دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات**

**عنوان**

# اندیس رنگی ابرگراف‌ها

استادان راهنما

**دکتر میثم علیشاهی و دکتر غلامرضا امیدی**

پژوهشگر

اعظم شاه‌سواری نجف‌آبادی

شهریور ۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شاه‌سواری نجف آبادی　　　نام: اعظم

عنوان: اندیس رنگی ابرگراف‌ها

استادان راهنما: دکتر میثم علیشاهی و دکتر غلامرضا امیدی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: گراف و ترکیبیات

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود　　دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۹۲　　تعداد صفحات: ۷۶

واژگان کلیدی: ابرگراف، اندیس رنگی، عدد رنگی

**چکیده**

به کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی رئوس $H$، عدد رنگی $\chi(H)$ گفته می‌شود به‌طوری‌که هیچ یال $E_i$ از $H$ که $|E_i| > 1$ وجود نداشته باشد که همه‌ی رئوس آن دارای رنگ یکسان باشند. هم‌چنین کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یال‌های $H$، به‌طوری‌که هر کلاس رنگی به‌شکل یک تطابق باشد را اندیس رنگی (عدد رنگی یالی) $H$ گوییم و با $\chi'(H)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در رنگ‌آمیزی یالی ابرگراف‌ها هیچ دو یال متقاطع رنگ یکسان ندارند. از آن‌جا که محاسبه‌ی دقیق اندیس رنگی ابرگراف‌ها ساده نمی‌باشد، بنابراین در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم آن‌را با کران مشخص کنیم. برای این‌کار قضیه‌ی معروف شانون را بیان و تعمیم آن‌را برای حالت‌های مختلفی از یک ابرگراف معرفی می‌کنیم تا بتوانیم از نتایج مربوط به آن کران‌های مختلفی را برای انواع ابرگراف‌ها به‌دست آوریم، حتی در بسیاری از موارد برای رنگ‌آمیزی از الگوریتم حریصانه استفاده می‌کنیم تا بتوانیم به یک کران خوب دست پیدا کنیم. برای انواع خاص ابرگراف‌های یکنواخت، کران الون و کیم را که به صورت حدس است ارائه می‌کنیم و سپس آن‌را برای ابرگراف‌های یکنواخت که متقاطع نیز باشند، ثابت می‌کنیم. در نهایت از این حقیقت که گراف‌ها حالت خاصی از ابرگراف‌ها هستند، استفاده کرده و قضیه‌ی ویزینگ که معروف‌ترین قضیه در مورد اندیس رنگی گراف‌هاست را بیان می‌کنیم، سپس با به‌کارگیری قضایای مربوط به اندیس رنگی برای گراف‌ها و هم‌چنین دوگانگی گراف‌های چندگانه و گراف‌های یالی، یک کران بالا را برای گراف‌های چندگانه ارائه می‌دهیم. هم‌چنین از تعمیم قضیه‌ی ویزینگ در حالت‌های مختلف یک ابرگراف استفاده‌های بسیاری می‌شود. برخی از مسائل هنوز باز می‌باشند.

به امید درک رازهای پنهانی قصیده ی آسمانی عشق

این پایان نامه را که ذره ای از تلاش آدمی

برای ورود به گوشه ای از منظومه ی پر رمز و راز هستی است را

به پیشگاه پاک اسطوره های صبر و وفاداری

که در عرصه ی زندگی ناملایمات، تلخی ها و سختی ها را بارها و بارها،

برای پیشرفت های بیشتر این حقیر،

به جان خریدند،

**پدر و مادر مهربانم**

تقدیم می کنم.

اگر تنهاترین تنها شوم، بازم خدا هست.

تو مهربان جاودان آسیب ناپذیر من هستی. ای پناهگاه ابدی! تو می توانی جانشین همه ی بی پناهی ها شوی. این نگهبان سکوت، شمع جمعیت تنهایی ها، راهب معبد خاموشی ها، سالک راه فراموشی ها، حاجب درگه نومیدی، چشم به راه پیامی، پیکی، گرمی بازوی مهری نیست.

خدایا! رحمتی کن تا ایمان، نام و نان برایم نیاورد. و قوتم بخش تا نانم و حتی نامم را در خطر ایمان افکنم، تا از آن ها باشم که پول دنیا را می گیرند و برای دین کار می کنند، نه از آن ها که پول دین را می گیرند و برای دنیا کار می کنند... چرا روح های بلند و دل های عمیق، اندوه، پاییز، سکوت و غروب را دوست تر می دارند؟ مگر نه این است که در این لحظه هاست، که خود را به مرز پایان این عالم نزدیک تر احساس می کنند؟ از انسان ها غمی به دل نگیر؛ زیرا خود نیز غمگین اند؛ با آن که تنهایند ولی از خود می گریزند زیرا به خود و به عشق خود و به حقیقت خود شک دارند؛

پس دوستشان بدار اگر چه دوستت نداشته باشند...!

به من بگو نگو، نمی گویم

اما نگو نفهم، که من نمی توانم نفهمم

من می فهمم!!![1]

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

## سپاس گزاری

سپاس مخصوص خداوندی است که بر من مقدر کرد آن چه را که شاید برای دیگری مقدر نکرده، مرا انتخاب کرد تا در این جایگاه، افتخار علم اندوزی داشته باشم که آن خود سعادت می خواهد. بارالها، خاشعانه بر درگاهت کرنش می کنم که بر من رقم زدی آن میزان توانایی را تا بتوانم در دریای بیکران معرفتت غور کنم. باشد که به تو نزدیک تر شوم. تکریم و تعزز فراوان محضر استادان ارجمندم جناب آقای دکتر میثم علیشاهی و جناب آقای دکتر غلامرضا امیدی، هم چنین داوران بزرگوارم جناب آقای دکتر صادق رحیمی و جناب آقای دکتر سعید شعبانی، سپاس اندیشه ی تابناکتان که مرا سهیم کردید در شناخت آن چه خود از نشانه های الوهیت و عظمت خداوند مهربان درک کرده اید و این مباهاتی است که نصیب هر کس نمی شود. پدرانه قدم برداشتن در دنیای ریاضیات را بر من آموختید. زبانم قاصر است و کلامم الکن تا سپاسی در خور تقدیمتان دارم. خدا را برایتان آرزو دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را که مشوقم بودند از کودکی تا بیابم تقرب به خداوند را با علم آموزی، و نیز سپاسی تقدیم به خواهر مهربانم که هم قدمم بود در نگارش از آغاز تا واپسین لحظات. امیدوارم با تقریر این مکتوب موجبات خوشنودی شان را مهیا کرده باشم.

خاک پای تمامی کسانی که در این موفقیت همراه و یاری گرم بوده اند در اطوطیای چشمانم می کنم. باشد که مو هبتشان را هیچ گاه از یاد نبرم.

اعظم شاه سواری نجف آبادی

شهریور ۹۲

# فهرست مطالب


**لیست تصاویر** ۱

**۱ مقدمه** ۲

۱.۱ تعاریف مورد نیاز ۲

۲.۱ تاریخچه‌ی موضوع مورد مطالعه ۱۱

۳.۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه ۱۴

**۲ اندیس رنگی ابرگراف‌ها و قضیه شانون** ۱۵

۱.۲ چند حدس در رابطه با اندیس رنگی ابرگراف‌ها ۱۵

۲.۲ نتایج ۱۸

۳.۲ اثبات قضیه ۲۰

**۳ اندیس رنگی ابرگراف‌های یکنواخت** ۳۰

۱.۳ معرفی ۳۱

۲.۳ اثبات ۳۶

۳.۳ نتیجه‌گیری و مسائل حل نشده ۴۰

**۴ اندیس رنگی گراف‌ها (عدد رنگی گراف‌های یالی)** ۴۳

۱.۴ معرفی ۴۳

۲.۴ رنگ‌آمیزی صحیح و کسری در گراف‌های یالی از گراف‌های چندگانه ۴۵

۳.۴ نتیجه‌ی اصلی ۵۰

۴.۴ نکات الگوریتمی ۵۶

**مراجع** ۵۸

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی** ۶۲

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی** ۶۸

# لیست تصاویر


۱.۱ یک ابرگراف همبند از مرتبه‌ی ۸ و با یک دور منحصر به‌فرد . . . . . . . . . . . ۴
۲.۱ صفحه‌ی فانو . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۶
۳.۱ یک گراف چندگانه و گراف یالی متناظر با آن . . . . . . . . . . . . . . . . . ۹

۱.۴ گرافی با ۴ $\Delta(H) = ۶, \omega(H) = \chi(H) =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۶

# فصل ۱

# مقدمه

در این فصل ضمن اشاره به تاریخچه‌ی مختصری از موضوع مورد مطالعه، تعاریف و مقدمات لازم برای فصل‌های بعدی بیان می‌شوند و در آخر مروری بر مطالب فصل‌های پایان‌نامه خواهد شد. تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۴] و [۷] و مقالاتی است که در این پایان‌نامه به آن‌ها پرداخته شده است.

## ۱.۱ تعاریف مورد نیاز

فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی متناهی و $\mathscr{E} = (E_i | i \in I)$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های $X$ باشد. خانواده‌ی $\mathscr{E}$ یک ابرگراف روی $X$ است اگر

۱.

$$E_i \neq \emptyset \qquad (\forall\, i \in I)$$

۲.

$$\bigcup_{i \in I} E_i = X$$

به دوتایی $H = (X, \mathscr{E})$ یک **ابرگراف** [۱] گوییم و $|X| = n$ **مرتبه‌ی** [۲] این ابرگراف نامیده می‌شود. اعضای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ رئوس و مجموعه‌های $E_1, \ldots, E_n$ یال‌ها نامیده می‌شوند. برای رسم یک ابرگراف،

[۱] hypergraph

[۲] order

اگر ۲ $<|E_i|$ باشد، یال $E_i$ با یک منحنی حول همه‌ی رئوس $E_i$ رسم می‌شود، یال $E_i$ که ۲ $|E_i|=$، با یک خط رابط بین دو رأس رسم می‌شود و یال $E_i$ که ۱ $|E_i|=$، مثل یک طوقه در گراف نشان داده می‌شود. همان‌طور که از تعریف هم می‌توان فهمید، رأس تنها در ابرگراف وجود ندارد.

اگر همه‌ی $E_i$ها متمایز باشند ابرگراف ساده نامیده می‌شود. در این حالت $\mathscr{E}$ یک مجموعه‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های $X$ است. اگر برای هر $i$ ، ۲ $|E_i|=$ و ابرگراف $H$ ساده باشد، آن‌گاه $H$ یک گراف ساده، بدون رئوس تنها است.

در ابرگراف $H$، **رتبه‌ی** [۳] $r(S)$ از یک مجموعه‌ی ناتهی $S\subset X$ با عدد صحیح

$$r(S)=max_i|S\cap E_i|$$

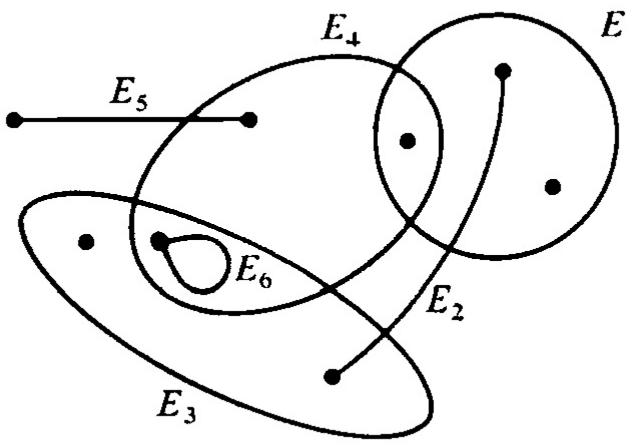
نشان داده می‌شود. عدد $r(X)$ رتبه‌ی ابرگراف $H$ نامیده می‌شود که برابر با بیشترین تعداد رئوس روی یک یال است. برای هر $i$، اگر $E_i=r(X)$ باشد، آن‌گاه $H$ یک ابرگراف یکنواخت با رتبه‌ی $r(X)$ نامیده می‌شود. بنابراین هر گراف ساده بدون رأس تنها، یک ابرگراف یکنواخت با رتبه‌ی ۲ است.

در یک ابرگراف دو رأس را مجاور گوییم، اگر یال $E_i$ وجود داشته باشد که شامل هر دو رأس باشد و دو یال را مجاور گوییم، اگر اشتراک آن‌ها تهی نباشد. به کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی رئوس $H$، **عدد رنگی** [۴] $\chi(H)$ گفته می‌شود به‌طوری‌که هیچ یال $E_i$ از $H$ که ۱ $<|E_i|$ وجود نداشته باشد که همه‌ی رئوس آن دارای رنگ یکسان باشند، در واقع هیچ یال حداقل دو عضوی تک‌رنگ نباشند. هم‌چنین کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یال‌های $H$، به‌طوری‌که هر کلاس رنگی به‌شکل یک تطابق باشد را **اندیس رنگی** [۵] (عدد رنگی یالی) $H$ گوییم و با $\chi'(H)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در رنگ‌آمیزی یالی ابرگراف‌ها هیچ دو یال متقاطع رنگ یکسان ندارند.

---
[۳] rank

[۴] chromatic number

[۵] chromatic index




شکل ۱.۱: یک ابرگراف همبند از مرتبه‌ی ۸ و با یک دور منحصر به‌فرد

اگر به‌ازای هر $i \neq j$ ، $|E_i \cap E_j| \leq ۱$ باشد، آن‌گاه **ابرگراف** $H$ را **خطی** [۶] می‌نامیم، به‌عبارت دیگر هر دو رأس حداکثر روی یک یال واقع شده‌اند.

عدد صحیح $k > ۰$ را در نظر بگیرید، $k$-**بخش** [۷] ابرگراف متناظر با $H = (X, \mathscr{E})$ به‌صورت دوتایی $[H]_k = (X, [\mathscr{E}]_k)$ تعریف می‌شود که به‌وسیله‌ی $X$ و مجموعه‌ی

$$[\mathscr{E}]_k = \{F \mid F \subset X \ ; \ ۱ \leq |F| \leq k \ ; \ F \subset E_i \ ; \ \exists \ E_i \in \mathscr{E}\}$$

مشخص می‌شود. بنابراین ۲-بخش ابرگراف $H$ یک گراف چندگانه‌ی $[H]_۲$ با مجموعه رئوس $X$ و $k$ یال موازی بین رئوس $u, v \quad (u \neq v)$ است، اگر و تنها اگر $k$ یال متمایز از $H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر کدام شامل هر دو رأس $u, v$ باشد. در این‌جا چون رابطه‌ی هر رأس با خودش را نیاز نداریم، لذا $[H]_۲$ را بدون طوقه در نظر می‌گیریم.

درجه‌ی رأس $v$ در گراف چندگانه‌ی $[H]_۲$ را با $\Delta_H(v)$ نمایش می‌دهیم و به آن درجه‌ی سختی می‌گوییم. بنابراین $\Delta(H)$ نشان دهنده‌ی بیشترین درجه‌ی سختی $H$ است. به حداکثر تعداد رئوس مجاور با هر رأس در ابرگراف $H$ ماکزیمم درجه‌ی آن رأس گوییم. بنابراین حتی اگر یکی از این رئوس در دو یا چند یال تکرار شده باشند، به تعداد تکرارشان آن‌ها را می‌شماریم.

[۶] linear hypergraph

[۷] k-section

در یک ابرگراف اگر هر دو یالی اشتراک ناتهی داشته باشند، ابرگراف را متقاطع گوییم. بدیهی است که در ابرگراف متقاطع عدد رنگی یالی با تعداد یال‌ها برابر است، به‌عبارت دیگر $\chi'(H) = |E(H)|$.

برای عدد صحیح $t$ که $۱ \leq t \leq k$ گوییم $H$، $t$**-ساده** [۸] است، اگر هر دو یال متمایز $H$ حداکثر $t$ رأس مشترک داشته باشد. ابرگراف $H$، $k$**-یکنواخت** [۹] است، اگر هر یال آن دقیقاً $k$ رأس داشته باشد و هم‌چنین **منتظم** [۱۰] است، اگر برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$ داشته باشیم $\deg_H(x) = \deg_H(y)$. بنابراین طبق این تعاریف گراف‌ها ۱-ساده هستند زیرا هر دو یال متمایز آن حداکثر ۱ رأس مشترک دارند و ۲-یکنواخت هستند زیرا هر یال دقیقاً دو رأس دارد.

طبق تعریف یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی نامیده می‌شود. بنابراین به زیرمجموعه‌ی $M$ از یال‌های ابرگراف $H$ که اعضای آن یال‌های پیوندی بوده و هیچ دو یالی مجاور نباشند، یک **تطابق** [۱۱] در $H$ گفته می‌شود. اگر یالی از $M$ مجاور رأس $v$ باشد، می‌گوییم $M$ رأس $v$ را آلوده کرده است و $v$ را نیز $M$-آلوده می‌نامیم، درغیراین‌صورت $v$، $M$-ناآلوده نامیده می‌شود. اگر هر رأس $H$، $M$-آلوده باشد، آن‌گاه تطابق $M$ را **تطابق کامل** [۱۲] می‌نامیم. $M$ یک **تطابق ماکزیمم** [۱۳] است، اگر هیچ تطابق $M'$ با شرط $|M| < |M'|$ در $H$ وجود نداشته باشد. به‌وضوح هر تطابق کامل ماکزیمم نیز هست، اما عکس آن درست نیست.

بزرگ‌ترین مجموعه‌ی رئوس از ابرگراف $H$، که شامل هیچ یالی از آن نمی‌باشد را **مجموعه‌ی مستقل** [۱۴] نامیده و با $\alpha(H)$ نشان می‌دهیم.

یک **صفحه تصویری** [۱۵] شامل مجموعه‌ای از خطوط و مجموعه‌ای از نقاط و ارتباط بین نقاط و خطوط که "برخورد" نامیده می‌شود، با شرایط زیر است:

۱) برای هر دو نقطه‌ی متمایز، دقیقاً یک خط وجود دارد که با هر دوی آن‌ها برخورد می‌کند.

[۸] $t$-simple

[۹] $k$-uniform

[۱۰] regular

[۱۱] matching

[۱۲] perfect matching

[۱۳] maximum matching

[۱۴] independent set

[۱۵] projective plane

۲) برای هر دو خط متمایز، دقیقاً یک نقطه وجود دارد که با هر دوی آن‌ها برخورد می‌کند.

۳) چهار نقطه وجود دارد به‌طوری‌که هیچ خطی با بیش از دوتای آن‌ها برخورد نمی‌کند.

شرط دوم به این معنی است که خطوط موازی در صفحه تصویری وجود ندارد. شرط آخر نیز از هم‌ارزی دو شرط اول جلوگیری می‌کند. از واژه‌ی "برخورد" برای تأکید به رابطه‌ی طبیعی متقارن بین خطوط و نقاط استفاده می‌شود. بنابراین از اصطلاح "نقطه‌ی $t$ با خط $m$ برخورد می‌کند" می‌توان به‌جای "$t$ روی $m$ است" یا "$m$ از $t$ رد می‌شود" استفاده کرد.

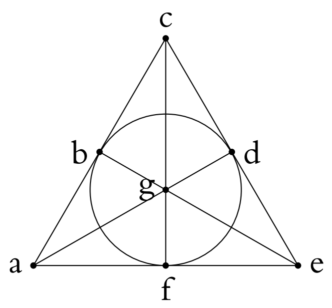
از تعریف می‌توان نتیجه گرفت که در یک صفحه تصویری هم‌چنین داریم:

۱. هر خط دقیقاً با $t$ نقطه برخورد دارد.

۲. هر نقطه دقیقاً با $m$ خط برخورد دارد.

۳. همواره $m = t^{2} - t + 1$ که طبق تعریف، $m$ تعداد خطوط و $t$ تعداد نقاط می‌باشد.

به‌عنوان مثال برای صفحه تصویری، می‌توان از یک صفحه تصویری معروف به‌نام صفحه‌ی **فانو** [16] نام برد، که در آن $m = 7$ برابر با تعداد رئوس و تعداد یال‌ها، $t = 3$ و هم‌چنین $\chi(H) = r(H) = 3$ می‌باشد. طبق این تعریف صفحه تصویری یک نوع خاص از ابرگراف‌ها است.




شکل ۲.۱: صفحه‌ی فانو

در ابرگراف $H$، یک **زنجیر** [17] به‌طول $q$ به‌صورت دنباله‌ی $(x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, E_q, x_{q+1})$ **تعریف** می‌شود به‌طوری‌که:

[16] fano

[17] chain

۱. $x_1, x_2, \cdots, x_q$ همه رئوس متمایز $H$ هستند.

۲. $E_1, E_2, \cdots, E_q$ همه یال‌های متمایز $H$ هستند.

۳. برای هر $k = 1, 2, \cdots, q$، $x_k, x_{k+1} \in E_k$ .

اگر $q > 1$ و $x_{q+1} = x_1$، آن‌گاه این زنجیر یک **دور** [18] به‌طول $q$ نامیده می‌شود. در گراف‌ها تعاریف بالا برای زنجیر و دور به‌طور مشابه است، به‌جز طوقه که در ابرگراف‌ها به‌عنوان دور مطرح نمی‌شود.

برای هر ابرگراف $H = (X; E_1, E_2, \ldots, E_m)$ **ابرگراف دوگان** [19] را با $H^*$ نشان می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم: $H^* = (E; X_1, X_2, \ldots, X_n)$ که در آن رئوس، نقاط $e_1, e_2, \ldots, e_m$ هستند که به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی $E_1, E_2, \ldots, E_m$ می‌باشند و یال‌ها، مجموعه‌های $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هستند که به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ می‌باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر $1 \leq j \leq n$،

$$X_j = \{e_i \mid \forall i \leq m, x_j \in E_i\}$$

آن‌گاه $X_j \neq \emptyset$ و $\cup_j X_j = E$ و $H^*$ یک ابرگراف است. بنابراین ابرگراف $H^*$ دوگان ابرگراف $H$ نامیده می‌شود.

با توجه به آن‌چه تاکنون در تعاریف گفتیم، ابرگراف ۱-ساده و ۲-یکنواخت را گراف می‌نامیم. بنابراین گراف‌ها نوع خاصی از ابرگراف‌ها هستند. طبق نیاز این پایان‌نامه برخی از تعاریف مربوط به گراف‌ها را در این‌جا بیان می‌کنیم.

**گراف** [20] $G$، یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi(G))$ است که تشکیل شده از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ از رأس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(G)$ (مجزای از $V(G)$) از یال‌ها و یک تابع وقوع $\psi(G)$ که به هر یال $G$، یک زوج نامرتب از رأس‌های $G$ را که الزاماً متمایز نیستند، نسبت می‌دهد. اگر $e$ یک یال و $u$ و $v$ دو رأس باشند به‌طوری‌که $\psi_G(e) = uv$، دراین‌صورت گفته می‌شود که $e$، رأس‌های $u$ و $v$ را به یکدیگر وصل کرده است و رأس‌های $u$ و $v$، دو سر یال $e$ نامیده می‌شوند. دو رأس که بر روی یال مشترکی واقعند،

[18] cycle

[19] dual hypergraph

[20] graph

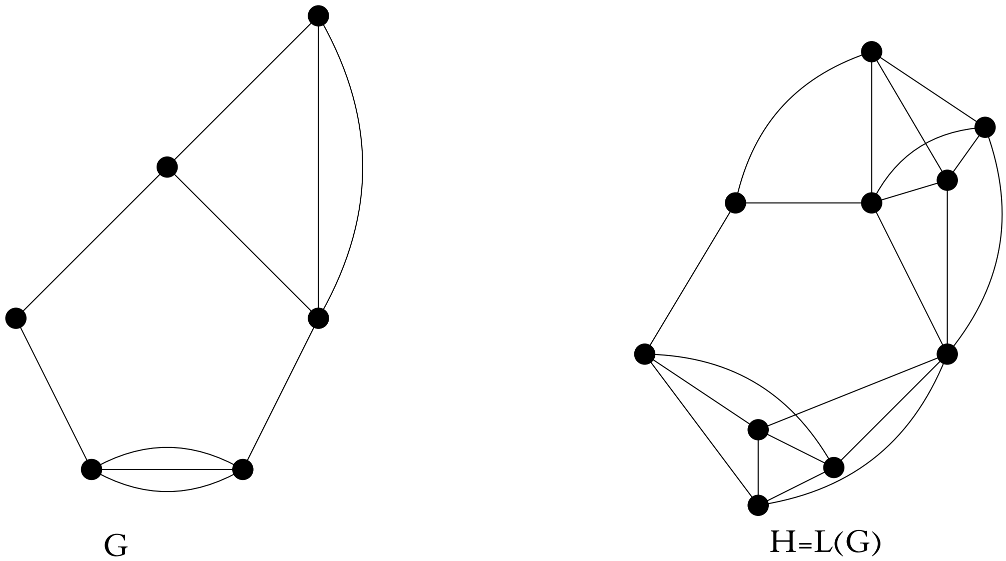
مجاور نامیده می‌شوند. به‌همین ترتیب دو یال واقع بر روی یک رأس مشترک نیز مجاورند. یک یال با دو سر یکسان، **طوقه** [۲۱] و یک یال با دو سر متمایز، **یال پیوندی** [۲۲] نامیده می‌شوند. **درجه‌ی** [۲۳] یک رأس $v$ را با $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با تعداد رئوسی که با رأس $v$ مجاور هستند. ماکزیمم درجه‌ی همه‌ی رئوس در گراف $G$ را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم. یک گراف ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش‌از یک یال نباشد[۷].

**قضیه ۱.۱.۱** (قضیه‌ی ویزینگ[۲۴]). [۷] *اگر گراف $G$ ساده باشد، دراین‌صورت همواره $\chi'(G) = \Delta(G)$ یا* $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

در گراف‌ها بزرگ‌ترین مجموعه رئوس دوبه‌دو مجاور را یک **خوشه** [۲۵] می‌نامیم و تعداد آن‌ها را با $\omega(H)$ نشان می‌دهیم. بزرگ‌ترین مجموعه‌ی رئوسی که هیچ دو رأسی در آن مجاور نیستند را مجموعه‌ی مستقل نامیده و با $\alpha(H)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به این دو تعریف، مجموعه‌ی مستقل و خوشه مکمل یکدیگر می‌باشند.

**گراف چندگانه** [۲۶] گرافی است‌که بین هر دو رأس آن بیش‌از یک یال و به‌عبارتی یال‌های چندگانه وجود دارد. برای گراف چندگانه‌ی $G = (V, E)$، **گراف یالی** [۲۷] آن را با $L(G)$ نمایش می‌دهیم و گرافی با مجموعه‌ی رئوس $E$ است که دو رأس در آن مجاورند اگروتنهااگر یال‌های متناظر آن‌ها در $G$، حداقل یک سر مشترک داشته باشند. گوییم $H$ یک گراف یالی است، اگر گراف چندگانه‌ی $G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H = L(G)$.

[۲۱] loop
[۲۲] link
[۲۳] degree
[۲۴] Vladimir Vizing
[۲۵] clique
[۲۶] multigraph
[۲۷] line graph




شکل ۳.۱: یک گراف چندگانه و گراف یالی متناظر با آن

یک تطابق در گراف $G$، مجموعه‌ای از یال‌هاست که هیچ دو یالی در آن مجاور نباشند. تعداد تطابق‌های $\mu(G)$، اندازه‌ی بزرگ‌ترین تطابق در گراف است. **تطابق کسری** [۲۸]، یک تابع $f(e)$ است که به هر یال گراف یک عدد را در بازه‌ی $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد به‌طوری‌که برای هر رأس $v$ داریم $\sum f(e) \leq ۱$ که مجموع همه‌ی یال‌های واقع روی $v$ را دربردارد. اگر برای هر یال $e$، $f(e) \in \{۰, ۱\}$ باشد، آن‌گاه $f(e)$ تنها یک تطابق یا تابع نماینده‌ی یک تطابق است. تعداد تطابق‌های کسری از گراف $G$ که با $\mu_f(G)$ نشان می‌دهیم، سوپریمم $\sum_{e\in E(G)} f(e)$ روی همه‌ی تطابق‌های کسری $f(e)$ است.

یک $c$-رنگ‌آمیزی رأسی کسری برای یک گراف $G$ می‌تواند به‌عنوان یک مجموعه‌ی $\{s_۱, \ldots, s_l\}$ (زیر مجموعه‌های مستقل از $S$ و $S \subseteq V(G)$) از مجموعه‌های ثابت که به‌ترتیب با وزن‌های حقیقی نامنفی $\{w_۱, \ldots, w_l\}$ توصیف می‌شوند، تعریف شود. به‌طوری‌که برای هر رأس $v$ داریم

$$\sum_{s_i : v \in s_i} w_i = ۱ \qquad , \qquad \sum_{i=۱}^{l} w_i = c$$

برای توضیح بیشتر این تعریف می‌توان گفت که مجموعه‌ی رئوس $V$ را به زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کنیم که همگی مستقل نیز باشند. فرض کنید به هر کدام از اعضای داخل زیرمجموعه‌های $V$، وزن

[۲۸] fractional matching

۱ را نسبت می‌دهیم. چون افراز هستند، بنابراین هر رأس تنها به یک مجموعه از افرازها تعلق می‌گیرد و داریم $\sum_{s_i:v\in s_i} w_i = ۱$ ، که در آن $w_i$ها وزن‌ها و $s_i$ها مجموعه‌ی افرازها هستند. هم‌چنین مجموع روی همه‌ی وزن‌ها برابر با تعداد آن‌ها یعنی $\sum_{i=۱}^{l} w_i = c$ می‌شود که $c$ یک عدد ثابت است.

عدد رنگی کسری $G$ که با نماد $\chi^f(G)$ نشان داده می‌شود، برابر با کوچک‌ترین $c$ برای هر گراف $G$ است که یک $c$-رنگ‌آمیزی رأسی کسری دارد. توجه کنید که کران بالای آن همیشه عدد رنگی است. در گراف $G$ عدد رنگی لیستی که با نماد $\chi^l(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین $r$ برای تخصیص یک لیست از $r$ رنگ به هر رأس $v$ است. هر گراف یک رنگ‌آمیزی دارد که در هر رأس با یک رنگ در لیست آن رنگ شده است. به‌طور واضح برای هر گراف داریم $\chi^f(G) \leq \chi(G) \leq \chi^l(G)$. اندیس رنگی $H$ که با نماد $\chi_e(H)$ نشان داده می‌شود برابر با عدد رنگی $L(H)$ است، به‌طور مشابه اندیس رنگی کسری $\chi_e^f(H)$ برابر با عدد رنگی کسری $L(H)$ است.

گراف $H$ را **زیرگراف** [۲۹] $G$ گوییم، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و $\psi_H$ از محدودکردن $\psi_G$ به $E(H)$ حاصل شده باشد و آن‌را به‌صورت $H \subseteq G$ نمایش می‌دهیم. اگر $H$ یک زیرگراف $G$ باشد و در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن‌را یک **زیرگراف فراگیر** [۳۰] از $G$ می‌نامیم. فرض کنید $V'$، زیرمجموعه‌ی ناتهی از $V$ باشد، زیرگرافی از $G$ که مجموعه رئوس آن $V'$ و مجموعه یال‌های آن برابر مجموعه یال‌هایی از $G$ باشد که هر دو سر آن در $V'$ واقع شده‌اند، **زیرگراف القایی** [۳۱] نامیده می‌شود.

یک **گشت** [۳۲] از $G$، دنباله‌ی ناصفر متناهی $W = v_۰ e_۱ v_۱ e_۲ v_۲ \ldots e_k v_k$ است، به‌طوری‌که جملات آن یک در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به‌ازای $۱ \leq i \leq k$ ، $v_{i-۱}$ و $v_i$ دو سر $e_i$ باشند، دراین‌صورت می‌گوییم $W$، یک گشت از $v_۰$ تا $v_k$ است. رأس‌های $v_۰$ و $v_k$ به‌ترتیب ابتدا و انتهای $W$ و $v_۱, \ldots, v_{k-۱}$ رئوس داخلی آن نامیده می‌شوند. اگر یال‌های $e_۱, \ldots, e_k$ در گشت $W$ متمایز باشند، $W$ یک **گذرگاه** [۳۳]

[۲۹] subgraph

[۳۰] spanning subgraph

[۳۱] induced subgraph

[۳۲] walk

[۳۳] trail

نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر، گشتی که یال تکراری ندارد. اگر علاوه‌بر یال‌ها، رأس‌های $v_0, \dots, v_k$ نیز متمایز باشند، $W$ یک **مسیر** [۳۴] نامیده می‌شود به‌عبارت دیگر، گذری که رأس تکراری ندارد یا گشتی که نه رأس تکراری و نه یال تکراری دارد. یک گذرگاه بسته که ابتدا و رأس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود. یک دور با طول $k$ را بسته به این‌که $k$ زوج یا فرد باشد، یک دور زوج یا فرد می‌نامیم. برای هر گراف $G$، گذرگاهی که از تمام یال‌های $G$ عبور کند، یک **گذرگاه اویلری** [۳۵] نامیده می‌شود. یک **تور** [۳۶] از $G$، گشت بسته‌ای است که از هر یال $G$ حداقل یک‌بار عبور می‌کند. **تور اویلری** [۳۷]، توری است که از هر یال دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند و به‌عبارت‌دیگر، یک گذرگاه اویلری بسته است. گوییم یک گراف اویلری است اگر شامل یک تور اویلری باشد، هم‌چنین می‌دانیم یک گراف همبند ناتهی اویلری است، اگر و تنها اگر دارای هیچ رأس از درجه‌ی فرد نباشد[۷] .

طبق آن‌چه گفته شد، چون ابرگراف‌ها تعمیم گراف‌ها هستند، بنابراین بسیاری از تعاریف از جمله عدد رنگی، اندیس رنگی و غیره که مورد نیاز این پایان‌نامه است، برای هر دو مشابه است، لذا تعریف مجدد آن‌ها در این‌جا جایز نمی‌باشد.

## ۲.۱ تاریخچه‌ی موضوع مورد مطالعه

در سال ۱۹۴۱، بروکس یک کران بالا برای عدد رنگی گراف‌ها ارائه داد و قضیه‌ی معروف زیر را ثابت کرد[۸]: همواره $\chi(G) \leq \Delta(G)$، مگر این‌که $G$ شامل یک خوشه با اندازه‌ی $\Delta(G) + ۱$ باشد یا $\Delta(G) = ۲$ و $G$ شامل یک دور فرد باشد.

شانون [۳۸] در یک قضیه‌ی کلاسیک [۳۴] توضیح داد که برای هر گراف چندگانه‌ی بدون طوقه‌ی $G$ داریم $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(G) \rfloor$. این قضیه کمک کرد تا افراد دیگر بتوانند به کمک آن حدس‌هایی را مطرح و یا

[۳۴] path

[۳۵] Eulerian trail

[۳۶] tour

[۳۷] Eulerian tour

[۳۸] Shannon

قضایایی را اثبات کنند که به برخی از آن‌ها در این‌جا اشاره می‌کنیم. در سال ۲۰۰۰ توماس دووراک[۳۹] با تعمیم قضیه‌ی شانون برای ابرگراف‌ها ثابت کرد که، برای هر ابرگراف $H$ همواره $\chi'(H) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \rfloor$.
سپس اردوش، فیبر و لوواس برای ابرگراف خطی $H$ روی $n$ رأس ثابت کردند $\chi'(H) \leq n$، که این حدس معادل یک حدس قدیمی برای رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌هاست که اردوش [۱۳] آن را ارائه کرد. معادل این حدس اولین بار توسط هیندمن [۴۰] مطرح شد. او هم‌چنین این حدس را برای $n \leq 10$ به‌کمک یک جستجوی کامپیوتری [۲۱] بررسی کرد. چانگ[۴۱] و لاولر[۴۲] [۱۰] کران بالای $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ را برای آن به‌دست آوردند و در نهایت، کان [۲۳] به‌کمک نظرات پیپنگر و اسپنسر [۳۱] کران بالای مجانبی $n + o(n)$ را ثابت کرد.

در سال ۱۹۶۴، ویزینگ [۱۱] قضیه‌ی معروف خود را به این صورت ثابت کرد: برای هر گراف $G$، $\chi' \leq \Delta(G) + 1$.

در سال ۱۹۷۳، فورنیر [۱۵] قضیه‌ی معروف فورنیر را به شکل زیر بیان کرد: فرض کنید $G$ گرافی با بیشترین درجه‌ی $\Delta(G) \leq D$ باشد، اگر مجموعه‌ی رئوس از درجه‌ی $D$ مستقل یا تهی باشد آن‌گاه $\chi'(G) \leq D$.

در سال ۱۹۷۳، گلدبرگ[۱۹] و در سال ۱۹۷۹، سیمور[۳۳] برای گراف‌های چندگانه و با کمک تعاریف $\chi_e(H)$ و $\chi_e^f(H)$ توانستند یک مقدار دقیق برای $\chi_e(H)$ به نام حدس گلدبرگ و سیمور به‌دست آورند که به طور مفصل در فصل آخر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سال ۱۹۸۱، هولییر [۲۲] ثابت کرد که تعیین اندیس رنگی یک گراف دلخواه یک مسأله‌ی بسیار سخت است. سپس در سال ۱۹۸۶، فوردی [۱۷] و در سال ۱۹۸۹، برگ با تعمیم قضیه‌ی شانون به ابرگراف‌ها، اندیس رنگی را برای ابرگراف‌های متقاطع ثابت کردند.

در سال ۱۹۹۶، الون و کیم[۱] حدس زدند که، اگر $H$ یک ابرگراف $k$-یکنواخت باشد که هیچ دو یالی از آن بیش از $t$ رأس مشترک نداشته باشند و $\Delta(H)$ نشان دهنده‌ی ماکزیمم درجه‌ی یک رأس در $H$ باشد،

[۳۹] Tomáš Dvořák

[۴۰] Hindman

[۴۱] Chang

[۴۲] Lawler

بنابراین برای هر $\varepsilon > ۰$، اگر $\Delta(H)$ به‌اندازه‌ی کافی بزرگ و تابعی از $t, k, \varepsilon$ باشد، آن‌گاه اندیس رنگی $H$ حداکثر برابر است با $(t - ۱ + \frac{۱}{t} + \varepsilon)\Delta(H)$. هم‌چنین آن‌ها این حدس را برای حالت خاص ابرگراف‌های متقاطع به این شکل ثابت کردند: اگر $H$ یک ابرگراف $k$-یکنواخت متقاطع باشد، به‌طوری‌که هر دو یال مشترک بیش از $t$ رأس مشترک نداشته باشند و $\Delta(H)$ ماکزیمم درجه‌ی یک رأس $H$ باشد، به‌طوری‌که $\Delta(H)$ به‌عنوان تابعی از $k$ به‌اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، آن‌گاه $H$ حداکثر $(t - ۱ + \frac{۱}{t})\Delta(H)$ یال دارد.

در سال ۱۹۹۶، کان[۲۴] ثابت کرد که اندیس رنگی کسری با اندیس رنگی صحیح مجانب است و نشان داد که $\chi_e(H) \leq (۱ + o(۱))\chi_e^f(H)$. او هم‌چنین ثابت کرد که در حقیقت اندیس رنگی کسری و اندیس رنگی لیستی [۲۵] با هم مجانب هستند.

در سال ۱۹۹۸، رید[۳۲] برای هر گراف $G$ دو کران بالا را برای عدد رنگی آن برحسب $\Delta(G)$ ماکزیمم درجه و $\omega(G)$ اندازه‌ی بزرگ‌ترین خوشه‌ی $G$ حدس زد و آن‌ها را به این‌صورت بیان کرد: اول این‌که برای هر گراف $G$، همواره $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲} \rceil$. دوم این‌که، برای هر گراف همبند $G$ که شامل هیچ دور فرد نیست، داریم $\chi(G) \leq \frac{۲(\Delta(G)+۱)+\omega(G)}{۳}$. پس از آن رید و مولوی [۲۹] در سال ۲۰۰۰، برای حدس اول قضیه‌ی زیر را ثابت کردند: برای هر گراف $G$، همواره $\chi^f(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲} \rceil$ و $\chi^f(G)$ عدد رنگی کسری را بیان می‌کند.

در سال ۱۹۹۸، کاپرارا و ریزی قضیه‌ی زیر، که حدس گلدبرگ و سیمور در سال ۱۹۷۹ را حمایت می‌کند، ارائه کردند[۲۶]. برای هر گراف چندگانه‌ی $H$، $\chi_e(H) \leq \max\{\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\rfloor, \lceil \Gamma(H)\rceil\}$. البته قبل از او و در سال ۱۹۹۰، نی‌شی‌زاکی[۴۳] و کاشی‌واگی[۴۴] [۳۰] آن‌را ثابت کرده بودند با این تفاوت که به‌جای ۰/۷ از ۰/۸ استفاده کرده بودند.

در پایان در سال ۲۰۰۰، توماس دووراک [۱۱] تعمیم قضیه‌ی ویزینگ برای گراف‌های خطی را به این‌صورت حدس زد: برای هر ابرگراف خطی $H$ همواره داریم $\chi'(H) \leq \Delta(H) + ۱$. سپس با تعمیم قضیه‌ی شانون برای ابرگراف‌ها ثابت کرد که برای هر ابرگراف $H$، همواره $\chi'(H) \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor$. سرانجام

[۴۳] Nishizeki

[۴۴] Kashiwagi

آن‌را برای ابرگراف‌های بدون تکرار یال از اندازه‌ی ۲ به صورت قضیه‌ی زیر بیان و ثابت کرد: برای هر ابرگراف $H$ بدون تکرار یال‌های از اندازه‌ی ۲ همواره $\chi'(H) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \rfloor$.

## ۳.۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

در این پایان‌نامه، به بررسی نتایج به‌دست آمده در مورد اندیس رنگی ابرگراف‌ها که تعمیمی از اندیس رنگی گراف‌هاست می‌پردازیم. در فصل اول، تعاریف مورد نیاز در طول پایان‌نامه بیان شد و تاریخچه‌ی مختصری از مطالعات انجام شده روی اندیس رنگی ابرگراف‌ها و گراف‌ها از ابتدا تاکنون مطرح شد.

در فصل دوم، چند حدس در ارتباط با تعمیم قضیه‌ی شانون به ابرگراف‌ها ارائه و در پایان برای ابرگراف‌های بدون تکرار یال از اندازه‌ی ۲ ثابت می‌شود. در این بین از قضیه‌ی معروف فورنیر که بدون اثبات آورده شده و یک لم نیز استفاده شده است. کلیه‌ی مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۱۱] می‌باشد.

در فصل سوم، حدس الون وکیم را در مورد ابرگراف‌ها بیان کرده و در برخی از حالت‌های خاص و به‌کمک تعمیم قضیه‌های شانون، ویزینگ و برخی از قضایای دیگر ثابت می‌شود. سپس برای ابرگراف‌های متقاطع به کمک قضیه‌ی فوردی و دو لم دیگر ثابت می‌شود. در پایان چند نتیجه گیری و مسأله‌ی حل نشده بیان می‌شود. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۱] می باشد.

در فصل چهارم، از این حقیقت استفاده کرده که ابرگراف‌ها تعمیم گراف‌ها هستند و به بررسی اندیس رنگی گراف‌ها پرداخته شده است. البته کران‌هایی که برای عدد رنگی گراف‌های یالی به دست آورده شده، طبق تعریف همان اندیس رنگی گراف‌ها را نتیجه می‌دهد. برای رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب به رنگ‌آمیزی صحیح و کسری گراف‌های یالی از گراف‌های چندگانه نیز پرداخته شده است. در پایان هم نکات الگوریتمی این فصل بیان می‌شود. کلیه‌ی مطالب این فصل مربوط به مرجع [۲۶] می‌باشد.

# فصل ۲

# اندیس رنگی ابرگراف‌ها و قضیه شانون

از آن‌جا که تعیین دقیق اندیس رنگی ابرگراف‌ها ساده نمی‌باشد، سعی داریم آن‌را با کران مشخص کنیم. شانون در یک قضیه‌ی کلاسیک [۳۴] توضیح داد که برای هر گراف چندگانه‌ی بدون طوقه‌ی $G$ همواره داریم $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$. در این فصل چند حدس در ارتباط با تعمیم قضیه‌ی شانون برای ابرگراف‌ها را ارائه می‌دهیم و آن‌را در مورد ابرگراف‌های بدون تکرار یال از اندازه‌ی ۲ ثابت می‌کنیم. در این بین از قضیه‌ی معروف فورنیر که بدون اثبات آورده شده و یک لم نیز استفاده می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از [۱۱] می‌باشد.

## ۱.۲ چند حدس در رابطه با اندیس رنگی ابرگراف‌ها

**حدس ۱.۱.۲** ( اردوش[1] ، فیبر[2] و لوواس[3]). [۱۱] *برای هر ابرگراف خطی $H$ روی $n$ رأس داریم*

$$\chi'(H) \leq n \ .$$

*این حدس معادل یک حدس قدیمی برای رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌هاست که اردوش [۱۳] آن را ارائه کرد. معادل این حدس اولین بار توسط هیندمن مطرح شد، او هم‌چنین حدس را برای $n \leq 10$ به‌کمک یک جستجوی کامپیوتری [۲۱] بررسی کرد. چانگ و لاولر [۱۰] کران بالای $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ برای آن به‌دست آوردند*

[1] Erdős

[2] Faber

[3] Lovász

و در نهایت، کان [۴] [۲۳] به‌کمک نظرات پیپنگر و اسپنسر [۳۱] توانست یک کران بالای مجانبی $n + o(n)$ را ثابت کند. همان‌طور که می‌دانیم، این حدس برای گراف‌ها نیز همواره برقرار است، زیرا در بدترین حالت برای گراف کامل $n$ رأسی همواره $\chi'(K_n) \leq n$ است.

قضیه‌ی معروف ویزینگ برای هر گراف $G$ بیان می‌کند که $\chi'(G) \leq \Delta(G) + ۱$، حال تعمیم آن‌را برای ابرگراف‌ها به‌صورت حدس زیر بیان می‌کنیم.

**حدس ۲.۱.۲** (تعمیم قضیه ویزینگ). [۱۱] برای هر ابرگراف خطی $H$

$$\chi'(H) \leq \Delta(H) + ۱ \ .$$

این حدس جداگانه توسط برگ[۵] و فوردی [۵] [۱۷] برای ابرگراف‌های متقاطع ثابت شد و مینیل [۶] آن‌را پیشنهاد کرد که به چاپ نرسید.

اگر تکرار یال در ( ابر ) گراف مجاز باشد، یعنی ( ابر ) گراف خطی نباشد مطمئناً این کران درست نیست، زیرا دراین‌صورت بیش از $n$ اندیس رنگی می‌توان داشت. بنابراین داریم

$$\chi'(H) \leq \Delta(H) + d$$

که $d$ بیشترین تعداد یال (ماکزیمم چندگانگی) بین هر دو رأس در $H$ را نشان می‌دهد.

قضیه‌ی شانون [۳۴] یک کران بالای $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(G) \rfloor$ را برای هر گراف چندگانه‌ی $G$ که می‌تواند بدون طوقه نیز باشد، اثبات می‌کند. در این‌جا تعمیم آن‌را به ابرگراف‌ها به‌صورت حدس زیر بیان می‌کنیم.

**حدس ۳.۱.۲** (تعمیم قضیه شانون). [۱۱] برای هر ابرگراف $H$

$$\chi'(H) \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor \ .$$

اگر این کران درست باشد، مطمئناً بهترین حالت ممکن است، زیرا کران برای گراف‌های چندگانه به تساوی تبدیل می‌شود ($\lfloor \frac{۳}{۲} m \rfloor$ به‌وسیله‌ی گراف چندگانه‌ی شانون به‌دست آمده که شامل سه رأس $x, y, z$ است و $\lceil \frac{m}{۲} \rceil$ یال بین $x, y$ و $\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor$ یال بین $y, z$ و بین $z, x$ قرار دارد).

[۴] Kahn

[۵] Füredi

[۶] Meyniel

*برای بررسی حدس ساده‌ترین راه، رنگ‌آمیزی یال‌ها به‌کمک* ***الگوریتم حریصانه*** [۷] *می‌باشد. یال‌های $H$ را به‌کمک دستور کاهش اندازه، از بزرگ به کوچک مرتب کنید و طبق دستور آن‌ها را رنگ‌آمیزی کنید (در [۱۰] و [۲۳] از این روش استفاده شده است). در هرگام، وقتی یال $e$ از اندازه $k$ را رنگ‌آمیزی می‌کنیم، تنها یال‌های از اندازه‌ی حداقل $k$ رنگ می‌شوند. بنابراین هر رأس $v \in e$ می‌تواند روی تعدادی یال دیگر نیز واقع شود که تعدادی از اندازه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی $k$ و تعدادی کمتر از آن هستند. فعلاً با یال‌هایی که از اندازه‌ی کمتر از $k$ هستند کاری نداریم و یال‌هایی را می‌خواهیم که از اندازه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی $k$ هستند.*

*چون $|e| = k$، بنابراین در یال $e$ رئوس مجاور $v$ برابر $k-۱$ هستند و $\Delta(v)$ با کل رئوسی که با $v$ در یک بلوک قرار دارند، برابر است. پس $k-۱$ رأسی که در یال $e$ قرار دارند را از آن کم می‌کنیم که برابر است با $\Delta(v)-(k-۱)$ یعنی کلیه‌ی رئوسی که با $v$ به غیر از رئوس $e$ روی بلوک‌های مشترک قرار دارند. در نتیجه رئوسی که با $v$ روی بلوک‌های از اندازه‌ی حداقل $k$ قرار می‌گیرند، حداکثر $\lfloor \frac{\Delta(v)-(k-۱)}{k-۱} \rfloor$ هستند. چون طول هر بلوک حداقل $k$ است، پس در بدترین حالت زمانی هم که خیلی کم شود به $k-۱$ می‌رسد. یعنی تعداد کل وقتی خیلی زیاد می‌شود که مخرج خیلی کم شود. پس تعداد آن‌ها حداکثر $\lfloor \frac{\Delta(v)-(k-۱)}{k-۱} \rfloor$ می‌شود و بنابراین هر رأس $v \in e$ با حداکثر $\lfloor \frac{\Delta(v)-(k-۱)}{k-۱} \rfloor$ یال رنگ‌آمیزی شده که از $e$ می‌گذرد رنگ شده است.*

*حال به تعداد رئوس $e$ یعنی $k$ بار آن‌را تکرار می‌کنیم بنابراین حداکثر $k\lfloor \frac{\Delta(H)-(k-۱)}{k-۱} \rfloor$ یال رنگ‌آمیزی شده وجود دارد که با $e$ متقاطع هستند. در پایان، فرض می‌کنیم در بدترین حالت یک رنگ جدید هم به $e$ اختصاص دهیم، درنتیجه حداکثر می‌توانیم با $k\lfloor \frac{\Delta(H)-(k-۱)}{k-۱} \rfloor + ۱$ رنگ این کار را انجام دهیم و ابرگراف را رنگ کنیم. چون رنگ‌آمیزی را از بزرگ به کوچک انجام می‌دهیم پس اگر $k$ خیلی بزرگ شود، خواهیم داشت $\chi'(H) \leq \Delta(H)$. بنابراین $k$ را آن‌قدر کم می‌کنیم تا $\chi'(H)$ بزرگ شود، چون $\chi'(H)$ وقتی خیلی بزرگ می‌شود که $k$ خیلی کوچک شود، یعنی قرار می‌دهیم $k=۲$، بنابراین داریم*

$$\chi'(H) \leq k\left\lfloor \frac{\Delta(H)-(k-۱)}{k-۱} \right\rfloor + ۱ = ۲\left\lfloor \frac{\Delta(H)-۱}{۱} \right\rfloor + ۱ = ۲\Delta(H) - ۱$$

[۷] Greedy algorithm

*لذا اگر $k = ۲$ باشد، اندیس رنگی حداکثر $۲\Delta(H) - ۱$ می‌باشد و یک کران بالا به‌دست می‌آوریم که حدس برای آن درست نخواهد بود. حال کمترین $k$ به‌غیر از ۲ را در نظر می‌گیریم (توجه کنید که شاید کمترین مقدار برای $k$، ۳ نباشد به‌عبارت دیگر یال از اندازه‌ی ۳ نداشته باشیم). حال فرض کنید $k = ۳$ باشد، داریم $\chi'(H) \leq ۳\lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} - ۱ \rfloor + ۱ \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor - ۲$ و بنابراین حدس ۳.۱.۲ در این مورد درست است. اگر $H$ گراف باشد، به عبارتی تنها شامل یال‌های از اندازه‌ی ۲ باشد، این حدس طبق قضیه‌ی شانون درست است. اگر وضعیت عمومی باشد، یعنی هیچ محدودیتی روی اندازه‌ی یال‌ها نداشته باشیم آن‌گاه مسأله بدیهی نمی‌باشد.*

## ۲.۲ نتایج

**گزاره ۱.۲.۲.** [۱۱] *برای هر ابرگراف متقاطع $H$*

$$|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor .$$

***برهان.*** در بخش قبل دیدیم که اگر برای هر $e \in E(H)$، $|e| \geq ۳$ آن‌گاه $|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor - ۲$. درنتیجه اگر یال از اندازه‌ی ۲ نداشته باشیم حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $H$ علاوه بر یال از اندازه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی ۳، یال از اندازه‌ی ۲ هم داشته باشد که چون $H$ متقاطع است، پس باید تمام یال‌های از اندازه‌ی ۲ همدیگر را قطع کنند. دراین‌صورت دو حالت خواهیم داشت.

۱. همه یال‌های از اندازه‌ی ۲ موازی هستند، یعنی روی جفت رئوس یکسان مثلاً $u, v$ واقع شده‌اند، به‌عبارت دیگر چندگانگی در یال‌ها داریم. فرض کنید تعداد این یال‌های موازی $m$ باشد. چون $H$ متقاطع است، بنابرین هر یال از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر باید $u$ یا $v$ را قطع کند. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر است با یال‌های مشترک بین $v, u$ که تعداد آن‌ها $m$ است. به‌علاوه بیشترین تعداد یال‌هایی که $u$ ($v$) را قطع می‌کنند، یعنی $\Delta(u)$ ($\Delta(v)$) به غیر از بیشترین تعداد یال‌هایی که با $v$ ($u$)متقاطع‌اند که تعداد آن‌ها $m$ است. البته این مقدار باید بر $k - ۱ = ۲$ تقسیم شود، که برابر است با

$$|E(H)| \leq m + \left\lfloor \frac{\Delta(u) - m}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\Delta(v) - m}{۲} \right\rfloor \leq \Delta(H)$$

در رابطه‌ی بالا چون بعضی یال‌ها دو بار شمرده می‌شوند، پس این مقدار یک کران بالا برای $|E(H)|$ می‌شود و مجموع کل آن‌ها هم حداکثر $\Delta(H)$ می‌شود.

۲. دو یال $e_۱, e_۲ \in E$ از اندازه‌ی ۲ داریم که $e_۱ = \{u, v\}$ و $e_۲ = \{v, w\}$ یعنی در یک رأس مشترک می‌باشند و $u, v, w \in V(H)$ مجزا هستند. بنابراین به دو زیر حالت تقسیم می‌شود:

۲A. فرض کنید مجموعه یال‌های از اندازه‌ی ۲ که روی $v$ هستند ولی روی $w, u$ نیستند، تهی باشد. بنابراین هر یالی که شامل $v$ باشد ولی $w, u$ را نداشته باشد از اندازه‌ی حداقل ۳ است. به‌عبارت‌دیگر، چون $H$ متقاطع است پس هر یالی باید هم $e_۱$ و هم $e_۲$ را قطع کند، اما $v$ را ندارد. بنابراین باید هم $u$ و هم $w$ را داشته باشد. در هر صورت در جمع $\Delta(u) + \Delta(v) + \Delta(w)$ هر یال حداقل دو بار شمرده می‌شود، یک بار برای شمردن $\Delta(u)$ و بار دیگر برای شمردن $\Delta(w)$. بنابراین

$$|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{۱}{۲}(\Delta(w) + \Delta(v) + \Delta(u)) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor .$$

۲B. در این قسمت، یک رأس $x \in V(H)$ و متفاوت از $u, v, w$ و یک یال $e_۳ = \{v, x\}$ وجود دارد. در نظر می‌گیریم $U = \{e \in E(H) \mid u \in e \quad , \quad v \notin e\}$ و $V = E(H) \setminus U$. چون $H$ متقاطع است و $U$ ، $v$ را ندارد و هر یال $H$ باید هر سه یال $e_۱, e_۲, e_۳$ را قطع کند، پس باید حتما $u, w, x$ را داشته باشد. بنابراین اندازه‌ی آن حداقل ۳ است و به دلایل مشابه هر یال $V$ باید روی $v$ قرار گیرد، پس داریم

$$|E(H)| \leq |U| + |V| \leq \left\lfloor \frac{\Delta(u) - ۱}{۲} \right\rfloor + \Delta(V) \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor .$$

□

حال به بیان قضیه‌ی اصلی این فصل می‌پردازیم و قبل از اثبات آن قضیه‌ی فورنیر و یک لم را بیان می‌کنیم که در طول اثبات به آن‌ها نیاز داریم.

**قضیه ۲.۲.۲.** [۱۱] *برای هر ابرگراف $H$ بدون تکرار یال‌های از اندازه‌ی ۲*

$$\chi'(H) \leq \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor .$$

**ایده‌ی اثبات.** زیرگراف القایی $G$ از $H$ را که به‌وسیله‌ی یال‌های از اندازه‌ی ۲ به‌دست آمده را درنظر بگیرید و یک زیرگراف فراگیر $F$ از $G$ را طوری پیدا کنید که برای هر رأس $v$ ، درجه‌ی $v$ در $F$ تقریباً نصف درجه‌ی $v$ در $G$ باشد. با استفاده از قضیه‌ی ویزینگ یال‌های $F$ را با کمترین تعداد رنگ، رنگ‌آمیزی کنید و سپس به‌کمک الگوریتم حریصانه یال‌های باقی‌مانده از $H$ را به‌ترتیب کاهش اندازه رنگ‌آمیزی کنید. در قسمت بعد اثبات به‌طور کامل بررسی می‌شود.

توجه کنید که اثبات این قضیه یک نتیجه‌ی جزئی را برای حدس ۲.۱.۲ نیز بیان می‌کند.

## ۳.۲ اثبات قضیه

نتیجه‌ی زیر از فورنیر، تعمیم قضیه‌ی ویزینگ است که در ادامه به آن نیاز داریم.

**قضیه ۱.۳.۲.** *(قضیه‌ی فورنیر[۸]) [۱۵] فرض کنید $G$ یک گراف با بیشترین درجه‌ی $\Delta(G) \leq D$ باشد. اگر مجموعه رئوس از درجه‌ی $D$ مستقل یا تهی باشد، آن‌گاه $\chi'(G) \leq D$.*

برای اثبات [۱۵] یا مقاله [۶] را ببینید.

ابتدا به بیان برخی از علامت‌ها و نشانه گذاری‌هایی می‌پردازیم که در طول اثبات به آن‌ها نیاز داریم. برای یک گراف $G$ و $E' \subseteq E(G)$ ، $G - E'$ گراف به‌دست آمده از $G$ است که در آن همه‌ی یال‌های $E'$ حذف شده‌اند. در این حالت اگر $E' = \{e\}$ باشد، آن‌گاه برای سادگی می‌نویسیم $G - e$ . برای یال $e = \{x, y\}$ ، $G + e$ نشان دهنده‌ی گراف با مجموعه رئوس $V(G) \cup e$ و مجموعه یال‌های $E(G) \cup \{e\}$ است. لم زیر تعمیم مسأله ۷.۴۱ از کتاب لوواس [۲۸] است.

**لم ۲.۳.۲.** *[۱۱] هر گراف همبند $G$ به‌جز گراف اویلری با تعداد یال فرد، یک زیر گراف فراگیر $F$ دارد که دارای سه خاصیت زیر است*

(۱) *برای هر راس $v \in V(F)$*، $\Delta_F(v) = \left\lfloor \frac{\Delta_G(v)}{۲} \right\rfloor$ یا $\Delta_F(v) = \left\lceil \frac{\Delta_G(v)}{۲} \right\rceil$.

(۲) *مجموعه‌ی* $\{v \in V(F) \mid \Delta_F(v) = \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor + ۱\}$ *یک مجموعه‌ی مستقل از $F$ یا تهی است.*

---
[۸] Jean Claude Fournier

**(۳)** *اگر برای هر یال* $e = \{u, v\} \in E(G) \setminus E(F)$ *داشته باشیم* $\Delta_F(u) < \Delta_{G-E(F)}(u)$ *و* $\Delta_F(v) < \Delta_{G-E(F)}(v)$ *آن‌گاه* $\Delta_G(u) = \Delta_G(v) = \Delta(G)$.

***برهان.*** باید یک زیرگراف فراگیر $F$ از $G$ بسازیم. ابتدا برای $G$ دو حالت اتفاق می‌افتد: $G$ اویلری نیست یا اویلری با تعداد یال زوج است.

اگر اویلری نباشد، پس همه‌ی رئوس از درجه‌ی زوج نیستند و رأس از درجه‌ی فرد هم داریم. بنابراین یک رأس $v$ اضافه می‌کنیم و همه‌ی رئوس از درجه‌ی فرد را به آن وصل می‌کنیم تا گراف اویلری شود.

درغیراین‌صورت $G$ اویلری با تعداد یال زوج است، پس دارای تور اویلری است. بنابراین از یک رأس دلخواه $v$ شروع می‌کنیم و تور اویلری را رنگ‌آمیزی می‌کنیم، یعنی یال‌های گراف را با دو رنگ به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی می‌کنیم که هیچ دو یال مجاور دارای رنگ یکسان نباشند، به‌عبارت‌دیگر به‌صورت یکی در میان رنگ‌آمیزی می‌کنیم. حال همه‌ی یال‌های تک‌رنگ را که به‌صورت یک دنباله است، انتخاب می‌کنیم. بنابراین یک زیرگراف فراگیر $F$ داریم که درجه‌ی هر رأس آن $\left\lfloor \frac{\Delta_G(v)}{۲} \right\rfloor$ یا $\left\lceil \frac{\Delta_G(v)}{۲} \right\rceil$ است، چون یکی در میان انتخاب کردیم، در نتیجه درجه‌ی رئوس تقریباً نصف می‌شود و در شرط ۱ صدق می‌کند.

دقت کنید اگر $G$ اویلری باشد، آن‌گاه $F \subseteq G$، اما اگر اویلری نباشد ممکن است $F$ به‌دست آمده به خاطر رأسی که اضافه کردیم زیرگرافی از $G$ نباشد، دراین‌صورت برای زیرگراف $F$ که به‌دست آوردیم، اگر رأس $v$ در آن قرار داشت که باید رأس $v$ را از $F$ حذف کنیم. بنابراین در حالت کلی $G$ همواره زیرگرافی فراگیر با خاصیت شماره ۱ دارد (برای توضیحات بیشتر [۳] و مسأله [۷.۴۱] را ببینید).

حال فرض کنید $F$ یک گراف با کمترین تعداد یال از بین تمام زیردنباله‌های فراگیر $G$ باشد که خاصیت ۱ را دارد. می‌خواهیم نشان دهیم $F$ خاصیت ۲ را نیز دارد، یعنی مجموعه زیرگراف‌های با خاصیت ۱ مستقل یا تهی است. برای اثبات از برهان خلف به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $F$ شامل یال $e = \{u, v\}$ است که دو سر آن در $F$ قرار دارند، چون اگر فقط یک سر آن در $F$ باشد آن‌گاه $F$ مستقل می‌شود و همچنین در خاصیت ۲ صدق می‌کنند. در نتیجه $F - e$ یک زیرگراف فراگیر $G$ است که در ۱ صدق می‌کند، ولی این متناقض با مینیمم بودن $F$ است.

در نهایت گراف‌های با بیشترین تعداد یال را از میان همه‌ی زیرگراف‌های فراگیر $G$ که خاصیت ۱ و ۲ را دارند در نظر بگیرید. فرض کنید $F$ گرافی با کمترین تعداد رئوس از درجه‌ی $1 + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$ باشد. ادعا می‌کنیم خاصیت ۳ نیز برای $F$ برقرار است.

برای اثبات ادعا به کمک برهان خلف، فرض کنید یال $e = \{u, v\} \in E(G) \setminus E(F)$ با دوتایی $u, v$ صادق در نامساوی ۳ وجود دارد، هم‌چنین فرض کنید $\Delta_G(u) < \Delta(G)$ باشد (برای رأس $v$ به‌طور مشابه است)، پس یال $e$ را در $F$ قرار می‌دهیم. چون یال $e$ در $F$ است، به‌وضوح تعداد یال‌های $F + e$ نسبت به $F$ زیادتر است و چون $\Delta_F(u) < \Delta_{G-E(F)}(u)$ است، پس یک واحد به یال‌های $F$ افزوده و از یال‌های $G - E(F)$ کم می‌شود، بنابراین $F + e$ در خاصیت ۱ تاثیری ندارد و در آن صدق می‌کند.

اما برای خاصیت ۲، چون $F$ از مجموعه زیرگراف‌های با بیشترین تعداد یال انتخاب شده است و $F + e$ یک یال بیش از $F$ دارد، پس $F + e$ در ۲ صدق نمی‌کند، زیرا با ماکزیمم بودن $F$ در تناقض است.برای توضیح بیشتر، اگر مجموعه‌ی رئوس با درجه‌ی بزرگ $1 + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$ را در نظر بگیریم نباید مستقل باشند، یعنی باید حداقل شامل یک یال باشند. اما این رئوس، رئوس $F$ هستند که مستقل بوده و هیچ یالی بین آن‌ها نیست. بنابراین تنها در حالتی استقلال نقض می‌شود که یال $e$ را به $F$ اضافه کنیم و بین رئوس با درجه‌ی بزرگ $u$ و $v$ قرار گیرد، که این هم امکان‌پذیر نیست، چون $\Delta_G(u) < \Delta(G)$ است و اگر $e$ را هم اضافه کنیم باز هم $\Delta_G(u)$ به رئوس با درجه‌ی بزرگ نمی‌رسد و بنابراین از لحاظ استقلال $F + e$ در ۲ صدق می‌کند ولی با ماکزیمم بودن $F$ در تناقض است.

بنابراین باید یال $e' \in E(F + e)$ با دو رأس انتهایی از درجه‌ی $1 + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$ وجود داشته باشد که شامل $u$ یا $v$ بوده و استقلال مجموعه را نقض می‌کند. اگر $e'$ ، $u$ را قطع کند بنابراین $\Delta_{F+e}(u) = \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1$ و در حقیقت ۱ برای $F + e$ صادق است و نتیجه می‌شود $\Delta_G(u) = \Delta(G)$، یعنی درجه‌ی $u$ به $\Delta(G)$ می‌رسد که این با فرض خلف در تناقض است.

بنابراین باید حالتی که $e' = \{x, v\}$ و $x \neq u$ است را در نظر بگیریم. حال اگر گراف $F' = F - e' + e$ را در نظر بگیرید، می‌بینید که ۱ و ۲ برای $F'$ برقرار است و $|E(F)| = |E(F')|$، به‌علاوه در این‌جا داریم

$\Delta_{F'}(x) < \Delta_F(x) = \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor + ۱$ و $\Delta_{F'}(u) = \Delta_F(u) + ۱ < \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor + ۱$ و $\Delta_{F'}(v) = \Delta_F(v)$،
بنابراین $F'$ نسبت به $F$ رئوس با درجه‌ی $\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor + ۱$ کمتری دارد که متناقض با مینیمم بودن $F$ است. $\square$

***اثبات قضیه ۲.۲.۲*** . باید نشان دهیم روش حریصانه می‌تواند طوری تغییر کند که یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های مورد نظر به ما بدهد. بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید $H$ همبند و شامل یال‌های از اندازه‌ی حداقل ۲ باشد، به‌عبارت دیگر این قضیه به‌کمک تذکر بعد از حدس ۳ بدیهی است، چون در آن‌جا نشان دادیم برای $|e| = ۲$ داریم $\chi'(H) \leq ۲\Delta(H) - ۱$ و برای $|e| \geq ۳$ داریم $\chi'(H) \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor - ۲$. بنابراین به‌کمک همبندی $H$ نتیجه می‌گیریم که $\Delta(H) \geq ۳$، چون اگر $\Delta(H) = ۲$ باشد یک مسیر داریم ولی در این‌جا یک ابرگراف همبند با یال‌های از اندازه‌ی حداقل ۲ داریم که تناقض است. بنابراین $\Delta(H) \geq ۳$ را در دو دسته‌ی زیر بررسی می‌کنیم.

۱) اگر $\Delta(H) = ۳$ باشد، آن‌گاه وقتی می‌خواهیم یال از اندازه‌ی ۲ را رنگ کنیم، می‌توانیم از قضیه‌ی ویزینگ در مورد گراف‌ها استفاده کنیم و بنابراین داریم $\chi'(H) \leq \Delta(H) + ۱ = ۴$. پس می‌توان حداکثر با ۴ رنگ یال از اندازه‌ی ۲ را رنگ کرد. از آن‌جا که $\Delta(H) = ۳$، آن‌گاه هر یال از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر می‌تواند با حداکثر ۳ یال از اندازه‌ی ۲ مجاور باشد. بدون نیاز به اضافه کردن رنگ جدید با کران خواسته شده، این رنگ‌آمیزی را برای یال‌های باقی‌مانده ادامه می‌دهیم، آن‌گاه داریم $\chi'(H) \leq \lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor = \lfloor \frac{۳}{۲} \times ۳ \rfloor = ۴$.

۲) حال می‌توانیم فرض کنیم که $\Delta(H) \geq ۴$. فرض کنید $G$ زیرگراف $H$ است که به‌وسیله‌ی یال‌های از اندازه‌ی ۲ به‌دست می‌آید. ابتدا فرض می‌کنیم $G$ یک گراف همبند است که از یک گراف اویلری با تعداد یال‌های فرد به‌دست نیامده باشد، یعنی $|E(G)|$ زوج است. فرض کنید $F$ زیرگراف فراگیر $G$ باشد که در شرایط ۱تا۳ از لم صدق می‌کند. درنتیجه طبق شرط ۱ از لم، درجه‌ی هر رأس در $F$ تقریباً نصف درجه‌ی آن در $G$ است و به‌کمک شرط ۲ و با استفاده از قضیه‌ی فورنیر، یال‌های $F$ با حداکثر $\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor + ۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شوند. بنابراین $\chi'(F) \leq \lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor + ۱$. در مرحله‌ی بعد، به‌کمک قضیه‌ی حریصانه یال‌های از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر از $H$ را به‌ترتیب کاهش اندازه رنگ‌آمیزی می‌کنیم. ادعا می‌کنیم حداکثر $\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor$ رنگ مورد نیاز است.

در هر گام، وقتی یال $e$ از اندازه‌ی $|e| = k$ , $k \geq ۳$ رنگ می‌شود، یال‌های از اندازه‌ی $k$ یا بزرگ‌تر از $H$ به‌علاوه‌ی همه‌ی یال‌های $F$ قبلاً رنگ شده‌اند. اگر $v \in e$ یک رأس باشد آن‌گاه تعدادی از رئوس مجاور آن در $G \setminus F$ و بعضی دیگر در $F$ قرار دارند. حال تعداد همه‌ی رئوس مجاور رأس $v$ ، $\Delta(v)$ می‌شود، به بیان دیگر $\Delta(v)$ را توزیع می‌کنیم تا ببینیم روی چه تعداد یال پخش می‌شود. چون $\Delta(v)$ ثابت است، آن‌گاه هرچه یال بزرگ‌تری را قطع کند اندازه‌ی بقیه‌ی یال‌ها کم می‌شود. پس در بدترین حالت، همه‌ی یال‌های مجاور $v$ از اندازه‌ی ۲ می‌باشند. بنابراین حداکثر تعداد رنگ‌ها برابر با $\Delta(v)$ به غیر از رئوس یال $e$ به‌جز خود راس $v$ می‌باشد. چون یال $e$ را از اندازه‌ی $k$ فرض کردیم پس این تعداد برابر با $k - ۱$ می‌شود. پس این $k - ۱$ رأس را باید از $\Delta(v)$ حذف کنیم.

هم‌چنین چون حداکثر تعداد رنگ را می‌خواهیم باید صورت کسر بزرگ شود، پس اگر همان‌طور که فرض کردیم در بدترین حالت همه‌ی یال‌ها از اندازه‌ی ۲ باشند، آن‌گاه وقتی رأس $v$ با $m$ $(m \geq ۱)$ یال از اندازه‌ی ۲ که قبلاً رنگ‌آمیزی شده است مجاور باشد، در نتیجه به‌کمک قسمت ۱ از لم، درجه‌ی هر رأس $\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor$ یا $\lceil \frac{\Delta(G)}{۲} \rceil$ است. بنابراین باید با $m - ۱$ یال رنگ‌آمیزی نشده از اندازه‌ی ۲ هم مجاور باشد.

هم‌چنین کل کسر را بر $k - ۱$ تقسیم می‌کنیم، چون اگر بخواهیم کل کسر بزرگ شود باید مخرج کوچک شود که در بدترین حالت $k - ۱$ می‌شود. بنابراین حداکثر $\lfloor \frac{۱}{k-۱}(\Delta(v) - (k - ۱) - (۲m - ۱)) \rfloor$ یال از اندازه‌ی $k$ یا بزرگ‌تر می‌تواند با $v$ مجاور باشد. حال اگر یال $e$ با $M$ یال رنگ‌آمیزی شده از اندازه‌ی ۲ مجاور باشد، آن‌گاه تعداد رنگ‌های استفاده شده برای رنگ‌آمیزی یال‌های از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر که با $e$ مجاور هستند حداکثر $\lfloor \frac{k}{k-۱}(\Delta(H) - (k - ۱)) - \frac{۲M-k}{k-۱} \rfloor$ است. به‌عبارت‌دیگر، $M$ یال از اندازه‌ی ۲ حداکثر می‌تواند از $min(M, \lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} \rfloor + ۱)$ رنگ استفاده کند که در آن زمانی $M$ می‌شود که همه‌ی یال‌ها از رنگ‌های مختلف باشند. بنابراین تعداد کل رنگ‌های مورد استفاده در همسایگی $e$ از

$$min\Big(M, \Big\lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} \Big\rfloor + ۱\Big) + \Big\lfloor \frac{k}{k-۱}(\Delta(H) - (k-۱)) - \frac{۲M - k}{k - ۱} \Big\rfloor \leq \Big\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \Big\rfloor - ۱$$

تجاوز نمی‌کند (برای $k \geq ۳$). بنابراین یک رنگ در این‌جا بدون استفاده می‌ماند که می‌توان به $e$ اختصاص داد.

حال باید یال‌های باقی‌مانده از اندازه‌ی ۲ را رنگ کنیم، به‌عبارت دیگر یال‌هایی که در $E(G) \setminus E(F)$ هستند. برای این‌کار به تعریف یال آزاد نیاز داریم. یک یال از اندازه‌ی ۲ را آزاد می‌نامیم، اگر با هیچ یالی از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر مجاور نباشد. ابتدا یال‌های آزاد از $E(G) \setminus E(F)$ را رنگ می‌کنیم.

فرض کنید $K$ زیرگراف القایی از $G$ باشد که به‌وسیله‌ی یال‌های آزاد که هنوز رنگ نشده‌اند به‌دست آمده است. چون $K \subseteq G$ است، اگر رأسی را در $K$ در نظر بگیریم، پس این رأس در $G$ هم قرار دارد و چون درجه‌ی هر رأس در $F$ تقریباً نصف درجه‌ی آن در $G$ است و یال‌های $F$ هم رنگ شده‌اند، آن‌گاه تعداد رنگ نشده‌ها حداکثر $\lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\rceil$ است، بنابراین $\Delta(K) \leq \lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\rceil$. هم‌چنین چون $K$ یک گراف است، پس طبق قضیه‌ی ویزینگ یال‌های $K$ را می‌توان با حداکثر $\Delta(K) + ۱ \leq \lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\rceil + ۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

براساس آن‌چه گفته شد، یال‌های آزاد در $K$ آن‌هایی هستند که اولاً در $E(G) \setminus E(F)$ هستند و دوماً با یال‌های از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر مجاور نیستند. بنابراین این یال‌ها فقط با یال‌های درون $G$ مجاور هستند، در نتیجه هر کدام از این یال‌ها با تعدادی از یال‌هایی که در $F$ قرار دارند و قبلاً رنگ‌آمیزی شده‌اند و هم‌چنین با تعدادی از یال‌هایی که در $E(G) \setminus E(F)$ هستند و هنوز رنگ نشده‌اند، مجاور است. پس آن‌هایی که رنگ ندارند را با $\lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\rceil + ۱$ رنگ جدید که در $F$ نیستند، رنگ می‌کنیم و آن‌هایی که در $F$ قرار دارند را با حداکثر $\lfloor\frac{\Delta(G)}{۲}\rfloor + ۱$ رنگ، رنگ می‌کنیم. بنابراین تعداد کل رنگ‌هایی که به یال‌های از اندازه‌ی ۲ اختصاص داده می‌شود حداکثر

$$\left(\left\lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\right\rceil + ۱\right) + \left(\left\lfloor\frac{\Delta(G)}{۲}\right\rfloor + ۱\right) = \Delta(G) + ۲ \leq \left\lfloor\frac{۳}{۲}\Delta(H)\right\rfloor$$

می‌شوند (برای $\Delta(H) \geq ۴$) . دقت کنید منظور از $\lceil\frac{\Delta(G)}{۲}\rceil + ۱$ رنگ جدید این است‌که، این تعداد رنگ برای یال‌های از اندازه‌ی ۲ جدید باشند و از بین رنگ‌هایی نباشند که برای یال‌های $F$ استفاده شده‌اند، ولی احتمالاً برای یال‌های از اندازه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ قبلاً استفاده شده باشد.

تنها رنگ‌آمیزی یال‌های از اندازه‌ی ۲ باقی‌مانده است که آزاد نیستند. در پایان، یک یال دلخواه رنگ‌آمیزی نشده $e = \{u, v\}$ را انتخاب کنید و قرار دهید

$$m = |\{f \in E(F) \,|\, f \cap e \neq \emptyset\,,\, f \neq e\}|$$

$$m' = |\{f \in E(G) \setminus E(F) \,|\, f \cap e \neq \emptyset\,,\ f \neq e\}|$$

حال برای به‌دست آوردن تعداد رنگ‌های مورد نیاز، ابتدا همه‌ی همسایه‌های $e$ را به‌دست می‌آوریم و از روی آن‌ها تعداد رنگ‌ها را به‌دست می‌آوریم. پس یال‌های در همسایگی $e$ عبارتنداز

۱) یال‌های از اندازه‌ی ۲ که در $F$ هستند و حداکثر از $\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor + ۱$ رنگ استفاده می‌کنند.

۲) یال‌های از اندازه‌ی ۲ که در $F$ نیستند و تعداد آن‌ها حداکثر برابر $m'$ است.

۳) یال‌های از اندازه‌ی ۳ و بزرگ‌تر که حداکثر $\lfloor \frac{۱}{۲}(\Delta(u) - ۱ + \Delta(v) - ۱ - m - m') \rfloor$ هستند.

روابط ۱ و ۲ بدیهی هستند، بنابراین تنها به بررسی حالت ۳ می‌پردازیم. اگر یال $e$ را در نظر بگیریم، چون می‌خواهیم حداکثر مقدار را به‌دست آوریم باید مخرج کوچک شود، پس فرض می‌کنیم یال $e$ از اندازه‌ی $k = ۳$ است. بنابراین هر رأس در آن با ۲ رأس دیگر مجاور است، یعنی برای رأس $u \in e$ یال $e$ می‌تواند ۲ واحد به درجه‌ی سختی $u$ ($\Delta(u)$) اضافه می‌کند که تقسیم به ۲ از اینجا به‌دست می‌آید. برای آن‌که کسر بزرگ شود باید صورت بزرگ و مخرج کوچک شود، از طرفی می‌دانیم حداقل تعداد رئوس مجاور $u$ که باید از صورت کم شود، ۱ و حداکثر $k - ۱$ می‌باشد. برای بزرگ بودن صورت، باید حداقل مقدار از آن کم شود. هم‌چنین $m$ رأس در $F$ و $m'$ رأس در $G \setminus F$ داریم که باید آن‌ها را نیز کم می‌کنیم. این روند برای رأس $v$ به‌طور مشابه است.

بنابراین تعداد رنگ‌های استفاده شده در همسایگی $e$ حداکثر

$$\left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor + ۱\right) + m' + \left\lfloor \frac{۱}{۲}(۲\Delta(H) - m - m' - ۲) \right\rfloor \qquad (*)$$

رنگ می‌باشد.

ادعا می‌کنیم $\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor \leq \lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} \rfloor$ و $m' \leq m$ که یکی از این نامساوی‌ها باید اکید باشد. اگر بتوانیم این دو حالت را ثابت کنیم، آن‌گاه ثابت کرده‌ایم که مقدار $(*)$ حداکثر $\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \rfloor - ۱$ است و یک رنگ بدون استفاده می‌ماند که می‌توان به $e$ اختصاص داد. برای اثبات این ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم، ابتدا فرض کنید $m \geq m'$ و هم‌چنین $\Delta_F(u) \geq \Delta_{G \setminus E(F)}(u)$ (فرض خلف برای قسمت ۳ لم). بنابراین برای

$e \in E(G) \setminus E(F)$ داریم

$$\Delta_F(v) = m - \Delta_F(u) \le m' - \Delta_{G\setminus E(F)}(u) = (\Delta_{G\setminus E(F)}(u) - ۱)+$$

$$(\Delta_{G\setminus E(F)}(v) - ۱) - \Delta_{G\setminus E(F)}(u) = \Delta_{G\setminus E(F)}(v) - ۲$$

یعنی درجه‌ی هر رأس در $F$ دو واحد کمتر از درجه‌ی آن در $G \setminus E(F)$ است که تناقض با قسمت ۱ لم دارد. بنابراین فرض خلف باطل و داریم $m < m'$ و $\Delta_F(u) \le \Delta_{G\setminus E(F)}(u)$. به همین روش ثابت می‌کنیم که $\Delta_F(v) \le \Delta_{G\setminus E(F)}(v)$ و در نتیجه بنا به قسمت ۱ لم درجه‌ی هر رأس در $F$ تقریباً نصف درجه‌ی آن در $G$ است. برای $G \setminus F$ نیز همین‌طور است. به‌عبارت دیگر، تعداد یال‌هایی که در $F$هستند و یال‌هایی که در آن نیستند برابر است، آن‌گاه $m = m'$.

برای اثبات $\lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} \rfloor \le \lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor$، از قسمت ۳ لم که نشان دادیم $\Delta_G(u) = \Delta_G(v) = \Delta(G)$ استفاده می‌کنیم و همچنین فرض می‌کنیم $e$ یال آزاد نباشد. بنابراین یکی از رئوس انتهایی آن مثلاً $u$ حداقل باید با یک یال از اندازه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر مجاور باشد و در نتیجه $\Delta(G) = \Delta_G(u) \le \Delta(H) - ۲$. چون $e$ یال آزاد نیست و یال‌های $G$ هم از اندازه‌ی ۲ هستند پس ۲ یال کم می‌شود، که نتیجه می‌شود $\lfloor \frac{\Delta(H)}{۲} \rfloor < \lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor$.

آخرین حالت را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $G$ اویلری همبند با $|E(G)|$ فرد باشد. در این مورد، ابتدا یال $e = \{u, v\} \in E(G)$ از اندازه‌ی ۲ را با فرض $\Delta_G(v) = \Delta(G)$ انتخاب کنید و آنرا به قسمت‌های جزئی تقسیم کنید، یعنی رأس جدید $w$ را به آن اضافه کنید و با دو یال $\{u, w\}$ و $\{w, v\}$ جایگزین کنید. حال می‌بینیم که $|E(G)|$ زوج است. می‌دانیم حکم برای $|EG)|$ زوج برقرار است و درنتیجه دو یال مجاور $\{u, w\}$ و $\{v, w\}$ دو رنگ متفاوت می‌گیرند، بنابراین زیرگراف $F$ یا زیرگراف $G \setminus F$ فراگیر است و در هر صورت در شرایط لم صدق می‌کند و آن‌گاه $G$ در لم صدق می کند.

فرض کنید $F$ فراگیر است، چون رئوس مجاور $w$ فقط $u$ و $v$ هستند، پس $\Delta_G(w) = ۲$ است و چون $F$ فراگیر است، بنابراین باید دقیقاً شامل یکی از دو یال مجاور $w$ باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض می‌کنیم یال $\{u, w\}$باشد. درغیراین‌صورت $E(F)$ را با $E(G) \setminus E(F)$ جایگزین می‌کنیم. در هر صورت چون گراف $G$ اویلری است نتایج لم به‌دست می‌آید. سپس ابرگراف را به روش بالا رنگ‌آمیزی کنید

تا نتیجه‌ی مطلوب حاصل شود.

در نهایت، یال $e$ را به قسمت‌های جزئی تقسیم‌بندی کنید و جایگزین کنید. چون اویلری و همبند بودن تغییری نمی‌کند، رنگ‌آمیزی را ادامه می‌دهیم تا کامل شود. به دلیل این‌که دو یال $\{w,v\}$ و $\{u,w\}$ مجاور هستند، بنابراین بعداز رنگ‌آمیزی نهایی رنگ این دو یال متفاوت می‌شود، در این حالت باید $w$ را برداریم و در مورد رنگ‌آمیزی یال $\{u,v\}$ تصمیم بگیریم. اگر آن را به رنگ $\{u,w\}$ رنگ کنیم، ممکن است با یال‌های مجاور $v$ هم‌رنگ شوند. به همین دلیل، اگر رنگ $\{w,v\}$ را انتخاب کنیم، مشکل‌ساز می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض می‌کنیم رنگ یال $\{u,w\}$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین باید برای رأس $v$ دو حالت زیر را در نظر بگیریم.

حالت۱) $\Delta_G(v) = ۲$ که دراین‌صورت $G$ اجتماعی از دورهای منتظم می‌شود و بنابراین $G$ منتظم از درجه‌ی ۲ است و آن‌گاه می‌توان آن‌را با ۲ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. پس تعداد رنگ‌های استفاده شده در همسایگی $e$ حداکثر برابر است با

$$۲ + \left\lfloor \frac{۱}{۲}(\Delta(u) - ۲) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱}{۲}(\Delta(v) - ۲) \right\rfloor \leq \Delta(H) < \left\lfloor \frac{۳}{۲}\Delta(H) \right\rfloor \ .$$

برای توضیح رابطه‌ی بالا همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، اگر در رابطه‌ی $(*)$، قرار دهیم $\Delta(G) = ۲$ داریم $۲ = ۱ + \lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \rfloor$ و عدد ۲ در ابتدای رابطه‌ی بالا به همین دلیل است. هم‌چنین در بدترین حالت، اگر همه‌ی یال‌های از اندازه‌ی ۳، رئوس $u$ یا $v$را قطع کرده باشد، آن‌گاه $k - ۱ = ۲$ می‌شود و اعداد ۲ در مخرج از همین‌جا نتیجه می‌شود. زیرا اگر یال‌ها از اندازه‌ی ۲ باشند، چون $\Delta(G) = ۲$ است پس بیش از ۲ یال نمی‌تواند $e$ را قطع کند. برای ۲ واحدی که از $\Delta(u)$ و $\Delta(v)$ کم می‌شود نیز داریم: چون یال‌ها از اندازه‌ی ۳ هستند پس یال $e$ هم از اندازه‌ی ۳ است، لذا مجاورهای $u$ یا $v$ در یال $e$ هم ۲ می‌شود که آن‌را کم می‌کنیم.

حالت۲) $\Delta_G(v) \geq ۴$. ابتدا می‌دانیم که $\Delta_G(v) \neq ۳$ است، چون $G$ اویلری است و رئوس از درجه‌ی فرد نداریم. می‌بینیم که تعداد رنگ‌های استفاده شده در همسایگی $e$ طبق رابطه‌ی $(*)$ داده شده است. می‌دانیم $m \leq m'$. اگر قرار دهیم $m = m'$، می‌دانیم به‌کمک قسمت ۱ لم برقرار است، چون

درجه‌ی هر رأس در زیرگراف تقریباً نصف درجه‌ی آن در گراف اصلی است، پس تعداد یال‌های $F$ و $G \setminus F$ برابراند یعنی $m = m'$. هم‌چنین طبق این حقیقت که $G$ اویلری است، نتیجه می‌شود که $\lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \rfloor \leq (*)$.

بنابراین فرض این‌که $\Delta_G(v) \geq 4$ دلیل بر وجود یک یال از اندازه‌ی ۲ مانند $e' \in E(G) \setminus E(F)$ است که با $v$ مجاور است. حال $e'$ را حذف کنید، پس دیگر هیچ یال از اندازه‌ی ۲ با $v$ مجاور نیست. بنابراین تعداد یال‌های $G \setminus F$ کمتر از تعداد یال‌های $F$ می‌شود و $m' < m$. لذا تعداد رنگ‌های استفاده شده در همسایگی $e$ کمتر یا مساوی $\lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \rfloor - 1$ است. پس یک رنگ بدون استفاده می‌ماند که به $e$ اختصاص می‌دهیم. وقتی رنگ‌آمیزی تمام شد، دوباره یال $e'$ را به مکان خود برگردانید و دوباره آن‌را بررسی کنید. می‌بینید که اگر $m' < m$ ، آن‌گاه تعداد رنگ‌های استفاده شده در همسایگی $e'$ به‌وسیله‌ی $(*)$ به‌دست می‌آید، که یک رنگ بدون استفاده می‌ماند که به $e'$ اختصاص می‌دهیم و در نهایت رنگ‌آمیزی $H$ کامل می‌شود.

برای تکمیل اثبات، دقیقاً کارهای مراحل قبل را وقتی $G$ ناهمبند است تکرار می‌کنیم. دراین‌حالت، ابتدا یک زیرگراف فراگیر $F$ برای هر مؤلفه از $G$ پیدا کنید و در صورتی که مؤلفه‌ی یک گراف ایلری با تعداد یال فرد نباشد، مستقیماً از لم استفاده کنید. در غیر این‌صورت، یک یال را ابتدا به اجزای کوچک‌تر تقسیم کنید و هر $F$ در آن‌را با حداقل تعداد رنگ‌ها، رنگ آمیزی کنید. سپس باقی‌مانده‌ی یال‌های $H$ را به‌وسیله‌ی یک روش کاهش اندازه مرتب کنید و روش حریصانه را به‌کار ببرید. اگر بعضی از مؤلفه‌ها فرد و بعضی زوج بودند، آن‌گاه مثل قبل از مؤلفه‌هایی که زوج هستند، زیرگراف فراگیر به‌دست می‌آوریم و تا آخر ادامه می‌دهیم. به مؤلفه‌هایی که فرد بودند یک رأس اضافه می‌کنیم و مانند قبل تا آخر پیش می‌رویم. $\square$

**نکته ۳.۳.۲.** حدس ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ هر کدام به تنهایی درست هستند، ولی به‌طور هم‌زمان و در موارد خطی درست نیستند، زیرا دقیقاً به این نکته اشاره دارند که $\chi'(H) \leq \chi'([H]_2)$. یک مثال نقض ساده برای این آزمایش، ابرگراف $H$ به‌صورت زیر است: $H = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\})$ که $H$ متقاطع است و بنابراین $\chi'(H) = 4$ ، درحالی‌که $\chi'([H]_2) = \chi'(K_4) = 3$ است و این تناقض است.

# فصل ۳

# اندیس رنگی ابرگراف‌های یکنواخت

همان‌طور که قبلاً هم بیان شد تعیین دقیق اندیس رنگی ابرگراف‌ها ساده نمی‌باشد، بنابراین در این فصل سعی داریم کران اندیس رنگی را برای ابرگراف‌های یکنواخت ارائه دهیم. در مقاله [۱] الون[۱] و کیم[۲] حدسی در ارتباط با کران بالای اندیس رنگی ابرگراف‌های یکنواخت به شرح زیر ارائه کرده‌اند:

اگر $H$ یک ابرگراف $k$-یکنواخت باشد که هیچ دو یالی در آن بیش از $t$ رأس مشترک نداشته باشند و $\Delta(H)$ نشان دهنده‌ی ماکزیمم درجه‌ی یک رأس $H$ باشد، برای هر $\varepsilon > ۰$، اگر $\Delta(H)$ به‌اندازه‌ی کافی بزرگ و تابعی از $t, k, \varepsilon$ باشد، آن‌گاه اندیس رنگی $H$ حداکثر برابراست‌با $(t - ۱ + \frac{۱}{t} + \varepsilon)\Delta(H)$.

هم‌چنین آن‌ها ثابت کردند این حدس برای حالت خاص ابرگراف‌های متقاطع به‌شکل زیر است:

اگر $H$ یک ابرگراف $k$-یکنواخت متقاطع باشد، به‌طوری‌که هیچ دو یال مشترک بیش از $t$ رأس مشترک نداشته باشند و $\Delta(H)$ ماکزیمم درجه‌ی یک رأس $H$ باشد، به‌طوری‌که $\Delta(H)$ به‌عنوان تابعی از $k$ به‌اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، آن‌گاه $H$ حداکثر $(t - ۱ + \frac{۱}{t})\Delta(H)$ یال دارد. کلیه‌ی مطالب این فصل مربوط به مقاله [۱] می باشد.

[۱] Noga Alon

[۲] Jeong Han Kim

## ۱.۳ معرفی

برای یک ابرگراف $k$-یکنواخت $H$، که ممکن است یال چندگانه هم داشته باشد، فرض کنید $\Delta(H)$ نشان دهنده‌ی ماکزیمم درجه‌ی رئوس $H$ و $\chi'(H)$ نشان دهنده‌ی اندیس رنگی $H$ است. حدس ۴.۱.۳ را پیشنهاد و آن‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبل از بیان آن قضیه‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ و حدس ۳.۱.۳ را که در طول اثبات حدس ۴.۱.۳ از آن‌ها استفاده شده است را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.۱.۳** (قضیه‌ی شانون در مورد رنگ‌آمیزی یالی). [۳۴] *اگر $H$ یک ابرگراف با ماکزیمم درجه‌ی رئوس $\Delta(H)$ باشد، آن‌گاه $\Delta(H) \le \chi'(H) \le \frac{3}{2}\Delta(H)$.*

از قضیه‌ی زیر هم‌چنین می‌توان به‌عنوان یک تعریف برای ابرگراف خوب نام برد.

**قضیه ۲.۱.۳** (قضیه‌ی پیپنگر[۳] و اسپنسر[۴]). [۳۱] *ابرگراف $H$ یک $(D_0, \varepsilon)$-ابرگراف خوب است، اگر یک $D_0$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ و $\Delta(H) \ge D_0$، آن‌گاه دو شرط زیر برقرار باشد*

۱. $\Delta(H)(1-\varepsilon) \le \deg(x) \le \Delta(H)(1+\varepsilon)$

۲. $codeg(x,y) \le \varepsilon\Delta(H)$

*که در آن $\deg(x)$ برابر با درجه‌ی رأس $x$ و $codeg(x,y)$ برابر با درجه‌ی مشترک بین دو رأس متمایز $x$ و $y$ در ابرگراف $H$ است.*

**حدس ۳.۱.۳** (حدس فوردی، کان و سیمون). [۱۸] *برای ابرگراف $H$ و $b: H \to \mathbb{R}^+$ تعریف می‌کنیم*

$$X_b^* = max\left\{ \sum_{A\in H} b(A)w(A) : \qquad \text{یک تطابق کسری از } H \text{ است } w \right\}$$

*حدس می‌زنیم که یک تطابق $M$ از $H$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$X_b^* \le \sum_{A\in M} (|A| - 1 + \frac{1}{|A|})b(A) \ .$$

*اگر $H$ یکنواخت و متقاطع و $b$ ثابت باشد، می‌توان این حدس را ثابت کرد.*

[۳] Pippenger

[۴] Spencer

**حدس ۴.۱.۳.** [۱] *برای $k \geq t \geq ۱$ و هر $\varepsilon > ۰$، $D_۰ = D_۰(k,t,\varepsilon)$ متناهی وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\Delta(H) > D_۰$، آن‌گاه هر ابرگراف $k$-یکنواخت و $t$-ساده‌ی $H$، با ماکزیمم درجه‌ی حداکثر $\Delta(H)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند*

$$\chi'(H) \leq (t - ۱ + \frac{۱}{t} + \varepsilon)\Delta(H) \quad . \qquad (۱.۳)$$

*به‌وضوح برای $k = t = ۱$ حدس بدیهی است، زیرا اگر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم $t = ۱$ آن‌گاه به‌روشنی $\chi'(H) \leq (۱ + \varepsilon)\Delta(H)$ می‌شود. از طرفی اگر $t = ۱$ باشد، یعنی هر یالی تنها ۱ عضو دارد و بنابراین هر دو یال مشترک نمی‌توانند بیش از یک رأس مشترک داشته باشند و $\Delta(H)$ ماکزیمم درجه‌ی هر رأس است، یعنی تعداد رئوسی که از یال‌های مختلف، یک رأس را قطع می‌کنند. پس ماکزیمم درجه‌ی این رأس مشترک $\Delta(H)$ است. چون تعداد یال‌هایی که این رأس مشترک را قطع می‌کنند برابر $\Delta(H)$ است، بنابراین $\Delta(H)$ رنگ متفاوت به یال‌های مشترک هر رأس می‌دهیم. درنتیجه برای هر رأس، $\Delta(H)$ رنگ متفاوت نیاز داریم و آن‌گاه $\chi'(H) \leq (۱ + \varepsilon)\Delta(H)$ و حکم برقرار است.*

*برای $k = ۲$ و $t = ۱$، چون در $k = ۲$ ابرگراف به گراف تبدیل می‌شود، پس می‌توان از قضیه‌ی ویزینگ [۳۵] در مورد گراف‌ها استفاده کرد، که طبق قضیه‌ی ویزینگ داریم $\chi'(H) \leq \Delta(H) + ۱$. هم‌چنین برای $t = ۱$ داریم $\chi'(H) \leq (۱ + \varepsilon)\Delta(H)$. به‌کمک دو رابطه‌ی به‌دست آمده در بالا نتیجه می‌گیریم که*

$$\Delta(H) + ۱ \leq (۱ + \varepsilon)\Delta(H) = \Delta(H) + \varepsilon\Delta(H) \Rightarrow \Delta(H) \geq \frac{۱}{\varepsilon}$$

*یعنی برای هر $\Delta(H)$ که در این رابطه صدق کند، حدس درست است.*

*برای $k = t = ۲$، با توجه به رابطه‌ی بالا در $t = ۲$ داریم $\chi'(H) \leq (\frac{۳}{۲} + \varepsilon)\Delta(H)$. هم‌چنین اگر $k = ۲$ باشد، لذا گراف داریم که طبق قضیه‌ی شانون [۳۴] در مورد رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها که در بالا به آن اشاره شد، داریم $\chi'(H) \leq \lfloor\frac{۳}{۲}\Delta(H)\rfloor$ بنابراین رابطه‌ی ۱.۳ در این مورد نیز صادق است.*

*برای $k > t = ۱$، درستی حدس از نتیجه‌ی اصلی پیپنگر و اسپنسر در [۳۱] به‌دست می‌آید. چون $t = ۱$ است، پس تمام توضیحاتی که در حالت اول برای $k = t = ۱$ بیان شد، تکرار می‌شود و بنابراین $\chi'(H) = \deg(x) \leq (۱ + \varepsilon)\Delta(H)$. لذا برای این حالت نیز حکم برقرار است.*

همه‌ی حالت‌های دیگر باز هستند.

حالت خاص $k = t$ توسط فوردی، کان و سیمور[۵] [۱۸] به صورت حدس بیان شده که در بالا به آن اشاره کردیم.

با فرض درستی حدس، به سادگی می‌توان نشان داد که کران معرفی شده در حدس یک کران دقیق برای همه‌ی $k$ و $t$ هایی است که $k > t$ و هم‌چنین یک صفحه تصویری از مرتبه $t - ۱$ وجود دارد. برای $t = ۱$ به‌کمک تعریف مثل یک سطح است، یعنی یک نقطه‌ی تنها و یک خط شامل آن. برای $t = ۲$ شامل ۳ خط و ۳ نقطه‌ی یک مثلث است.

برای اثبات درستی حدس وقتی که سطح مورد نظر وجود دارد، فرض کنید $D$ یک عدد صحیح بزرگ بخش‌پذیر بر $t$ باشد، تعریف کنید $m = t^۲ - t + ۱$ و یک صفحه تصویری از مرتبه‌ی $t - ۱$ با $m$ خط $l_۱, l_۲, \ldots, l_m$ روی یک مجموعه‌ی $m$ نقطه‌ای برقرار است. برای هر خط $l_i$، فرض کنید $\mathcal{F}_i$ یک خانواده از $\frac{D}{t}$ مجموعه، با اندازه‌ی $k$ شامل $l_i$ها باشد. بنابراین همه‌ی $\frac{mD}{t}$ مجموعه‌ی $\{A - l_i \ : \ ۱ \leq i \leq m\,,\, A \in \mathcal{F}_i\}$ دوبه‌دو مجزا هستند. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{F}_i$ خانواده‌ای از اجتماع $\frac{D}{t}$ مجموعه‌ای است که همگی $l_i$ را دارند، یعنی فقط در $l_i$ مشترک هستند، پس اگر از تمام آن‌ها $l_i$ را برداریم بقیه‌ی مجموعه‌ها دوبه‌دو مجزا هستند.

فرض کنید $H$ یک ابرگراف $k$-یکنواخت شامل همه‌ی مجموعه‌ها در خانواده‌ی $\mathcal{F}_i$ها باشد، آن‌گاه $H$ متقاطع است. چون هر خط $t$ عضوی است و تعداد مجموعه‌ها در هر $\mathcal{F}_i$ برابر $\frac{D}{t}$ است و هر $\mathcal{F}_i$ هم $k$ عضوی است، دراین‌صورت برای دو یال $E_i, E_j \in E(H)$ دو حالت زیر برقرار است

۱.

$$l_i \subseteq E_i, E_j \in \mathcal{F}_i \quad \Rightarrow \quad E_i \cap E_j \neq \emptyset$$

یعنی این اشتراک یک خط $(l_i)$ است و هر خط $t$ عضو دارد، پس هر $l_i$ ، $t$ عضوی است.

[۵] Seymour

۲.

$$\begin{cases} l_i \subseteq E_i \in \mathcal{F}_i \\ \\ l_j \subseteq E_j \in \mathcal{F}_j \end{cases} \Longrightarrow l_i \cap l_j \neq \emptyset \;:\; E_i \cap E_j = l_i \cap E_j \neq \emptyset \Rightarrow E_i \cap E_j \neq \emptyset$$

طبق تعریف صفحه تصویری اشتراک ناتهی است و برابر یک نقطه است.

به‌کمک دو حالت بالا $H$ متقاطع است، زیرا همه‌ی یال‌ها حداقل در یک نقطه و حداکثر در $t$ نقطه (یک خط) مشترک هستند.

هم‌چنین $H$، $k$- یکنواخت است، چون هنگام تعریف فرض کردیم هر $\mathcal{F}_i$ از اندازه‌ی $k$ باشد.

هم‌چنین $H$، $t$- ساده است، چون $H$ متقاطع است. بنابراین طبق آن‌چه که در بالا گفته شد، اشتراک هر دو یال یک خط $l_i$ یا یک نقطه است. پس اگر $l_i$ باشد تعداد آن برابر $t$ است و اگر یک نقطه باشد، یکی است که درهرصورت $t$- ساده است.

هم‌چنین $H$ دارای ماکزیمم درجه‌ی $\Delta(H) = D$ است. برای اثبات آن رأس $v_\circ \in X$ را درنظر بگیرید، گفتیم هر نقطه دقیقاً به $t$ خط تعلق دارد، پس داریم

$$\begin{array}{cccc} l_{i_1} & l_{i_2} & \dots & l_{i_t} \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ F_{i_1} & F_{i_2} & \dots & F_{i_t} \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ (\frac{D}{t} & \frac{D}{t} & \dots & \frac{D}{t}) \end{array} = D$$

به‌عبارت دیگر، رأس $v_\circ$ یا در صفحه تصویری قرار دارد یا ندارد. اگر رأس $v_\circ$ در صفحه تصویری قرار داشته باشد، حداکثر در $D$ یال مشترک قرار دارد. اگر در صفحه تصویری نباشد، پس فقط در یک یال می‌آید، زیرا وقتی حذف می‌شود با هم اشتراکی ندارند. به‌عبارت‌دیگر، رأس $v_\circ$ در یک یا $D$ یال می‌آید، در نتیجه ماکزیمم درجه $\Delta(H) = D$ است.

در پایان، $H$ دارای $\frac{mD}{t}$ یال است. از تعریف متقاطع بودن نتیجه می‌شود که همان‌طور هم که قبلاً گفته شد، اندیس رنگی ابرگراف متقاطع دقیقاً برابر با تعداد یال‌های آن است، یعنی

$$\text{تعداد یال‌های ابرگراف متقاطع} = |E(H)| = \text{اندیس رنگی} = \frac{mD}{t} = (t - 1 + \frac{1}{t})\Delta(H)$$

*حدس بالا کمی سخت به‌نظر می‌رسد. توجه کنید که چون اندیس رنگی یک ابرگراف متقاطع دقیقاً با تعداد یال‌های آن برابر است، بنابراین حدس در این مورد به یک گزاره درباره‌ی حداکثر تعداد یال‌های ممکن یک ابرگراف متقاطع $t$- ساده و $k$- یکنواخت با حداکثر درجه‌ی داده شده تغییر پیدا می‌کند. برای بیان نتیجه‌ی اصلی از تعریف $\Delta$- سیستم به صورت زیر کمک می‌گیریم.*

*خانواده‌ی $\mathcal{F}$ متشکل از $r$ یال در یک ابرگراف $k$- یکنواخت یک $\Delta$- سیستم با اندازه‌ی $r$ نامیده می‌شود، اگر برای $E_i, E_j \in \mathcal{F}$ و $i \neq j$ همه‌ی مجموعه‌های $E_i \cap E_j$ یکسان باشند. مقدار مشترک این اشتراک‌ها هسته‌ی سیستم نامیده می‌شود که آن‌را با $C$ نشان می‌دهیم. چون هسته اشتراک همه‌ی یال‌های سیستم است لذا مجموعه‌های $\{E_i - C \ : \ E_i \in \mathcal{F}\}$ دوبه‌دو مجزا هستند. به‌عبارت‌دیگر، اگر هسته را از $\Delta$- سیستم حذف کنیم مجموعه‌های باقیمانده دوبه‌دو مجزا می‌شوند.*

*اردوش و رادو[۶] [۱۴] ثابت کردند: هر ابرگراف $k$- یکنواخت با بیش از $(r-۱)^k.k!$ یال حتماً شامل یک $\Delta$- سیستم از اندازه‌ی $r$ است. فرض کنید $f(k)$ نشان دهنده‌ی حداکثر تعداد یال‌ها در یک ابرگراف $k$- یکنواخت است که شامل هیچ $\Delta$- سیستم از اندازه‌ی $k+۱$ نیست. به‌کمک نتیجه‌ی بالا، $f(k) \leq k^k.k!$ . شایان ذکر است که برخی کران‌های بهتر نیز وجود دارد که آن‌ها را محدود کنیم ولی در این‌جا به همین کران‌ها بسنده می‌کنیم.*

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که حدس ۴.۱.۳ برای ابرگراف‌های متقاطع صحیح است.

**قضیه ۵.۱.۳.** [۱] *فرض کنید $H$ یک ابرگراف متقاطع $t$- ساده، $k$- یکنواخت با $\Delta(H) > tf(k)$ باشد. آن‌گاه حداکثر تعداد یال‌های $H$ برابر است با*

$$(t-۱+\frac{۱}{t})\Delta(H) \ .$$

اثبات کوتاه است و در بخش بعدی ارائه خواهد شد. بخش آخر نیز شامل برخی تذکرات و مسائل دیگر است.

[۶] Rado

## ۲.۳ اثبات

فرض کنید $H$ متقاطع، $t$-ساده و $k$-یکنواخت باشد. بنابراین طبق آن‌چه گفتیم، چون $H$ متقاطع است پس هر دو یال از آن‌را که درنظر بگیریم باید هم‌دیگر را قطع کنند و تعداد یال‌ها با اندیس رنگی برابر باشد. لذا ادعا می‌کنیم که $\chi'(H) \leq (t - ۱ + \frac{۱}{t})\Delta(H)$، یعنی باید ثابت کنیم که، تعداد یال‌ها از کران بالای معرفی شده کمتر است. برای این‌کار به دو لم ساده‌ی زیر نیاز داریم که هر دو حتی بدون فرض $t$-ساده بودن $H$، نیز معتبر هستند.

**لم ۱.۲.۳.** [۱] *اگر $\mathcal{F} \subseteq H$ یک $\Delta$-سیستم با $|\mathcal{F}| \geq k + ۱$ و هسته‌ی $C$ باشد، آن‌گاه*

$$C \cap A \neq \emptyset \quad , \quad \forall\ A \in H\ .$$

***برهان.*** چون $H$ متقاطع است، پس با هر کدام از اعضای $\Delta$-سیستم اشتراک ناتهی دارد. اگر یک $\Delta$-سیستم در نظر بگیریم که تعداد یال‌هایی که داخل آن قرار گرفته‌اند از $k$ بیشتر باشند، یعنی بتوانیم $k - ۱$ یال پیدا کنیم که اشتراک همه‌ی آن‌ها یکسان است، بنابراین هر یال از ابرگراف ($A \in H$) با هسته اشتراک ناتهی دارد یعنی $C \cap A \neq \emptyset$. برای اثبات آن به‌کمک برهان خلف، فرض کنید یال $A \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که $A \cap C = \emptyset$. چون $H$ متقاطع است و با هر کدام از اعضای $\Delta$-سیستم اشتراک ناتهی دارد و $A$ با $C$ اشتراک ناتهی دارد پس باید با هر $F_i \setminus C$ به‌طوری‌که $F_i \in \mathcal{F}$ نیز اشتراک ناتهی داشته باشد. بنابراین $A \in H$، $\cap F_i = C$، $\mathcal{F} = \{F_۱, F_۲, \dots, F_{k+۱}, \dots\}$ و برای هر $۱ \leq i \leq k + ۱$، هر $F_i \setminus C$ دوبه‌دو مجزا هستند. لذا

$$\begin{cases} F_۱ \cap A \neq \emptyset \\ F_۲ \cap A \neq \emptyset \\ \quad\vdots \\ F_k \cap A \neq \emptyset \\ F_{k+۱} \cap A \neq \emptyset \end{cases} \quad \Rightarrow F_i \cap A \neq \emptyset$$

از طرفی طبق فرض خلف داریم $A \cap C = \emptyset$. بنابراین چون $F_i \cap A \neq \emptyset$، داریم $A \cap (F_i \setminus C) \neq \emptyset$ و

بنابراین عضوی در آن قرار دارد. فرض می‌کنیم $x_i \in A \cap (F_i \setminus C)$ باشد، بنابراین

$$\begin{array}{lcl} x_1 \in (F_1 \setminus C) \cap A & \Rightarrow & x_1 \in (F_1 \setminus C)\ ,\ x_1 \in A \\ x_2 \in (F_2 \setminus C) \cap A & \Rightarrow & x_2 \in (F_2 \setminus C)\ ,\ x_2 \in A \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k+1} \in (F_{k+1} \setminus C) \cap A & \Rightarrow & x_{k+1} \in (F_{k+1} \setminus C)\ ,\ x_{k+1} \in A \end{array}$$

چون $F_i \setminus C$ ها دوبه‌دو مجزا هستند، آن‌گاه $F_i \setminus C$ با $F_j \setminus C$ هیچ اشتراکی ندارند و می‌دانیم که تعداد آن‌ها هم $k+1$ است. پس $x_i \in F_i \setminus C$ و $x_j \in F_j \setminus C$ و درنتیجه $x_i \neq x_j$ . از طرف دیگر، چون $H$، $k$-یکنواخت است و $A \in H$ است آن‌گاه $x_1, \ldots . x_{k+1} \in A$ و $|A| = k$ است، یعنی این دو باید با هم یکی باشند، بنابراین $|A|$، حداقل باید $|\mathcal{F}| \geq k+1$ باشد که این تناقض است. $\square$

**لم ۲.۲.۳.** [۱] *فرض کنید* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset H$ *دو* $\Delta$*-سیستم با* $|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2| \geq k+1$ *و هسته‌های به ترتیب* $C_1, C_2$ *هستند، آن‌گاه*

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset\ .$$

***برهان.*** اثبات به‌کمک برهان خلف. فرض کنید $\mathcal{F}_1 = \{F_1, \ldots, F_{k+1}, \ldots\}$ و $C_1$ هسته‌ی $\mathcal{F}_1$ و $C_2$ هسته‌ی $\mathcal{F}_2$ باشد و $|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2| \geq k+1$ . هم‌چنین فرض کنید $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

می‌دانیم هر یال از $H$ و مخصوصاً اعضای $\mathcal{F}_1$ باید با $C_2$ اشتراک ناتهی داشته باشند، بنابراین

$$F_i \cap C_2 \neq \emptyset \quad , \quad 1 \leq i \leq k+1$$

از طرفی $F_i = (F_i \setminus C_1) \cup C_1$ و طبق فرض خلف $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ است. بنابراین طبق لم قبلی برای هر $F_i \in \mathcal{F}_1$ باید

$$(F_i \setminus C_1) \cap C_2 \neq \emptyset \Rightarrow x_i \in (F_i \setminus C_1) \cap C_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \in F_1 \setminus C_1 & x_1 \in C_2 \\ x_2 \in F_2 \setminus C_1 & x_2 \in C_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k \in F_k \setminus C_1 & x_k \in C_2 \\ x_{k+1} \in F_{k+1} \setminus C_1 & x_{k+1} \in C_2 \end{cases} \quad , \qquad x_i \neq x_j$$

از طرفی مجموعه‌های $F_i \setminus C_1$ دوبه‌دو مجزا هستند و $C_2$ هسته‌ی $\Delta$-سیستم است، به‌عبارت دیگر $C_2 \subseteq \{$ اعضای $\mathcal{F}_1\}$ و $C_2 \subseteq \{$ اعضای $\mathcal{F}_2\}$ و ... . بنابراین $C_2$ حداکثر $k$ عضو دارد، چون $C_2$ مجموعه‌ای از یال‌هاست. در نتیجه $|C_2| \leq k$ و از طرف دیگر داریم، $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq C_2$ در نتیجه $|C_2| \geq |\mathcal{F}_1| \geq k+1$ و $x_i = x_j$، که این تناقض است. $\square$

قضیه‌ی زیر از فوردی نشان می‌دهد که قضیه ۵.۱.۳ برای $k = t$ درست است.

**قضیه ۳.۲.۳.** [۱۶] *اگر $\mathcal{G}$ یک ابرگراف متقاطع $t$-یکنواخت باشد، آن‌گاه*

$$|\mathcal{G}| \leq (t - 1 + \frac{1}{t})\Delta(\mathcal{G})$$

*به‌علاوه، اگر هیچ صفحه تصویری متناهی در میان زیرابرگراف‌های $\mathcal{G}$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه*

$$|\mathcal{G}| \leq (t-1)\Delta(\mathcal{G}) .$$

***اثبات قضیه ۵.۱.۳.*** فرض کنید $\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r\}$ خانواده‌ی حداکثر یال‌های مجزای $\Delta$-سیستم در $H$ با اندازه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی $k+1$ باشد. فرض کنید $C_1, \ldots, C_r$ هسته‌های متناظر با آن‌ها باشند. برای هر $|C_i| \leq t$ و به‌کمک تعریف $f(k)$ داریم

$$\sum_i |\mathcal{F}_i| \geq |H| - f(k) . \tag{۲.۳}$$

اگر برای بعضی $i$ها، $|C_i| < t$ باشد، آن‌گاه یک مجموعه داریم که همه‌ی یال‌های آن با هم اشتراک دارند. فرض کردیم که $|C_i| \leq t-1 < t$ و هم‌چنین می‌دانیم $C \cap A \neq \emptyset$ و چون ماکزیمم درجه $\Delta(H)$ است، بنابراین هر رأس حداکثر در $\Delta(H)$ یال آمده، لذا حداکثر $\Delta(H)(t-1)$ یال وجود دارد. حال اگر

تعداد یال‌ها را $|H|$ در نظر بگیریم، آن‌گاه به‌کمک لم ۱.۲.۳ داریم

$$|H| \leq |C_i|\Delta(H) \leq (t-1)\Delta(H) \ .$$

حال فرض کنید، برای همه‌ی $i$ها، $|C_i| = t$ باشد. فرض کنید $\mathcal{G}$ یک ابرگراف $t$-یکنواخت شامل همه‌ی یال‌های $C_i$ ها باشد که هر $C_i$ به اندازه‌ی $|\mathcal{F}_i|$ تکرارمی‌شود. آن‌گاه $\Delta(\mathcal{G}) \leq \Delta(H)$ و $|\mathcal{G}| = \sum_i |\mathcal{F}_i|$ و طبق لم ۲.۲.۳ ، $\mathcal{G}$ متقاطع است. حال دو قسمت زیر را بررسی می‌کنیم.

۱) اگر $\mathcal{G}$ شامل هیچ صفحه تصویری متناهی نباشد، آن‌گاه به‌کمک قضیه‌ی فوردی می‌توان نتیجه گرفت $|\mathcal{G}| \leq (t-1)\Delta(H)$ که با کمک رابطه ۲.۳ داریم

$$|H| \leq \sum_i |\mathcal{F}_i| + f(k) = |\mathcal{G}| + f(k) \leq (t-1)\Delta(H) + f(k) \leq (t-1+\frac{1}{t})\Delta(H) \ .$$

۲) اگر $\mathcal{G}$ شامل یک صفحه تصویری متناهی باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید $C_1, \ldots, C_m$ از یک صفحه تصویری تشکیل می‌شوند و آن‌ها را همان صفحه تصویری در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $m = t^2 - t + 1$ است. فرض کنید $A$ مجموعه‌ی همه‌ی $m$ رأس در صفحه تصویری باشد، پس $A = \{\text{m رأسی که صفحه تصویری را تشکیل می‌دهند}\} = \cup_{i=1}^m C_i$ است. چون هر یال $E \in H$ یک اشتراک ناتهی با هر $C_i$ دارد، بنابراین ادعا می‌کنیم‌که $|A \cap E| \geq t$. برای اثبات آن از برهان خلف استفاده می‌کنیم. چون هر یال $t$ عضوی است و $A = \cup_{i=1}^m C_i$ و $|C_i| = t$ بنابراین فرض می‌کنیم $|A \cap E| < t$ در نتیجه داریم

$$|(\cup C_i) \cap E| < t \Rightarrow |(\cup C_i) \cap E| \leq t-1 \ , \ E \cap (\cup C_i) = \{x_1, \ldots, x_s\}$$

لذا رأسی که بیشترین تکرار را دارد حداقل در $m$ یال ظاهر شده است، فرض کنید تعداد $C_i$هایی که $x_i$ را دارند برابر $n(x_i)$ باشد، درنتیجه $\sum_{i=1}^s n(x_i) \geq m$. پس $x_1$ در تعدادی $C_i$ و $x_2$ در تعدادی $C_i$ می‌آید و همین‌طور تا $x_s$. بنابراین

$$\sum_{i=1}^s n(x_i) \geq m \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^s n(x_i)}{|A \cap E|} \geq \frac{m}{|A \cap E|} \geq \frac{m}{t-1} = t + \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^s n(x_i)}{|A \cap E|} > t$$

یعنی رأسی که بیشترین تکرار را دارد، بیش از $t$ بار آمده است، که این تناقض است و نتیجه می‌دهد $|A\cap E| \geq t$.

از طرفی $|A\cap E| = \deg(x)$، چون این اشتراک برای هر رأس دقیقاً درجه‌ی آن است زیرا یال‌های هر رأس را می‌شمارند، در نتیجه $\sum_{E\in H}|A\cap E| = \sum_{x\in A}\deg(x)$ و از طرفی هم $\deg(x) \leq \Delta(H)$. بنابراین

$$t|H| \leq \sum_{E\in H}|A\cap E| = \sum_{x\in A}\deg(x) \leq m\Delta(H)$$

درنتیجه داریم

$$|H| \leq (t-1+\frac{1}{t})\Delta(H)$$

و اثبات کامل می‌شود.

□

## ۳.۳ نتیجه‌گیری و مسائل حل نشده

به‌آسانی می‌توان دید، وقتی در قضیه ۵.۱.۳ فرض کردیم $\Delta(H)$ از بعضی توابع $k$ بیشتر باشد، نمی‌توان آن‌را بهبود بخشید. در واقع برای $k>1$ دوتایی یک گراف کامل روی $k+1$ رأس یک ابرگراف متقاطع، ۱-ساده و $k$-یکنواخت با $\Delta(H)=2$ و $k+1(>(1-1+\frac{1}{1}).2)$ یال است. مثال دیگر نشان می‌دهد این‌که باید $\Delta(H)$ در قضیه ۵.۱.۳ بیش از $k$ باشد، مجموعه‌ی خطوط در یک صفحه تصویری از مرتبه‌ی $k-1$ است و بنابراین یک ابرگراف متقاطع، $k$-یکنواخت، $k$-منتظم و ۱-ساده با $k^2-k+1(>(1-1+\frac{1}{1}).k)$ یال است. به‌علاوه، می‌توان نشان داد که اگر $\Delta(H)$ برای بعضی ثابت‌های $c>0$ از $2^{c\sqrt{k}}$ بیشتر شود، آن‌گاه حکم قضیه ۵.۱.۳ می‌تواند نادرست باشد، این حقیقت را در گزاره‌ی زیر ثابت می‌کنیم.

**گزاره ۱.۳.۳.** [1] *برای همه‌ی اعداد به‌اندازه‌ی کافی بزرگ $k$، یک ابرگراف متقاطع، $t$-ساده و $k$-یکنواخت $H'$ با $m'$ یال و ماکزیمم درجه‌ی $\Delta(H)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\frac{m'}{3\sqrt{k}} \leq \Delta(H) < \frac{m'}{2\sqrt{k}}$ و $t \leq \sqrt{k}$ و $m' \geq 0.08e^{\frac{\sqrt{k}}{3}}$.*

***برهان.*** برای راحتی در اثبات همه‌ی کف و سقف علامت‌ها را هر جا که قطعی نیست، حذف می‌کنیم. فرض کنید $k$ یک عدد صحیح بزرگ باشد، تعریف می‌کنیم $l = ۳\sqrt{k}$ و فرض کنید $N_۱, \dots, N_k$، $k$ مجموعه‌ی دوبه‌دو مجزا با اندازه‌ی $l$ باشند. یک ابرگراف تصادفی $k$-بخشی و $k$-یکنواخت روی مجموعه رئوس $N_۱ \cup N_۲ \cup \dots \cup N_k$ به‌صورت زیر می‌سازیم. تعریف می‌کنیم $m = ۰/۱ e^{\frac{k}{l}} = ۰/۱ e^{\frac{\sqrt{k}}{۳}}$ و فرض کنید $H$ یک مجموعه از $m$ یال باشد به‌طوری‌که هر یال به‌طور تصادفی و مستقل، شامل $k$ رأس است که به‌طور تصادفی از یکی از $N_i$ها انتخاب شده‌اند و همه‌ی انتخاب‌ها با احتمال برابر هستند. یک جفت یال را خوب می‌نامیم اگر اشتراک ناتهی داشته و کاردینال آن‌ها از $\sqrt{k} = \frac{۳k}{l}$ تجاوز نکند. درغیراین‌صورت آن‌ها را بد می‌نامیم. ادعا می‌کنیم احتمال این‌که یک جفت ثابت از یال‌ها بد باشند از $۲e^{\frac{-k}{l}}$ کمتر است. توجه کنید، کاردینال اشتراک یک جفت یال، متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $p = \frac{۱}{l}$ و $k$ است. بنابراین احتمال این‌که اشتراک تهی باشد برابر با $(۱ - \frac{۱}{l})^k \leq e^{\frac{-k}{l}}$ است. احتمال این‌که اشتراک شامل بیش از $\frac{۳k}{l}$ عنصر باشد حداکثر $(\frac{e^۲}{۳^۳})^{\frac{k}{l}} < e^{\frac{-k}{l}}$ است. به‌کمک برآورد استاندارد برای توزیع دوجمله‌ای در [۲] این را ببینید . بنابراین انتظار می‌رود که تعداد جفت‌های بد حداکثر $۰/۱m < \binom{m}{۲} ۲e^{\frac{-k}{l}}$ باشد. درنتیجه، با احتمال حداقل نصف تعداد جفت‌های بد حداکثر $۰/۲m$ است. انتظار می‌رود درجه‌ی یک رأس در $H$، $\frac{m}{l}$ باشد و به‌کمک برآورد مذکور برای توزیع دوجمله‌ای بالا همه‌ی درجه‌ها با احتمال بیش از $\frac{۱}{۲}$ حداکثر $۱/۰۱\frac{m}{l}$ هستند. بنابراین می‌توان $m$ یال از بالا طوری انتخاب کرد که کمتر از $۰/۲m$ بدجفت یال دارد و ماکزیمم درجه حداکثر $۱/۰۱\frac{m}{l}$ است. با چنین انتخابی فرض کنید $H'$ ابرگراف به‌دست آمده از $H$ به‌وسیله‌ی حذف یک یال از هر بدجفت است. آن‌گاه $H'$ همه‌ی خواص مورد نیاز برای اثبات درستی گزاره را دارد. □

حدس زیر توسط جف کان که حالت قوی‌تری از حدس ۴.۱.۳ است، پیشنهاد شده است.

**حدس ۲.۳.۳.** [۱] *برای* $k \geq t \geq ۱$ *و هر* $\varepsilon > ۰$، *یک* $D_۰ = D_۰(k, t, \varepsilon)$ *متناهی و* $\delta = \delta(k, t, \varepsilon)$ *وجود دارد، به‌طوری‌که هر ابرگراف $k$-یکنواخت $H$ با ماکزیمم درجه‌ی حداکثر $\Delta(H)$ و $\Delta(H) > D_۰$، که در آن هیچ مجموعه‌ی $t + ۱$ رأسی شامل بیشتر از $\delta\Delta(H)$ یال نیست، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند*

$$\chi'(H) \leq (t - ۱ + \frac{۱}{t} + \varepsilon)\Delta(H) \quad .$$

*برای $t = ۱$ و هر $k$ به‌کمک نتیجه‌ی اصلی [۳۱] حکم برقرار است، و همین‌طور برای $k = t = ۲$ به‌کمک قضیه‌ی کلی ویزینگ [۳۵] حکم برقرار است.*

بنابراین به‌کمک تعریف، هر ابرگراف $H$ شامل یک تطابق از اندازه‌ی حداقل $\frac{|H|}{\chi'(H)}$ است.

حدس زیر حالت ساده‌تری از حدس ۴.۱.۳ است.

**حدس ۳.۳.۳.** [۱] *برای $k \geq t \geq ۱$ و هر $\varepsilon > ۰$، یک $D_۰ = D_۰(k,t,\varepsilon)$ متناهی وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\Delta(H) > D_۰$، آن‌گاه هر ابرگراف $k$-یکنواخت و $t$-ساده‌ی $H$ با ماکزیمم درجه‌ی حداکثر $\Delta(H)$، شامل یک تطابق از اندازه‌ی حداقل*

$$\frac{|H|}{(t - ۱ + \frac{۱}{t} + \varepsilon)\Delta(H)}$$

*است.*

*به‌وضوح برای $k = t = ۲$ و $k > t = ۱$ حکم برقرار است، بنابراین حدس ۴.۱.۳ نیز در این مورد برقرار است. به‌کمک نتیجه‌ی اصلی فوردی در [۱۶] حکم هم‌چنین برای $t = k$ برقرار است. درحقیقت، در [۱۶] نشان داده می‌شود که دراین مورد $\varepsilon$ می‌تواند حذف شود. هر ابرگراف $k$-یکنواخت $H$، که همیشه $k$-ساده نیز است با ماکزیمم درجه‌ی $\Delta(H)$، یک تطابق از اندازه‌ی حداقل*

$$\frac{|H|}{(k - ۱ + \frac{۱}{k})\Delta(H)}$$

*دارد. حالت کلی این حدس همچنان باز است.*

# فصل ۴

# اندیس رنگی گراف‌ها (عدد رنگی گراف‌های یالی)

از آن‌جا که گراف‌ها حالت خاصی از ابرگراف‌ها هستند، در این فصل به بررسی اندیس رنگی گراف‌ها می‌پردازیم. در مقاله [۳۲] رید[۱] حدس زد که برای هر گراف $G$، عدد رنگی گراف $\chi(G)$ از بالا با $\left\lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \right\rceil$ محدود می‌شود به‌طوری‌که $\Delta(G)$ و $\omega(G)$ به‌ترتیب ماکزیمم درجه و تعداد خوشه‌های $G$ هستند. در این فصل ثابت می‌کنیم که این کران درست است، اگر $G$ یک گراف یالی از یک گراف چندگانه باشد. حاصل اثبات یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای است که یک گراف یالی را می‌گیرد و یک گراف یالی رنگی تولید می‌کند که بسیار نزدیک به کران مورد نظر است. کلیه‌ی مطالب این فصل مربوط به مقاله [۲۶] می‌باشد.

## ۱.۴ معرفی

می‌دانیم که عدد رنگی گراف $G$ با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود. از طرفی تعیین دقیق عدد رنگی برای یک گراف ساده نمی‌باشد، به‌همین دلیل کران‌هایی برای آن مشخص می‌شود تا رابطه‌ی بین $\chi(G)$ و ثابت‌های دیگر آن را به‌دست آوریم. در این فصل سعی داریم رابطه‌ی بین $\chi(G)$ را با تعداد خوشه‌های یک گراف و ماکزیمم درجه‌ی رئوس آن به‌دست آوریم.

---

[۱] B.Reed

تعداد خوشه‌های گراف $G$ را با $\omega(G)$ و برای هر رأس $v$، درجه‌ی آن‌را با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم که برابر است با تعداد رئوسی از گراف که با $v$ مجاور هستند. همین‌طور ماکزیمم درجه‌ی همه‌ی رئوس گراف $G$ را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم. طبق قضیه‌ی ویزینگ می‌دانیم $\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱$. از طرفی برای گراف‌های دوبخشی و نیز برای گراف کامل داریم $\omega(G) = \chi(G)$، چون همه‌ی رئوس دوبه‌دو مجاور هستند. لذا برای هر گرافی به‌راحتی می‌توان دید که

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + ۱ \ .$$

بنابراین برای $\chi(G)$ یک کران بالای بدیهی از جملات $\Delta(G)$ و یک کران پایین بدیهی از جملات $\omega(G)$ داریم. حال می‌خواهیم کران بالای $\chi(G)$ را به‌کمک جملاتی از $\Delta(G) + ۱$ و $\omega(G)$ به‌دست آوریم.

رید، دو کران برای عدد رنگی هر گراف $G$ به‌صورت زیر حدس زد که یکی به‌کمک سقف براکت و دیگری بدون آن است.

**حدس ۴.۱.۱.** [۳۲] *برای هر گراف* $G$

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G) + ۱ + \omega(G)}{۲} \right\rceil \ .$$

**حدس ۴.۱.۲.** [۳۲] *برای هر گراف همبند* $G$ *که شامل هیچ دور فرد نیست، داریم*

$$\chi(G) \leq \frac{۲(\Delta(G) + ۱) + \omega(G)}{۳} \ .$$

توجه کنید وقتی‌که $\omega(G)$ برابر با $\Delta(G) + ۱$ یا $\Delta(G) - ۱$ است، از سقف براکت در کران اول استفاده نمی‌شود و بنابراین می‌توان دید که اگر $\Delta(G) = \omega(G)$ باشد، کران دوم بهتر است.

قضیه‌ی زیر از بروکس اشاره دارد به این‌که اگر $\Delta(G) = \omega(G)$ باشد، آن‌گاه یا $G$ دارای دور فرد است یا $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

**قضیه ۴.۱.۳** (قضیه‌ی بروکس[۲]). [۸] *همواره* $\chi(G) \leq \Delta(G)$ *است مگر این‌که* $G$ *شامل یک خوشه با اندازه‌ی* $\Delta(G) + ۱$ *باشد یا این‌که* $\Delta(G) = ۲$ *و* $G$ *شامل یک دور فرد باشد.*

[۲] Brooks

صورت دیگر این قضیه را می‌توان به این شکل بیان کرد: [۷] اگر $G$ یک گراف ساده‌ی همبند باشد که نه دور فرد و نه گراف کامل است، دراین‌صورت داریم $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

به‌هرحال هر دو حدس درست هستند، ولی حدس ۲.۱.۴ اکیداً ضعیف‌تر از حدس ۱.۱.۴ است.

چند نتیجه‌ی مرتبط با این قضیه وجود دارد. در یک مقاله‌ی مشابه رید ثابت کرد که حدس ۱.۱.۴ درست است اگر $\Delta(G)$ به اندازه‌ی کافی بزرگ و هم‌چنین $\omega(G)$ به اندازه‌ی کافی نزدیک به $\Delta(G)$ باشد. به‌کمک این حدس او ثابت کرد که، $\alpha$ مثبت وجود دارد به‌طوری‌که برای همه‌ی گراف‌ها همواره داریم $\chi(G) \leq \alpha(\omega(G)) + (۱-\alpha)(\Delta(G)+۱)$. هم‌چنین چند نتیجه‌ی دیگر برای تعمیم عدد رنگی وجود دارد.

باتوجه به تعاریف مربوط به $c$-رنگ‌آمیزی رأسی کسری، عدد رنگی کسری و عدد رنگی لیستی که به طور مفصل در فصل اول بیان شد، می‌دانیم به‌طور واضح برای هر گرافی همواره: $\chi^f(G) \leq \chi(G) \leq \chi^l(G)$.

قضیه‌ی زیر که توسط مولوی[۳] و رید بیان شد، حالت کسری حدس ۱.۱.۴ را برای همه‌ی گراف‌ها ثابت می‌کند.

**قضیه ۴.۱.۴.** [۲۹] *برای هر گراف* $G$

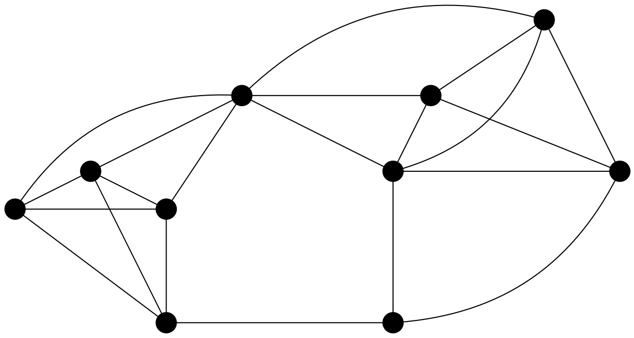
$$\chi^f(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲} \right\rceil .$$

در حقیقت در حالت کسری به سقف براکت نیازی نیست. در این فصل ثابت می‌کنیم که حدس۱.۱.۴ و بنابراین حدس ۲.۱.۴ برای گراف‌های یالی که در بخش بعدی تعریف می‌شوند، برقرار است.

## ۲.۴ رنگ‌آمیزی صحیح و کسری در گراف‌های یالی از گراف‌های چندگانه

می‌دانیم گراف چندگانه گرافی است که بین هر دو رأس آن بیش‌از یک یال، یا به‌عبارتی یال‌های چندگانه وجود دارد. هم‌چنین برای گراف چندگانه‌ی $H=(V,E)$، گراف یالی آن را با $L(H)$ نمایش می‌دهیم و گرافی با مجموعه‌ی رئوس $E$ است که دو رأس در آن مجاورند اگروتنهااگر یال‌های متناظر آن‌ها در $H$، حداقل یک سر مشترک داشته باشند. گوییم $G$ یک گراف یالی است، اگر گراف چندگانه‌ی $H$ وجود داشته باشد

[۳] Molloy



شکل ۱.۴: گرافی با $\Delta(H) = ۶, \omega(H) = \chi(H) = ۴$

به‌طوری‌که $G = L(H)$.

اندیس رنگی $H$ که با نماد $\chi_e(H)$ نشان داده می‌شود برابر با عدد رنگی $L(H)$ است، به‌طور مشابه اندیس رنگی کسری $\chi_e^f(H)$ برابر با عدد رنگی کسری $L(H)$ است.

در [۲۲] هولیر[۴] ثابت کرد که تعیین اندیس رنگی یک گراف دلخواه یک مسئله‌ی بسیار سخت است. بنابراین در عمل، برای به‌دست آوردن تقریبی برای اندیس رنگی گراف‌های چندگانه می‌توانیم عدد رنگی گراف‌های یالی را به‌دست آوریم.

قضیه‌ی ویزینگ [۳۵] اندیس رنگی یک گراف چندگانه را برحسب درجه‌ی ماکزیمم آن محدود می‌کند. که در آن $\Delta(H) \leq \chi_e(H) \leq \Delta(H) + d$، و $d$ برابر با ماکزیمم تعداد یال‌های بین هر دو رأس (ماکزیمم چندگانگی) $H$ است. هر دو کران خوب هستند، اما کرانی بهتر است که در آن پارامترهای بیشتری از $H$ وجود داشته باشد.

توجه کنید که، $\chi_e(H)$ همیشه از پایین با $\chi_e^f(H)$ محدود می‌شود یعنی $\chi_e^f(H) \leq \chi_e(H)$. فرض کنید $w$ یک وزن نامنفی روی یال‌های $H$ باشد. حال از تعریف دوگان در برنامه‌ریزی‌خطی برای رنگ‌آمیزی کسری استفاده می‌کنیم. عدد رنگی کسری $\chi^f(G)$ از گراف $G$ می‌تواند به‌کمک برنامه‌ریزی خطی یک راه‌حل خوب به صورت زیر ارائه دهد.

فرض کنید $\mathcal{I}(G)$ یک مجموعه از همه‌ی مجموعه‌های مستقل از $G$ باشد و فرض کنید $\mathcal{I}(G, x)$ یک

[۴] Holyer

مجموعه از همه‌ی مجموعه‌های مستقلی باشد که شامل رأس $x$ است. برای هر مجموعه‌ی مستقل $I$، یک متغیر حقیقی نامنفی $x_I$ را تعریف می‌کنیم، لذا $\chi^f(G)$ کمترین مقدار $\sum_{I\in\mathcal{I}(G)} x_I$ است، به‌طوری‌که برای هر $x$ داریم $\sum_{I\in\mathcal{I}(G,x)} x_I \geq ۱$ . دوگان این برنامه‌ریزی‌خطی «تعداد خوشه‌های کسری» را محاسبه می‌کند و یک وزن دهی به رئوس $G$ است به‌طوری‌که وزن کل اختصاص داده شده به هر مجموعه‌ی مستقل، حداکثر ۱ است.

قضیه‌ی قوی دوگانگی در برنامه‌ریزی‌خطی، راه حل بهینه برای هر دو برنامه‌ریزی‌خطی را دارای ارزش یکسان می‌داند. طبق این تعریف فرض کنید یک تابع وزن $w : \{s_۱, \dots, s_l\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ داریم که به همه‌ی مجموعه‌های مستقل، وزنی را نسبت می‌دهد. می‌خواهیم تابع وزن دارای خاصیت زیر باشد: برای هر $v \in V(G)$، $\sum_{v\in s_i} w_i \geq ۱$ و دارای تابع هدف $\min \sum_{i=۱}^{l} w_i$ باشد. به‌عبارت دیگر، به دنبال $w$ای هستیم که مجموع بالا را مینیمم کند.

برای تعریف دوگان فرض کنید $w : E(H) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ یک تابع وزن نامنفی روی یال‌های $H$ باشد به‌طوری‌که برای هر تطابق $M$ از $H$ داریم $\sum_{e\in M} w(e) \leq ۱$ و $\sum_{e\in E(H)} w(e) \leq \chi'^f_e(H)$. بنابراین به دنبال $w$ای هستیم که مجموع بالا را ماکزیمم کند. هر دو وزن‌دهی کران‌های پایین را به ما می‌دهند. بنابراین باید دو حالت زیر را ثابت کنیم.

۱) چون می‌خواهیم مجموع ماکزیمم شود پس هر مقداردهی به رئوس، یک کران پایین می‌دهد. بنابراین وقتی دوگان آن را که یک گراف چندگانه است بررسی می‌کنیم، باید به یال‌ها وزن بدهیم. از طرفی می‌دانیم که مجموعه‌ی مستقل در گراف یالی برابر با تطابق در گراف چندگانه است. به‌عبارت‌دیگر، وقتی یال‌های گراف را به رأس تبدیل می‌کنیم و گراف یالی $L(H)$ را به‌دست می‌آوریم، آن‌گاه دو رأس مستقل در $L(H)$ یعنی دو یال از $H$ که باهم اشتراکی ندارند و این همان تعریف تطابق است.

لذا، ابتدا به همه‌ی یال‌های متصل به رأس $v$ از بیشترین درجه وزن ۱ را می‌دهیم و بقیه‌ی یال‌ها وزن ۰ را می‌گیرند. البته باید این نسبت‌دهی شرط این‌که مجموع روی همه‌ی تطابق‌ها حداکثر ۱ شود را داشته باشد. در این صورت چون تطابق است و از هر کدام از ناصفرها حداکثر می‌تواند یکی را داشته

باشد لذا شرط برای آن برقرار است. بنابراین مجموع روی اعضای هر مجموعه‌ی مستقل حداقل ۱ می‌شود و مجموع همه یک کران پایین برای عددرنگی کسری می‌شود و بنابراین $\Delta(H) \leq \chi_e^f(H)$.

۲) یک زیر گراف القایی $W$ از $H$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که یک تطابق داریم و به‌کمک تعریف زیرگراف القایی، تعداد یال‌ها حداکثر نصف رئوس یعنی $\frac{۱}{\lfloor \frac{|V(W)|}{۲} \rfloor}$ است. بنابراین به هر یال $W$ وزن $\frac{۱}{\lfloor \frac{|V(W)|}{۲} \rfloor}$ را می‌دهیم، بقیه‌ی یال‌های $H$ هم که در $W$ نیستند یا حتی یک سر در $W$ دارند نیز وزن ۰ را می‌گیرند.

ادعا می‌کنیم شرایط مذکور را دارند. بنابراین اگر یک تطابق از آن‌را درنظر بگیریم، باید ثابت کنیم که مجموع روی تطابق حداکثر ۱ است. می‌دانیم که یال‌های بیرون تطابق وزن صفر دارند و فقط یال‌هایی که کاملاً درون تطابق قرار دارند وزن ناصفر دارند. از طرفی می‌دانیم تعداد یال‌های تطابق حداکثر نصف رئوس گراف هستند، که اگر زوج باشند $\left\lfloor \frac{|V(W)|}{۲} \right\rfloor$ و اگر فرد باشند $\left\lfloor \frac{|V(W)|-۱}{۲} \right\rfloor$ می‌شود.
بنابراین اگر تعداد رئوس فرد باشد آن‌گاه $۱ \leq \frac{۱}{\lfloor \frac{|V(W)|-۱}{۲} \rfloor} \times |E(W)| = \sum_{e \in M} w(e)$ می‌شود و بنابراین در شرایط مذکور صدق می‌کند، که در آن تعداد یال‌ها را $|E(W)|$ در نظر می‌گیریم.

قضیه‌ی ادموندز[5] برای تطابق‌ها (در [۱۲] و [۲۵] توضیح داده شده است) بیان می‌کند که ماکزیمم برای این کران‌های پایین برقرار است، بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(H) = \max\left\{ \frac{۲|E(W)|}{|V(W)|-۱} \ : \ W \subseteq H \ , \ \text{فرد است} |V(W)| \right\}$$

مقدار بالا کل مجموع وزنی است که به $W$ داده‌ایم، خارج آن‌را صفر قرار دادیم و داخل آن نیز $\frac{۲|E(W)|}{|V(W)|-۱} = \frac{۱}{\lfloor \frac{|V(W)|-۱}{۲} \rfloor} \times |E(W)|$ می‌شود. حال اگر ماکزیمم آن‌را در نظر بگیریم، یک کران پایین برای عددرنگی کسری می‌شود و بنابراین $\Gamma(H) \leq \chi_e^f(H)$ .

بنابراین داریم

$$\chi_e^f(H) = \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\}. \qquad (۱.۴)$$

[5] Edmond

حال آن‌را به یک کران بالای خوب روی اندیس رنگی گراف‌های چندگانه تعبیر می‌کنیم. حدس زیر که توسط گلدبرگ [۱۹] و سیمور [۳۳] پیشنهاد شد، به نکته‌ی زیر اشاره دارد

$$\chi_e^f(H) \le \chi_e(H) \le \chi_e^f(H) + ۱ \; .$$

**حدس ۱.۲.۴** (حدس گلدبرگ[۶]-سیمور[۷]). *برای یک گراف چندگانه‌ی $H$، اگر $\chi_e(H) > \Delta(H) + ۱$ آن‌گاه*

$$\chi_e(H) = \lceil \Gamma(H) \rceil \; .$$

این حدس اشاره دارد به این‌که در یک گراف چندگانه‌ی $H$، همواره داریم $\chi_e(H) \le \Delta(H) + ۱$ یا $\chi_e(H) = \lceil \Gamma(H) \rceil$.

بنابراین اگر $\chi_e(H) \le \Delta(H) + ۱$ آن‌گاه چون همواره می‌دانیم $\Delta(H) \le \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\}$ و $\chi_e^f(H) \le \chi_e(H)$ داریم

$$\chi_e^f(H) \le \chi_e(H) \le \Delta(H) + ۱ \le \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\} + ۱ \le \chi_e^f(H) + ۱$$

حال اگر $\chi_e(H) \ge \Delta(H) + ۱$ باشد، آن‌گاه چون همواره $\Gamma(H) \le \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\}$، بنابراین $\lceil \Gamma(H) \rceil \le \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\} + ۱$ می‌شود و داریم

$$\chi_e^f(H) \le \chi_e(H) = \lceil \Gamma(H) \rceil \le \max\{\Delta(H), \Gamma(H)\} + ۱ \le \chi_e^f(H) + ۱$$

البته اگر حدس درست باشد، آن‌گاه این روابط برقرار هستند.

نتایج زیر با حدس بالا هم‌ارز می‌باشند. ابتدا کان[۲۴] ثابت کرد که اندیس رنگی کسری بسیار نزدیک به اندیس رنگی صحیح می‌باشد، یعنی $\chi_e(H) \le (۱ + o(۱))\chi_e^f(H)$، که به مفهوم حدس گلدبرگ-سیمور بسیار نزدیک است. او هم‌چنین ثابت کرد که اندیس رنگی کسری به اندیس رنگی لیستی [۲۵] نیز نزدیک است.

نتیجه‌ی دیگری که با حدس گلبرگ-سیمور هم‌ارز است، قضیه‌ی زیر می‌باشد.

[۶] Goldberg

[۷] Seymour

**قضیه ۲.۲.۴** (کاپرارا[۸] و ریزی[۹]). [۹] *برای هر گراف چندگانه‌ی $H$ داریم*

$$\chi_e(H) \le \max\{\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\rfloor, \lceil\Gamma(H)\rceil\} \ .$$

این قضیه، قضیه‌ی نی‌شی‌زاکی و کاشی‌واگی [۳۰] را اندکی بهبود بخشیده و عامل افزودنی آن‌را از ۰/۸ به ۰/۷ کاهش می‌دهد. توجه کنید، این قضیه به‌این‌صورت به حدس گلدبرگ و سیمور اشاره دارد:

برای هر گراف چندگانه‌ی $H$ با $\Delta(H) \ge ۱۲$ داریم $\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\rfloor \le \Delta(H) + ۱$.

## ۳.۴ نتیجه‌ی اصلی

اکنون قضیه‌ی اصلی این فصل را بیان و ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۱.۳.۴.** [۲۶] *برای هر گراف یالی $G$ داریم*

$$\chi(G) \le \left\lceil \frac{\Delta(G) + ۱ + \omega(G)}{۲} \right\rceil \ .$$

یک گراف چندگانه‌ی $H$ برای $G = L(H)$ در نظر بگیرید. اثبات شامل دو حالت است: حالتی که $\Delta(G)$ نسبت به $\Delta(H)$ خیلی بزرگ است و حالتی که $\Delta(G)$ نزدیک به $\Delta(H)$ است. در هر دو حالت از این حقیقت استفاده می‌کنیم که $\omega(G) \ge \Delta(H)$، چون می‌دانیم‌که همواره در گراف یالی همه‌ی یال‌های متصل به یک رأس یک خوشه را تشکیل می‌دهند، لذا در بدترین حالت $\omega(G) = \Delta(H)$ می‌شود. حالت اول به‌وسیله‌ی لم زیر داده شده است و به‌آسانی از قضیه ۲.۲.۴ به دست می‌آید.

**لم ۲.۳.۴.** [۲۶] *اگر $G$ یک گراف یالی از گراف چندگانه‌ی $H$ باشد و* $\Delta(G) \ge \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$*، آن‌گاه* $\chi(G) \le \left\lceil \frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲} \right\rceil$.

***برهان.*** باتوجه به این‌که می‌دانیم همواره $\chi(G) = \chi_e(H)$ و $\chi^f(G) = \chi_e^f(H)$ است، آن‌گاه از ترکیب تساوی ۱.۴ با قضیه ۲.۲.۴ داریم

$$\chi(G) \le \max\{\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\rfloor, \lceil\chi^f(G)\rceil\}$$

[۸] Caprara

[۹] Rizzi

بنابراین به‌کمک قضیه ۴.۱.۴ داریم

$$\chi(G) \leq \max\left\{\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\rfloor, \left\lceil\frac{\Delta(G) + ۱ + \omega(G)}{۲}\right\rceil\right\}$$

لذا چون فرض کردیم $\Delta(G) \geq \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$ و می‌دانیم $\omega(G) = \Delta(H)$ آن‌گاه

$$\left\lceil\frac{\Delta(G) + ۱ + \omega(G)}{۲}\right\rceil \geq \left\lceil\frac{\frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ + ۱ + \Delta(H)}{۲}\right\rceil = \left\lceil\frac{\frac{۵}{۲}\Delta(H)}{۲}\right\rceil = \left\lceil\frac{۵}{۴}\Delta(H)\right\rceil$$

$$\geq \left\lfloor ۱/۱\Delta(H) + ۰/۷\right\rfloor \geq \chi(G)$$

و حکم به‌دست می‌آید. □

حال به حالت $\Delta(G) < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$ بپردازیم.

***اثبات قضیه‌ی ۱.۳.۴*** . به‌عنوان یک مثال نقض، فرض کنید $G = L(H)$ به‌طوری‌که قضیه برای هر گراف یالی با کمترین رئوس برقرار است. به‌کمک لم۲.۳.۴ می‌دانیم‌که $\Delta(G) < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$. آنچه می‌خواهیم یک مجموعه‌ی مستقل ماکزیمال $S \subset V(G)$ است که یک رأس در هر خوشه‌ی ماکزیمم $G$ دارد. فرض کنید $G'$ یک زیرگراف القایی $G$ روی $V(G) \setminus S$ باشد. بنابراین چون $S$ ماکزیمال است آن‌گاه برای هر رأس حداقل یکی از همسایه‌های آن حذف شده‌اند. اگر فرض کنیم که حذف نشده، آن‌گاه رأسی وجود دارد که هیچ‌کدام از همسایه‌های آن در مجموعه‌ی مستقل قرار ندارد، لذا آن رأس را به مجموعه‌ی مستقل اضافه می‌کنیم که تناقض با ماکزیمم بودن $S$ دارد. بنابراین به آسانی می‌توان دید که $\Delta(G') \leq \Delta(G) - ۱$. هم‌چنین چون رئوس به هم متصل هستند از هر خوشه یک رأس داریم و بیش از آن نمی‌توان رأس داشت، لذا یک واحد از آن کم می‌کنیم و بنابراین داریم $\omega(G') = \omega(G) - ۱$ و قضیه برای $G'$ برقرار است.

می‌دانیم که هر زیرگراف القایی یک گراف یالی، به‌وضوح یک گراف یالی است. بنابراین داریم $\chi(G') \leq \lceil\frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲}\rceil - ۱$ . حال می‌توانیم یک $\chi(G') + ۱$-رنگ‌آمیزی مناسب از $V(G)$ به‌کمک گرفتن یک $\chi(G')$-رنگ‌آمیزی مناسب از $G'$ بسازیم و فرض کنید $S$ کلاس رنگی نهایی باشد، بنابراین داریم $\chi(G) \leq \lceil\frac{\Delta(G)+۱+\omega(G)}{۲}\rceil$ که تناقض است.

اکنون کافی است وجود یک مجموعه‌ی مستقل $S$ در $G$ را نشان دهیم. تنها نیاز داریم یک مجموعه‌ی مستقل پیدا کنیم که محل برخورد همه‌ی خوشه‌های ماکزیمم $G$ باشد، بنابراین می‌توان هر مجموعه‌ی مستقل را تا ماکزیمم آن توسعه داد. این کار را برای یک تطابق در $H$ انجام می دهیم یعنی یک مجموعه از یال‌ها در $E(H)$ – نه دو یال مشترک در یک رأس – را می‌خواهیم. یک تطابق در $H$ دقیقاً یک مجموعه‌ی مستقل در $G$ را نشان می‌دهد.

ابتدا برخی از نمادهایی را که نیاز داریم، معرفی می‌کنیم. برای یک جفت از رئوس $u, v \in V(H)$، چندگانگی $uv$ تعداد یال‌های در $E(H)$ بین $u$ و $v$ است که آن‌را با $\mu(u, v)$ نشان می‌دهیم. یک مثلث در $H$، یک مجموعه از سه رأس متقابلاً مجاور است و یال‌های یک مثلث آن یال‌هایی در $E(H)$ هستند که به رئوس مثلث متصل هستند. بیشترین تعداد یال‌های هر مثلث در $H$ را با $tri(H)$ نشان می‌دهیم. دو اصل زیر ثابت‌های موجود در $H$ و $G$ را شرح می‌دهند.

**اصل ۳.۳.۴.**

$$\Delta(G) = \max_{uv \in E(H)} \{\deg(u) + \deg(v) - \mu(u, v) - ۱\}.$$

**اصل ۴.۳.۴.**

$$\omega(G) = \max\{\Delta(H), tri(H)\}.$$

طبق تعریف تطابق، می‌دانیم‌که یک تطابق یک رأس $v$ را آلوده می‌کند اگر $v$ یک نقطه‌ی پایانی یک یال در تطابق باشد. می‌خواهیم تطابق ماکزیمم $M$ در $H$ را پیدا کنیم که مربوط به همگرایی به یک مجموعه‌ی مستقل است، چون محل برخورد هر رأس از درجه‌ی ماکزیمم در $H$ است و شامل یک یال هر مثلث با $\max\{\Delta(H), tri(H)\}$ یال در $H$ است.

در نهایت فرض کنید $S_\Delta$ مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی در $H$ باشد که از درجه‌ی $\Delta(H)$ هستند و فرض کنید $T$ مجموعه‌ی همه‌ی مثلث‌ها در $H$ باشد که شامل $\max\{\Delta(H), tri(H)\}$ یال است. حال می خواهیم ببینیم که چطور اعضای $T$ به‌طور متقابل با هم عمل می‌کنند.

**نظریه ۵.۳.۴.** اگر دو مثلث از $T$ در دقیقاً رئوس $a$ و $b$ متقاطع باشند، آن‌گاه $ab$ دارای چندگانگی بزرگ‌تر از $\frac{\Delta(H)}{۲}$ است ($\mu(a,b) > \frac{\Delta(H)}{۲}$).

***برهان.*** برای هر یال $e$ از $H$ بین دو رأس $a$ و $b$، درجه‌ی رأس متناظر در $G$ حداقل $۲\Delta(H) - \mu(a,b) - ۱$ و حداکثر $\frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$ است، چون طبق فرض، $\Delta(G) < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$ و $\deg_G(a,b) \geq ۲\Delta(H) - \mu(a,b) - ۱$ است و همواره $\Delta(G) \geq \deg_G(a,b)$. بنابراین داریم

$$۲\Delta(H) - \mu(a,b) - ۱ < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ \Rightarrow \mu(a,b) > \frac{\Delta(H)}{۲} \ .$$

□

**نظریه ۶.۳.۴.** اگر مثلث $abc$ از $T$ با یک مثلث دیگر مانند $ade$ از $T$ دقیقاً در رأس $a$ متقاطع باشند، آن‌گاه $\mu(b,c) > \frac{\Delta(H)}{۲}$ است.

***برهان.*** درجه‌ی یک رأس $G$ متناظر با یک یال بین رئوس $a$ و $b$، حداقل $۲\Delta(H) - \mu(b,c) - ۱$ است. بنابراین طبق دلایلی که در نظریه‌ی قبلی بیان شد، داریم

$$۲\Delta(H) - \mu(b,c) - ۱ < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ \Rightarrow \mu(b,c) > \frac{\Delta(H)}{۲} \ .$$

□

**نظریه ۷.۳.۴.** اگر یک یال $H$ متصل به دو رأس $a$ و $b$ از $S_\Delta$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $\mu(a,b) > \frac{\Delta(H)}{۲}$.

ایده‌ی اثبات. فرض می‌کنیم $T'$ مثلثی در $T$ باشد که شامل هیچ جفتی از چندگانگی رئوس بزرگ‌تر از $\frac{\Delta(H)}{۲}$ نباشد و $S'_\Delta$ اعضایی از $S_\Delta$ باشد که در هیچ جفتی از تکرار رئوس بزرگ‌تر از $\frac{\Delta(H)}{۲}$ نباشد. به طور جداگانه $T' \cup S'_\Delta$ و $(T \setminus T') \cup (S_\Delta \setminus S'_\Delta)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چند نظریه‌ی زیر در مورد $S'_\Delta$ و $T'$ برای اثبات به ما کمک خواهند کرد. برای یک مجموعه‌ی $S$ از رئوس، مجموعه‌ی رئوس همسایه را با $N(S)$ نشان می‌دهیم.

**نظریه ۸.۳.۴.** برای هر $S \subseteq S'_\Delta$ داریم $|N(S)| \geq |S|$.

**برهان.** به کمک نظریه ۷.۳.۴، $S'_{\Delta}$ یک مجموعه‌ی مستقل است. این بدان معنی است که $S$ و $N(S)$ مجزا هستند. فرض کنید $S \subseteq S'_{\Delta}$ داده شده است و تعداد $|S|\Delta(H)$ یال بین $S$ و $N(S)$ وجود دارد. در نتیجه چون هیچ رأسی در $N(H)$ از درجه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی $\Delta(H)$ وجود ندارد، بنابراین اگر فرض کنیم رأس $a$ در $S$ و رأس $b$ در $N(S)$ قرار دارد، آن‌گاه طبق فرض $\mu(a,b) < \frac{\Delta(H)}{۲}$ و $\deg_{N(S)}(b) < \Delta(H)$. لذا داریم

$$|S| - |N(S)| + \mu(a,b) - ۱ + \deg_{N(S)}(b) = \deg_S(a)$$

$$< |S| - |N(S)| - ۱ + \frac{\Delta(H)}{۲} + \Delta(H) < \Delta(G) < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱$$

$$\Rightarrow |S| - |N(S)| - ۱ + \frac{\Delta(H)}{۲} + \Delta(H) < \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ \Rightarrow |S| < |N(S)|$$

و نتیجه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید. □

**نظریه ۹.۳.۴.** اگر یال $ab$ در $H$ دقیقاً یک نقطه‌ی پایانی در مثلث $bcd$ از $T'$ داشته باشد، آن‌گاه درجه‌ی $a$ از $\Delta(H)$ کمتر است.

**برهان.** هر رأس در $G$ متناظر با یک یال بین $a$ و $b$ است که درجه‌ی کمتر از $\deg(a) - ۱ + \Delta(H) - \mu(c,d)$ دارد و هم‌چنین $\mu(c,d) \leq \frac{\Delta(H)}{۲}$ است. اگر تعداد یال‌های مثلث $bcd$ را با $|bcd|$ نشان دهیم، آن‌گاه داریم

$$\deg_H(a) - ۱ + \Delta(H) - \frac{\Delta(H)}{۲} \leq \deg_H(a) - ۱ + |bcd| - \mu(c,d) \leq \deg_G(ab) < \Delta(G)$$

$$< \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ \Rightarrow \deg_H(a) < \Delta(H) \; .$$

□

**نظریه ۱۰.۳.۴.** اگر یال $ab$ در $H$ دقیقاً یک نقطه‌ی پایانی در مثلث $bcd$ از $T'$ داشته باشد، آن‌گاه همواره $\mu(a,b) \leq \frac{\Delta(H)}{۲}$ .

**برهان.** درجه‌ی هر رأس در $G$ متناظر با یک یال بین $b$ و $c$ است که درجه‌ی کمتر از $\mu(a,b) + \Delta(H) - ۱$ دارد. بنابراین

$$\frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ > \Delta(G) \geq \deg_G(bc) > \deg_H(a) - ۱ + \deg_H(b) + \mu(a,b) \geq \Delta(H) + \mu(a,b) - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ \geq \Delta(H) + \mu(a,b) - ۱ \Rightarrow \mu(a,b) \leq \frac{\Delta(H)}{۲} \ .$$

□

**نظریه ۱۱.۳.۴.** برای هر رأس $v$ با دو همسایه‌ی $u$ و $w$ داریم $\deg(u) + \mu(vw) \leq \frac{۳}{۲}\Delta(H)$ .

***برهان.*** یک یال بین $u$ و $v$، تابع حداقل $\deg(u) + \mu(vw) - ۱$ یال دیگر است. لذا به‌کمک فرض‌های قبلی داریم

$$\frac{۳}{۲}\Delta(H) - ۱ > \Delta(G) \geq \deg_G(uv) \geq \deg(u) + \mu(vw) - ۱$$

$$\Rightarrow \deg(u) + \mu(vw) \leq \frac{۳}{۲}\Delta(H) \ .$$

□

در نهایت قضیه‌ی معروف هال را شرح می‌دهیم که یک نتیجه‌ی بنیادی برای تطابق در گراف‌های دوبخشی است.

**قضیه ۱۲.۳.۴** (قضیه‌ی هال[۱۰]). [۲۰] *فرض کنید $G$ یک گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V = (A, B)$ باشد. در این‌صورت $G$ دارای یک تطابق است که تمام رأس‌های $A$ را آلوده می‌کند اگر برای هر $S \subseteq A$ داشته باشیم* $|N(S)| \geq |S|$ .

به‌آسانی می‌توان دید که تطابق مطلوب وجود دارد. با تطابق $M$ شامل یک یال بین هر جفت رأس با چندگانگی بزرگ‌تر از $\frac{\Delta(H)}{۲}$ شروع می‌کنیم. این تطابق، $S_\Delta \setminus S'_\Delta$ برخورد دارد و از هر مثلث در $T \setminus T'$ یک یال دارد. طبق نظریه‌ی ۸.۳.۴ می‌توان قضیه‌ی هال را پذیرفت اگر یک تطابق در $H$ در نظر بگیریم به‌طوری‌که $S'_\Delta$ برخورد دارد. طبق نظریه‌ی ۱۱.۳.۴ این تطابق نمی‌تواند $M$ برخورد داشته باشد. بنابراین اجتماع $M'$ از این دو تطابق یک تطابق در $H$ است که $S_\Delta$ برخورد دارد و شامل یک یال از هر مثلث در $T \setminus T'$ است. هر یال در این تطابق با یک رأس با ماکزیمم درجه در $H$ برخورد دارد، یا نقاط پایانی با چندگانگی بزرگ‌تر از $\frac{\Delta(H)}{۲}$ دارد.

---
[۱۰] Hall

حال می‌خواهیم ببینیم که، می‌توان مانع از تعمیم این $M'$ که شامل یک یال از هر مثلث در $T'$ است، شد؟ در پاسخ به این سؤال باید گفت که، طبق نظریه‌های ۵.۳.۴ و ۶.۳.۴ هر دو مثلث در $T'$ دارای رأس مجزا هستند، بنابراین تنها مشکل این است که $M'$ با دو رأس برخی از مثلث‌ها در $T'$ برخورد دارد. نظریه‌های ۷.۳.۴ و ۹.۳.۴ و ۱۰.۳.۴ تضمین می‌کنند که حداکثر با یک رأس در مثلث داده شده برخورد می‌کند و اگر یک رأس وجود داشته باشد، آن‌گاه آن رأس از درجه‌ی $\Delta(H)$ است. بنابراین می‌توانیم $M'$ را تعمیم دهیم تا شامل یک یال از هر مثلث در $T'$ شود. نتیجه یک تطابق است که همه‌ی نیازهای ما را برآورده می‌کند، بنابراین اثبات قضیه تمام می‌شود. □

## ۴.۴ نکات الگوریتمی

در این فصل توانستیم یک کران بالای جدید برای عدد رنگی گراف‌های یالی (اندیس رنگی گراف‌ها)، یعنی $\chi^f(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \rceil$ را ارائه می‌دهیم. نتیجه‌ی اثبات، یک الگوریتم برای ساختن کلاس رنگی در $G$ را نتیجه می‌دهد، اما یک شرط اولیه در اثبات داریم و آن شرط برابر است با $\chi(G) < \frac{3}{2}\Delta(H) - 1$. اگر رئوس را حذف کنیم نیازی به این شرط باقی نمی‌ماند. بنابراین کران داده شده توسط کاپرارا و ریزی در قضیه ۲.۲.۴ می‌تواند در زمان $O(|E(H)(|V(H) + \Delta(H)))$ به انجام برسد[۹]. به‌آسانی می‌توان نشان داد که در اثبات قضیه ۱.۳.۴ می‌توان یک الگوریتم چندزمانه برای $\lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \rceil$-رنگ‌آمیزی یک گراف یالی $G$ با ریشه‌ی گراف $H$ به‌صورت زیر ساخت.

۱) تا وقتی‌که $\Delta(L(H)) < \frac{3}{2}\Delta(H) - 1$ است، یک تطابق $M$ از $H$ را براساس اثبات قضیه ۱.۳.۴ بردارید و فرض کنید آن یک کلاس رنگی است.

۲) از الگوریتم کاپرارا و ریزی برای کامل کردن رنگ‌آمیزی یالی $H$ استفاه کنید.

البته، فرض کنید که ریشه‌ی گراف $H$ را داریم به‌طوری‌که $G = L(H)$. لیهوت[۱۱] یک $O(|E(H)|)$ الگوریتم را ثابت کرد که در هر حالت $G$ گراف یالی از یک گراف ساده‌ی $H$ است، و در صورت امکان خروجی $H$ را پیدا می‌کند [۲۷]. دو رأس $u$ و $v$ در $G$ جفت هستند اگر مجاور باشند و همسایه‌های آن‌ها

[۱۱] Lehot

درغیراین‌صورت برابرند. می‌توانیم الگوریتم لیهوت را برای گراف‌های یالی چندگانه به‌وسیله‌ی قرار دادن هر مجموعه‌ی چندگانه‌ی $k$ از رئوس جفت در $G$ به یک رأس تنها تعمیم دهیم، به‌طوری‌که گوییم $k$ تکرار دارد. در نتیجه به‌طور بدیهی در زمان $O(|E(G)|\Delta(G))$ می‌تواند انجام شود. در نتیجه گراف $G'$ یک گراف یالی از یک گراف ساده‌ی $H'$ است اگر و تنها اگر $G$ یک گراف یالی از گراف چندگانه‌ی $H$ باشد. می‌توان $H$ را از $H'$ به‌وسیله‌ی در نظر گرفتن چندگانگی رئوس در $G'$ و بنابراین دوگانگی یال‌ها در $H'$ تولید کرد.

# مراجع


[1] N. Alon and J. H. Kim. On the degree, size, and chromatic index of a uniform hypergraph. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 77(TA962728):165–170, 1997.

[2] N. Alon and J. H. Spencer. The probabilistic method,. *Wiley, New York*, 1992.

[3] R. P. Anstee and J. R. Griggs. An application of matching theory to edge-colourings. *Discrete Math.*, 156:253–256, 1996.

[4] C. Berge. Hypergraphs: Combinatorics of finite sets, North-Holland mathematical library. *North-Holland, Amsterdam*, 45, 1989.

[5] C. Berge. On the chromatic index of a linear hypergraph and the Chvátal conjecture. *Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference, New York, 1985, Ann. New York Acad. Sci.*, 555:40–44, 1989.

[6] C. Berge and J. C. Fournier. A short proof for a generalization of Vizing's theorem. *J. Graph Theory*, 15:333–336, 1991.

[7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications.* First published in Great Britain 1976 by The Macmillan Press Ltd, 1976.

[8] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37:194–197, 1941.

[9] A. Caprara and R. Rizzi. Improving a family of approximation algorithms to edge color multigraphs. *Information Processing Letters*, 68:11–15, 1998.

[10] W. I. Chang and E. Lawler. Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász. *Combin.*, 8:293–295, 1989.

[11] Tomáš Dvořák. Chromatic index of hypergraphs and Shannon's theorem. *European. J. Combin.*, 21:585–591, 2000.

[12] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards (B)*, 69:125–130, 1965.

[13] P. Erdős. Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference, Congress*, 15:169–192, 1975.

[14] P. Erdős and R. Rado. Intersection theorems for systems of sets. *J. London Math. Soc.*, 35:85–90, 1960.

[15] J. C. Fournier. Coloration des arétes d un graphe. *Cah. Cent. Etud. Rech. Oper.*, 15:311–314, 1973.

[16] Z. Füredi. Maximum degrees and fractional matchings in uniform hypergraphs. *Combin.*, 1:155–162, 1981.

[17] Z. Füredi. The chromatic index of simple hypergraphs. *Graphs Combin.*, 2:89–92, 1986.

[18] Z. Füredi, J. Kahn, and P. D. Seymour. On the fractional matching polytope of a hypergraph. *Combin.*, 13:167–180, 1993.

[19] M. K. Goldberg. On multigraphs of almost maximal chromatic class. *Diskretnyi Analiz*, 23:3–7, 1973.

[20] P. Hall. On representation of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.

[21] N. Hindman. On a conjecture of Erdős, Faber and Lovász about n-colorings. *Can. J. Math.*, 33:563–570, 1981.

[22] I. Holyer. The NP-completeness of edge-colouring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720, 1981.

[23] J. Kahn. Coloring nearly-disjoint hypergraphs with n + o(n). *J. Combin. Theory, Ser. A*, 59:31–39, 1992.

[24] J. Kahn. Asymptotics of the chromatic index for multigraphs. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 68:233–254, 1996.

[25] J. Kahn. Asymptotics of the list-chromatic index for multigraphs. *Random Structures Algorithms*, 17:117–156, 2000.

[26] A. D. King, B. A. Reed, and A. Vetta. An upper bound for the chromatic number of line graphs. *European J. Combin.*, 28:2182–2187, 2007.

[27] P. G. H. Lehot. An optimal algorithm to detect a line-graph and output its root graph. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21:569–575, 1974.

[28] L. Lovász. Combinatorial problems and exercises. *Akadémiai Kiadó, Budapest*, 1979.

[29] M. Molloy and B. Reed. Graph colouring and the probabilistic method. *Springer-Verlag, Berlin*, 2000.

[30] T. Nishizeki and K. Kashiwagi. On the 1.1 edge-coloring of multigraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3:391–410, 1990.

[31] N. Pippenger and J. Spencer. Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs. *J. Combin.Theory, Ser. A*, 51:24–42, 1989.

[32] B. Reed. $\omega$,$\alpha$, and $\chi$. *J. Graph Theory*, 27:177–212, 1998.

[33] P. D. Seymour. Some unsolved problems on one-factorizations of graphs. *in: J. A. Bondy, U. S. R. Murty (Eds.), Graph Theory and Related Topics, Academic Press, New York*, 1979.

[34] C. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.*, 28:148–151, 1949.

[35] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskretnyi Analiz*, 3:23–30, 1964 [in Rusian].

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

| | |
|---|---|
| ابرگراف | hypergraph |
| ابرگراف خطی | linear hypergraph |
| اتصال | join |
| اجتماع | union |
| اشتراک | intersection |
| اکیداً | strictly |
| القایی | induced |
| الگوریتم چندزمانه | polytime algorithm |
| الگوریتم حریصانه | greedy algorithm |
| الگوریتم زمانی | time algorithm |
| آلوده کردن | hit |
| اندازه | size |
| اندیس | index |
| اندیس رنگی | chromatic index |
| اندیس رنگی کسری | fractional chromatic index |
| اندیس رنگی لیستی | list chromatic index |

ب

| | |
|---|---|
| بدون طوقه | loopless |
| به‌طور مستقل | independently |

بی‌نهایت ........ infinity

ت

ترکیب ........ combination

ترکیب محدب ........ convex combination

تصادفی ........ random

تطابق ........ matching

ث

ثابت ........ constant

ثابت ........ invariant

ج

جفت ........ twin

چ

چندجمله‌ای ........ polynomial

ح

حقیقی ........ real

خ

خانواده-مجموعه ........ collection

خوشه ........ clique

د

درجه ........ degree

درجه‌ی سختی ........ strong degree

دوبار ........ twice

دوبخشی ........ partial

دوبه‌دو ........ pairwise

دور ........ cycle

ر

رأس ........ vertex

رأس ابتدا ........ initial point

رأس انتها ........ end point

رأس مرکزی ........ center vertex

رئوس ........ vertices

رنگ ........ color

رنگ‌آمیزی ........ coloring

رنگ نشده ........ uncolored

ریشه ........ root

ز

زنجیر ........ chain

زوج ........ even

زیرابرگراف ........ subhypergraph

زیرگراف ........ subgraph

زیرگراف فراگیر ........ spanning subgraph

زیرمجموعه ........ subset

س

سقف ........ ceiling

سقف براکت ........ round-up

ص

صفحه تصویری ........ projective plane

ط

طوقه ........ loop

طول ........ length

ع

عامل افزودنی ........ additive factor

عدد رنگی ........ chromatic number

عدد رنگی کسری ........ fractional chromatic number

ف

فاصله ........ distance

فرد ........ odd

ک

کران ........ bound

کران بالا ........ upper bound

کران پایین ........ lower bound

کف ........ floor

کلاس رنگی ........ color class

گ

گراف ........ graph

گراف اویلری ........ Eulerian graph

گراف چندگانه ........ multigraph

گراف یالی ........ line graph

گراف دوبخشی ........ bipartite graph

گراف ساده ........ simple graph

گراف منتظم ........ regular graph

گراف همبند ........ connected graph

گشت ........ walk

م

ماکزیمم درجه ........ maximum degree

متقابلاً ........ interact

متقابلاً-دوبه‌دو ........ mutually

متقاطع ........ intersect

متقاطع ........ intersecting

متمایز ........ distinct

متناهی ........ finite

مثلث ........ triangle

مجاز ........ proper

مجانب ........ asymptotic

مجاور ........ adjacent

مجزا ........ disjoint

مجموعه‌ی مستقل ........ stable set

مجموعه‌ی چندگانه ........ multiset

مجموعه‌ی مستقل ........ independent set

مرتبه ........ order

مشترک ........ common

مشترک ........ share

مینیمم درجه ........ minimum degree

موازی ........ parallel

مؤلفه‌ی همبندی ........ connected component

ن

ناتهی ........ nonempty

نامتناهی ........ infinite

ناهمبند ........ disconnected

و

واقع ........ incident

وزن ........ weight

ه

هسته ........ core

همسایگی ........ neighborhood

ی

یال ........ edge

یال آزاد ........ free edge

یال چندگانه ........ multiple edge

یال‌های باقی‌مانده ........ remaining edges

یکنواخت ........ uniform

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

عامل افزودنی ........ additive factor

مجاور ........ adjacent

مجانب ........ asymptotic

B

گراف دوبخشی ........ bipartite graph

کران ........ bound

C

سقف ........ ceiling

رأس مرکزی ........ center vertex

زنجیر ........ chain

اندیس رنگی ........ chromatic index

عدد رنگی ........ chromatic number

خوشه ........ clique

مجموعه-خانواده ........ collection

رنگ ........ color

رنگ‌آمیزی ........ coloring

کلاس رنگی ........ color class

ترکیب ........ combination

مشترک ........ common

connected component ........ مؤلفه‌ی همبندی

connected graph ........ گراف همبند

constant ........ ثابت

convex combination ........ ترکیب محدب

core ........ هسته

cycle ........ دور

D

degree ........ درجه

disconnected ........ ناهمبند

disjoint ........ مجزا

distance ........ فاصله

distinct ........ متمایز

E

edge ........ یال

end point ........ رأس انتها

Eulerian graph ........ گراف اویلری

even ........ زوج

F

finite ........ متناهی

floor ........ کف

fractional chromatic number ........ عدد رنگی کسری

fractional chromatic index ........ اندیس رنگی کسری

free edge ........ یال آزاد

G

graph ........ گراف

greedy algorithm ........ الگوریتم حریصانه

H

آلوده کردن ........ hit

ابرگراف ........ hypergraph

I

واقع ........ incident

مجموعه‌ی مستقل ........ independent set

به‌طور مستقل ........ independently

اندیس ........ index

القایی ........ induced

نامتناهی ........ infinite

رأس ابتدا ........ initial point

متقابلاً ........ interact

متقاطع ........ intersect

متقاطع ........ intersecting

اشتراک ........ intersection

ثابت ........ invariant

J

اتصال ........ join

L

طول ........ length

گراف یالی ........ line graph

ابرگراف خطی ........ linear hypergraph

اندیس رنگی لیستی ........ list chromatic index

طوقه ........ loop

بدون طوقه ........ loopless

کران پایین ........ lower bound

M

matching ............ تطابق

maximum degree ............ ماکزیمم درجه

minimum degree ............ مینیمم درجه

multigraph ............ گراف چندگانه

multiset ............ مجموعه‌ی چندگانه

multiple edge ............ یال چندگانه

mutually ............ دوبه‌دو-متقابلاً

N

neighborhood ............ همسایگی

nonempty ............ ناتهی

O

odd ............ فرد

order ............ مرتبه

P

pairwise ............ دوبه‌دو

parallel ............ موازی

partial ............ دوبخشی

polynomial ............ چندجمله‌ای

polytime algorithm ............ الگوریتم چندزمانه

projective plane ............ صفحه تصویری

proper ............ مجاز

R

random ............ تصادفی

real ............ حقیقی

regular graph ............ گراف منتظم

یال‌های باقی‌مانده ........ remaining edges
ریشه ........ root
سقف براکت ........ round-up

S

گراف ساده ........ simple graph
اندازه ........ size
مشترک ........ share
زیرگراف فراگیر ........ spanning subgraph
مجموعه‌ی مستقل ........ stable set
اکیداً ........ strictly
درجه‌ی سختی ........ strong degree
زیرگراف ........ subgraph
زیرابرگراف ........ subhypergraph
زیرمجموعه ........ subset

T

الگوریتم زمانی ........ time algorithm
مثلث ........ triangle
دوبار ........ twice
جفت ........ twin

U

رنگ نشده ........ uncolored
یکنواخت ........ uniform
اجتماع ........ union
کران بالا ........ upper bound

V

رأس ........ vertex

رئوس ........ vertices

W

گشت ........ walk

وزن ........ weight

# نمایه


$k$-بخش، ۴

$k$-یکنواخت، ۵

$t$-ساده، ۵

ابرگراف، ۲

ابرگراف خطی، ۴

ابرگراف دوگان، ۷

الگوریتم حریصانه، ۱۷

اندیس رنگی، ۳

تطابق، ۵

تطابق ماکزیمم، ۵

تطابق کامل، ۵

تطابق کسری، ۹

تور، ۱۱

تور اویلری، ۱۱

خوشه، ۸

درجه، ۸

دور، ۷

رتبه، ۳

زنجیر، ۶

زیرگراف، ۱۰

زیرگراف القایی، ۱۰

زیرگراف فراگیر، ۱۰

صفحه تصویری، ۵

طوقه، ۸

عدد رنگی، ۳

مجموعه‌ی مستقل، ۵

مرتبه، ۲

مسیر، ۱۱

منتظم، ۵

گذرگاه، ۱۰

گذرگاه اویلری، ۱۱

گراف، ۷

گراف چندگانه، ۸

گراف یالی، ۸

گشت، ۱۰

یال پیوندی، ۸

Surname: Shahsavari Name: Azam

Title: On Chromatic Index of Hypergraphs

Supervisors: Dr. Meysam Alishahi and Dr. Gholam Reza Omidi

Degree: Master of Science Subject: Applied Mathematics
Field: Graph and Combinatorics

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: September, 2013 Number of pages: 76

Keywords: hypergraph, chromatic index, chromatic number

**Abstract**

The chromatic number $\chi(H)$ is defined to be the smallest number of colors needed to color the vertices of $H$ such that no edge $E_i$ of $H$ with $|E_i| > 1$ has all its vertices with the same color. The chromatic index $\chi'(H)$ of $H$ is the least number of colors needed to color the edges of $H$ so that no two intersecting edges have the same color. Although determining the exact chromatic index of hypergraphs is very difficult, in this thesis we try to determine it through a bound. so, we define the well-known Shannon's theorem and introduce its generalization in different states of a hypergraph to use its results for obtaining different bounds for different kinds of hypergraphs. Even in many cases, we use the Greedy algorithm for coloring in order to obtain an optimal bound. For special kinds of k-uniform hypergraphs, we express bound of Alon and Kim as a conjecture, then we prove it for the special kinds of intersecting k-uniform hypergraphs. Finally, we use the fact that graphs are a special kind of hypergraphs and we express the Vizing's theorem that is the most populor theorem in chromatic index of graphs, then we use related theorems about chromatic index of graphs and duality in multigraphs and line graphs to deliver an upper bound for multigraphs. Also, we use generalized Vizing's theorem in different kinds of hypergraphs several times. Some cases are still open.

Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

# On Chromatic Index of Hypergraphs

Supervisors
Dr. Meysam Alishahi and Dr. Gholam Reza Omidi

by
Azam Shahsavari

September, 2013