳: صورت فشرده (۹-۳)-(۱۲-۳)

صورت فشرده قضیه ۳-۳، (۹-۳)-(۱۲-۳)، به صورت

$k_2 = 0$ و $k_1 = 1, l_2 = 1, l_1 = 0, t_5 = s_6 = t_6 = 0, t_3 = t_4 = 1, s_2 = t_2 = 0, t_1 = 2$ افراز شده است.

ماتریس های تبدیل هستند

$$U^T E V = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U^T A V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^T B W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y^T C V = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

ماتریس های تبدیل متعامد هستند

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

و $W = Y = [1]$. نتیجه می شود که شرط های $O2$ و $C2$ برقرارند.

۲.۲B. مثال ۲-۳: صورت فشرده (۱۳-۳)-(۱۶-۳)

صورت فشرده قضیه ۳-۵ به صورت $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_6 = \tilde{s}_1 = 0, \tilde{t}_1 = \tilde{t}_3 = \tilde{t}_4 = \tilde{t}_5 = \tilde{s}_6 = 1$ افراز شده است.

ماتریس های تبدیل هستند

$$U^T E V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U^T A V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^T B W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y^T C V = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

ماتریس های تبدیل متعامد هستند

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W = Y = [1].$$

از دو صورت فشرده توسط نتیجه ۳-۱ و ۳-۲ به ترتیب بدست می آوریم که $\text{rank}[E \ B] = 3$ ،
 $\text{rank} \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 3$ و $\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 2$. بنابراین تنها رتبه ممکن برای $E + BGC$ در لم ۳-۱ و ۳-۲ است.

از قضیه ۳-۸ می بینیم که سیستم توسط پس خورد می تواند منظم و از اندیس حداکثر ۱ ساخته شود،
 چون در صورت فشرده قضیه ۳-۵ $T_a^T AS_b$ و $T_b^T AS_a$ به ترتیب رتبه ستونی و سطری کامل دارند.

پیوست C

کدهای متلب

در این پیوست کدهای استفاده شده در این پایان نامه را بیان می کنیم.

```
% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% *****
% D=[-1 0 0 0 0 ;0 -2 1 0 0 ;0 -1 -2 0 0; 0 0 0 -3 1 ;0 0 0 -1 -3]
D=[];
for j=1:n
    landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
end
%landa=[ 0 0 0 ]

for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
end
% D
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end
G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp(' The feedback matrix which gives the desired
eigenvalues')
disp('
*****')
Kp=newF+Fc
% disp(' with the closed-loop matrix ')
% disp(' ***** ')
gamac=A+B*Kp;
disp(' checking the eigen values ')
disp(' ***** ')
v=eig(gamac)'
```

```

[u1,v1]=eig(gamac);
c2=cond(u1)
disp('          Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('          ***** ')
Normkp=norm(Kp,'fro')
% disp('          frobenious norm of closed-loop matrix ')
% disp('          ***** ')
% Normgama=norm(gamac,'fro')

% End of program for eigen

```

```

% Algorithm to obtain the kronecker invariants
% *****
[n,m]=size(B);p=[];
P1=[];p1(m)=0;
l=1; j=m+1;
    for i=1:m,
        p(i)=1;p1(i)=0;
    end
    for i=m+1:n,
        k=j-m*1;
        check_k
        if Q(i,j)==1,
            check_p1
            else
                p1(k)=1;
                for j=i+1:n+m
                    k=j-m*1;
                    check_k
                    if Q(i,j)==1,
                        check_p1
                        break
                    else
                        p1(k)=1;
                    end
                end
            end
        end
        j=j+1;
    end
disp('          These are the kronecker invariants ')
disp('          ***** ')
P

```

```

% o1.m
% Swap i-th row with k-th row
if i~=k
    Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
    T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
    Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
end

```

```

% o2.m
% Divide the pivot row

```

```

        t=Q(i,j);
%       if t~=0
            Q(i,:)=Q(i,+)/t;
            Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
            T1(i,:)=T1(i,+)/t;
%       end
    -

%                               o3.m
%       Subtract multiples of the pivot row

    if i~=n
        for k=i+1:n
            t=Q(k,i);
            if t~=0
                Q(k,:)=Q(k,)-t*Q(i,);
                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                T1(k,:)=T1(k,)-t*T1(i,);
            end
        end
    end

-

% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% *****
%
t0=cputime;
    disp('                This is the given plant matrix A')           %line 1
    disp('                *****')                                     %line 2
                                A                                         %line 3
    disp('                This is the given input matrix B')           %line 4
    disp('                *****')                                     %line 5
                                B                                         %line 6
    [n,m]=size(B);                                                       %line 7
    r=n+m;
    Q=[B,A];
    T1=eye(n);                                                           %line 10
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else
        % perform the similarity operations
        % swap i-th row with k-th row:

        o1
        % divide the pivot row

```

```

o2
% subtract multiples of the pivot row

o3
    i=i+1 ;
    j=j+1;
end
end
% *****
% Now compute the Standard echelon form !
% -----
s=1;
while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
            break
        end
    end
    s=s+1;
end
% *****
% choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n
%','s')
% if choice=='y'
%     kronk3
% end
% *****
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=i:r
        if Q(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Q(i,j);
                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end
% *****
% choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/n%','s')
% if choice=='y'
%     disp(' The standard Vector Companion form ')
%     disp(' ***** ')
%     Q
% end
% .....
disp(' This is the transformation matrix,T1')
disp(' ***** ')

```

```

                                T1
%                                disp(' press any key to continue')
% *****
% pause
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]); A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m, 1:m); bo=inv(B0)
G=Q(1:m, m+1:r); F1=-bo*G; G0=G;
Fp=F1*T1;
% *****
disp('                                This is the primdry feedback law ')
disp('                                ***** ')

Fp
% *****
%disp('                                The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('                                ***** ')
gama=A+B*Fp
% *****
%choice=input(' do you want to check the resultfeed,y/n ','s')
%if choice=='y'
%    g=gama^p(1);
%    for i=1:n
%        for j=1:n
%            if abs(g(i,j))<tol
%                g(i,j)=0;
%            end
%        end
%    end
%end
%fprintf('                                This is g=(A+B*F) ^%g',p(1))
%disp('                                *****')
%g
% *****
% generating parametric feed-back laws
%    q=fix(n/m);
%    if p(1)==q
%        disp('                                The feed-back law is unique ! ')
%        disp('                                ***** ')
%        disp('                                The kronecker invariants are all
equal ')
%disp('                                ***** ')
%    else
%        allfeeds
%    end
% *****
t1=cputime-t0

```


- [1] T. H. S, Abdelaziz & M, Valasek, (2004) Pole-placement for SISO Linear Systems by State-Derivative Feedback, IEE Proceedings-Control Theory Applications 151(4) , pp. 377-385.
- [2] P. Benner, P. Losse, V. Mehrmann, L. Poppe and T. Reis, (2008): γ -Iteration for descriptor systems using structured matrix pencils, in proceedings of the international symposium on mathematical theory of networks and systems, Blacksburg VA, USA.
- [3] A. Bunse-Gerstner, N.K. Nichols & V. Mehrmann, (1992), Regularization of Descriptor systems by derivative and proportional state feedback, in SIAM J. Matrix Anal .
- [4] A. Bunse-Gerstner, N.K. Nichols & V. Mehrmann, (1994) Regularization of descriptor systems by output feedback, IEEE Trans. Automat. Control, AC-39, pp. 46-67.
- [5] R. Byers, T. Geerts, and V. Mehrmann, (1997), Descriptor systems without controllability at infinity, SIAM J. Control Opti., 35, pp. 462-479.
- [6] S. L. Campbell, (1980) , Singular Systems of Differential Equations, Pitman, San Francisco.
- [7] R. Cardim, M.C.M. Teixeira, E. Assuncao & m. R. Covacic, (2007), Design of State-Derivative Feedback Controllers Using a State Feedback Control Design, in 3rd IFAC Symposium on system, Structure and Control, Vol. 1, Iguassu Falls, PR, Brazil, pp. Article 135-6 pages.
- [8] C. T. Chen, (1999), Linear system Theory and design, 2nd edn, Oxford University Press, New York.
- [9] D.L. Chu, H.C. Chan, and D.W.C. Ho, (1998), Regularization of singular systems by derivative and proportional output feedback, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19, pp. 21-38.
- [10] L. Dai, (1989): Singular control systems, vol. 118 of lecture notes in control and information sciences, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [11] B. N. Datta, (2004): Numerical methods for linear control systems, Elsevier academic press, San Diego/London.
- [12] G.R .Duan, G.W .Irwin & G. P .Lin, (1999), Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback, in proceedings of the 1999 American control conference, San Diego, CA, USA, pp. 1304-1308.
- [13] G.H. Golub and C. F. Van Loan, (1996M): Matrix computations, The John Hopkins University Press, Baltimore/London.
- [14] Hou and P. C. Muller, (1994), LQ and tracking control of descriptor systems with application to constrained manipulator, tech. rep., Sicherheitstechnische regelungs- und mestchnik, Universitat Wuppertal, Gausstrasse 20, D-5600 Wuppertal 1, Germany.
- [15] S. M. Karbassi & D.J. Bell, (1993), Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 1: Regular kronecker invariants. International journal of control, 57, pp. 817-830.
- [16] S. M. Karbassi, and D.J. Bell, (1993), Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 2: Irregular kronecker invariants. International journal of control, 57, pp. 831-883.

- [17] H. Katayama and A. Ichikawa, (1992), pole assignment by state sition graf, IEEE Trans. AC-37 , pp. 1196-1201.
- [18] J. Kautsky, N. K. Nichols and E. K.W. Chu, (1989), Robust pole assignment in singular control systems, Linear Algebra Appl., 121, pp. 9-37.
- [19] J. J. Loiseau, K. Ozcadiran, M. Malabre and N.Karcanias, (1991), Feedback canonical forms of singular systems, Kybernetika, 27, pp. 289-305.
- [20] P. Losse, V. Mehrmann, L. Poppe and T. Reis, (2008): The modified optimal $\mathcal{H}^\infty$ control problem for descriptor systems, SIAM J. Control optim., 47(6), pp. 2795-2811.
- [21] G. Miminis, (1993), Deflation in eigenvalue assignment of descriptor systems using state feedback, IEEE Trans. Automat. Control, 38, pp. 1322-1336.
- [22] R. Pregla, (2009): Grundlagen der Elektrotechnik, Hüthig verlag, Heidelberg, 8th edition.
- [23] T. Reis, (2009): Model reduction of electrical circuits, Sept, Casa autumn school on future developments in model order reduction, terschelling, the Netherlands. URL <http://www.win.tue.nl/casa/meetings/special/mor09/reis.pdf>
- [24] Rodrigo cardim, C. M. Marcelo, Teixeira, Edvaldo Assuncao and Flavio A. Faria, (2007), Control Designs for liner systems using State-Derivative Feedback.
- [25] A. Schneider, (2008): Matrix decompositionbased approaches for model order reduction of linear systems with a large number of terminals, Diploma Thesis, Chemnitz University of Technology, Faculty of Mathematics, Germany.
- [26] V. I. Sokolov, (2006): Contributions to the minimal realization problem for descriptor systems, Ph.D. Thesis, Chemnitz University of Technology, Faculty of Mathematics, Germany.
- [27] T. Stykel, May (2006): On some norms for descriptor systems, IEEE Trans. Automat. Control, vol. 51(5), pp. 842-847.
- [28] H.A. Tehrani and S.M. Karbassi, (2009), Minimum norm Time-optimal conterol of linear discrete-time periodic systems by Parameterization of state feedback International journal of Innovative computing, information and control ICIC , 5(8):2151-2158.
- [29] M. Valaske, & N. Olgac , (1995a), an Efficient Pole-Placement technique for linear Time-variant SISO System, IEE Proceedings-Control Theory and Applications 142 (5), pp. 451-458.
- [30] M. Valaske, & N. Olgac , (1995b), Efficient eigenvalue assignments for general linear MIMO Systems, Automatica 31(11), 1605-1617.
- [31] P. M. Van Dooren, (1979), The computation of kronecker's canonical form of a singular pencil, linear algebra Appl., 27, pp. 103-141.
- [32] S. Xu and J. Lam, (2004), Robust stability and stabilization of discrete singular systems: An equivalent characterization, IEEE Trans. Automat. Control, 49(4), pp. 568-574.
- [33] E. L. Yip and R. F. Sincovec, (1981), Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems, IEEE Trans. Automat. Control, AC-26, pp. 702-707.

Abstract

In this thesis, we will be study controllability, observability and stability of descriptor systems. By using orthogonal equivalence transformations, we will introduce condensed forms, that will show the regularity of the system, and the from this regularity, we will study the controllability and observability of it.

Because working with a standard system is much easier than the descriptor system, so by using the derivation state feedback and proposition the descriptor system is changed into a standard system.

In this thesis a new method for calculation the linear parameter state feedback matrix is introduction by using the similarity transformations. Then state feedback matrix with minimum norm will be determined in such a way that the system remain stable.

Descriptor systems, state feedback, regularization, controllability, Observability, stability, similarity transformations, vector companion form.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

Control of linear descriptor systems and its stability

Esmat Babamohammadi

Supervisor: Dr. Ahsani Tehrani

Advisor: Dr. Fateh

July 2013