بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

عنوان:

برآوردگرها بر اساس متغیرهای تصادفی فازی

دانشجو:

زینب زمانی

استاد راهنما:

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور:

دکتر محمد قاسم اکبری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ماه ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به

جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

و به:

همسر عزیزم

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه ازپدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد بزرگوار جناب آقای **دکتر احمد نزاکتی رضازاده** که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

از استاد گرامی جناب آقای **دکتر محمد قاسم اکبری** که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از اساتید محترم جناب آقای **دکتر محمد آرشی** و جناب آقای **دکتر محمدرضا ربیعی** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

- الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه ی عمل بپوشانم .

- پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما .

- خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

زینب زمانی – بهمن ماه ۱۳۹۱

تعهد نامه

اینجانب **زینب زمانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه برآوردگرها بر اساس متغیر تصادفی فازی تحت راهنمایی دکتر احمد نزاکتی رضازاده متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

استنباط آماری در حالت کلاسیک بر پایه داده‌ها، متغیرهای تصادفی، پارامترها، برآورد نقطه‌ای و آزمون فرضیه‌های آماری به‌صورت دقیق است. ممکن است در بعضی موارد این مفاهیم به‌طور مبهم مشاهده یا گزارش شوند، بنابراین نظریه مجموعه‌های فازی یک راهکار مناسب برای تجزیه و تحلیل این مفاهیم است.

در این مطالعه، ابتدا مفاهیمی مقدماتی از مجموعه‌های فازی از قبیل متغیرهای تصادفی فازی، تابع چگالی احتمال فازی و امید ریاضی متغیر تصادفی فازی را ارائه می‌دهیم. سپس دو متر L_2 و یائو-ویو را شرح داده و به یافتن برآوردگرهای UMVU و بیز فازی برای پارامتر فازی بر اساس این دو متر خواهیم پرداخت. همچنین به مقایسه لم نیمن-پیرسن در حالت غیرفازی و لم-نیمن پیرسن تعمیم یافته در سه حالت فازی می‌پردازیم. در پایان بر اساس تابع چگالی احتمال فازی ارائه شده در یکی از حالت‌ها یک برآورد درستنمایی ماکزیمم جدید ارائه می‌دهیم. مطالب جدید در متن با (*) مشخص شده‌اند.

کلمات کلیدی: مجموعه‌های فازی، متغیر تصادفی فازی، متر L_2، متر یائو-ویو، پارامتر فازی، برآوردگر فازی UMVU، برآوردگر بیز فازی، آزمون فرضیه فازی، تابع چگالی احتمال فازی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

زمانی، ز. نزاکتی رضازاده، ا. (۱۳۹۱)، تاریخچه‌ای از آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی، یازدهمین کنفرانس آمار ایران، ص ۱۳۳، دانشگاه علم و صنعت.

پیشگفتار

در این پایان نامه به بررسی برآوردگرهای UMVU و بیز فازی پرداخته شده است. همچنین لم نیمن-پیرسن در حالت‌های مختلف فازی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور این مجموعه شامل ۳ فصل می‌باشد که در زیر خلاصه‌ای از مطالب هر فصل آمده است.

- در فصل ۱، مجموعه‌های فازی، متغیر تصادفی فازی، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع و امید ریاضی متغیر تصادفی فازی و دو متر L_2 و یائو-ویو شرح داده شده است.
- در فصل ۲، برآوردگرهای فازی UMVU و بیز برای یک پارامتر فازی با استفاده از متر یائو-ویو و L_2 ارائه می‌گردد.
- در فصل ۳، تاریخچه‌ای از آزمون فرضیه‌های فازی، لم نیمن-پیرسن در حالت غیرفازی و سه حالت دیگر فازی را ارائه داده و در قالب یک مثال این چند روش را با هم مقایسه می‌کنیم، در نهایت برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر توزیع نمایی بر اساس تابع چگالی ارائه شده در رویکرد آخری را بیان می‌کنیم.

علاوه بر مطالب فوق می‌توان کارهای زیادی در زمینه استنباط آماری فازی انجام داد که در آخر این مجموعه پیشنهاداتی ارائه شده است.

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۱-۱ مجموعه‌های فازی ۲

۱-۲ متغیر تصادفی فازی ۸

۱-۳ تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی فازی ۱۲

۱-۴ امید ریاضی متغیر تصادفی فازی ۱۴

۱-۵ متر L_2 ۱۸

۱-۶ متر یائو-ویو ۲۱

۲ برآوردگرهای فازی برای پارامترهای فازی ۲۳

۲-۱ مقدمه ۲۴

۲-۲ برآوردگرهای ناریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس فازی (FUMVU) ۲۶

۲-۲-۱ برآوردگرهای FUMVU با استفاده از متر یائو-ویو ۳۰

۲-۲-۲ برآوردگرهای FUMVU بر اساس متر L_2 ۳۴

۲-۳ برآوردگرهای بیز فازی ۳۷

۲-۳-۱ برآوردگرهای بیز فازی بر اساس فاصله علامتدار یائو-ویو ۴۰

۲-۳-۲ برآوردگرهای بیز فازی با استفاده از متر L_2 ۴۱

۳ آزمون فرضیه‌های آماری بر اساس لم نیمن-پیرسن تعمیم یافته ۴۴

۳-۱ مقدمه ۴۵

۳-۲ تاریخچه آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی ۴۷

۳-۲-۱ لم نیمن-پیرسن در حالت غیر فازی ۴۹

۳-۲-۲ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی بر پایه لم نیمن-پیرسن تعمیم یافته تحت داده‌های دقیق (طاهری و بهبودیان) ۵۱

۳-۲-۳ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی بر پایه لم نیمن-پیرسن تعمیم یافته تحت داده‌های فازی (ترابی و همکاران) ۵۵

۳-۲-۴ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی بر پایه لم نیمن-پیرسن تعمیم یافته تحت داده‌های دقیق (اکبری و سعیدی) ۶۱

پیشنهادات ۷۱

ضمیمه ۷۲

کتاب‌نامه ۸۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۸

فهرست اشکال و جداول

شکل ۱-۱: تابع عضویت برد «نه بیشتر از ۱۲ تومان ولی نزدیک به آن» در مثال ۲.۱ .. ۱۶

شکل ۱-۲: تابع عضویت باخت «تقریباً ۱۰ تومان» در مثال ۲.۱ .... ۱۶

شکل ۳-۱: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های الف ۴۶

شکل ۳-۲: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های ب ۴۶

شکل ۳-۳: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های ج ۴۷

جدول ۳-۱: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۱.۳ .... ۵۱

جدول ۳-۲: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۳.۳ .... ۶۱

جدول ۳-۳: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۴.۳ .... ۶۸

فصل ۱

مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی[۱] در سال ۱۹٦۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا با انتشار مقاله «مجموعه‌های فازی» به عرصه دانش معرفی شد و تا دهه ۱۹۷۰ مبانی نظریه مجموعه‌های فازی و نیز منطق فازی شکل گرفت.([۵])
نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است، این عدم دقت ربطی به نامعلوم بودن وقوع یک پیشامد (عدم قطعیت تصادفی) مانند آنچه در نظریه احتمال بیان می‌شود، ندارد. بلکه به خوش تعریف نبودن مفاهیم و مبهم بودن آنها باز می‌گردد. با دقت در زندگی روزمره و گزاره‌هایی که روزانه در زبان گفتاری بیان می‌کنیم خواهیم دید که طریقه ارزش‌گذاری گزاره‌ها در مغز انسان فازی بوده و اکثر جملات را که در زبان گفتاری به کار می‌بریم ذاتاً فازی هستند.
در کنار ارتباط‌هایی که نظریه مجموعه‌های فازی با سایر شاخه‌های علوم پیدا کرده است ارتباط آن با احتمال و آمار شایان توجه است، چون هر دو (نظریه احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی) با عدم قطعیت سروکار دارند، اولی با عدم قطعیت ناشی از تصادف و دومی عدم قطعیت ناشی از ابهام.
علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۴] و [۵] مراجعه کنند.

۱—۱ مجموعه‌های فازی

در نظریه مجموعه‌ها که زیربنای ریاضیات مدرن است، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای معین از اشیا تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شئ مفروض، دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه متناظر است و اگر نباشد، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعه مرجع $\mathcal{X}$، مجموعه اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگتر از ده بودن» را دارا باشد، آنگاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر.

[۱] Fuzzy Sets

حال فرض کنید بخواهیم درباره آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در اینجا با یک ویژگی مبهم یعنی «بزرگ» سر و کار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در مجموعه‌ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی «بزرگ است» و عضو گردایه اعداد حقیقی بزرگ محسوب می‌شود؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰ چطور؟ نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای مدل‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانهاست.

برای روشن شدن مفهوم فوق، تابع نشانگر مجموعه‌ای مانند A از $\mathcal{X}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $I_A(x)$ تابع نشانگر به‌صورت زیر باشد:

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

واضح است که برد $I_A(.)$ مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ است. حال اگر این برد را به منظور دربرگرفتن مقادیری گسترده‌تر، به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از $\mathcal{X}$ عددی را در بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A نامیده و آنرا با $\mu_A(x)$ نمایش می‌دهیم. در اینصورت A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه مجموعه‌ای است که به آن مجموعه فازی گویند و آن را با نماد $\widetilde{A}$ نشان می‌دهند. دراین حالت می‌نویسیم:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) : \mathcal{X} \to [۰, ۱]$$

گاهی اوقات برای راحتی کار تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ را با نماد $\widetilde{A}(x)$ نیز نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱ ([۵]) الف) مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را تهی می‌نامیم هر گاه

$$\widetilde{A}(x) = ۰ \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

ب) اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو مجموعه فازی باشند گوییم، $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ است اگر

$$\widetilde{A}(x) \leq \widetilde{B}(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

ج) عملگرهای متمم، اجتماع، اشتراک، ضرب و جمع مجموعه‌های فازی نیز به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}^c(x) &= 1 - \widetilde{A}(x) && \forall x \in \mathcal{X} \\
(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})(x) &= \max(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)) && \forall x \in \mathcal{X} \\
(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x) &= \min(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)) && \forall x \in \mathcal{X} \\
(\widetilde{A}.\widetilde{B})(x) &= \widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x) && \forall x \in \mathcal{X} \\
(\widetilde{A} + \widetilde{B})(x) &= \widetilde{A}(x) + \widetilde{B}(x) - \widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x) && \forall x \in \mathcal{X}
\end{aligned}$$

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به‌کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش دیگر توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌گونه زیر است:

$$\widetilde{A} = \{\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_2)}{x_2}, ..., \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n}\}$$

تعریف ۲.۱ ([۴]) مجموعه همه اعضایی از $\mathcal{X}$ را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ حداقل به بزرگی α به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ باشد، $\alpha-$برش $\widetilde{A}$ یا مجموعه تراز α وابسته به $\widetilde{A}$ گویند و آن را به صورت $\widetilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهند. بدیهی است $\widetilde{A}_\alpha$ خود مجموعه‌ای غیر فازی به صورت زیر است:

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \in \mathcal{X} : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

$\alpha-$برش $\widetilde{A}$ را $\alpha-$برش قوی گوییم هرگاه نامساوی بالا به صورت اکید باشد.

گزاره ۱.۱ ([۴]) بر پایه مفهوم α−برشها، می‌توان توصیفی برای مجموعه فازی $\widetilde{A}$ به صورت زیر ارائه کرد:

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{A}}(x) = \sup_{\circ\leq\alpha\leq ۱}\{\alpha : x\in\widetilde{A}_\alpha\} &= \sup_{\circ\leq\alpha\leq ۱}\{\alpha : \mu_{\widetilde{A}}(x)\geq\alpha\}\\ &= \sup_{\circ\leq\alpha\leq ۱}\alpha I_{\widetilde{A}_\alpha}(x)\end{aligned}$$

که در آن $I_{\widetilde{A}_\alpha}(.)$ تابع نشانگر مجموعه $\widetilde{A}_\alpha$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱ ([۴]) الف) مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را نرمال گویند، هرگاه $\widetilde{A}_۱$ مخالف تهی باشد، به عبارت دیگر $\widetilde{A}$ یک مجموعه نرمال است، هرگاه لااقل یک x وجود داشته باشد به‌طوری که $\mu_{\widetilde{A}}(x) = ۱$.

ب) مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را کراندار گویند، هرگاه $\widetilde{A}_\alpha$ به ازای هر $\circ\leq\alpha\leq ۱$ مجموعه‌ای کران‌دار (ضمیمه ۱−۳−۶ را ببینید) باشد.

ج) مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را محدب گویند، اگر $\widetilde{A}_\alpha$ به ازای هر $\circ\leq\alpha\leq ۱$ محدب (ضمیمه ۱−۳−۷ را ببینید) باشد. بطور معادل می‌توان گفت $\widetilde{A}$ یک مجموعه محدب است، اگر و فقط اگر

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x + (۱-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y)) \qquad \lambda\in[\circ, ۱].$$

د) مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را یک عدد فازی گوییم، اگر نرمال، محدب و کراندار باشد.

تعریف ۴.۱ ([۵]) اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی $\widetilde{N}$ به صورت زیر باشد:

$$\widetilde{N}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{s_۱}) & x\leq m\\ R(\frac{x-m}{s_۲}) & x>m\end{cases}$$

آنگاه $\widetilde{N}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\widetilde{N} = (m, s_۱, s_۲)_{LR}$ نشان می‌دهیم که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathcal{R}^+$ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) به $[\circ, ۱]$ هستند و $L(\circ) = R(\circ) = ۱$. عدد m را مقدار نما(یا میانه) و اعداد مثبت $s_۱$ و $s_۲$ را به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\widetilde{N}$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۱ ([۵]) فرض کنید $\widetilde{N} = (m, s_{۱}, s_{۲})_{LR}$ و $L = R$. در اینصورت $\widetilde{N}$ را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $\widetilde{N} = (m, s_{۱}, s_{۲})_{T}$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{۰, ۱ - |x|\}$. در اینصورت داریم:

$$\widetilde{N}(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{x-m}{s_{۱}} & m - s_{۱} \leq x \leq m \\ ۱ - \frac{x-m}{s_{۲}} & m < x \leq m + s_{۲} \end{cases}$$

تعریف ۶.۱ ([۵]) اگر برای عدد فازی $\widetilde{N}$، $L = R$ و $s_{۱} = s_{۲}$، آنگاه $\widetilde{N}$ را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $\widetilde{N} = (m, s_{۱})_{L}$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن $\widetilde{N}$، مثلثی باشد از نماد $\widetilde{N} = (m, s_{۱})_{T}$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۱ ([۷]) یک عدد فازی را بسته گویند هرگاه تابع عضویت آن نیم پیوسته بالایی باشد(ضمیمه۱—۱ را ببینید)، به عبارت دیگر عدد فازی $\widetilde{A}$ با تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ بسته است هرگاه مجموعه $\{x : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ بسته باشد(ضمیمه ۱—۳—۳ را ببینید).

تعریف ۸.۱ ([۷]) $\widetilde{A}$ را یک عدد فازی متعارف گویند هرگاه $\widetilde{A}$ یک عدد فازی بسته بوده و روی بازه $[A^{L}_{\alpha_{۰}}, A^{L}_{۱}]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[A^{U}_{۱}, A^{U}_{\alpha_{۰}}]$ اکیداً نزولی باشد که در آن $A^{L}_{\alpha} = inf\{x : x \in \widetilde{A}_{\alpha}\}$ و $A^{U}_{\alpha} = sup\{x : x \in \widetilde{A}_{\alpha}\}$.

گزاره ۲.۱ (*) α—برش عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}$ عبارتست از:

$$\widetilde{N}_{\alpha} = [m - (۱ - \alpha)s_{۱}, m + (۱ - \alpha)s_{۲}]$$

اثبات. α—برش عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}$ طبق تعریف ۲.۱ به صورت زیر است:

$$\widetilde{N}_{\alpha} = \{x \in \mathcal{X} : \mu_{\widetilde{N}}(x) \geq \alpha\}$$

بنابراین طبق تعریف ۵.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_\alpha &= \{x : ۱ + \frac{x-m}{s_۱} \geq \alpha\} \cap \{x : ۱ - \frac{x-m}{s_۲} \geq \alpha\} \\ &= \{x : x - m \geq (\alpha - ۱)s_۱\} \cap \{x : -(x-m) \geq (\alpha - ۱)s_۲\} \\ &= \{x : x \geq m - (۱-\alpha)s_۱\} \cap \{x : x \leq m + (۱-\alpha)s_۲\} = [m - (۱-\alpha)s_۱, m + (۱-\alpha)s_۲]\end{aligned}$$

□

حال در ادامه اصل گسترش را تعریف می‌کنیم که نقش مهمی را در این پایان‌نامه ایفا می‌کند.

تعریف ۹.۱ ([۵]) فرض کنید f تابعی به صورت $f : X \to Y$ باشد. این تابع به هر x متعلق به X نقطه‌ای از Y را نسبت می‌دهد. اگر بخواهیم f را طوری گسترش دهیم که بجای اثر بر یک نقطه از X بر زیر مجموعه‌ای فازی از X عمل کند، مسلماً انتظار داریم که $f(\widetilde{A})$ یعنی حاصل عمل f بر مجموعه فازی $\widetilde{A}$، دیگر تنها یک نقطه از Y نباشد بلکه زیر مجموعه‌ای فازی از Y مانند $\widetilde{B}$ باشد. این حقیقت را اصل گسترش می‌نامند. طبق این اصل مجموعه فازی $\widetilde{B}$ اینگونه تعریف می‌شود:

$$\widetilde{B} = f(\widetilde{A}) = \{(y, \mu_{\widetilde{B}}(y)) : y = f(x),\ x \in X\}$$

که در آن

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \sup_{x = f^{-۱}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x).$$

یکی از کاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم برای اعداد فازی است که به صورت زیر بیان می‌شوند. فرض کنید که $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی با توابع عضویت به ترتیب $\mu_{\widetilde{A}}$ و $\mu_{\widetilde{B}}$ باشند، در این صورت توابع عضویت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم برای این اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}(y) &= \sup_{\{(a,b): y = a+b\}} [\inf(\mu_{\widetilde{A}}(a), \mu_{\widetilde{B}}(b))], \\ \mu_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}}(y) &= \sup_{\{(a,b): y = a-b\}} [\inf(\mu_{\widetilde{A}}(a), \mu_{\widetilde{B}}(b))],\end{aligned}$$

$$\mu_{\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}}(y) = \sup_{\{(a,b):y=a\times b\}}[\inf(\mu_{\widetilde{A}}(a),\mu_{\widetilde{B}}(b))],$$
$$\mu_{\widetilde{A}\odot\widetilde{B}}(y) = \sup_{\{(a,b):y=a\div b\}}[\inf(\mu_{\widetilde{A}}(a),\mu_{\widetilde{B}}(b))] \quad b\neq ۰.$$

گزاره ۳.۱ ([۲۷])**حساب بازه‌ای:** فرض کنید A و B دو زیر مجموعه معمولی دلخواه از اعداد حقیقی غیرمنفی و $A+B=\{x+y : x\in A,\ y\in B\}$، در این صورت α–برشهای اعمال جبری فوق به صورت زیر هستند:

(الف) $(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha+\widetilde{B}_\alpha=[a^L_\alpha+b^L_\alpha, a^U_\alpha+b^U_\alpha],$

(ب) $(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha-\widetilde{B}_\alpha=[a^L_\alpha-b^U_\alpha, a^U_\alpha-b^L_\alpha],$

(ج) $(\widetilde{A}\otimes\widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha\times\widetilde{B}_\alpha=[\min\{a^L_\alpha b^L_\alpha, a^L_\alpha b^U_\alpha, a^U_\alpha b^L_\alpha, a^U_\alpha b^U_\alpha\},\max\{a^L_\alpha b^L_\alpha, a^L_\alpha b^U_\alpha, a^U_\alpha b^L_\alpha, a^U_\alpha b^U_\alpha\}],$

(د) $(\widetilde{A}\odot\widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha/\widetilde{B}_\alpha=[\min\{\frac{a^L_\alpha}{b^L_\alpha},\frac{a^L_\alpha}{b^U_\alpha},\frac{a^U_\alpha}{b^L_\alpha},\frac{a^U_\alpha}{b^U_\alpha}\},\max\{\frac{a^L_\alpha}{b^L_\alpha},\frac{a^L_\alpha}{b^U_\alpha},\frac{a^U_\alpha}{b^L_\alpha},\frac{a^U_\alpha}{b^U_\alpha}\}] \quad b^L_\alpha, b^U_\alpha\neq ۰.$

مثال ۱.۱ ($*$) فرض کنید $\widetilde{A}_\alpha=[۱,۳]$ و $\widetilde{B}_\alpha=[۳,۴]$. آنگاه داریم:

$$\widetilde{A}_\alpha+\widetilde{B}_\alpha = [۱,۳]+[۳,۴]=[۴,۷],$$
$$\widetilde{A}_\alpha-\widetilde{B}_\alpha = [۱,۳]-[۳,۴]=[۱,۳]+[-۴,-۳]=[-۳,۰],$$
$$\widetilde{A}_\alpha.\widetilde{B}_\alpha = [۱,۳].[۳,۴]=[\min(۳,۴,۹,۱۲),\max(۳,۴,۹,۱۲)]=[۳,۱۲],$$
$$\widetilde{A}_\alpha/\widetilde{B}_\alpha = [\min(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},۱,\frac{۳}{۴}),\max(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},۱,\frac{۳}{۴})]=[\frac{۱}{۴},۱].$$

۱–۲ متغیر تصادفی فازی

متغیرهای تصادفی فازی به عنوان متغیرهایی که در توصیف و تفسیر داده‌های فازی مرتبط با پیامدهای یک آزمایش تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرند، تعریف می‌شوند. اولین تلاشها در خصوص تعریف

متغیر تصادفی فازی توسط واکرناک [۲] در سال ۱۹۷۸ [۲۸] انجام شد. وی متغیرهای تصادفی فازی را به عنوان متغیرهای تصادفی که حقیقی مقدار نیستند، اما اعداد فازی هستند و همچنین به عنوان یک نوع خاص از مجموعه‌های فازی معرفی کرد. پوری [۳] و رالسکو [۴] (۱۹۸۶)[۳۵] با تعریفی متفاوت با تعریف واکرناک به گسترش این موضوع پرداختند، آنها همچنین تعریفی برای امید ریاضی متغیرهای تصادفی فازی ارائه دادند.

مفاهیم نامعلومی وجود دارد که نمی‌تواند توسط متغیر تصادفی توجیه شود اما متغیرهای تصادفی فازی به راحتی بیان کننده این مفاهیم می‌باشند، به همین دلیل متغیر تصادفی فازی از مؤلفه‌های مهم آماری به شمار می آید.

به عنوان مثال فرض کنید ظرفی شامل تقریباً ۱۰۰ توپ در اندازه‌های متفاوت است که چند تا از آنها بزرگند. می‌خواهیم احتمال اینکه توپی را که به تصادف برداشته شده، بزرگ باشد، را به دست آوریم. اگر متغیرهای توصیفی «تقریباً»، «چند» و «بزرگ» عدد قطعی بود، جواب یک احتمال عددی می‌شد. اما چون این عبارتها فازی‌اند، حل، داده‌ای خواهد بود که روی اعداد فازی بنا شده باشد. موقعیتهایی از این نوع که تابعی از یک فضای احتمال به مجموعه متغیرهای فازی را دربرمی‌گیرد، مفهوم متغیرهای تصادفی فازی را توجیه‌پذیر می‌کند.

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد (ضمیمه ۲—۲ را ببینید). متغیر تصادفی X تابعی اندازه‌پذیر (ضمیمه ۱—۹ را ببینید) از $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_X)$ است که در آن P_X را اندازه احتمال القاء شده به وسیله X می‌نامند به‌طوری که

$$P_X(A) = P(X \in A) = \int_{X \in A} dP \qquad \forall\ A \in \mathcal{B}.$$

حال اگر P_X تحت تسلط یک اندازه سیگما—متناهی ν باشد بر طبق قضیه رادون—نیکودیم [5] [۳]

---

[۲] Kwakernaak

[۳] Puri

[۴] Ralescu

[5] Radon-Nikodim

داریم (ضمیمه ۱—۱۰ را ببینید):

$$P_X(A) = \int_{X \in A} f_\theta(x) d\nu(x) \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}$$

که $f_\theta(x)$ مشتق رادون—نیکودیم P_X نسبت به ν بوده و آن‌را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌نامند که در آن θ یک پارامتر حقیقی مقدار است.
در متون آماری معمولاً ν را یک «اندازه لبگ» (ضمیمه ۱—۴ و ۱—۵ را ببینید) یا «اندازه شمارشی» در نظر گرفته و بنابراین P_X بترتیب به صورت $\int_A f_\theta(x)dx$ یا $\Sigma_{X\in A} f_\theta(x)$ خواهد بود.

تعریف ۱۰.۱ ([۸]) فرض کنید $S_X = \{x \in X : f(x;\theta) > 0\}$ فضای نمونه یا تکیه‌گاه متغیر تصادفی X باشد که در آن $f(x;\theta)$ تابع چگالی (جرم) احتمال X و θ پارامتر توزیع است. عدد حقیقی $x \in S_X$ داده شده، عدد فازی $\widetilde{x}$ با تابع عضویت $\mu_{\widetilde{x}}$ را در نظر بگیرید به قسمی که $\mu_{\widetilde{x}}(x) = 1$ و برای $r \neq x$ ، $\mu_{\widetilde{x}}(r) < 1$، در اینصورت $\widetilde{x}$ را عدد فازی حقیقی القاء شده توسط عدد حقیقی x می‌نامیم.

فرض کنید $F(S_X)$ مجموعه همه اعداد فازی القاء شده توسط اعضای S_X باشد، رابطه $\sim$ روی $F(S_X)$ را به صورت $\widetilde{x}_1 \sim \widetilde{x}_2$ تعریف می‌کنیم اگر و فقط اگر $\widetilde{x}_1$ و $\widetilde{x}_2$ بوسیله عدد حقیقی x القاء شده باشند. بنابراین $\sim$ یک رابطه هم ارزی است (ضمیمه ۱—۱۱ را ببینید) که کلاس‌های هم ارزی $[\widetilde{x}] = \{\widetilde{a} : \widetilde{a} \sim \widetilde{x}\}$ را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱۱.۱ ([۸]) مجموعه$F(S_X)$ به همراه رابطه $\sim$ را یک سیستم اعداد حقیقی فازی می‌گوییم و با نماد $F(S_X)/\sim$ نمایش می‌دهیم.

اگر سیستم عدد حقیقی فازی $F(S_X)/\sim$ شامل همه اعداد حقیقی فازی متعارف باشد،آنگاه $F(S_X)/\sim$ سیستم عدد حقیقی فازی متعارف نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱ [۳۵] تابع $\widetilde{X} : \Omega \to F(\mathcal{R})$ را یک متغیر تصادفی فازی گوییم هرگاه

$$\{(\omega, x) : \omega \in \Omega, x \in \widetilde{X}_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B} \qquad \forall\, \alpha \in [0, 1]$$

که در آن $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ مجموعه همه اعداد فازی روی $\mathcal{R}$ بوده و تابع مجموعه‌ای مقدار $\widetilde{X}_\alpha(\omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{X}_\alpha(\omega) = \{x \in \mathcal{R} : \mu_{\widetilde{X}(\omega)}(x) \geq \alpha\}.$$

گزاره زیر ارتباط بین متغیر تصادفی فازی و متغیرهای تصادفی غیر فازی مرتبط با آن را نشان می‌دهد:

گزاره ۴.۱ ([۸]) $\widetilde{X} : \Omega \to F(\mathcal{R})$ یک متغیر تصادفی فازی است اگر و فقط اگر X_α^L و X_α^U به ازای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ متغیرهای تصادفی غیر فازی باشند.

اثبات. ([۱]) (**شرط لازم**) نقطه پایین α−برش متغیر تصادفی فازی $\widetilde{X}$ به صورت زیر است:

$$X_\alpha^L = \inf\{x : x \in \widetilde{X}_\alpha\}.$$

چون $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است، بنا بر تعریف ۱۲.۱ هر کدام از xها اندازه‌پذیر $\mathcal{F}$ هستند، در نتیجه X_α^L نیز اندازه‌پذیر $\mathcal{F}$ است یعنی X_α^L یک متغیر تصادفی معمولی می‌باشد. به طور مشابه می‌توان این اثبات را برای X_α^U نیز بکار برد.

(**شرط کافی**) فرض کنید X_α^L و X_α^U برای هر $\circ \leq \alpha \leq ۱$ متغیرهای تصادفی معمولی باشند، در این صورت این متغیرهای تصادفی اندازه پذیر $\mathcal{F}$ هستند و از طرفی بنا به متعارف بودن عدد فازی $\widetilde{X}$، X_α^L و X_α^U متعلق به $\widetilde{X}_\alpha$ می‌باشند، لذا $\widetilde{X}$ اندازه‌پذیر $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ است یعنی $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است. □

تعریف ۱۳.۱ ([۸]) اگر $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی القاء شده به وسیله X و Y باشند، آنگاه $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ را مستقل گوییم اگر و فقط اگر هر متغیر تصادفی در مجموعه $\{X_\alpha^L, X_\alpha^U : \circ \leq \alpha \leq ۱\}$ از هر متغیر تصادفی دیگر در مجموعه $\{Y_\alpha^L, Y_\alpha^U : \circ \leq \alpha \leq ۱\}$ مستقل باشد.(ضمیمه ۲−۵ را ببینید)

تعریف ۱۴.۱ ([۸]) متغیرهای تصادفی فازی القاء شده $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ را همتوزیع گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر $\circ \leq \alpha \leq ۱$، متغیرهای تصادفی غیر فازی X_α^L با Y_α^L و X_α^U با Y_α^U همتوزیع باشند.(ضمیمه ۲−٦ را ببینید)

تعریف ۱۵.۱ ([۸]) متغیرهای تصادفی فازی $\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n$ را یک نمونه تصادفی فازی به اندازه n گوییم هرگاه $\widetilde{X}_i$ها مستقل و هم توزیع باشند.

۱—۳ تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی فازی

در این بخش توابع چگالی (جرم) و توزیع (جرم) احتمال برای متغیرهای تصادفی فازی القاء شده را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱ ([۴۹]) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ بوده و $\widetilde{X}$ متغیر تصادفی فازی متعارف القاء شده بوسیله آن باشد. عدد فازی $\widetilde{f}(\widetilde{x};\theta)$ را به عنوان تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی فازی القا شده $\widetilde{X}$ توسط X با تابع عضویت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mu_{\widetilde{f}(\widetilde{x};\theta)}(y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{[f^L_\alpha(\widetilde{x}), f^U_\alpha(\widetilde{x})]}(y)$$

که در آن

$$f^L_\alpha(\widetilde{x}) = \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{f(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$
$$f^U_\alpha(\widetilde{x}) = \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{f(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$

بدیهی است بازه $[f^L_\alpha(\widetilde{x}), f^U_\alpha(\widetilde{x})]$ تمام مقادیر تابع چگالی احتمال $\widetilde{f}_\theta(\widetilde{x})$ را برای هر x در بازه $\widetilde{x}_\beta = [x^L_\beta, x^U_\beta]$ $(\alpha \leq \beta \leq 1)$ در بر می‌گیرد، که آن را تابع چگالی احتمال فازی $\widetilde{X}$ می‌نامیم.
به طور مشابه می‌توان تابع توزیع متغیر تصادفی فازی القاء شده $\widetilde{X}$ را به صورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۱۷.۱ ([۴۹]) فرض کنید $F_\theta(x) = P(X \leq x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی غیر فازی X باشد عدد فازی $\widetilde{F}_\theta(\widetilde{x})$ را به عنوان تابع توزیع $\widetilde{X}$ گوییم هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\widetilde{F}_\theta(\widetilde{x})}(y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{[F^L_\alpha(\widetilde{x}), F^U_\alpha(\widetilde{x})]}(y)$$

که در آن

$$F^L_\alpha(\widetilde{x}) = \inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{F(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$
$$F^U_\alpha(\widetilde{x}) = \sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{F(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$

حال اگر X از نوع پیوسته باشد

$$\begin{aligned} f^L_\alpha(\widetilde{x}) &= \inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\frac{d}{dx}F(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\} \\ f^U_\alpha(\widetilde{x}) &= \sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\frac{d}{dx}F(x) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\} \end{aligned}$$

و اگر X از نوع گسسته باشد

$$f^L_\alpha(\widetilde{x}) = \inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{F(x) - F(x-) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$
$$f^U_\alpha(\widetilde{x}) = \sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{F(x) - F(x-) : x \in [x^L_\beta, x^U_\beta]\}$$

که در آن $F(x-)$ حد چپ تابع F_θ در نقطه x است. در این صورت α−برش عدد فازی $\widetilde{f}(\widetilde{x})$ عبارت است از:

$$[f^L_\alpha(\widetilde{x}), f^U_\alpha(\widetilde{x})] = \{f(k) : k \in S_X\ ,\ f^L_\alpha(\widetilde{x}) \leq f(k) \leq f^U_\alpha(\widetilde{x})\}$$

تعریف ۱۸.۱ [۴۸] اگر $\widetilde{X}$ متغیر تصادفی فازی القاء شده بوسیله X با تابع چگالی فازی $\widetilde{f}(\widetilde{x})$ باشد

$$\widetilde{P}(A) = \int_A \widetilde{f}(\widetilde{x})dx \qquad A \in \mathcal{B}$$

را احتمال فازی رخ دادن پیشامد A گوییم هرگاه α−برش‌های آن به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} P^L_\alpha(A) &= \inf\{\int_A f(x)dx : f \in [f^L_\alpha(\widetilde{x}), f^U_\alpha(\widetilde{x})]\} = \int_A f^L_\alpha(\widetilde{x})dx \\ P^U_\alpha(A) &= \sup\{\int_A f(x)dx : f \in [f^L_\alpha(\widetilde{x}), f^U_\alpha(\widetilde{x})]\} = \int_A f^U_\alpha(\widetilde{x})dx \end{aligned}$$

۱—۴ امید ریاضی متغیر تصادفی فازی

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه احتمال مفهوم امید ریاضی یک متغیر تصادفی است.

تعریف ۱.۱۹ ([۴۹]) فرض کنید $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی متعارف القاء شده بوسیله X باشد آنگاه امید ریاضی آن را با $\widetilde{E}(\widetilde{X})$ نشان داده و تابع عضویت آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\widetilde{E}(\widetilde{X})}(y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{[E^L_\alpha(\widetilde{X}), E^U_\alpha(\widetilde{X})]}(y)$$

که در آن نقاط پایینی و بالایی α–برش $\widetilde{E}(\widetilde{X})$ بترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} E^L_\alpha(\widetilde{X}) &= \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{E(X) : X \in [X^L_\beta, X^U_\beta]\}, \\ E^U_\alpha(\widetilde{X}) &= \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{E(X) : X \in [X^L_\beta, X^U_\beta]\}. \end{aligned}$$

بازه $[E^L_\beta(\widetilde{X}), E^U_\beta(\widetilde{X})]$ تمام مقادیر امید ریاضی X^L_β و X^U_β را برای $\alpha \leq \beta \leq 1$ در بر می‌گیرد. با توجه به اینکه $\widetilde{X}$ یک عدد فازی متعارف است می‌توان نوشت:

$$X^L_\alpha \leq X^L_1 \leq X^U_1 \leq X^U_\alpha \qquad (۱-۱)$$

گزاره ۱.۵ ([۸]) رابطه زیر به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ برقرار است:

$$[E^L_\alpha(\widetilde{X}), E^U_\alpha(\widetilde{X})] = [E(X^L_\alpha), E(X^U_\alpha)] \qquad (۱-۲)$$

اثبات. $(*)$ در بازه $[\alpha, 1]$ طبق رابطه (۱—۱) داریم $X^L_\alpha \leq X^L_1$، بنابراین نمودار تابع عضویت در این بازه صعودی است و طبق تعریف ۱.۱۹ $E^L_\alpha(\widetilde{X})$ کمترین مقدارش را در ابتدای بازه در ازای کمترین مقدار β می‌گیرد، یعنی برابر است با $E(X^L_\alpha)$، تساوی کران بالا نیز به همین صورت برقرار است. □

مثال ۲.۱ ([۶])(*) بازیکنی یک سکه ناریب را پرتاب می کند، چنانچه در پرتاب خط رو شود «تقریباً ۱۰ تومان» می‌بازد و چنانچه شیر رو شود «نه بیشتر از ۱۲ تومان ولی نزدیک به آن» می‌برد. در اینجا متغیر تصادفی مناسب باید به صورت فازی باشد، یعنی $\widetilde{X}:\{T,H\}\to F(\mathcal{R})$ که در آن $\widetilde{X}(T)=$«تقریباً ۱۰−» و $\widetilde{X}(H)=$«نه بیشتر از ۱۲ ولی خیلی نزدیک به آن». هرکدام از مقادیر متغیر تصادفی X یک مجموعه فازی است که تابع عضویت آنها می‌تواند این‌گونه باشد:

$$\widetilde{X}(T)=\{\frac{۰/۸}{-۱۱},\frac{۱}{-۱۰},\frac{۰/۸}{-۹}\}\qquad \widetilde{X}(H)=\{\frac{۰/۵}{۱۰},\frac{۰/۸}{۱۱},\frac{۱}{۱۲}\}$$

حال می‌خواهیم امید ریاضی برد بازیکن را بیابیم، برای این منظور برای هر $\alpha\in I$ بترتیب X^L_α و X^U_α و امید ریاضی آنها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:
فرض کنید $۰\le\alpha\le ۰/۵$، بنابراین طبق اشکال ۱−۱ و ۱−۲ داریم:

$$X^L_\alpha(\omega)=\begin{cases}-۱۱ & \omega=T\\ ۱۰ & \omega=H\end{cases}\qquad X^U_\alpha(\omega)=\begin{cases}-۹ & \omega=T\\ ۱۲ & \omega=H\end{cases}$$

در نتیجه

$$E(X^L_\alpha)=-۱۱\times\frac{۱}{۲}+۱۰\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}\qquad E(X^U_\alpha)=-۹\times\frac{۱}{۲}+۱۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین برای هر $۰\le\alpha\le ۰/۵$ داریم $\widetilde{E}_\alpha(\widetilde{X})=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]=\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲}\}$، که مقادیر بین بازه با جایگذاری سایر مقادیر X در روابط بالا بدست می آیند.
فرض کنید $۰/۵<\alpha\le ۰/۸$ در اینصورت

$$X^L_\alpha(\omega)=\begin{cases}-۱۱ & \omega=T\\ ۱۱ & \omega=H\end{cases}\qquad X^U_\alpha(\omega)=\begin{cases}-۹ & \omega=T\\ ۱۲ & \omega=H\end{cases}$$

بنابراین

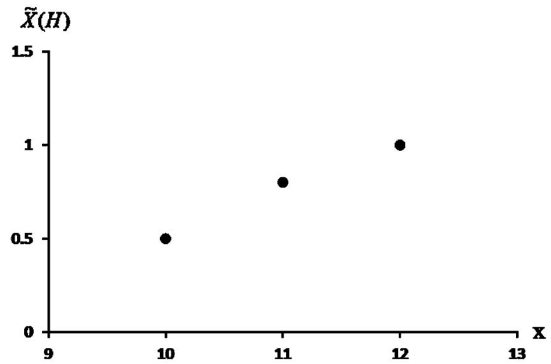
$$E(X^L_\alpha)=-۱۱\times\frac{۱}{۲}+۱۱\times\frac{۱}{۲}=۰\qquad E(X^U_\alpha)=-۹\times\frac{۱}{۲}+۱۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

درنهایت خواهیم داشت $\widetilde{E}_\alpha(\widetilde{X}) = [۰, \frac{۳}{۲}] = \{۰, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}\}$ و بالاخره چنانچه $۰/۸ < \alpha \leq ۱$ خواهیم داشت:

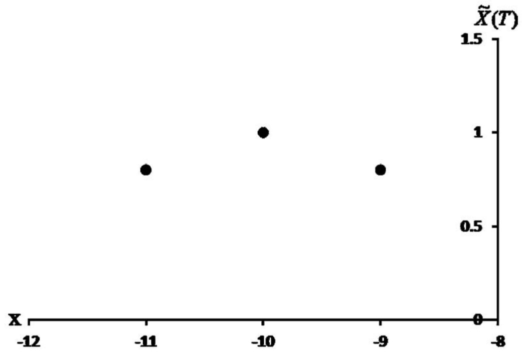
$$X^L_\alpha(\omega) = \begin{cases} -۱۰ & \omega = T \\ ۱۲ & \omega = H \end{cases} \qquad X^U_\alpha(\omega) = \begin{cases} -۱۰ & \omega = T \\ ۱۲ & \omega = H \end{cases}$$

در نتیجه $E(X^L_\alpha) = E(X^U_\alpha) = ۱$. حال با استفاده از رابطه $\widetilde{E}(\widetilde{X}) = sup\{\alpha : x \in \widetilde{E}_\alpha(\widetilde{X})\}$ داریم:

$$\widetilde{E}(\widetilde{X}) = \{\frac{۰/۵}{-\frac{۱}{۲}}, \frac{۰/۸}{۰}, \frac{۰/۸}{\frac{۱}{۲}}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{\frac{۳}{۲}}\}$$



شکل ۱—۱: تابع عضویت برد «نه بیشتر از ۱۲ تومان ولی نزدیک به آن» در مثال ۲.۱



شکل ۱—۲: تابع عضویت باخت «تقریباً ۱۰ تومان» در مثال ۲.۱

مثال ۳.۱ ([۱])(*) اگر متغیر تصادفی پیوسته X طول عمر یک قطعه با توزیع نمایی با پارامتر θ به صورت زیر باشد:

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-x\theta) \qquad x, \theta \geq ۰$$

در عمل در بسیاری از موارد X بصورت دقیق قابل مشاهده نیست ، لکن می‌توان آن را به صورت تقریبی و با تابع عضویت معینی (مثلاً مثلثی به صورت $(X-a, X, X+b)$ با a و b ثابت) محدود به یک بازه مشاهده نمود، در این صورت X دیگر یک متغیر تصادفی معمولی نیست بلکه متغیر تصادفی فازی القاء شده بوسیله X است که مشاهدات آن فازی هستند و آن را با $\widetilde{x}$ نشان می‌دهیم. حال اگر $a = b = ۱$، به ازای هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ طبق گزاره ۲.۱ داریم:

$$X_\alpha^L = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq X \leq ۱ - \alpha \\ X - (۱ - \alpha) & X > ۱ - \alpha, \end{cases}$$

$$X_\alpha^U = X + (۱ - \alpha)$$

پس می‌توان طبق رابطه (۱—۲) نوشت:

$$[E_\alpha^L(\widetilde{X}), E_\alpha^U(\widetilde{X})] = [E([X - (۱ - \alpha)]I_{(۱-\alpha,\infty)}(X)), E(X + (۱ - \alpha))]$$

بنابراین تابع عضویت امید ریاضی طبق تعریف ۹.۱ به صورت زیر بدست می آید:

$$\mu_{\widetilde{E}(\widetilde{X})}(y) = \sup_{۰ \leq \alpha \leq ۱} \alpha I_{[\frac{۱}{\theta}\exp(-(۱-\alpha)\theta), \frac{۱}{\theta} + (۱-\alpha)]}(y).$$

که در آن امید ریاضی X_α^L به صورت زیر بدست می آید:

$$E(X_\alpha^L) = E(Y) = \int_Y y f_Y(y) dy$$

برای به دست آوردن این امید ریاضی ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی Y را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(Y \leq y) = P([X - (۱ - \alpha)]I_{(۱-\alpha,\infty)}(X) \leq y)$$

$$
\begin{aligned}
&= P([X-(1-\alpha)]I_{(1-\alpha,\infty)}(X) \le y, X > 1-\alpha) \\
&+ P([X-(1-\alpha)]I_{(1-\alpha,\infty)}(X) \le y, X \le 1-\alpha) \\
&= P(X-(1-\alpha) \le y, X > 1-\alpha) + P(0 \le y, X \le 1-\alpha) \\
&= P(X \le y+(1-\alpha), X > 1-\alpha) + P(X \le 1-\alpha) \\
&= P(1-\alpha < X \le y+(1-\alpha)) + P(X \le 1-\alpha) \\
&= F_X(y+(1-\alpha)) - F_X(1-\alpha) + F_X(1-\alpha) = F_X(y+(1-\alpha))
\end{aligned}
$$

در نتیجه تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$
f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(y+(1-\alpha)) = f_X(y+(1-\alpha))
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
E(X_\alpha^L) &= \int_Y y f_X(y+(1-\alpha))dy = \int_0^\infty y\theta\exp(-\theta(y+(1-\alpha))dy \\
&= \int_{1-\alpha}^\infty [x-(1-\alpha)]\theta\exp(-x\theta)dx \\
&= \int_{1-\alpha}^\infty x\theta\exp(-x\theta)dx - (1-\alpha)\theta\int_{1-\alpha}^\infty \exp(-x\theta)dx \\
&= (1-\alpha)\exp(-\theta(1-\alpha)) + \frac{1}{\theta}\exp(-\theta(1-\alpha)) - (1-\alpha)\exp(-\theta(1-\alpha)) \\
&= \frac{1}{\theta}\exp(-\theta(1-\alpha))
\end{aligned}
$$

۱—۵ متر L_2

تعریف ۲۰.۱ ([۳۷]) فرض کنید $A \subset \mathcal{R}^n$ یک زیرمجموعه فشرده باشد،(ضمیمه ۱—۷ را ببینید) در این صورت تابع تکیه‌گاه[6] که یکتا نیز می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

[6] Support Function

$$S_A(t) = \sup\{\ll x,t \gg : x \in A\}, \qquad t \in \mathcal{S}^{n-1}$$

که در آن $\mathcal{S}^{n-1}$ نمایانگر گوی واحد در $\mathcal{R}^n$ است و

$$\ll x,t \gg = (x_1 \times t_1 + x_2 \times t_2 + ... + x_n \times t_n)$$

نکته ۱.۱ ([۳۷]) برخی از ویژگیهای تابع فوق برای زیرمجموعه‌های A و B از $\mathcal{R}$ به صورت زیر است:

۱) $A = B$ اگر و فقط اگر $S_A(t) = S_B(t)$.

۲) اگر $a \geq 0$ باشد، آنگاه $S_{aA}(t) = aS_A(t)$.

حال با استفاده از تابع تکیه‌گاه متر L_2 را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲۱.۱ ([۱۹]) برای مجموعه‌های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ متعلق به $F(\mathcal{R}^n)$ ، متریک L_2 برای اندازه‌گیری فاصله بین $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بر فضای $\mathcal{F}(\mathcal{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{n\int_0^1 \int_{\mathcal{S}^{n-1}} [S_{\widetilde{A}_\alpha}(t) - S_{\widetilde{B}_\alpha}(t)]^2 \ \mu(dt)d\alpha}.$$

که در آن μ اندازه لبگ روی $\mathcal{S}^{n-1}$ است، در حالت $n = 1$، t مقادیر ۱ و ۱− را اختیار می کند و $\mu(1) = \mu(-1) = \frac{1}{2}$ است.

مثال ۴.۱ ([۱۰])(*) عدد فازی $\widetilde{a} = (\mu, l, r)_{LR}$ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \begin{cases} L(\frac{\mu - x}{l}) & x \leq \mu \\ R(\frac{x-\mu}{r}) & x \geq \mu \end{cases}$$

$\alpha-$برش این مجموعه فازی به صورت زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{a}_\alpha = \{x : \mu_{\widetilde{a}}(x) \geq \alpha\} = \{x : L(\frac{\mu - x}{l}) \geq \alpha\} \cap \{x : R(\frac{x-\mu}{r}) \geq \alpha\}$$

طبق تعریف ۴.۱ توابع L و R غیرصعودی هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_\alpha &= \{x : \frac{\mu - x}{l} \leq L^{-1}(\alpha)\} \cap \{x : \frac{x-\mu}{r} \leq R^{-1}(\alpha)\} \\
&= \{x : \mu - x \leq L^{-1}(\alpha)l\} \cap \{x : x - \mu \leq R^{-1}(\alpha)r\} \\
&= \{x : x \geq \mu - L^{-1}(\alpha)l\} \cap \{x : x \leq R^{-1}(\alpha)r + \mu\} = [\mu - L^{-1}(\alpha)l, \mu + R^{-1}(\alpha)r]
\end{aligned}$$

فرض کنید $\widetilde{a}_i = (\mu_i, l_i, r_i)_{LR}$؛ $i = 1, 2$. داریم:

$$\widetilde{a}_{i\alpha} = [\mu_i - L^{-1}(\alpha)l_i, \mu_i + R^{-1}(\alpha)r_i] \qquad i = 1, 2$$

بعلاوه طبق تعریف ۲۰.۱ داریم:

$$S_{\widetilde{a}_{i\alpha}}(t) = \begin{cases} -\mu_i + L^{-1}(\alpha)l_i & t = -1 \\ \mu_i + R^{-1}(\alpha)r_i & t = 1 \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}^{n-1}} [S_{\widetilde{a}_{1\alpha}}(t) - S_{\widetilde{a}_{2\alpha}}(t)]^2 \ \mu(dt) &= \frac{1}{2}(-\mu_1 + L^{-1}(\alpha)l_1 + \mu_2 - L^{-1}(\alpha)l_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\mu_1 + R^{-1}(\alpha)r_1 - \mu_2 - R^{-1}(\alpha)r_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)^2 + \frac{1}{2}(L^{-1}(\alpha))^2(l_1 - l_2)^2 \\
&+ L^{-1}(\alpha)(l_1 - l_2)(\mu_2 - \mu_1) + \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(R^{-1}(\alpha))^2(r_1 - r_2)^2 \\
&+ R^{-1}(\alpha)(r_1 - r_2)(\mu_1 - \mu_2) \\
&= (\mu_1 - \mu_2)^2 + \frac{1}{2}(L^{-1}(\alpha))^2(l_1 - l_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(R^{-1}(\alpha))^2(r_1 - r_2)^2 \\
&- L^{-1}(\alpha)(l_1 - l_2)(\mu_1 - \mu_2) + R^{-1}(\alpha)(r_1 - r_2)(\mu_1 - \mu_2).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta^2(\widetilde{a_1},\widetilde{a_2}) &= (\mu_1-\mu_2)^2+\frac{1}{2}(\int_0^1(L^{-1}(\alpha))^2d\alpha)(l_1-l_2)^2+\frac{1}{2}(\int_0^1(R^{-1}(\alpha))^2d\alpha)(r_1-r_2)^2\\ &- (\int_0^1(L^{-1}(\alpha))d\alpha)(\mu_1-\mu_2)(l_1-l_2)+(\int_0^1(R^{-1}(\alpha))d\alpha)(\mu_1-\mu_2)(r_1-r_2)\end{aligned}$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت متریک L_2 برای اعداد فازی متقارن $\widetilde{a_i}=(\mu_i-\epsilon_i,\mu_i,\mu_i+\epsilon_i); i=1,2$ عبارتست از:

$$\Delta^2(\widetilde{a_1},\widetilde{a_2})=(\mu_1-\mu_2)^2+\int_0^1(L^{-1}(\alpha))^2d\alpha(\epsilon_1-\epsilon_2)^2.$$

۱—۶ متر یائو—ویو

تعریف ۲۲.۱ ([۸]) برای هر a و b در مجموعه اعداد حقیقی، d^* را یک فاصله علامتدار گوییم هرگاه:

$$\begin{array}{lclcl} d^*(a,b)>0 & \Leftrightarrow & d^*(a,0)>d^*(b,0) & \Leftrightarrow & a>b\\ d^*(a,b)<0 & \Leftrightarrow & d^*(a,0)<d^*(b,0) & \Leftrightarrow & a<b\\ d^*(a,b)=0 & \Leftrightarrow & d^*(a,0)=d^*(b,0) & \Leftrightarrow & a=b.\end{array}$$

مثلاً اگر $d^*(a,b)=a-b$ در نظر گرفته شود، d^* یک فاصله علامتدار است.

تعریف ۲۳.۱ ([۵۱]) برای هر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ در مجموعه $F(\mathcal{R})$، $d(\tilde{a},\tilde{b})$ را یک فاصله علامتدار گوییم هرگاه

$$\begin{array}{lclcl} d(\tilde{a},\tilde{b})>0 & \Leftrightarrow & d(\tilde{a},0)>d(\tilde{b},0) & \Leftrightarrow & \tilde{a}\succ\tilde{b}\\ d(\tilde{a},\tilde{b})<0 & \Leftrightarrow & d(\tilde{a},0)<d(\tilde{b},0) & \Leftrightarrow & \tilde{a}\prec\tilde{b}\\ d(\tilde{a},\tilde{b})=0 & \Leftrightarrow & d(\tilde{a},0)=d(\tilde{b},0) & \Leftrightarrow & \tilde{a}\approx\tilde{b}.\end{array}$$

مثلاً برای هر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ در مجموعه $F(\mathcal{R})$، اگر

$$\begin{aligned} d(\tilde{a},\tilde{b}) &= \int_0^1 (M_\alpha(\tilde{a}) - M_\alpha(\tilde{b}))d\alpha \\ &= \int_0^1 d^*(M_\alpha(\tilde{a}), M_\alpha(\tilde{b}))d\alpha, \end{aligned}$$

که در آن $M_\alpha(\tilde{a}) = \frac{a_\alpha^L + a_\alpha^U}{2}$ و $M_\alpha(\tilde{b}) = \frac{b_\alpha^L + b_\alpha^U}{2}$، آنگاه d یک فاصله علامتدار است. یائو—ویو [7] نشان داده‌اند d ویژگیهای یک متر را داراست، که آن را متر علامتدار یائو—ویو می‌نامیم.

[7] Yao-Wu

فصل ۲

برآوردگرهای فازی برای پارامترهای فازی

۲—۱ مقدمه

یکی از مباحث اساسی در آمار استنباطی برآورد پارامتر یا پارامترهای مجهول جامعه است که بوسیله برآوردگرهائی که مبتنی بر نمونه تصادفی هستند، صورت می‌پذیرد. بهینگی برآوردگرها که بر اساس معیارهایی مانند نااریبی، کارائی و سازگاری آنها بررسی می‌شود، در انتخاب آنها نقش اساسی ایفا می‌کند.

روشهای متفاوتی برای ساخت برآوردگرها ارائه شده است که از مهمترین آنها می‌توان به برآوردگرهای بطور یکنواخت دارای کمترین واریانس نااریب $(UMVU)$[۱]، بیزی و درستنمایی ماکزیمم اشاره نمود.

بسیاری از مواقع پارامترهای جامعه به صورت دقیق قابل بیان نیستند، مثلاً با توجه به آنکه تعریف دقیق و یکسانی از تصادف برای همه قابل قبول نیست، نمی‌توان کلیه تصادفات رانندگی را در یک شهر به طور دقیق ثبت نمود و نمی‌توان متوسط تعداد این حوادث در روز را مشخص نمود، به عنوان مثال ممکن است این شبهات به صورت "تعداد تصادفات کم است"، "تعداد تصادفات تقریباً به تعداد ۱۰ تصادف است"، "تعداد تصادفات خیلی زیاد است"، "تعداد تصادفات نه بزرگتر از ۱۰ ولی نزدیک به آن است" و .... بنابراین منطقی است پارامتر یا پارامترهای یک تابع احتمال را به صورت فازی در نظر بگیریم. از این رو بعضی از محققین حتی در شرایطی که متغیرهای تصادفی غیر فازی هستند، پارامتر توزیع را به صورت فازی در نظر گرفته‌اند. از جمله این افراد می‌توان به باکلی[۲] [۱۵] اشاره نمود. علاوه بر این مطالعات زیادی در زمینه ترکیب روشهای برآورد با نظریه مجموعه‌های فازی انجام شده است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

کروس[۳] [۲۵]، کروس و مییر[۴] [۲٦] برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای را با استفاده از متغیرهای تصادفی فازی مورد بررسی قرار داده‌اند. باکلی [۱۳] مسأله برآورد نقطه‌ای، با استفاده از داده‌های فازی را

---

[۱] uniformly minimum variance unbiased

[۲] Buckley

[۳] Kruse

[۴] Meyer

بوسیله رهیافت ساخت تابع تصمیم فازی مورد مطالعه قرار داده است. لوپز–دیاز[۵] و گیل[۶] [۲۹] برخی از روشهای استنباط آماری را مورد توجه قرار داده و به کاربردهای آنها بخصوص در نظریه تصمیم آماری با استفاده از مطلوبیت و زیان فازی پرداخته‌اند. کای[۷] [۱۶] روش برآورد پارامترهای متغیرهای تصادفی توزیع نرمال فازی را بسط داده است. لوبیانو[۸] و همکاران [۳۰]، صادقپور[۹] و ژیان[۱۰] [۳۸] قضیه رائو–بلکول را برای متغیرهای تصادفی فازی مورد بررسی قرار داده‌اند. فیتل[۱۱] [۴۸] روشهای آماری کلاسیک و برآورد با استفاده از داده‌های فازی را برای توزیعهای یک متغیری با پارامترهای مجهول ارائه نموده است. هنگ–زونگ[۱۲] و همکاران [۲۲] یک روش جدید برای تعیین تابع عضویت پارامتر برآورد شده، با استفاده از داده‌های فازی مطرح نموده‌اند. ترابی[۱۳] [۴۵] کران پایین کرامر–رائو را برای متغیرهای تصادفی فازی با استفاده از تابع چگالی احتمال فازی بررسی نموده است.

در این فصل ابتدا متغیر تصادفی فازی تولید شده توسط یک متغیر تصادفی غیر فازی وقتی پارامتر مجهول جامعه نیز کمیتی فازی باشد را تعریف نموده و با استفاده از آن برآوردگرهای فازی $UMVU$ و بیز را برای پارامترهای فازی معرفی نموده و به بررسی خواص آنها می‌پردازیم.

پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ یک زیر مجموعه فازی از Θ با تابع عضویت $\mu_{\widetilde{\theta}}$ است. در اینجا فرض شده که پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ عدد حقیقی فازی متعارف باشد. اگر $\widetilde{\theta}$ پارامتر فازی باشد آنگاه به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$، θ_α^L و θ_α^U در فضای پارامتر Θ هستند.

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x;\theta)$ باشد و $\widetilde{X}$ متغیر تصادفی فازی القاء شده توسط X باشد.

---

[۵] Lopez-Diaz
[۶] Gil
[۷] Cai
[۸] Lubiano
[۹] Sadeghpour
[۱۰] Gien
[۱۱] Viertl
[۱۲] Hong-Zhong
[۱۳] torabi

تعریف ۱.۲ ([۸]) می‌گوییم $\widetilde{X}$ یک توزیع با پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ القاء شده توسط X دارد اگر X_α^L و X_α^U به ترتیب با پارامترهای θ_α^L و θ_α^U ، همتوزیع با X باشند.

برای مثال فرض کنید $\widetilde{X}$ دارای توزیع نرمال فازی با $\widetilde{\theta}$ فازی، القاء شده توسط متغیر تصادفی X با توزیع $N(\theta, ۱)$ باشد، در این صورت X_α^L و X_α^U به ترتیب دارای توزیعهای $N(\theta_\alpha^L, ۱)$ و $N(\theta_\alpha^U, ۱)$ به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ می‌باشند.

۲—۲ برآوردگرهای نااریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس فازی $(FUMVU)$

در این بخش ابتدا برآوردگر $UMVU$ را معرفی می‌کنیم و سپس آنرا برای تعریف برآوردگرهای $FUMVU$ استفاده می‌کنیم. برآوردگر $UMVU$ براساس داده‌های غیر فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲.۲ ([۳۹]) فرض کنید $\underline{X} = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$ نمونه‌ای nتائی از جامعه‌ای با تابع توزیع $F(x;\theta)$، $\theta \in \Theta$، باشد. برآوردگر ناریب $T(\underline{X})$ از θ را یک برآوردگر $UMVU$ گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر برآوردگر نااریب دلخواه دیگری از θ مانند $U(\underline{X})$ داشته باشیم:

$$Var_\theta(T(\underline{X})) \leq Var_\theta(U(\underline{X})), \qquad \forall\, \theta \in \Theta.$$

که در آن

$$Var_\theta(T(\underline{X})) = E_\theta(T(\underline{X}) - \theta)^۲$$

لهمن و شفه در قضیه زیر رابطه برآوردگرهای $UMVU$ را با آمارهٔ بسنده کامل (ضمیمه ۳—۱ ، ۳—۲ و ۳—۳ را ببینید) ارائه نموده‌اند، که این مطلب ارزشمند بودن این روش برآوردیابی را از نقطه نظر تلخیص داده‌ها نشان می‌دهد.

قضیه: ۱.۲ ([۳۹]) فرض کنید $T = T(\underline{X}) = T(X_۱, ..., X_n)$ یک آماره بسنده کامل برای $\theta \in \Theta$ باشد. اگر θ یک پارامتر برآورد پذیر باشد، (ضمیمه ۳—۱۲ را ببینید) آنگاه یک برآوردگر یکتای نااریب از θ به صورت تابعی از T مانند $h(T)$ وجود دارد بطوری که برآوردگر $UMVU$ برای θ می‌باشد. بعلاوه $h(T)$، $UMVUE$ یکتا برای θ است.

بر اساس قضیه ۱.۲ اگر $U(X_۱, X_۲, ..., X_n)$ برآوردگر نااریب θ باشد آنگاه $E[U(X_۱, ..., X_n)|T(X_۱, ..., X_n)]$، $UMVUE$ برای θ است. برای کاربرد این روش نیازی به توزیع T نداریم اما نیاز به پیدا کردن $E[U(X_۱, ..., X_n)|T]$ داریم. طبق یکتایی $UMVUE$ مهم نیست که کدام $U(X_۱, ..., X_n)$ استفاده شود، بنابراین $U(X_۱, ..., X_n)$ را انتخاب می‌کنیم تا نتیجه $E[U(X_۱, ..., X_n|T]$ تا حد امکان ساده باشد.

فرض کنید $\underline{\widetilde{X}} = (\widetilde{X}_۱, \widetilde{X}_۲, ..., \widetilde{X}_n)$ نمونه تصادفی فازی القاء شده بوسیله $\underline{X}$ با پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ باشد. مجموعه α—برش $\widetilde{\theta}_\alpha = [\theta^L_\alpha, \theta^U_\alpha]$ را داریم. چون θ^L_α و θ^U_α نسبت به α پیوسته هستند، $[\theta^L_\alpha, \theta^U_\alpha]$ به‌طور انقباضی نسبت به α پیوسته است،(یعنی با افزایش α بازه $[\theta^L_\alpha, \theta^U_\alpha]$ کوچکتر می‌شود و همچنان پیوستگی آن برقرار است) آنگاه

$$\forall\ \alpha \in [۰, ۱],\ \forall\ \theta \in \widetilde{\theta}_\alpha \qquad \exists\ \beta \geq \alpha \qquad s.t. \qquad \theta = \theta^L_\beta\ or\ \theta = \theta^U_\beta.$$

بنابراین برای هر پارامتر $\theta \in \widetilde{\theta}_\alpha$ می‌توانیم برآورد $\delta(\underline{x})$ را به θ مربوط سازیم. اگر $\theta = \theta^L_\beta$، $\beta \geq \alpha$ آنگاه δ^L_α و δ^U_α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta^L_\alpha = \delta^L_\alpha(\underline{\widetilde{x}}) = \inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱} \{\delta(\underline{x}) : x_i = x^L_{i\beta}; \quad i = ۱, ۲, ..., n\}$$

$$\delta^U_\alpha = \delta^U_\alpha(\underline{\widetilde{x}}) = \sup_{\alpha \leq \beta \leq ۱} \{\delta(\underline{x}) : x_i = x^L_{i\beta}; \quad i = ۱, ۲, ..., n\}$$

و بازه $I(\delta_\alpha) = [\delta^L_\alpha, \delta^U_\alpha]$ شامل همه برآوردهای غیرفازی $\theta \in [\theta^L_\alpha, \theta^L_۱]$ از هر متغیر تصادفی $X^L_{i\beta}$ و $X^U_{i\beta}$ برای $\alpha \geq \beta$ است.

اگر $\theta=\theta_\beta^U$ ، $\alpha \geq \beta$ آنگاه δ_α^L و δ_α^U به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_\alpha^L=\delta_\alpha^L(\underset{\sim}{x})=\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^U;\quad i=۱,۲,...,n\}$$

$$\delta_\alpha^U=\delta_\alpha^U(\underset{\sim}{x})=\sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^U;\quad i=۱,۲,...,n\}$$

و بازه $I(\delta_\alpha)$ شامل همه برآوردهای غیر فازی $\theta \in [\theta_۱^U,\theta_\alpha^U]$ از هر متغیر تصادفی $X_{i\beta}^L$ و $X_{i\beta}^U$ برای $\alpha \geq \beta$ است.

به طور کلی اگر $\theta=\theta_\beta^L$ یا $\theta=\theta_\beta^U$ ، $\alpha \geq \beta$ آنگاه δ_α^L و δ_α^U به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_\alpha^L=\min[\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^L\},\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^U\}]$$

$$\delta_\alpha^U=\max[\sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^L\},\sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\delta(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^U\}]$$

و بازه $I(\delta_\alpha)$ شامل همه برآوردهای غیرفازی $\theta \in \widetilde{\theta}_\alpha$ از هر متغیر تصادفی $X_{i\beta}^L$ و $X_{i\beta}^U$ برای $\alpha \geq \beta$ است.

تعریف ۳.۲ ([۸]) برآورد فازی $\widetilde{\theta}$ با $\widetilde{\delta}(\underset{\sim}{x})$ نشان داده می شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\widetilde{\delta}(\underset{\sim}{x})}(y)=\sup_{۰\leq\alpha\leq ۱}\alpha I_{I(\delta_\alpha)}(y).$$

حال در شرایطی هستیم که برآوردگرهای $FUMVU$ را برای پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ مورد بحث قرار دهیم که در آن θ_α^L و θ_α^U به ترتیب پارامترهای متغیرهای تصادفی X_α^L و X_α^U هستند. بنابراین برای هر پارامتر $\theta \in \widetilde{\theta}_\alpha$ می‌توانیم برآورد $UMVU$ ،$\widehat{\theta}$ برای هر $\theta \in \widetilde{\theta}_\alpha$ را تعریف کنیم. $\widehat{\theta}_\alpha^L$ و $\widehat{\theta}_\alpha^U$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\widehat{\theta}_\alpha^L=\min[\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^L\},\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^U\}]$$

$$\widehat{\theta}_{\alpha}^{U}=\max[\sup_{\alpha\leq\beta\leq 1}\{\widehat{\theta}(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^{L}\},\ \sup_{\alpha\leq\beta\leq 1}\{\widehat{\theta}(\underline{x}):x_i=x_{i\beta}^{U}\}]$$

که در آن بازه $[\widehat{\theta}_{\alpha}^{L},\widehat{\theta}_{\alpha}^{U}]$ همه برآوردهای $UMVU$ برای هر $\theta\in\widetilde{\theta}_{\alpha}$ را دربر خواهد داشت.
برآوردگر $FUMVU$ برای $\widetilde{\theta}$ با $\widehat{\widetilde{\theta}}$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\widehat{\widetilde{\theta}}}(y)=\sup_{0\leq\alpha\leq 1}\alpha I_{[\widehat{\theta}_{\alpha}^{L},\widehat{\theta}_{\alpha}^{U}]}(y).$$

مثال ۱.۲ ([۸])(*) فرض کنید X یک متغیر تصادفی از $N(\theta,\sigma^2)$ باشد یعنی

$$f(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2})\qquad\qquad x,\theta\in R.$$

و$\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,...,\widetilde{X}_n$ یک نمونه تصادفی فازی به اندازه n با پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ القاء شده با توزیع $N(\theta,1)$ باشد. آنگاه $X_{i\alpha}^{L}$ و $X_{i\alpha}^{U}$ به ترتیب دارای توزیع $N(\theta_{\alpha}^{L},1)$ و $N(\theta_{\alpha}^{U},1)$ هستند. چون $X_{i\alpha}^{L}$ دارای توزیع نرمال است، بنابراین $U(X)=\Sigma_{i=1}^{n}X_{i\alpha}^{L}$ آماره بسنده کامل برای θ_{α}^{L} است. (زیرا خانواده نرمال جزء خانواده نمایی است و در خانواده نمایی $T(X)=\Sigma_{i=1}^{n}d(x_i)$ آماره بسنده کامل است. (ضمیمه ۳–۴ و ۳–۵ را ببینید))
چون $\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_{i\alpha}^{L}}{n}$ برآورگر ناااریب θ_{α}^{L} و تابع $U(X)$ است، بنابراین $UMVUE$ برای θ_{α}^{L} می‌باشد. به طور مشابه برآوردگر $UMVU$ برای θ_{α}^{U} عبارتست از:

$$\widehat{\theta}_{\alpha}^{U}=\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_{i\alpha}^{U}}{n}.$$

لذا همه برآوردگرهای $UMVU$ برای هر $\theta\in\widetilde{\theta}_{\alpha}$ عبارتست از:

$$[\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}X_{i\alpha}^{L},\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}nX_{i\alpha}U]$$

گزاره ۱.۲ ([۸]) فرض کنید $\underline{\widetilde{X}}=(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,...,\widetilde{X}_n)$ نمونه تصادفی فازی القاء شده بوسیله $\underline{X}$ با پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ باشد، اگر $\widehat{\theta}(\underline{x})$ برآورد پیوسته θ در x_i باشد، آنگاه $\widehat{\widetilde{\theta}}$ متغیر تصادفی فازی است.

اثبات. $(*)$ با استفاده از گزاره ۴.۱ کافی است نشان دهیم که $\widehat{\theta}^L_\alpha$ و $\widehat{\theta}^U_\alpha$ متغیرهای تصادفی غیرفازی هستند. چون $\widetilde{X}_i$ ها متغیرهای تصادفی القاء شده توسط X_i هستند با استفاده از گزاره ۴.۱، $X^L_{i\beta}$ و $X^U_{i\beta}$ برای $\alpha \leq \beta \leq ۱$ متغیرهای تصادفی غیرفازی هستند. توجه کنید که $\widehat{\theta}(\underline{x})$ یک تابع پیوسته از x_i است، بنابراین $\widehat{\theta}(X^L_{۱\beta}, X^L_{۲\beta}, ..., X^L_{n\beta})$ و $\inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{\widehat{\theta}(\underline{X}) : X_i \in X^L_{i\beta}\}$ برای $\alpha \leq \beta \leq ۱$ متغیرهای تصادفی غیرفازی هستند. (ضمیمه ۲−۳ و ۲−۴ را ببینید) به طور مشابه $\inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{\widehat{\theta}(\underline{X}) : X_i \in X^U_{i\beta}\}$ برای $\alpha \leq \beta \leq ۱$ متغیر تصادفی غیرفازی است. این ایجاب می‌کند که $\widehat{\theta}^L_\alpha$ یک متغیر تصادفی غیرفازی باشد. نتایج می‌توانند برای $\widehat{\theta}^U_\alpha$ استفاده شوند. □

۲−۲−۱ برآوردگرهای $FUMVU$ با استفاده از متر یائو—ویو

تعریف ۴.۲ ([۸]) برآوردگر فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ از $\widetilde{\theta}$ برآوردگر نااریب فازی است اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} E[\delta(X^L_{۱\alpha}, X^L_{۲\alpha}, ..., X^L_{n\alpha})] = \theta^L_\alpha \\ E[\delta(X^U_{۱\alpha}, X^U_{۲\alpha}, ..., X^U_{n\alpha})] = \theta^U_\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

مثال ۲.۲ ([۸])$(*)$ فرض کنید X یک متغیر تصادفی از $N(\theta, ۱)$ با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp(-\frac{(x-\theta)^۲}{۲}) \qquad x, \theta \in R.$$

و $\widetilde{X}_۱, \widetilde{X}_۲, ..., \widetilde{X}_n$ نمونه تصادفی فازی با تابع عضویت مثلثی $(X_i - a, X_i, X_i + b)$ به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\widetilde{X}_i}(y) = \begin{cases} \frac{y - X_i + a}{a} & X_i - a \leq y \leq X_i \\ \frac{X_i + b - y}{b} & X_i \leq y \leq X_i + b \end{cases} \qquad \forall ۱ \leq i \leq n \ , \ a, b \geq ۰$$

متغیر تصادفی $\widetilde{X}_i$ را مقادیر نزدیک به X_i تفسیر می‌کنیم. طبق گزاره ۲.۱ $X^L_{i\alpha} = X_i - (۱ - \alpha)a$ و $X^U_{i\alpha} = X_i + (۱ - \alpha)b$ است، بنابراین چون برآوردگر نااریب θ برابر $\overline{X}$ است، داریم:

$$\delta^L_\alpha = \overline{X} - (۱ - \alpha)a, \qquad \delta^U_\alpha = \overline{X} + (۱ - \alpha)b$$

و

$$E[\delta^L_\alpha] = \theta - (۱ - \alpha)a = \theta^L_\alpha, \qquad E[\delta^U_\alpha] = \theta + (۱ - \alpha)b = \theta^U_\alpha.$$

مثال ۳.۲ ([۸])($*$) فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \exp(-(x - \theta)) \qquad x > \theta, \quad \theta > ۰,$$

همچنین $\widetilde{X}_i$ ها نمونه‌های تصادفی فازی با توابع عضویت به صورت زیر باشند:

$$\mu_{\widetilde{x}_i}(y) = \begin{cases} \exp(-(y - X_i)^۲) & X_i - ۰/۵ \leq y \leq X_i + ۰/۵ \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad \forall ۱ \leq i \leq n.$$

طبق تابع عضویت فوق اگر $y = X_i - ۰/۵$ یا $y = X_i + ۰/۵$ آنگاه $\mu_{\widetilde{X}_i}(y) = \exp(-۰/۲۵)$، بنابراین برای $۰ \leq \alpha \leq \exp(-۰/۲۵)$، α—برش برابر است با $[X_i - ۰/۵, X_i + ۰/۵]$، اما برای $\exp(-۰/۲۵) \leq \alpha \leq ۱$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} X_{i\alpha}(y) &= \{y : \exp(-(y - X_i)^۲) \geq \alpha\} = \{y : (-(y - X_i)^۲) \geq \ln\alpha\} \\ &= \{y : (y - X_i)^۲ \leq -\ln\alpha\} = \{y : -\sqrt{-\ln\alpha} \leq y - X_i \leq \sqrt{-\ln\alpha}\} \\ &= \{y : X_i - \sqrt{-\ln\alpha} \leq y \leq X_i + \sqrt{-\ln\alpha}\} \end{aligned}$$

$X_{(۱)} - \frac{۱}{n}$ یک برآوردگر ناریب برای θ است.(ضمیمه ۳—۱۳ را ببینید) بنابراین

$$\delta^L_\alpha = \begin{cases} X_{(۱)} - \frac{۱}{n} - ۰/۵ & ۰ \leq \alpha \leq \exp(-۰/۲۵) \\ X_{(۱)} - \frac{۱}{n} - \sqrt{-\ln\alpha} & \exp(-۰/۲۵) \leq \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

$$\delta_\alpha^U = \begin{cases} X_{(1)} - \frac{1}{n} + 0/5 & 0 \leq \alpha \leq \exp(-0/25) \\ X_{(1)} - \frac{1}{n} + \sqrt{-\ln\alpha} & \exp(-0/25) \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

و

$$\theta_\alpha^L = \begin{cases} \theta - 0/5 & 0 \leq \alpha \leq \exp(-0/25) \\ \theta - \sqrt{(-\ln\alpha)} & \exp(-0/25) \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta_\alpha^U = \begin{cases} \theta + 0/5 & 0 \leq \alpha \leq \exp(-0/25) \\ \theta + \sqrt{-\ln\alpha} & \exp(-0/25) \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

فرض کنید $\widetilde{D}$ نشان دهنده مجموعه همه برآوردگرهای ناریب فازی $\widetilde{\theta}$ باشد.

تعریف ۵.۲ ([۸]) برآوردگر فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ برای $\widetilde{\theta}$ برآوردگر بسنده فازی است اگر و فقط اگر

i) برآوردگر $\delta(X_{1\alpha}^L, X_{2\alpha}^L, ..., X_{n\alpha}^L)$ برآوردگر بسنده برای θ_α^L ، $\alpha \in [0, 1]$، باشد.

ii) برآوردگر $\delta(X_{1\alpha}^U, X_{2\alpha}^U, ..., X_{n\alpha}^U)$ برآوردگر بسنده برای θ_α^U ، $\alpha \in [0, 1]$، باشد.

تعریف ۶.۲ ([۸]) تابع عضویت واریانس تابع فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ را که با $\widetilde{\nu}(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}}))$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\widetilde{\nu}}(y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{[\nu_\alpha^L, \nu_\alpha^U]}(y)$$

که در آن ν_α^L و ν_α^U به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\nu_\alpha^L = \min[\inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{Var_{\theta_\beta^L}(\delta(\underline{x})) : x_i = x_{i\beta}^L\}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{Var_{\theta_\beta^U}(\delta(\underline{x})) : x_i = x_{i\beta}^U\}]$$

$$\nu_\alpha^U = \max[\sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{Var_{\theta_\beta^L}(\delta(\underline{x})) : x_i = x_{i\beta}^L\}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{Var_{\theta_\beta^U}(\delta(\underline{x})) : x_i = x_{i\beta}^U\}]$$

گزاره ۲.۲ ([۸]) فرض کنید $\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}}) \in \widetilde{D}$ و $\widetilde{T}(\underline{\widetilde{X}})$ برآوردگر بسنده باشد. اگر

$$\widehat{\theta}_*(\underline{X}^L_\alpha) = \widehat{\theta}_*(X^L_{۱\alpha}, X^L_{۲\alpha}, ..., X^L_{n\alpha}) = E[U(\underline{X}^L_\alpha)|T(\underline{X}^L_\alpha)],$$

$$\widehat{\theta}_*(\underline{X}^U_\alpha) = \widehat{\theta}_*(X^U_{۱\alpha}, X^U_{۲\alpha}, ..., X^U_{n\alpha}) = E[U(\underline{X}^U_\alpha)|T(\underline{X}^U_\alpha)],$$

آنگاه برآوردگر فازی $\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})$ با تابع عضویت

$$\mu_{\widehat{\widetilde{\theta}}_*}(y) = \sup_{۰\leq\alpha\leq ۱} \alpha I_{[\widehat{\theta}^L_{*\alpha}, \widehat{\theta}^U_{*\alpha}]}(y)$$

یک برآوردگر $FUMVU$ است یعنی

$$\widetilde{\nu}(\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})) \prec_\approx \widetilde{\nu}(\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}}))$$

که در آن

$$\widehat{\theta}^L_{*\alpha} = \min[\inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}_*(\underline{X}^L_\alpha)\}, \inf_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}_*(\underline{X}^U_\alpha)\}],$$

$$\widehat{\theta}^U_{*\alpha} = \max[\sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}_*(\underline{X}^U_\alpha)\}, \sup_{\alpha\leq\beta\leq ۱}\{\widehat{\theta}_*(\underline{X}^U_\alpha)\}].$$

اثبات. $(*)$ چون $\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}}) \in \widetilde{\mathcal{D}}$ بر اساس تعریف ۴.۲ داریم:

$$\forall\ \alpha \in [۰, ۱],\ \ \theta \in \widetilde{\theta}_\alpha \quad \exists X_i \in \widetilde{X}_{i\alpha} \quad s.t. \quad E[U_\alpha(\underline{X})] = \theta.$$

و بر اساس تعریف $\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})$ داریم:

$$\widehat{\theta}_{*\alpha}(\underline{X}) = E[U_\alpha(X)|T(\underline{X})] \qquad X_i \in \widetilde{X}_{i\alpha} \quad i = ۱, ۲, ..., n$$

و $\theta = E(U_\alpha(\underline{X})) = EE[U_\alpha(\underline{X})|T(\underline{X})] = E[\widehat{\theta}_{*\alpha}(\underline{X})]$، بنابراین برآوردگر فازی $\widehat{\widetilde{\theta}}_*$ یک برآوردگر نااریب فازی است. از طرف دیگر $\widetilde{T}(\underline{\widetilde{X}})$ یک برآوردگر بسنده فازی است، بنابراین از قضیه ۱.۲ داریم:

$$Var_\theta[\widehat{\theta}_{*\alpha}(\underline{X})] \leq Var_\theta[U_\alpha(\underline{X})] \qquad X_i \in \widetilde{X}_{i\alpha},\ \theta \in \widetilde{\theta}_\alpha.$$

طبق تعریف ۶.۲ می‌توانیم بنویسیم

$$\nu_\alpha^L[\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})] \leq \nu_\alpha^L[\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})]$$

و به طور مشابه داریم:

$$\nu_\alpha^U[\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})] \leq \nu_\alpha^U[\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})].$$

درنتیجه

$$\frac{\nu_\alpha^L[\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})] + \nu_\alpha^U[\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})]}{۲} - \frac{\nu_\alpha^L[\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})] + \nu_\alpha^U[\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})]}{۲} \leq ۰$$

بنابراین طبق فاصله علامتدار یائو—ویو (تعریف ۲۳.۱) داریم:

$$\widetilde{\nu}(\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})) \prec_\approx \widetilde{\nu}(\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})).$$

□

۲—۲—۲ برآوردگرهای $FUMVU$ بر اساس متر $L_۲$

فرض کنید متغیر تصادفی $\underline{\widetilde{X}}$ به صورت تابع اندازه پذیر بورل (ضمیمه ۱—۹ را ببینید) زیر تعریف شود:

$$\widetilde{X} : \Omega \to F(\mathcal{R}^n)$$

در حالت کلی مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی فازی $\underline{\widetilde{X}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{E}_\alpha(\underline{\widetilde{X}}) = \{E(\underline{X})|\underline{X} : \Omega \to \mathcal{R}^n, \underline{X}(\omega) = \underline{\widetilde{X}}_\alpha(\omega)\}$$

که در آن $\widetilde{E}_\alpha(\underline{\widetilde{X}})$ انتگرال اومان[۱۴] (ضمیمه ۱—۱۲ را ببینید) است.

Aumann[۱۴]

تعریف ۷.۲ ([۸]) واریانس متغیر تصادفی فازی $\widetilde{\underline{X}}$ به صورت $\nu(\widetilde{\underline{X}}) = E[\Delta^{۲}(\widetilde{\underline{X}}, E(\widetilde{\underline{X}}))]$ تعریف می‌شود.

با استفاده از $E_\alpha(\widetilde{\underline{X}}) = E(\widetilde{\underline{X}}_\alpha)$ (گزاره ۵.۱ را ببینید) و $S_{E(\widetilde{\underline{X}}_\alpha)}(t) = E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t))$ (نکته ۱.۱ را ببینید) می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{aligned}
\nu(\widetilde{\underline{X}}) &= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t) - S_{E(\widetilde{\underline{X}}_\alpha)}(t))^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t) - E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)))^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} Var(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t))\mu(dt)d\alpha.
\end{aligned}
$$

نادر [۱۵] [۳۳] ضرب اسکالر بین $\widetilde{\underline{X}}$ و $\widetilde{\underline{Y}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$
<\widetilde{\underline{X}}, \widetilde{\underline{Y}}> = n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)S_{\widetilde{\underline{Y}}_\alpha}(t)\mu(dt)d\alpha
$$

که نتیجه می‌دهد

$$
\begin{aligned}
\nu(\widetilde{\underline{X}}) &= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t) - E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)))^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} (E(S^{۲}_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)) - ۲E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t))E(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)) + E^{۲}(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t))\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{۰}^{۱}\int_{S^{n-۱}} (E(S^{۲}_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t)) - E^{۲}(S_{\widetilde{\underline{X}}_\alpha}(t))\mu(dt)d\alpha \\
&= E<\widetilde{\underline{X}}, \widetilde{\underline{X}}> - <E(\widetilde{\underline{X}}), E(\widetilde{\underline{X}})>
\end{aligned}
$$

تعریف ۸.۲ ([۳۶]) امید شرطی $\widetilde{\underline{X}}$ به شرط σ−جبر $\mathcal{G}$ (ضمیمه ۲−۱ را ببینید) متغیر تصادفی فازی $E(\widetilde{\underline{X}}|\mathcal{G})$ با خواص زیر است:

۱) $E(\widetilde{\underline{X}}|\mathcal{G})$ ، $\mathcal{G}$−اندازه پذیر است.

۲) $\forall G \in \mathcal{G}$ $\quad \int_G E(\widetilde{\underline{X}}|\mathcal{G})dp = \int_G \widetilde{\underline{X}}dp$

[۱۵] Nather

گزاره ۳.۲ ([۳۶]) برای $\alpha \in [0, 1]$ داریم

$$E(\widetilde{X}_\alpha|\mathcal{G}) = E_\alpha(\widetilde{X}|\mathcal{G})$$

گزاره ۴.۲ ([۸]) اگر $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ آنگاه

$$E(S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)|\mathcal{G}) = S_{E(\widetilde{Y}_\alpha|\mathcal{G})}(t) \qquad\qquad t \in S^{n-1}$$

اثبات. $(*)$ می‌دانیم $E(S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)|\mathcal{G})$ و $S_{E(\widetilde{Y}_\alpha|\mathcal{G})}(t)$، $\mathcal{G}$–اندازه‌پذیر هستند. بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$\int_G E(S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)|\mathcal{G})dp = \int_G S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)dp = \int_G S_{E(\widetilde{Y}_\alpha|\mathcal{G})}(t)dp \qquad \forall G \in \mathcal{G}.$$

فرض کنید $G \in \mathcal{G}$. داریم:

$$\begin{aligned}\int_G S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)dp &= \int_\Omega I_G S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)dp \\ &= E(I_G S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t))\end{aligned}$$

چون $I_G \geq 0$، بنابراین طبق نکته ۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\int_G S_{\widetilde{Y}_\alpha}(t)dp &= S_{E(I_G\widetilde{Y}_\alpha)}(t) \\ &= S_{\int_G \widetilde{Y}_\alpha dp}(t) \\ &= S_{\int_G E(\widetilde{Y}_\alpha|\mathcal{G})dp}(t) \\ &= \int_G S_{E(\widetilde{Y}_\alpha|\mathcal{G})}(t)dp.\end{aligned}$$

$\square$

اگر $\mathcal{G} = \sigma(\underline{\widetilde{Y}})$ بوسیله متغیر تصادفی $\underline{\widetilde{Y}}$ القاء شده باشد، می‌توانیم بنویسیم $E(\underline{\widetilde{X}}|\mathcal{G}) = E(\underline{\widetilde{X}}|\underline{\widetilde{Y}})$ که در آن $\sigma(\underline{\widetilde{Y}}) \subset \mathcal{F}$ کوچکترین σ–جبر است بطوری که $\underline{\widetilde{Y}}$ اندازه‌پذیر است.

گزاره ۵.۲ ([۸]) براساس گزاره ۲.۲ نامساوی زیر را داریم:

$$\nu(\widehat{\widetilde{\theta}}_*(\underline{\widetilde{X}})) \leq \nu(\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}}))$$

اثبات. $(*)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\nu(\widehat{\widetilde{\theta}}_*) &= n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[S_{\widehat{\widetilde{\theta}}_{*\alpha}}(t) - E(S_{\widehat{\widetilde{\theta}}_{*\alpha}}(t))]^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[S_{E(\widetilde{U}_\alpha|\widetilde{T})}(t) - E(S_{\widehat{\widetilde{\theta}}_{*\alpha}}(t))]^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[S_{E_\alpha(\widetilde{U}|\widetilde{T})}(t) - E(S_{\widehat{\widetilde{\theta}}_{*\alpha}}(t))]^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[S_{E_\alpha(\widetilde{U}|\widetilde{T})}(t) - S_{E(\widetilde{U}_\alpha)}(t)]^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[E_\alpha(S_{\widetilde{U}}(t)|\widetilde{T}) - S_{E(\widetilde{U}_\alpha)}(t)]^{۲}\mu(dt)d\alpha \\
&\leq n\int_{\circ}^{۱}\int_{S^{n-۱}} E[S_{\widetilde{U}_\alpha}(t) - S_{E(\widetilde{U}_\alpha)}(t)]^{۲}\mu(dt)d\alpha = \nu(\widetilde{U}(\underline{\widetilde{X}})).
\end{aligned}$$

که در آن تساوی سوم با استفاده از گزاره ۳.۲ و تساوی آخر بر اساس گزاره ۴.۲ به‌دست آمده است، همچنین نامساوی، بر اساس عبارت $Var(E(Y|X)) \leq Var(Y)$ $(Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X)))$ حاصل شده است. □

۲ـ۳ برآوردگرهای بیز فازی

در این بخش ابتدا برآوردگر بیز را معرفی می‌کنیم و سپس آن را برای تعریف برآوردگرهای بیز فازی استفاده می‌کنیم و خواص آنها را نیز بیان خواهیم کرد. فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه n باشد که در آن X_i ها دارای تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ با پارامتر مجهول $\theta \in \Theta$ هستند و $x_۱, x_۲, ..., x_n$ به ترتیب مشاهداتی از $X_۱, X_۲, ..., X_n$ هستند. همچنین فرض کنید $\mathcal{A}$ نشان دهنده فضای عمل (ضمیمه ۳ـ۶ را ببینید) و $L : \Theta \times \mathcal{A} \to \mathcal{R}^{\geq \circ}$ تابع زیان باشد.

تعریف ۹.۲ ([۳۹]) تابع $\delta : S_{X_1} \times S_{X_2} \times ... \times S_{X_n} \rightarrow \mathcal{A}$ تابع تصمیم است و ما کلاس توابع تصمیم را با $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲ ([۳۹]) تابع $R : \Theta \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}^{\geq 0}$ که به صورت $R(\theta, \delta) = E[L(\theta, \delta(\underline{X}))]$ تعریف شده را تابع ریسک می‌نامیم.

چگالی پیشین $\pi(\theta)$ (تابعی که راجع به θ بدون استفاده از مشاهدات و تنها براساس تجربیات محقق به ما اطلاعات می‌دهد) را برای θ در نظر بگیرید و فرض کنید $f(x|\theta)$ تابع چگالی احتمال شرطی X برای ثابت $\theta \in \Theta$ باشد. چگالی شرطی θ به شرط $X_i = x_i \ ; \ i = 1, 2, ..., n$ چگالی پسین θ نامیده می‌شود و با $\pi(\theta|X)$ نشان داده می‌شود. ریسک بیز تصمیم δ، متناظر با توزیع پیشین π، با $r(\pi, \delta) = E[R(\Theta, \delta)]$ تعریف می‌شود.

از تعاریف بالا تصمیم δ^* برآوردگر بیز است اگر ریسک بیز را مینیمم کند یعنی اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$r(\pi, \delta^*) = \min\{r(\pi, \delta) : \delta \in D\}$$

قضیه: ۲.۲ ([۳۹]) فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی به اندزه n باشد که در آن X_iها دارای تابع چگالی احتمال $f(x|\theta)$ با پارامتر مجهول $\theta \in \Theta$ هستند و مقادیر $x_1, x_2, ..., x_n$ مشاهده شده‌اند. تحت تابع زیان مربع خطا برآورد نقطه ای بیز θ، میانگین توزیع پسین است.

حال موقع آن است که برآوردگرهای بیز فازی را برای هر پارامتر فازی $\widetilde{\theta}$ مورد بحث قرار دهیم.

تعریف ۱۱.۲ ([۸]) برای هر پارامتر $\theta \in \widetilde{\theta}_\alpha$ می‌توانیم برآورد بیز $\widehat{\theta}^*$ برای θ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\widehat{\theta}^{*L}_\alpha = \min[\inf_{\alpha \leq \beta \leq 1}\{\widehat{\theta}^*(\underline{x}) : x_i = x^L_{i\beta}\}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1}\{\widehat{\theta}^*(\underline{x}) : x_i = x^U_{i\beta}\}]$$

$$\widehat{\theta}^{*U}_{\alpha} = \max[\sup_{\alpha\leq\beta\leq 1}\{\widehat{\theta}^{*}(\underline{x}) : x_i = x^{L}_{i\beta}\}, \sup_{\alpha\leq\beta\leq 1}\{\widehat{\theta}^{*}(\underline{x}) : x_i = x^{U}_{i\beta}\}]$$

که در آن بازه $[\widehat{\theta}^{*L}_{\alpha}, \widehat{\theta}^{*U}_{\alpha}]$ شامل همه برآوردهای بیز هر $\theta \in \widetilde{\theta}_{\alpha}$ است.

برآورد بیز فازی $\widetilde{\theta}$ با $\widehat{\widetilde{\theta}}^{*}$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\widehat{\widetilde{\theta}}^{*}}(y) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \alpha I_{[\widehat{\theta}^{*L}_{\alpha}, \widehat{\theta}^{*U}_{\alpha}]}(y)$$

مثال ۴.۲ ([۸])(*) فرض کنید X یک متغیر تصادفی از $N(\theta,\sigma^2)$ با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}) \qquad\qquad x,\theta \in R.$$

و $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n$ یک نمونه تصادفی فازی با تابع عضویت مثلثی داده شده به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\widetilde{x}_i}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i+a}{a} & x_i - a \leq x \leq x_i \\ \frac{x_i+b-x}{b} & x_i \leq x \leq x_i + b \end{cases} \qquad\qquad \forall 1 \leq i \leq n \ , \ a,b \geq 0$$

اعداد فازی متعارف $\widetilde{x}_i$ را می‌توانیم به عنوان مقادیر نزدیک به x_i تفسیر کنیم. فرض کنید $N(s,b^2)$ توزیع پیشین باشد، درنتیجه توزیع پسین عبارت است از (ضمیمه ۳–۷ و ۳–۸ را ببینید)

$$N(\frac{\frac{s}{b^2}+\frac{n\overline{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{n}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{n}{\sigma^2}})$$

در حالت غیر فازی برآورد بیز θ بر اساس قضیه ۲.۲ عبارت است از:

$$\widehat{\theta}^{*}(x) = E(\theta|x) = \frac{\frac{s}{b^2}+\frac{n\overline{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{n}{\sigma^2}}$$

اما در حالت فازی داریم:

$$\mu_{\widehat{\widetilde{\theta}}^{*}}(y) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \alpha I_{[\widehat{\theta}^{*L}_{\alpha}, \widehat{\theta}^{*U}_{\alpha}]}(y)$$

طبق گزاره ۲.۱ داریم:

$$\theta^{L}_{\alpha} = \theta - (1-\alpha)a \qquad\qquad \theta^{U}_{\alpha} = \theta + (1-\alpha)b$$

بنابراین

$$\widehat{\theta}^{*L}_{\alpha} = \frac{\frac{n}{\sigma^{۲}}(\overline{x} - (۱-\alpha)a) + \frac{s}{b^{۲}}}{\frac{n}{\sigma^{۲}} + \frac{۱}{b^{۲}}} \qquad \widehat{\theta}^{*U}_{\alpha} = \frac{\frac{n}{\sigma^{۲}}(\overline{x} + (۱-\alpha)b) + \frac{s}{b^{۲}}}{\frac{n}{\sigma^{۲}} + \frac{۱}{b^{۲}}}$$

۲—۳—۱ برآوردگرهای بیز فازی بر اساس فاصله علامتدار یائو—ویو

تعریف ۱۲.۲ ([۸]) تابع عضویت تابع ریسک فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ که با $\widetilde{R}(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\widetilde{R}}(y) = \sup_{\circ \leq \alpha \leq ۱} \alpha I_{[R^L_\alpha, R^U_\alpha]}(y)$$

که در آن

$$R^L_\alpha = \min[\inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{R(\theta^L_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^L_{i\beta}\}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{R(\theta^U_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^U_{i\beta}\}],$$

$$R^U_\alpha = \max[\sup_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{R(\theta^L_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^L_{i\beta}\}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{R(\theta^U_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^U_{i\beta}\}].$$

تعریف ۱۳.۲ ([۸]) تابع عضویت تابع ریسک بیز فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ که با $\widetilde{r}(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}}))$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\widetilde{r}}(y) = \sup_{\circ \leq \alpha \leq ۱} \alpha I_{[r^L_\alpha, r^U_\alpha]}(y)$$

که در آن

$$r^L_\alpha = \min[\inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{r(\pi^L_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^L_{i\beta}\}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{r(\pi^U_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^U_{i\beta}\}],$$

$$r^U_\alpha = \max[\sup_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{r(\pi^L_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^L_{i\beta}\}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq ۱}\{r(\pi^U_\beta, \delta(\underline{X})) : X_i = X^U_{i\beta}\}],$$

و π^L_β و π^U_β به ترتیب توابع توزیع پسین θ^L_α و θ^U_α هستند.

گزاره ۶.۲ ([۸]) فرض کنید $\underline{\widetilde{X}}$ یک نمونه تصادفی فازی به اندازه n، القاء شده توسط $\underline{X}$ با پارامتر $\widetilde{\theta}$ باشد و $\widetilde{\mathcal{M}}$ مجموعه ای از همه برآوردگرهای فازی $\widetilde{\theta}$ باشد. اگر

$$\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^L_\alpha) = E[\Theta^L_\alpha|\underline{X}^L_\alpha]$$

$$\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^U_\alpha) = E[\Theta^U_\alpha|\underline{X}^U_\alpha]$$

آنگاه برآوردگر فازی $\widehat{\widetilde{\theta}}_{**}(\underline{\widetilde{X}})$ با تابع عضویت

$$\mu_{\widehat{\widetilde{\theta}}}(y) = \sup_{\circ\le\alpha\le ۱} \alpha I_{[\widehat{\theta}^L_{**\alpha},\widehat{\theta}^U_{**\alpha}]}(y)$$

برآوردگر بیز فازی است یعنی

$$\widetilde{r}(\widehat{\widetilde{\theta}}_{**}(\underline{\widetilde{X}})) \prec_{\approx} \widetilde{r}(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})) \qquad \forall\widetilde{\delta}\in\widetilde{\mathcal{M}}$$

که در آن

$$\widehat{\theta}^L_{**\alpha} = \min[\inf_{\alpha\le\beta\le ۱}\{\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^L_\alpha)\}, \inf_{\alpha\le\beta\le ۱}\{\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^U_\alpha)\}]$$

$$\widehat{\theta}^U_{**\alpha} = \max[\sup_{\alpha\le\beta\le ۱}\{\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^L_\alpha)\}, \sup_{\alpha\le\beta\le ۱}\{\widehat{\theta}_{**}(\underline{X}^U_\alpha)\}]$$

۲—۳—۲ برآوردگرهای بیز فازی با استفاده از متر $L_۲$

تحت تابع زیان مربع خطا مقدار ریسک $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} R[\widetilde{\theta},\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})] &= E[\Delta^۲(\widetilde{\theta},\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}}))|\widetilde{\theta}] \\ &= n\int_\circ^۱\int_{S^{n-۱}} E_{\underline{\widetilde{X}}|\widetilde{\theta}}(S_{\widetilde{\theta}_\alpha}(t) - S_{\widetilde{\delta}_\alpha(\underline{\widetilde{X}})}(t))^۲\mu(dt)d\alpha \end{aligned}$$

تعریف ۱۴.۲ ([۸]) تحت تابع زیان مربع خطا تابع ریسک بیز $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})) = E_\theta\{R[\widetilde{\theta}, \widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})]\}$$

تعریف ۱۵.۲ ([۸]) برآوردگر فازی $\widetilde{\delta}^*(\underline{\widetilde{X}})$ برآوردگر بیز فازی است اگر و فقط اگر برای هر برآوردگر فازی $\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})$ از $\widetilde{\theta}$ داشته باشیم

$$r(\widetilde{\delta}^*(\underline{\widetilde{X}})) \leq r(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}}))$$

گزاره ۷.۲ ([۸]) فرض کنید $\underline{\widetilde{X}}$ یک نمونه تصادفی فازی به اندازه n، القاء شده توسط $\underline{X}$ باشد، برای برآوردگر بیز فازی $\widetilde{\delta}^*(\underline{\widetilde{X}})$ از $\widetilde{\theta}$ داریم:

$$\widetilde{\delta}^*(\underline{\widetilde{X}}) = \widehat{\widetilde{\theta}}_{**}(\underline{\widetilde{X}}) = E(\widetilde{\Theta}|\underline{\widetilde{X}})$$

اثبات. $(*)$ طبق گزاره ۶.۲ $\widehat{\widetilde{\theta}}_{**}(\underline{\widetilde{X}}) = E(\widetilde{\Theta}|\underline{\widetilde{X}})$.
داریم:

$$\begin{aligned}
r(\widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})) &= E_{\widetilde{\theta}}\{R[\widetilde{\Theta}, \widetilde{\delta}(\underline{\widetilde{X}})]\} \\
&= nE_{\widetilde{\theta}}\int_۰^۱\int_{S^{n-۱}} E_{\underline{\widetilde{X}}|\widetilde{\theta}}(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t) - S_{\widetilde{\delta}_\alpha(\underline{\widetilde{X}})}(t))^۲\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_۰^۱\int_{S^{n-۱}} E_{\widetilde{\theta}}E_{\underline{\widetilde{X}}|\widetilde{\theta}}(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t) - S_{\widetilde{\delta}_\alpha(\underline{\widetilde{X}})}(t))^۲\mu(dt)d\alpha \\
&= n\int_۰^۱\int_{S^{n-۱}} E_{\underline{\widetilde{X}}}E_{\widetilde{\theta}|\underline{\widetilde{X}}}(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t) - S_{\widetilde{\delta}_\alpha(\underline{\widetilde{X}})}(t))^۲\mu(dt)d\alpha \\
&\geq n\int_۰^۱\int_{S^{n-۱}} E_{\underline{\widetilde{X}}}E_{\widetilde{\theta}|\underline{\widetilde{X}}}(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t) - E(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t)|\underline{\widetilde{X}}))^۲\mu(dt)d\alpha
\end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف ۱۴.۲ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$S_{\widetilde{\delta}^*_\alpha(\underline{\widetilde{X}})}(t) = E(S_{\widetilde{\Theta}_\alpha}(t)|\underline{\widetilde{X}})$$

حال با استفاده از گزاره ۴.۲ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم:

$$S_{\widetilde{\delta}^*_{\alpha}(\underline{\widetilde{X}})}(t) = S_{E(\widetilde{\Theta}_{\alpha}|\underline{\widetilde{X}})}(t)$$

در نتیجه

$$\widetilde{\delta}^*_{\alpha}(\underline{\widetilde{X}}) = E(\widetilde{\Theta}_{\alpha}|\underline{\widetilde{X}}) \qquad \forall \alpha \in [۰, ۱]$$

$$\Rightarrow \widetilde{\delta}^*(\underline{\widetilde{X}}) = \widetilde{E}(\widetilde{\Theta}|\underline{\widetilde{X}})$$

□

فصل ۳

آزمون فرضیه‌های آماری بر اساس لم نیمن—پیرسن تعمیم یافته

۳—۱ مقدمه

معمولاً یک فرضیه آماری با زیر مجموعه‌ای از فضای پارامتر متناظر بوده و هدف یک آزمون، تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا عدم پذیرش این فرضیه است که آیا مقدار واقعی پارامتر در این زیر مجموعه قرار دارد یا خیر. بنابراین فرضیه صفر با زیر مجموعه Θ_0 از Θ و فرضیه مقابل با مکمل آن $\Theta_1 = \Theta_0^c$ متناظر است. در حالتی که فرضیه‌ها ساده باشند، این مجموعه‌ها هر کدام تنها یک عضو دارند.

آماردانان معمولاً فرضیه‌ها را به صورت غیرفازی در نظر می‌گیرند. گاهی اوقات این موضوع در واقع یک محدودیت در روند تصمیم‌گیری ایجاد می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید که پارامتر θ نسبت افراد بیمار در یک جامعه باشد. در حالت غیر فازی فرضیه‌ها به صورت $H_0 : \theta \geq \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta < \theta_0$ یا $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$ در نظر گرفته می‌شوند، اما ما علاقمند به فرضیاتی همانند "کوچک بودن"، "تقریباً برابر بودن"، "خیلی بزرگتر بودن"، "نه بزرگ بودن از، ولی نزدیک به آن" و ... هستیم در این صورت فرضیه H_0 را می‌توان به صورت مثلاً "تقریباً برابر θ_0" یا "نه بزرگ بودن از θ_0 ولی نزدیک به آن" و ... در نظر گرفت، لذا بر این اساس می‌توان آزمون‌های دو طرفه و یک طرفه معمول را در حالت فازی به صورت زیر ارائه نمود:

(الف)
- H_0 : به نظر می‌رسد θ برابرتقریبا θ_0 است
- H_1 : به نظر می‌رسد θ برابرتقریبا θ_0 نیست

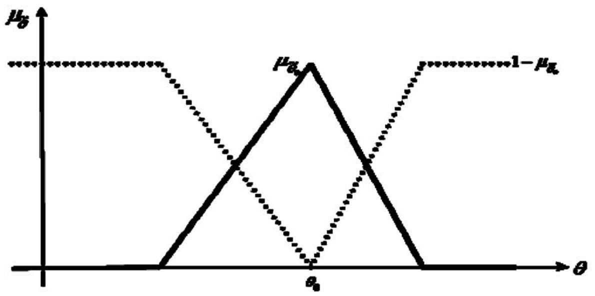
(ب)
- H_0 : به نظر می‌رسد θ بزرگتر از θ_0 است
- H_1 به نظر می‌رسد θ بزرگتر از θ_0 نیست

(ج)
- H_0 : به نظر می‌رسد θ کوچکتر از θ_0 است
- H_1 : به نظر می‌رسد θ کوچکتر از θ_0 نیست.

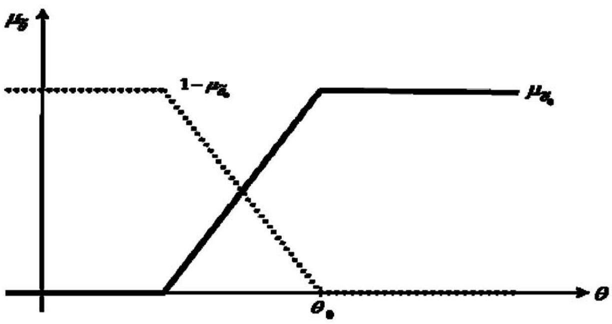
برای بیان فرضیه‌های $H_\circ$ و $H_\backslash$ در آزمون‌های فوق اگر تابع عضویت $\widetilde{\theta}_\circ$ را با نماد $\mu_{\widetilde{\theta}_\circ}$ نشان دهیم، می‌توان آن‌ها را به صورت زیر نیز بیان نمود:

$$\begin{cases} H_\circ : & \widetilde{\theta} \text{ دارای تابع عضویت } \mu_{\widetilde{\theta}_\circ}(\theta) \text{ است} \\ H_\backslash : & \widetilde{\theta} \text{ دارای تابع عضویت } \backslash - \mu_{\widetilde{\theta}_\circ}(\theta) \text{ است} \end{cases}$$

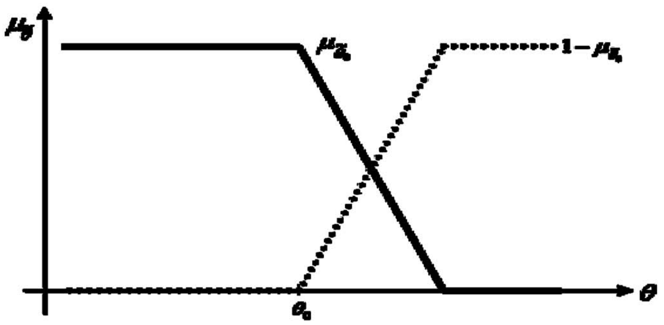
در بیان اخیر، برای تمایز قائل شدن بین فرضیه‌های (الف)، (ب) و (ج)، منطقی است همانند شکل زیر، در آزمون دو طرفه الف، تابع عضویت تحت $H_\circ$ به صورت متعارف در نظر گرفته شود ولی در آزمون‌های یکطرفه ب و ج این تابع به ترتیب تابعی صعودی و نزولی باشد.



شکل ۳—۱: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های الف



شکل ۳—۲: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های ب



شکل ۳—۳: نمودار تابع عضویت فرضیه‌های ج

۳—۲ تاریخچه آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی

آزمون آماری یک ادعا در مورد توزیع یک جامعه است که در محیطفازی به سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱) داده‌ها غیر فازی و فرضیه‌ها فازی باشند.

۲) داده‌ها فازی و فرضیه‌ها غیرفازی باشند.

۳) داده‌ها و فرضیه‌ها هر دو فازی باشند.

این نوع آزمون فرضیه‌ها، هنگامی که مشاهدات و داده‌ها دقیق هستند، نخستین بار توسط آرنولد[۱] [۱۱] در سال ۱۹۹۶ مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرضیه‌های یکطرفه و دوطرفه و به‌ویژه برای توزیع‌های عضو خانواده‌های نمایی توضیح داده است، طاهری[۲] و بهبودیان[۳][۴۱] لم نیمن—پیرسن و دیدگاه بیزی را با داده‌های غیر فازی و برای فرضیه‌های فازی مورد بررسی قرار داده‌اند، طاهری و عارفی[۴][۴۰] آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های غیرفازی را بر اساس آماره فازی

[۱] Arnold
[۲] Taheri
[۳] Behboodian
[۴] Arefi

ارائه نموده‌اند، پرچمی[5] و همکاران [۳۴] با معرفی p—مقدار فازی و مقایسه آن با سطح معنی‌داری به بررسی مسأله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های غیرفازی پرداخته‌اند، اکبری[6] و سعیدی[7] [۹] آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس لم نیمن—پیرسن تعمیم یافته را مورد بررسی قرار داده‌اند.
موضوع آزمون فرضیه بر پایه داده‌های فازی نخستین بار توسط تاناکا[8] و همکاران [۴۴] و در چارچوب نظریه تصمیم فازی مطرح شد، اما مطالعه جدی دراین باره توسط کازالس[9] و همکاران [۱۷] و کازالس و گیل[10] [۱۸] آغاز شد. کورنر[11] [۲۴] یک آزمون مجانبی برای میانگین متغیرهای تصادفی ارائه داده است، فیلزموزر[12] و فیتل [۲۰] مفهوم p—مقدار را برای آزمون فرضیه بر پایه داده‌های فازی معرفی کرده‌اند، مونتنگرو[13] و همکاران [۳۱] آزمون مقایسه میانگین‌های دو جامعه را، هنگامی که نمونه‌های حاصل از دو جامعه فازی باشند، مطالعه نموده‌اند.
آزمون فرضیه فازی با داده فازی نیز توسط نویسندگان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است که به چند مورد از آنها اشاره می‌کنیم: طاهری و بهبودیان ([۴۲] و [۴۳]) روش بیزی را برای آزمون فرضیه بر پایه داده‌های فازی، در حالی که فرضیه‌ها نیز فازی هستند، مطالعه نموده‌اند، ترابی[14] و همکاران [۴۶] لم نیمن—پیرسن تحت داده‌های فازی را بررسی کرده‌اند، وو[15] [۵۰] مسأله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی را با توجه به درجه خوش‌بینی و بدبینی مطرح کرده است، اکبری[16] و رضایی[17] [۷]

[5] Parchami
[6] Akbari
[7] Saeidi
[8] Tanaka
[9] Casals
[10] Gil
[11] Korner
[12] Filzmoser
[13] Montenegro
[14] Torabi
[15] Wu
[16] Akbari
[17] Rezai

نیز آزمون فرضیه‌های فازی بوت‌استرپ را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این فصل قصد داریم دیدگاه طاهری و بهبودیان، ترابی و همکاران و اکبری و سعیدی را که هر سه بر اساس لم نیمن—پیرسن تعمیم‌یافته هستند، مورد بررسی قرار داده و با هم مقایسه کنیم.
اما قبل از بیان این دیدگاهها لم نیمن—پیرسن را در حالت غیرفازی بیان می‌کنیم.

۳—۲—۱ لم نیمن—پیرسن در حالت غیرفازی

تعریف ۱.۳ ([۳۹]) آزمون Φ برای فرضیه

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

در سطح α است، اگر $\alpha_\Phi = E_{\theta_0}(\Phi(X)) \leq \alpha$. مقدار α_Φ را اندازه آزمون Φ گوییم.

تعریف ۲.۳ ([۳۹]) آزمون Φ در سطح α را بهترین آزمون در سطح α گوییم، اگر برای هر آزمون Φ^* در سطح α داشته باشیم $\beta_\Phi \leq \beta_{\Phi^*}$.

قضیه: ۱.۳ ([۳۹]) (**لم نیمن—پیرسن**) فرض کنید $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ نمونه‌ای تصادفی با مقدار مشاهده شده $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ باشد و X_i دارای تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x_i;\theta)$ و $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ باشد. برای آزمون فرضیه

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

الف) هر آزمون به‌صورت

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} > k \\ \gamma(\underline{x}) & \frac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} = k \\ 0 & \frac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} < k \end{cases} \qquad (۱-۳)$$

برای $k \geq 0$ و $1 \geq \gamma(\underline{x}) \geq 0$، پرتوان‌ترین آزمون در اندازه $\alpha = E_{\theta_0}(\Phi(\underline{X}))$ است.
به‌علاوه اگر $k = \infty$، آنگاه آزمون

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & f(\underline{x};\theta_0) = 0 \\ 0 & f(\underline{x};\theta_0) > 0 \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

پرتوان‌ترین آزمون در اندازه صفر است.

ب) (وجود) به ازای هر $1 \geq \alpha \geq 0$، یک آزمون به‌صورت (۳—۱) یا (۳—۲) با $\gamma(\underline{x}) = \gamma$ (ثابت) وجود دارد که $E_{\theta_0}(\Phi(\underline{X})) = \alpha$.

ج) (یکتایی) اگر Φ^* بهترین آزمون در اندازه α باشد، آنگاه Φ^* به صورت (۳—۱) یا (۳—۲) است، مگر احتمالاً روی مجموعه‌ای مانند A از $\underline{x}$ ها که

$$\int_A f(\underline{x};\theta_0)d\underline{x} = \int_A f(\underline{x};\theta_1)d\underline{x} = 0$$

مثال ۱.۳ (*) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x;\theta) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x), \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < \theta < 1$$

می‌خواهیم فرضیه‌های زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \frac{1}{3} \\ H_1 : \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع آزمون بر اساس رابطه (۳—۱) به صورت زیر است:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & x > c \\ 0 & x \leq c \end{cases}$$

بنابراین مقادیر خطاهای نوع اول و دوم بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \alpha_\Phi &= P_{\theta=\frac{1}{3}}(X > c) = 1 - \frac{4}{3}c + \frac{1}{3}c^2 \\ \beta_\Phi &= 1 - P_{\theta=\frac{1}{2}}(X > c) = c \end{aligned}$$

برای چند مقدار c مقادیر α_Φ و β_Φ در جدول زیر داده شده‌اند:

c	α_Φ	β_Φ
۰	۱	۰
۰/۲	۰/۷۵	۰/۲
۰/۵	۰/۴۲	۰/۵
۰/۸	۰/۱۵	۰/۸
۱	۰	۱

جدول ۳—۱: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۱.۳

۳—۲—۲ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی برپایه لم نیمن—پیرسن تعمیم‌یافته تحت داده‌های دقیق (طاهری و بهبودیان)

فرض کنید $\underline{X}=(X_1,...,X_n)$ یک نمونه تصادفی با مقدار مشاهده شده $\underline{x}=(x_1,...,x_n)$ باشد که در آن X_i دارای تابع چگالی (جرم) احتمال $\theta\in\Theta$ $f(x_i;\theta)$ است. فرض کنید دو تابع عضویت $H_0(\theta)$ و $H_1(\theta)$ داده شده‌اند و می‌خواهیم بر پایه نمونه تصادفی فوق فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0: & \theta \text{ به‌صورت } H_0(\theta) \text{ است} \\ H_1: & \theta \text{ به‌صورت } H_1(\theta) \text{ است} \end{cases}$$

نخست تابع توان را مشابه حالت معمولی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳.۳ ([۵]) تابع توان برای هر آزمون $\Phi(\underline{X})$ به‌صورت $\beta_\Phi(\theta)=E_\theta[\Phi(\underline{X})]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۳ ([۴۱]) فرض کنید $\Phi(\underline{X})$ یک تابع آزمون برای مسئله آزمون فرضیه‌های فازی باشد و به‌علاوه

$$\int_\theta H_0(\theta)d\theta=M<\infty,\quad \int_\theta H_1(\theta)d\theta=N<\infty$$

دراین‌صورت احتمالات خطاهای نوع اول و دوم به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_\Phi &= \frac{1}{M}\int_\theta H_0(\theta)E_\theta(\Phi(\underline{X}))d\theta \\ \beta_\Phi &= \frac{1}{N}\int_\theta H_1(\theta)[1-E_\theta(\Phi(\underline{X}))]d\theta \end{aligned}$$

در حالت گسسته به جای انتگرال از مجموع‌یابی استفاده می‌کنیم.

اکنون لم نیمن—پیرسن را به‌حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون فازی باشند، تعمیم می‌دهیم.

قضیه: ۲.۳ ([۴۱]) (**لم نیمن—پیرسن تعمیم‌یافته**) طبق مفروضات قضیه ۱.۳، برای آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} H_0: & \theta \text{ به‌صورت } H_0(\theta) \text{ است} \\ H_1: & \theta \text{ به‌صورت } H_1(\theta) \text{ است} \end{cases}$$

الف) هر آزمون به‌صورت

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} > k, \\ \gamma(\underline{x}) & \frac{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} = k, \\ 0 & \frac{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int_\theta f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} < k. \end{cases} \qquad (۳-۳)$$

برای $k \geq 0$ و $0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq 1$، بهترین آزمون در اندازه

$$\alpha = \frac{1}{M}\int_\theta H_0(\theta)E_\theta(\Phi(\underline{X}))d\theta$$

است. به‌علاوه اگر $k=\infty$، آنگاه آزمون

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \int_\theta f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta = 0 \\ 0 & \int_\theta f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta > 0 \end{cases} \qquad (۴-۳)$$

بهترین آزمون در اندازه صفر است.

ب) (وجود) به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$، یک آزمون به‌صورت (۳—۳) یا (۳—۴) با $\gamma(\underline{x}) = \gamma$ (ثابت) در اندازه α وجود دارد.

ج) (یکتایی) اگر Φ^* بهترین آزمون در اندازه α باشد، آنگاه Φ^* به صورت (۳—۳) یا (۳—۴) است، مگر احتمالاً روی مجموعه‌ای مانند A از $\underline{x}$ ها که

$$\int_A f(\underline{x};\theta)H_\circ(\theta)d\theta = \int_A f(\underline{x};\theta)H_\backslash(\theta)d\theta = \circ$$

یکی از خصوصیت‌های این روش تعمیم لم نیمن—پیرسن برای آزمون فرضیه‌های فازی است. ویژگی دیگر این است که برای فرضیه‌های فازی $H_\circ$ و $H_\backslash$ محدودیتی وجود ندارد. همچنین تعریف خطای نوع اول و دوم یکی دیگر از خصوصیات این روش است. ضعف این روش در این است که انتگرالهای $\int_\theta H_\circ(\theta)d\theta$ و $\int_\theta H_\backslash(\theta)d\theta$ ممکن است در برخی از حالتهای خاص متناهی نباشند.

مثال ۲.۳ ([۵]) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x;\theta) = ۲\theta x + ۲(۱-\theta)(۱-x), \qquad \circ < x < ۱, \qquad \circ < \theta < ۱$$

می‌خواهیم فرضیه‌های زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_\circ : \theta \simeq \frac{۱}{۳} \\ H_\backslash : \theta \simeq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

که در آن توابع عضویت $H_\circ(\theta)$ و $H_\backslash(\theta)$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} ۳\theta & \circ \le \theta < \frac{۱}{۳} \\ ۲-۳\theta & \frac{۱}{۳} \le \theta < \frac{۲}{۳} \end{cases} \qquad H_\backslash(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & \circ \le \theta < \frac{۱}{۲} \\ ۲-۲\theta & \frac{۱}{۲} \le \theta < ۱ \end{cases}$$

برای ساختن آزمونی به صورت (۳—۱) ابتدا مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int f(x;\theta)H_\circ(\theta)d\theta &= \int_\circ^{\frac{۲}{۳}} [۲\theta x + ۲(۱-\theta)(۱-x)]H_\circ(\theta)d\theta \\ &= \int_\circ^{\frac{۱}{۳}} [۲\theta x + ۲(۱-\theta)(۱-x)]۳\theta d\theta \\ &+ \int_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۲}{۳}} [۲\theta x + ۲(۱-\theta)(۱-x)](۲-۳\theta)d\theta \\ &= \frac{۲}{۹}(۲-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f(x;\theta)H_1(\theta)d\theta &= \int_0^1 [2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]H_1(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} [2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]2\theta d\theta \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 [2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)](2-2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $k < (x-2)\frac{2}{9}/(\frac{1}{2})$ و یا به‌طور معادل اگر $x > c$.

بنابراین بهترین آزمون به‌صورت زیر است:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & x > c \\ 0 & x \le c \end{cases}$$

تابع توان این آزمون عبارت است از

$$\beta_\Phi(\theta) = P(X > c) = \int_c^1 [2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]dx = 2c(1-c)\theta + (1-c)^2$$

که یک تابع صعودی بر حسب θ است.

برای محاسبه α_Φ توجه کنید که

$$M = \int H_0(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{1}{3}} 3\theta d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2-3\theta)d\theta = \frac{1}{3}$$

و

$$\begin{aligned}\int H_0(\theta)E_\theta(\Phi(X))d\theta &= \int_0^{\frac{1}{3}} 3\theta P(X \ge c)d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2-3\theta)P(X \ge c)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} 3\theta(2c(1-c)\theta) + (1-c)^2)d\theta \\ &+ \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2-3\theta)(2c(1-c)\theta + (1-c)^2)d\theta \\ &= \frac{2}{9}c(1-c) + \frac{1}{3}(1-c)^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$\alpha_\Phi = \frac{\frac{۲}{۹}c(۱-c)+\frac{۱}{۳}(۱-c)^۲}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}c^۲ - \frac{۴}{۳}c + ۱$$

به‌طور مشابه برای β_Φ داریم

$$N = \int H_۱(\theta)d\theta = \frac{۱}{۲}$$

و

$$\int H_۱(\theta)[۱ - E_\theta(\Phi(X))]d\theta = \frac{c}{۲}$$

بنابراین $\beta_\Phi = c$. همانطور که مشاهده می‌کنید مقادیر خطاهای نوع اول و دوم در این مثال دقیقاً برابر مقادیر مشابه آنها در حالت غیرفازی شده است.(مثال ۳—۱ را ببینید)

۳—۲—۳ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی برپایه لم نیمن—پیرسن تعمیم‌یافته تحت داده‌های فازی (ترابی و همکاران)

در این روش ابتدا فضای نمونه‌ای فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ و نمونه تصادفی فازی $\underline{\widetilde{X}} = (\widetilde{X}_۱,...\widetilde{X}_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۵.۳ ([۴٦]) فضای نمونه فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ یک افراز فازی از $\mathcal{X}$ است، یعنی گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فازی $\widetilde{x}$ از $\mathcal{X}$ که توابع عضویت آنها اندازه‌پذیر بورل هستند و در شرط تعامد صدق می‌کنند. $(\Sigma_{\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{X}}}\mu_{\widetilde{x}}(x) = ۱ \quad \forall x \in \mathcal{X})$

تعریف ٦.۳ ([۴٦]) یک نمونه تصادفی فازی مقدار به اندازه n، $\underline{\widetilde{X}} = (\widetilde{X}_۱,...,\widetilde{X}_n)$، مربوط به تابع چگالی احتمال $f(x)$ و فضای نمونه فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$، یک تابع اندازه‌پذیر از Ω به $\widetilde{\mathcal{X}}^n = \widetilde{\mathcal{X}} \times ... \times \widetilde{\mathcal{X}}$ است که در آن تابع چگالی احتمال به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(\widetilde{x}_۱,...,\widetilde{x}_n) = P(\underline{\widetilde{X}} = \underline{\widetilde{x}}) = \int_{\mathcal{X}^n} \Pi_{i=۱}^n \mu_{\widetilde{x}_i}(x_i)f(x_i)d\nu(x_i)$$

نکته ۱.۳ ([۴۶]) با استفاده از قضیه فوبینی (ضمیمه ۲—۷ را ببینید) داریم

$$f(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n) = f(\widetilde{x}_1)...f(\widetilde{x}_n) \qquad \forall \widetilde{x}_i \in \widetilde{\mathcal{X}}$$

که در آن

$$f(\widetilde{x}_i) = \int_{\mathcal{X}} \mu_{\widetilde{x}_i}(x) f(x) d\nu(x)$$

و $f(\widetilde{x}_i)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی فازی مقدار $\widetilde{X}_i$ به ازای هر $i = 1,..n$ نامیده می‌شود. رابطه بالا بر استقلال n متغیر تصادفی معمولی منطبق است.

نکته ۲.۳ ([۴۶]) توجه کنید که $f(\widetilde{x}_i)$ یک تابع چگالی احتمال روی $\widetilde{\mathcal{X}}$ است، چون طبق تعامد $\mu_{\widetilde{x}_i}$ داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\widetilde{x}_i \in \widetilde{\mathcal{X}}} f(\widetilde{x}_i) &= \Sigma_{\widetilde{x}_i \in \widetilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \mu_{\widetilde{x}_i}(x) f(x) d\nu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) (\Sigma_{\widetilde{x}_i \in \widetilde{\mathcal{X}}} \mu_{\widetilde{x}_i}(x)) d\nu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) d\nu(x) = 1 \end{aligned}$$

قضیه: ۳.۳ ([۴۶]) اگر g یک تابع اندازه‌پذیر از $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ به $\mathcal{R}$ باشد آنگاه $Y = g(\underline{\widetilde{X}})$ یک متغیر تصادفی معمولی است.

اثبات. ([۴۶]) چون طبق تعریف ۶.۳ $\underline{\widetilde{X}}$ یک تابع اندازه‌پذیر از Ω به $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ و g یک تابع اندازه‌پذیر از $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ به $\mathcal{R}$ است، بنابراین $g(\underline{\widetilde{X}}(\omega)) = (go\underline{\widetilde{X}})(\omega)$ یک ترکیب از دو تابع اندازه‌پذیر است، بنابراین تابعی اندازه‌پذیر از Ω به $\mathcal{R}$ است. □

توجه کنید، با استفاده از قضیه ۳.۳ می‌توانیم همه مفاهیم مرتبط با متغیر تصادفی معمولی از قبیل امید ریاضی و واریانس را تعریف کنیم.

قضیه: ۴.۳ ([۴۶]) فرض کنید $\widetilde{\underline{X}}$ یک نمونه تصادفی فازی مقدار وابسته به فضای نمونه فازی $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ باشد و g یک تابع اندازه‌پذیر از $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ به $\mathcal{R}$ باشد، امید $g(\widetilde{\underline{X}})$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[g(\widetilde{\underline{X}})] = \Sigma_{\widetilde{\underline{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}^n} g(\widetilde{\underline{x}}) f(\widetilde{\underline{x}})$$

اثبات. با استفاده از تغییر متغیر و قضیه رادون—نیکودیم داریم:

$$\begin{aligned} E[g(\widetilde{\underline{X}})] &= \int_{\Omega} g(\widetilde{\underline{X}}(\omega)) dP(\omega) \\ &= \int_{\widetilde{\mathcal{X}}^n} g(\widetilde{\underline{x}}) dPo\widetilde{\underline{X}}^{-1}(\widetilde{\underline{x}}) \\ &= \Sigma_{\widetilde{\underline{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}^n} g(\widetilde{\underline{x}}) f(\widetilde{\underline{x}}) \end{aligned}$$

□

نکته ۳.۳ ([۴۶]) با استفاده از قضیه ۴.۳ می‌توانیم احتمال پیشامدهای فازی یعنی پیشامدهایی به فرم $(\widetilde{\underline{X}} \in \widetilde{B}) = \{\omega \in \Omega | \widetilde{\underline{X}}(\omega) \in \widetilde{B}\}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(\widetilde{\underline{X}} \in \widetilde{B}) &= E[I_{\widetilde{B}}(\widetilde{\underline{X}})] \\ &= \Sigma_{\widetilde{\mathcal{X}}^n} I_{\widetilde{B}}(\widetilde{\underline{x}}) f(\widetilde{\underline{x}}) = \Sigma_{\widetilde{\underline{x}} \in \widetilde{B}} f(\widetilde{\underline{x}}) \end{aligned}$$

که در آن $\widetilde{B} \subset \widetilde{\mathcal{X}}^n$ و $I_{\widetilde{B}}(\widetilde{\underline{x}})$ تابع نشانگر مجموعه فازی $\widetilde{B}$ است.

تعریف ۷.۳ ([۴۶]) فرض کنید $\widetilde{\underline{X}}$ یک نمونه تصادفی فازی مقدار با تابع چگالی احتمال $f(\widetilde{\underline{x}};\theta)$ و $\Phi(\widetilde{\underline{X}})$ یک تابع اندازه‌پذیر از $\widetilde{\mathcal{X}}^n$ به $[0, 1]$ باشد. بنابراین $\Phi(\widetilde{\underline{x}})$ تابع آزمون فازی نامیده می‌شود اگر برابر احتمال رد H_0 به شرط مشاهده $\widetilde{\underline{X}} = \widetilde{\underline{x}}$ باشد.

تعریف ۸.۳ ([۴۶]) تابع توان تابع آزمون فازی $\Phi(\widetilde{\underline{X}})$ با $\beta_{\Phi}(\theta) = E_{\theta}[\Phi(\widetilde{\underline{X}})]$ تعریف می‌شود. توجه کنید که طبق قضیه ۴.۳ می‌توانیم $\beta_{\Phi}(\theta)$ را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\beta_{\Phi}(\theta) = E_{\theta}[\Phi(\widetilde{\underline{X}})] = \Sigma_{\widetilde{\mathcal{X}}^n} \Phi(\widetilde{\underline{x}}) f(\widetilde{\underline{x}};\theta)$$

تعریف ۹.۳ ([۴۶]) فرض کنید $\Phi(\underline{\widetilde{X}})$ یک تابع آزمون فازی باشد و

$$M = \int_{\Theta} \widetilde{H}_{0}(\theta) d\theta < \infty \qquad N = \int_{\Theta} \widetilde{H}_{1}(\theta) d\theta < \infty$$

(در حالت گسسته $\int$ با Σ جایگزین می‌شود) احتمالات خطاهای نوع اول و دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_{\Phi} = \frac{1}{M} \int_{\Theta} \widetilde{H}_{0}(\theta) E_{\theta}[\Phi(\underline{\widetilde{X}})] d\theta \qquad \beta_{\Phi} = \frac{1}{N} \int_{\Theta} \widetilde{H}_{1}(\theta)[1 - E_{\theta}[\Phi(\underline{\widetilde{X}})]] d\theta$$

تعریف ۱۰.۳ ([۴۶]) تابع آزمون فازی Φ یک آزمون فازی در سطح α نامیده می‌شود اگر $\alpha_{\Phi} \leq \alpha$. α_{Φ} اندازه Φ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳ ([۴۶]) آزمون فازی Φ در سطح α بهترین آزمون فازی در سطح α نامیده می‌شود اگر برای هر آزمون Φ^* در سطح α داشته باشیم $\beta_{\Phi} \leq \beta_{\Phi^*}$.

قضیه: ۵.۳ ([۴۶]) **لم نیمن—پیرسن تعمیم یافته با داده مبهم:** فرض کنید $\underline{\widetilde{X}} = (\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی مقدار با مقدار مشاهده‌شده $\underline{\widetilde{x}} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$ و تابع چگالی احتمال $f(\underline{\widetilde{x}}; \theta)$ باشد که در آن $\theta \in \Theta$ یک پارامتر مجهول است. برای آزمون

$$\begin{cases} H_0: & \theta \text{ به‌صورت } \widetilde{H}_0(\theta) \text{ است} \\ H_1: & \theta \text{ به‌صورت } \widetilde{H}_1(\theta) \text{ است} \end{cases}$$

الف) هر آزمون فازی با تابع آزمون

$$\Phi(\underline{\widetilde{x}}) = \begin{cases} 1 & \frac{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_1(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_0(\theta)d\theta} > k, \\ \delta(\underline{\widetilde{x}}) & \frac{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_1(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_0(\theta)d\theta} = k, \\ 0 & \frac{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_1(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} f(\underline{\widetilde{x}};\theta)\widetilde{H}_0(\theta)d\theta} < k. \end{cases} \qquad (۵-۳)$$

برای $k \geq \circ$ و $\circ \leq \delta(\widetilde{x}) \leq ۱$، بهترین آزمون فازی در سطح $\alpha = \alpha_\Phi$ است. اگر $k = \infty$، آنگاه آزمون فازی

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} ۱ & \int_\Theta f(\widetilde{x};\theta)\widetilde{H}_\circ(\theta)d\theta = \circ \\ \circ & \int_\Theta f(\widetilde{x};\theta)\widetilde{H}_\circ(\theta)d\theta > \circ \end{cases} \qquad (۳-٦)$$

بهترین آزمون فازی در اندازه صفر است.

ب) (وجود) به ازای هر $\circ \leq \alpha \leq ۱$، یک آزمون به‌صورت (۳—۵) یا (۳—٦) با $\delta(\underline{x}) = \delta$ برای $\alpha = \alpha_\Phi$ وجود دارد.

خصوصیت این روش تعمیم لم نیمن—پیرسن و تعریف خطاهای نوع اول و دوم برای تابع آزمون در فرضیه‌های فازی تحت داده‌های فازی می‌باشد. به این ترتیب می‌توان با در دست داشتن یک ملاک بهینگی آزمون بهینه‌ای را برای مسایل مورد نظر به دست آورد. یک ضعف این روش در این است که داده‌های فازی باید به صورتی که در فضای نمونه‌ای فازی داده شده است، استخراج گردد، در صورتی که داده‌های فازی هر صورتی می‌توانند داشته باشند. یعنی بدون وجود یک فضای نمونه‌ای فازی که از قبل مشخص شده باشد، نمی‌توان مسأله را دنبال نمود.

مثال ۳.۳ ([۴٦]) فرض کنید یک متغیر تصادفی دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x;\theta) = ۲\theta x + ۲(۱-\theta)(۱-x), \qquad \circ < x < ۱, \qquad \circ < \theta < ۱$$

می‌خواهیم فرضیه زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} H_\circ : \theta \simeq \frac{۱}{۳} \\ H_۱ : \theta \simeq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

که در آن توابع عضویت $H_\circ(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} ۳\theta & \circ < \theta \leq \frac{۱}{۳} \\ ۲-۳\theta & \frac{۱}{۳} < \theta \leq \frac{۲}{۳} \\ \circ & \frac{۲}{۳} < \theta < ۱ \end{cases} \qquad H_۱(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & \circ < \theta \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲-۲\theta & \frac{۱}{۲} < \theta < ۱ \end{cases}$$

فرض کنید سه مشاهده فازی $\tilde{x}_1$ (نزدیک به صفر)، $\tilde{x}_2$ (نزدیک به ۰.۵) و $\tilde{x}_3$ (نزدیک به یک) را داریم که توابع عضویت آنها به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x) = \begin{cases} 0/8 - 0/8x & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{x}_2}(x) = \begin{cases} 0/2 + 0/8x & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 1 - 0/8x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{x}_3}(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0/8x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

در نتیجه تابع چگالی احتمال فازی به صورت زیر به دست می آید:

$$f(\tilde{x};\theta) = \int_0^1 \mu_{\tilde{x}}(x) f(x;\theta)dx = \begin{cases} 0/47 - 0/33\theta & \tilde{x} = \tilde{x}_1 \\ 0/4 & \tilde{x} = \tilde{x}_2 \\ 0/13 + 0/33\theta & \tilde{x} = \tilde{x}_3 \end{cases}$$

بنابراین

$$\widetilde{H}_0(\tilde{x}) = \int_0^1 H_0(\theta) f(\tilde{x};\theta)d\theta = \begin{cases} 0/12 & \tilde{x} = \tilde{x}_1 \\ 0/13 & \tilde{x} = \tilde{x}_2 \\ 0/08 & \tilde{x} = \tilde{x}_3 \end{cases}$$

و

$$\widetilde{H}_1(\tilde{x}) = \int_0^1 H_1(\theta) f(\tilde{x};\theta)d\theta = \begin{cases} 0/15 & \tilde{x} = \tilde{x}_1 \\ 0/20 & \tilde{x} = \tilde{x}_2 \\ 0/15 & \tilde{x} = \tilde{x}_3 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\widetilde{H}_1(\tilde{x})/\widetilde{H}_0(\tilde{x}) = \frac{\int_0^1 H_1(\theta) f(\tilde{x};\theta)d\theta}{\int_0^1 H_0(\theta) f(\tilde{x};\theta)d\theta} = \begin{cases} 1/25 & \tilde{x} = \tilde{x}_1 \\ 1/54 & \tilde{x} = \tilde{x}_2 \\ 1/88 & \tilde{x} = \tilde{x}_3 \end{cases}$$

حال با توجه به تابع آزمون (۳—۲) می‌توانیم چهار آزمون MP با نواحی بحرانی زیر به دست آوریم:

$$c_1 = \emptyset \qquad c_2 = \{\tilde{x}_3\} \qquad c_3 = \{\tilde{x}_2, \tilde{x}_3\} \qquad c_4 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$$

اگر ناحیه بحرانی $c_2 = \{\tilde{x}_3\}$ باشد برای به‌دست آوردن α_Φ، داریم

$$\int H_0(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{1}{3}} 3\theta d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2 - 3\theta)d\theta = \frac{1}{3}$$

بنابراین

$$\alpha_\Phi = \frac{۰/۰۸}{\frac{۱}{۳}} = ۰/۲۴$$

به‌طور مشابه $\beta_\Phi = ۰/۷$.

خطاهای نوع اول و دوم در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

ناحیه بحرانی	α_Φ	β_Φ
$c_۱$	۰	۱
$c_۲$	۰/۲۴	۰/۷
$c_۳$	۰/۶۳	۰/۳
$c_۴$	۱	۰

جدول ۳—۲: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۳.۳

با مقایسه جدول ۳—۱ و ۳—۲ مشاهده می‌کنیم که وقتی ناحیه بحرانی تهی باشد، مقادیر خطاهای نوع اول و دوم برابر مقادیر مشابه در حالت $c = ۱$ می‌شود، همچنین وقتی ناحیه بحرانی هر سه مقدار فازی $\widetilde{x}_۱, \widetilde{x}_۲, \widetilde{x}_۳$ را شامل شود، مقادیر خطاهای نوع اول و دوم برابر حالت $c = ۰$ در جدول ۳—۱ است.

۳—۲—۴ بررسی آزمون فرضیه‌های فازی برپایه لم نیمن—پیرسن تعمیم‌یافته تحت داده‌های دقیق (اکبری و سعیدی)

قبل از بیان لم—نیمن پیرسن یک تابع چگالی (جرم) احتمال بر اساس آزمون فرض فازی بیان می‌کنیم.

تابع چگالی (جرم) احتمال

([۹]) فرض کنید X یک متغیر تصادفی و $S_X = \{x \in \mathcal{R} : f(x;\theta) > ۰\}$ تکیه‌گاه یا فضای نمونه X باشد و

$$f(x|\widetilde{\theta}) = \frac{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta) f(x|\theta) d\theta d\alpha}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta) d\theta d\alpha} \qquad a \in [۰, ۱)$$

که در آن $\widetilde{H}(\theta)$ تابع عضویت فرض فازی است و $\widetilde{\theta}_\alpha$، α—برش آن است. چگالی $f(x;\widetilde{\theta})$ را تابع چگالی (جرم) احتمال فازی X می‌نامیم. توجه کنید که $f(x;\widetilde{\theta}) \geq ۰$ و

$$\begin{aligned}
\int_{x\in S_X} f(x;\widetilde{\theta})dx &= \int_{x\in S_X} \frac{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)f(x;\theta)d\theta d\alpha}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)d\theta d\alpha}dx \\
&= \frac{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)\int_{x\in S_X} f(x;\theta)dxd\theta d\alpha}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)d\theta d\alpha} \\
&= ۱
\end{aligned}$$

فرض کنید $g(x) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ تابع دلخواه در x باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{\theta}}(g(X)) &= \int_{x\in S_X} g(x)f(x;\widetilde{\theta})dx \\
&= \frac{\int_{x\in S_X}\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} g(x)\widetilde{H}(\theta)f(x;\theta)d\theta d\alpha dx}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)d\theta d\alpha} \\
&= \frac{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)\int_{x\in S_X} g(x)f(x;\theta)dxd\theta d\alpha}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)d\theta d\alpha} \\
&= \frac{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)E_\theta(g(x))d\theta d\alpha}{\int_a^۱ \int_{\theta\in\widetilde{\theta}_\alpha} \widetilde{H}(\theta)d\theta d\alpha}.
\end{aligned}$$

فرض کنید $\underline{X} = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$ یک نمونه تصادفی باشد که در آن X_i دارای تابع چگالی احتمال فازی $f(x;\widetilde{\theta})$ است.

تعریف ۱۲.۳ ([۹]) فرض کنید $\psi(\underline{X})$ یک تابع آزمون باشد. احتمال خطای نوع I و II به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_\psi = E_{\widetilde{\theta}_۰}[\psi(\underline{X})]$$

$$\beta_\psi = ۱ - E_{\widetilde{\theta}_۱}[\psi(\underline{X})] = E_{\widetilde{\theta}_۱}[۱ - \psi(\underline{X})]$$

تعریف ۱۳.۳ ([۹]) آزمون ψ در سطح α نامیده می‌شود اگر $\alpha_\psi \leq \alpha$ که در آن $\alpha \in [۰, ۱]$.

تعریف ۱۴.۳ ([۹]) آزمون ψ در سطح α، بهترین آزمون در سطح α نامیده می‌شود اگر به ازای هر آزمون ψ^* در سطح α، $\beta_\psi \leq \beta_{\psi^*}$.

لم نیمن—پیرسن بر اساس آزمون فرض فازی

لم ۱.۳ ([۹]) فرض کنید $\underline{X}$ یک نمونه تصادفی با مقدار مشاهده شده $\underline{x} = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$ باشد که در آن X_i دارای تابع چگالی احتمال فازی $f(x;\widetilde{\theta})$ با $\theta \in \Theta$ مجهول است. برای آزمون

$$\begin{cases} H_۰: & \text{است } \widetilde{H}_۰(\theta) \text{ به‌صورت } \theta \\ H_۱: & \text{است } \widetilde{H}_۱(\theta) \text{ به‌صورت } \theta \end{cases}$$

i) هر آزمون با تابع آزمون

$$\psi(\underline{x}) = \begin{cases} ۱ & \frac{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱)}{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰)} > k \\ \delta(\underline{x}) & \frac{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱)}{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰)} = k \\ ۰ & \frac{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱)}{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰)} < k \end{cases} \qquad (۷-۳)$$

برای بعضی $k \geq ۰$ و $۰ \leq \delta(\underline{x}) \leq ۱$ بهترین آزمون اندازه آن است.

اگر $k = \infty$ آنگاه آزمون

$$\psi(\underline{x}) = \begin{cases} ۱ & f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰) = ۰ \\ ۰ & f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰ > ۰ \end{cases}$$

بهترین آزمون اندازه صفر است.

ii) برای $۰ \leq \alpha \leq ۱$ یک آزمون به فرم (i) با $\delta(\underline{x}) = \delta$ (یک ثابت) برای $\alpha_\psi = \alpha$ وجود دارد.

اثبات. ([۹]) i) فرض کنید $\alpha_\psi = \alpha$ و $\psi^*(\underline{x})$ آزمون دیگری در سطح α باشد. اثبات می‌کنیم $\beta_\psi \leq \beta_{\psi^*}$.

فرض کنید

$$\begin{aligned} A_۱ &= \{\underline{x} : f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱) - kf(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰) > ۰\}, \\ A_۲ &= \{\underline{x} : f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱) - kf(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰) = ۰\}, \\ A_۳ &= \{\underline{x} : f(\underline{x};\widetilde{\theta}_۱) - kf(\underline{x};\widetilde{\theta}_۰) < ۰\}. \end{aligned}$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}\int[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})](f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)-kf(\underline{x};\widetilde{\theta}_0))d\underline{x} &= \int_{A_1}+\int_{A_2}+\int_{A_3}\\ &\geq 0+0+0=0\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)d\underline{x} &\geq k\int[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)d\underline{x}\\ &\geq \alpha-\alpha=0\end{aligned}$$

بنابراین سمت چپ نامساوی بالا مثبت است یعنی

$$E_{\widetilde{\theta}_1}(\psi(\underline{X}))\geq E_{\widetilde{\theta}_1}(\psi^*(\underline{X}))$$

یا

$$\beta_\psi\leq\beta_{\psi^*}$$

برای حالت $k=\infty$ ابتدا ثابت می‌کنیم که آزمون اندازه صفر است. فرض کنید

$$\begin{aligned}A_4 &= \{\underline{x}:f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)=0\}\\ A_5 &= \{\underline{x}:f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)>0\}\end{aligned}$$

حال داریم

$$\begin{aligned}E_{\widetilde{\theta}_0}(\psi(\underline{X})) &= \int\psi(\underline{x})f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)d\underline{x}\\ &= \int_{A_4}\psi(\underline{x})f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)d\underline{x}+\int_{A_5}\psi(\underline{x})f(\underline{x};\widetilde{\theta}_0)d\underline{x}\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

یا $\alpha_\psi=0$.

بدیهی است که اگر ψ^* آزمون دیگری در اندازه صفر باشد باید روی A_5 صفر شود. بنابراین کافی

است نشان دهیم $\beta_\psi \le \beta_{\psi^*}$. برای این منظور داریم

$$\begin{aligned}\int[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)d\underline{x} &= \int_{A_4}[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)d\underline{x}+\int_{A_5}[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)d\underline{x}\\ &= \int_{A_4}[\psi(\underline{x})-\psi^*(\underline{x})]f(\underline{x};\widetilde{\theta}_1)d\underline{x}+0\\ &\ge 0\end{aligned}$$

بنابراین $E_{\widetilde{\theta}_1}(\psi(\underline{X})) \ge E_{\widetilde{\theta}_1}(\psi^*(\underline{X}))$ یا $\beta_\psi \le \beta_{\psi^*}$.

(ii) خودمان را به حالت $0 < \alpha \le 1$ محدود می کنیم، چون بهترین آزمون اندازه صفر در قسمت (i) داده شده است. چون اندازه آزمون شکل (i)، α است باید داشته باشیم $E_{\widetilde{\theta}_0}(\psi(\underline{X}))=\alpha$ یا

$$P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} > k)+\delta P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} = k)=\alpha.$$

بنابراین

$$P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} \le k)-\delta P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} = k)=1-\alpha.$$

واضح است که $P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} \le k)$ تابعی غیرنزولی و از راست پیوسته است (چون تابع توزیع تجمعی است). اگر k_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} \le k_0)=1-\alpha,$$

آنگاه $\delta(\underline{x})=0$ و $k=k_0$ قرار می‌دهیم. در غیر اینصورت k_0 وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} < k_0) &\le 1-\alpha\\ &< P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} \le k_0),\end{aligned}$$

اکنون $k=k_0$ قرار می‌دهیم و

$$\delta(\underline{x})=\frac{P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_0)} \le k_0)-(1-\alpha)}{P(\frac{f(\underline{X};\widetilde{\theta}_1)}{f(\underline{X}|\widetilde{\theta}_0)} = k_0)}.$$

$\delta(\underline{x})$ بالا در $E_{\widetilde{\theta}_\circ}(\psi(\underline{X})) = \alpha$ صدق می‌کند و $\delta(x) \in [\circ, \text{١}]$. بنابراین (ii) ثابت می‌شود. □

لم ۲.۳ ([۹]) اگر $H_\circ$ و $H_\text{١}$ فرضهای غیرفازی مرکب باشند، توابع عضویت آنها دقیقاً توابع نشانگر مجموعه‌های $H_\circ$ و $H_\text{١}$ هستند یعنی

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} \text{١} & \theta \in \Theta_\circ \\ \circ & \theta \in \Theta_\text{١} \end{cases} \qquad\qquad H_\text{١}(\theta) = \begin{cases} \circ & \theta \in \Theta_\circ \\ \text{١} & \theta \in \Theta_\text{١} \end{cases}$$

با استفاده از لم قبل $H_\circ$ را رد می‌کنیم اگر

$$\frac{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_\text{١})}{f(\underline{x};\widetilde{\theta}_\circ)} > k$$

یا

$$\int_{\theta\in\Theta_\text{١}} f(\underline{x};\theta)d\theta > k\int_{\theta\in\Theta_\circ} f(\underline{x};\theta)d\theta.$$

این همان رد $H_\circ$ در آزمون بیز با تابع زیان صفر و یک و تابع چگالی پیشین مبهم برای θ است به قسمی که $\pi(\theta) = b$.

خصوصیت این روش تعمیم لم نیمن—پیرسن و تعریف خطاهای نوع اول و دوم برای تابع آزمون در فرضیه‌های فازی تحت داده‌های دقیق می‌باشد. به این ترتیب می‌توان با در دست داشتن یک ملاک بهینگی آزمون بهینه‌ای را برای مسایل مورد نظر به دست آورد. خصوصیت دیگر این روش استفاده از تابع چگالی (جرم) احتمال فازی است. ضعف این روش طولانی بودن محاسبات است.

مثال ۴.۳ $(*)$ بر اساس مفروضات مثال ۱.۳ ابتدا نامساوی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\dfrac{\int_\circ^\text{١}\int_{\theta\in\widetilde{\theta}_{\text{١}\alpha}} \widetilde{H}_\text{١}(\theta)f(x;\theta)d\theta d\alpha}{\int_\circ^\text{١}\int_{\theta\in\widetilde{\theta}_{\text{١}\alpha}} \widetilde{H}_\text{١}(\theta)d\theta d\alpha}}{\dfrac{\int_\circ^\text{١}\int_{\theta\in\widetilde{\theta}_{\circ\alpha}} \widetilde{H}_\circ(\theta)f(x;\theta)d\theta d\alpha}{\int_\circ^\text{١}\int_{\theta\in\widetilde{\theta}_{\circ\alpha}} \widetilde{H}_\circ(\theta)d\theta d\alpha}} > k$$

که در آن $\widetilde{\theta}_{1\alpha}$ و $\widetilde{\theta}_{2\alpha}$ طبق گزاره ۲.۱ به‌صورت زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{\theta}_{1\alpha} = [\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}] \qquad \widetilde{\theta}_{0\alpha} = [\frac{\alpha}{3}, \frac{2-\alpha}{3}]$$

پس از انجام محاسبات نامساوی به صورت زیر به‌دست می آید:(برنامه انجام محاسبات با استفاده از نرم‌افزار $Maple$ در ضمیمه ۴—۱ —الف آمده است)

$$\frac{3}{-2x+4} > k$$

بنابراین فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $x > c$. در نتیجه بهترین آزمون طبق رابطه ۳—۷ به صورت زیر است:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x > c \\ 0 & x \leq c \end{cases}$$

حال α_ψ و β_ψ (ضمیمه ۴—۱ —ب را ببینید) به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
\alpha_\psi &= \frac{\int_0^1 \int_{\theta \in \widetilde{\theta}_{0\alpha}} \widetilde{H}(\theta) P(x > c) d\theta d\alpha}{\int_0^1 \int_{\theta \in \widetilde{\theta}_{0\alpha}} \widetilde{H}(\theta) d\theta d\alpha} \\
&= \frac{\int_0^1 (\int_{\frac{\alpha}{3}}^{\frac{1}{3}} 3\theta P(x > c) d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2-\alpha}{3}} (2 - 3\theta) P(x > c) d\theta) d\alpha}{\int_0^1 (\int_{\frac{\alpha}{3}}^{\frac{1}{3}} 3\theta d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2-\alpha}{3}} (2 - 3\theta) d\theta) d\alpha} \\
&= -\frac{64}{51} c + \frac{16}{51} c^2 + \frac{16}{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_\psi &= \frac{\int_0^1 \int_{\theta \in \widetilde{\theta}_{1\alpha}} \widetilde{H}(\theta)(1 - P(x > c)) d\theta d\alpha}{\int_0^1 \int_{\theta \in \widetilde{\theta}_{1\alpha}} \widetilde{H}(\theta) d\theta d\alpha} \\
&= \frac{\int_0^1 (\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\theta (1 - P(x > c)) d\theta + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\alpha}{2}} (2 - 2\theta)(1 - P(x > c)) d\theta) d\alpha}{\int_0^1 (\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\theta d\theta + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\alpha}{2}} (2 - 2\theta) d\theta) d\alpha} \\
&= c
\end{aligned}$$

برای چند مقدار c مقادیر α_Φ و β_Φ در جدول زیر داده شده‌اند:

c	α_Φ	β_Φ
۰	۰/۹۴	۰
۰/۲	۰/۷	۰/۲
۰/۵	۰/۳۹	۰/۵
۰/۸	۰/۱۴	۰/۸
۱	۰	۱

جدول ۳—۳: احتمالات خطاهای نوع I و II در مثال ۴.۳

همانطور که در جدول ۳—۳ مشاهده می‌کنید مقادیر خطای نوع اول نسبت به مقادیر مشابه آنها در جدول ۳—۱ کمتر شده‌اند ولی تفاوت چندانی ندارند.

برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر توزیع نمایی بر اساس تابع چگالی احتمال فازی

قبل از بیان این برآورد ابتدا یک گزاره همراه با یک مثال را ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱.۳ $(*)$ اگر $\widetilde{\theta}$ را با یک تابع عضویت مثلثی با فرض $s_1 = s_2 = \epsilon$ نشان دهیم، یعنی $\widetilde{\theta} = (\theta - \epsilon, \theta, \theta + \epsilon)$ آنگاه داریم:

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x; \widetilde{\theta}) = f(x; \theta)$$

اثبات. $(*)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x; \widetilde{\theta})$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^1 \int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon} \widetilde{H}(t) f(x;t) dt d\alpha}{\int_0^1 \int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon} \widetilde{H}(t) dt d\alpha}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A + B}{\int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta + (1-\alpha)\epsilon)d\alpha + \int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta - (1-\alpha)\epsilon)d\alpha}$$

که در آن $A = \int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta + (1-\alpha)\epsilon) f(x; \theta + (1-\alpha)\epsilon)d\alpha$
و $B = \int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta - (1-\alpha)\epsilon) f(x; \theta - (1-\alpha)\epsilon)d\alpha$. بنابراین داریم:

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x; \widetilde{\theta})$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^1 (1-\alpha)[\widetilde{H}(\theta + (1-\alpha)\epsilon) f(x; \theta + (1-\alpha)\epsilon) + \widetilde{H}(\theta - (1-\alpha)\epsilon) f(x; \theta - (1-\alpha)\epsilon)]d\alpha}{\int_0^1 (1-\alpha)[\widetilde{H}(\theta + (1-\alpha)\epsilon) + [\widetilde{H}(\theta - (1-\alpha)\epsilon)]d\alpha}$$

$$= \frac{2\int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta) f(x; \theta)d\alpha}{2\int_0^1 (1-\alpha)\widetilde{H}(\theta)d\alpha}$$

$$= f(x; \theta)$$

□

مثال ۵.۳ (*) فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع نمایی باشد یعنی

$$f(x; t) = t\exp(-tx) \qquad x, t \geq 0$$

همچنین فرض کنید

$$\widetilde{H}(t) = \begin{cases} \frac{t-\theta+\epsilon}{\epsilon} & \theta - \epsilon \leq t \leq \theta \\ \frac{\theta+\epsilon-t}{\epsilon} & \theta \leq t \leq \theta + \epsilon \end{cases}$$

در اینصورت داریم

$$f(x|\widetilde{\theta}) = \frac{\int_{0}^{1}\int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon}\widetilde{H}(t)f(x|t)dtd\alpha}{\int_{0}^{1}\int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon}\widetilde{H}(t)dtd\alpha}$$

$$= \frac{\int_{0}^{1}\int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta}(\frac{t-\theta}{\epsilon}+1)t\exp(-tx)dtd\alpha + \int_{0}^{1}\int_{\theta}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon}(\frac{\theta-t}{\epsilon}+1)t\exp(-tx)dtd\alpha}{\int_{0}^{1}\int_{\theta-(1-\alpha)\epsilon}^{\theta}(\frac{t-\theta}{\epsilon}+1)dtd\alpha + \int_{0}^{1}\int_{\theta}^{\theta+(1-\alpha)\epsilon}(\frac{\theta-t}{\epsilon}+1)dtd\alpha}$$

$$= \frac{-12\exp(-x\theta)}{x^{3}\epsilon^{2}} - \frac{6\theta\exp(-x\theta)}{x^{2}\epsilon^{2}} + \frac{9\exp(-x\theta+x\epsilon)}{x^{4}\epsilon^{3}} + \frac{3\theta\exp(-x\theta+x\epsilon)}{x^{3}\epsilon^{3}}$$

$$-\frac{3\exp(-x\theta+x\epsilon)}{x^{3}\epsilon^{2}} - \frac{9\exp(-x\theta-x\epsilon)}{x^{4}\epsilon^{3}} - \frac{3\theta\exp(-x\epsilon-x\theta)}{x^{3}\epsilon^{3}} - \frac{3\exp(-x\theta-x\epsilon)}{x^{3}\epsilon^{2}}$$

در نتیجه با استفاده از نرم‌افزار $Maple$ (ضمیمه ۴—۲ را ببینید) می‌توانیم به دست آوریم:

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x|\widetilde{\theta}) = \theta\exp(-x\theta)$$

مثال ۶.۳ (*) در مثال قبل برآورد درستنمایی ماکزیمم برای θ با استفاده از نرم‌افزار $Maple$ (ضمیمه ۴—۳ را ببینید) به صورت به دست آمده است:

$$\widehat{\theta} = -\frac{2\exp(x\epsilon) - 2(\exp(x\epsilon))^{2} + (\exp(x\epsilon))^{2}x\epsilon + x\epsilon}{x/2\exp(x\epsilon)x\epsilon - (\exp(x\epsilon))^{2} + 1}$$

پیشنهادات

همانطور که در چکیده ذکر کردیم، علاوه بر مطالبی که تاکنون در مورد استنباط اعداد فازی گفته شده، می‌توان به مطالب دیگری نیز در آینده پرداخت که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: برآوردگرهای $UMVU$ و بیز به‌دست آمده در فصل ۲ را می‌توان بر اساس متغیرهای تصادفی فازی شهودی ([۲]) به‌دست آورد. تابع جرم معرفی شده در فصل سوم می‌تواند برای به‌دست آوردن احتمالات در توزیع‌های گسسته استفاده شود، به بیان دیگر، تمامی فصول گفته شده در کتاب باکلی [۱۵] با استفاده از این تابع احتمال قابل تعمیم است. همچنین در مبحث رگرسیون اگر خطاها به صورت متغیرهای تصادفی با پارامتر فازی در نظر گرفته شود، می‌توان به رگرسیون به شیوه فازی نگریست. در فصل ۳ اشاره کوتاهی به بدست آوردن برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بر اساس تابع چگالی شده است، این تابع چگالی را می‌توان برای به‌دست آوردن سایر برآودگرها استفاده نمود.

ضمیمه

ضمیمهٔ (۱)

در این قسمت برخی مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی را که در این مجموعه مورد استفاده قرار گرفته، به‌طور مختصر ارائه می‌دهیم. برای اطلاع بیشتر می‌توان به ([۳]) مراجعه کرد.

۱) تابع f را در نقطه $x_\circ$ نیم پیوسته بالایی نامیم اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall\epsilon > \circ,\ \ \exists\delta > \circ,\ \ s.t\ \ \ |x - x_\circ| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ f(x) < f(x_\circ) + \epsilon.$$

۲) فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد، تابع $d : X \times X \to R$ که در سه شرط زیر صدق کند را یک متر می‌گوییم:

الف) $d(p,q) > \circ$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,q) = \circ$ هرگاه $p = q$،

ب) $d(p,q) = d(q,p)$،

پ) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

مجموعه X به همراه متر d را یک فضای متری نامیده و آن را با (X,d) نمایش می‌دهیم.

۳) فرض کنید X یک فضای متری باشد، تمام نقاط و مجموعه‌های یاد شده در زیر عنصرها و زیرمجموعه‌های X فرض می‌شوند:

۱. یک همسایگی نقطه p مجموعه ای است مثل $N_r(p)$ مرکب از تمام نقاطی چون q که $d(p,q) < r$. عدد r شعاع $N_r(p)$ نامیده می‌شود.

۲. نقطه p یک نقطه حدی مجموعه E است هر گاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

۳. E بسته است هر گاه هر نقطه حدی E یک نقطه از E باشد.

۴. نقطه p یک نقطه درونی E است هرگاه یک همسایگی از p مانند N باشد به طوری که $N \subset E$.

۵. E باز است هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی‌اش باشد.

٦. E کراندار است هرگاه عددی حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $q \in X$ باشند به طوری که به ازای هر $p \in E$، $d(p,q) < M$.

۷. E محدب است هرگاه به ازای هر $x_۱, x_۲ \in E$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \in E$$

۴) فرض کنید $A \subset R$، در اینصورت اندازه خارجی لبگ مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m^*(A) = \inf\{\Sigma_{n=۱}^{\infty} l(I_n) : A \subset \cup_{n=۱}^{\infty} I_n\}$$

که در آن $l(I_n)$ طول بازه I_n است.

۵) مجموعه $E \subset R$ را اندازه‌پذیر لبگ گوییم اگر برای هر مجموعه A داشته باشیم

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

در اینصورت اندازه لبگ E برابر اندازه خارجی آن است.

٦) گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ به قسمی که $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$ باشد را یک پوشش باز مجموعه E می‌نامیم.

۷) زیر مجموعه E از فضای متری X را فشرده می‌نامیم هرگاه هر پوشش باز E حاوی زیرپوششی متناهی باشد.

۸) σ—جبر تولید شده توسط خانواده $\{[a,b) : a,b \in R\}$ را در نظر بگیرید، این σ—جبر را با $\mathcal{B}$ نمایش داده و عناصر آن را مجموعه‌های برل می‌نامیم.

۹) تابع F را اندازه‌پذیر برل گوییم اگر نمودار آن، $\{(\omega,x); x \in F(\omega)\}$ یک زیرمجموعه برل $\Omega \times R^n$ باشد.

۱۰) P_X نسبت به اندازه ν پیوسته مطلق است، اگر برای هر مجموعه A که برای آن $P_X(A) = 0$، داشته باشیم $\nu(A) = 0$. در اینصورت می‌گوییم P_X تحت تسلط اندازه ν است.
(قضیه رادون—نیکودیم): فرض کنید $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه سیگما—متناهی باشد و اندازه ν که روی $\mathcal{B}$ تعریف شده نسبت به μ پیوسته مطلق باشد. در این صورت یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد که برای هر مجموعه E متعلق به $\mathcal{B}$ داریم:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

۱۱) رابطه $\sim$ را روی مجموعه X رابطه هم‌ارزی گوییم هرگاه

۱. برای هر $x \in X$، $x \sim x$. (رابطه بازتابی)

۲. برای هر $x,y \in X$، اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$. (رابطه تقارنی)

۳. برای هر $x,y,z \in X$، اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$. (رابطه تعدی)

۱۲) **انتگرال اومان**:([٦]) فرض کنید T بازه واحد $(0,1)$ باشد. همچنین برای هر $t \in T$، $F(t)$ را یک زیرمجموعه ناتهی از فضای اقلیدسی n بعدی R^n درنظر بگیرید. اگر $\mathbf{F}$ مجموعه تمام توابع $f : T \to R^n$ باشد که بر T انتگرالپذیر بوده و برای هر $t \in T$ داشته باشیم $f(t) \in F(t) a.e.$ آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$(A) \int_T F(t)dt = \{\int_T f dt; f \in F\}$$

ضمیمهٔ (۲)

در این قسمت برخی مفاهیم اساسی احتمال را که در این مجموعه مورد استفاده قرار گرفته، به‌طور مختصر ارائه می‌دهیم. برای اطلاع بیشتر می‌توان به ([۲۱]) مراجعه کرد.

۱) فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه‌ای غیر تهی از زیر مجموعه‌های فضای نمونه (Ω) باشد، در این صورت $\mathcal{A}$ را یک $\sigma-$جبر نامیم هرگاه روابط زیر برقرار باشد:

الف) $\Omega \in \mathcal{A}$

ب) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

ج) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

۲) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال است اگر Ω فضای نمونه، $\mathcal{F}$ یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های اندازه پذیر Ω و P یک اندازه احتمال باشد.

۳) اگر X یک متغیر تصادفی باشد و g یک تابع پیوسته از X باشد، آنگاه $g(X)$ یک متغیر تصادفی است.

۴) اگر $X_۱, X_۲, ...$ متغیرهای تصادفی باشند، آنگاه $\sup_n X_n$ و $\inf_n X_n$ متغیرهای تصادفی هستند.

۵) متغیرهای تصادفی $X_۱, ..., X_n$ مستقلند اگر وفقط اگر برای مجموعه‌های بورل دلخواه $A_۱, ...A_n$ داشته باشیم:

$$P(\cap_{i=۱}^{n} \{X_k \in A_k\}) = \Pi_{i=۱}^{n} P(X_k \in A_k)$$

۶) متغیرهای تصادفی X و Y را همتوزیع گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر $A \in \mathcal{R}$ داشته باشیم:

$$P(X \in A) = P(Y \in A)$$

۷) **قضیه فوبینی:** فرض کنید $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ و $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ دو فضای احتمال باشند، فضای حاصلضربی $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $\underline{X} = (X_1, X_2)'$ یک متغیر تصادفی دوبعدی و g، $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$—اندازه‌پذیر،نامنفی و انتگرالپذیر باشد. در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} E(g(\underline{X})) &= \int_{\Omega_1 \times \omega_2} g(\underline{X}) d(P_1 \times P_2) \\ &= \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} g(\underline{X}) dP_2) dP_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} g(\underline{X}) dP_1) dP_2 \end{aligned}$$

ضمیمهٔ (۳)

در این قسمت برخی مفاهیم اساسی آمار ریاضی را که در این مجموعه مورد استفاده قرار گرفته، به‌طور مختصر ارائه می‌دهیم. برای اطلاع بیشتر می‌توان به ([۳۹]) مراجعه کرد.

۱) آماره $S(\underline{X})$ یک آماره بسنده برای $\theta \in \Theta$ است اگر توزیع شرطی $X_1, ..., X_n$ به شرط $S(\underline{X}) = s$، برای هر مقدار S، بستگی به θ نداشته باشد.

۲) خانواده توزیعهای تولید شده توسط آماره T، $\{P_\theta^T : \theta \in \Theta\}$، را کامل گوییم اگر برای هر آماره $g(T)$،

$$E_\theta[g(T)] = 0 \ , \ \forall\, \theta \in \Theta \ \ \Rightarrow \ \ P_\theta[g(T) = 0] = 1 \ , \ \forall\, \theta \in \Theta.$$

اصطلاحاً آماره T را برای θ کامل می‌گوییم، اگر خانواده توزیع‌های تولید شده توسط T کامل باشد.

۳) آماره T را برای θ بسنده کامل می‌گوییم، اگر بسنده و کامل باشد.

۴) یک تابع چگالی را عضو یک خانواده نمایی می‌نامیم، اگر بتوان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp\{\Sigma_{j=1}^{k} c_j(\theta)d_j(x)\}$$

که در آن $\underline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)$ برداری با k پارامتر مجهول است و در شرایط ۱، ۲ و ۳ الف یا ب که با روابط زیر داده شده‌اند، صدق کند:

۱. مجموعه $S_X = \{x : f_\theta(x) > 0\}$ به θ بستگی نداشته باشد.

۲. توابع $c_i(\theta)$ ها توابعی غیر صفر و پیوسته از θ، $\theta \in \Theta$، باشند.

۳.الف: برای متغیرهای تصادفی پیوسته $d_i'(x)$، $i = 1, ..., k$، توابعی پیوسته از x هستند و هیچ یک از آنها تابع خطی همگن از بقیه نیستند.

۳.ب: برای متغیرهای تصادفی گسسته $d_i(x)$، $i = 1, ..., k$، توابعی غیرصفر از x روی مجموعه S_X است و هیچ یک از آنها تابع خطی از بقیه نیست.

بسیاری از توابع چگالی معمول از قبیل توابع چگالی احتمال دوجمله‌ای، پواسن، نمایی، گاما و نرمال جز خانواده نمایی هستند.

۵) فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده نمایی یک پارامتری باشد، یعنی

$$f_\theta(x) = a(\theta)b(x)\exp\{c(\theta)d(x)\} \quad , \quad \theta \in \Theta \subset R$$

به راحتی می‌توان نشان داد که آماره $U(X) = \Sigma_{i=1}^{n} d(X_i)$ یک آماره بسنده کامل برای θ می‌باشد.

٦) فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه همه کارهایی است که می‌توانیم یکی از آنها را انجام دهیم، در این صورت $\mathcal{A}$ را فضای عمل گویند که با مشاهده یافته‌های $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ و بر اساس قاعده معینی می‌توانیم $a \in \mathcal{A}$ را انجام دهیم.

۷) فرض کنید $F=\{f(\underline{x};\theta)|\theta\in\Theta\}$ خانواده توزیعهای $f(\underline{x};\theta)$ باشد. خانواده Π از توزیعهای پیشین برای θ را یک خانواده مزدوج برای F گوییم هرگاه برای هر $f\in F$ و $\pi\in\Pi$ و $x\in\mathcal{X}$ توزیعهای پسین نیز در خانواده Π قرار گیرند.

۸) اگر $X\sim N(\mu,\sigma^۲)$ و توزیع پیشن نیز $N(\theta,b^۲)$ باشد، آنگاه این توزیع پیشین مزدوج است و توزیع پسین عبارت است از:

$$N(\frac{\sigma^۲\theta+b^۲x}{\sigma^۲+b^۲},\frac{\sigma^۲b^۲}{\sigma^۲+b^۲})$$

۹) اگر $X\sim b(n,\theta)$ و توزیع پیشین $Beta(\alpha,\beta)$ باشد، آنگاه این توزیع پیشین مزدوج است و توزیع پسین $Beta(\alpha+x,\beta+n-x)$ است.

۱۰) گوییم خانواده $\{f_\theta:\theta\in\Theta\subset R\}$ دارای خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا (MLR) در آماره $T(X)$ است، اگر برای هر $\theta_۱<\theta_۰$، نسبت $\frac{f(\underline{x};\theta_۱)}{f(\underline{x};\theta_۰)}$ تابعی غیرنزولی از $T(x)$ باشد.

۱۱) بوت‌استرپ یک تکنیک ساده برای برآورد مقادیر مورد نظر به وسیله نمونه‌گیری مکرر از نمونه موجود است.

۱۲) اگر برای تابع حقیقی $g(\theta)$ بتوان $T(X)$ پیدا کرد که ناااریب باشد به $g(\theta)$ برآوردپذیر می‌گویند.

۱۳) اگر $X\sim E(\theta,\lambda)$، آنگاه $X-\theta\sim E(\lambda)$، همچنین $X_{(۱)}-\theta\sim E(n\theta)$.($X_{(۱)}$ کوچکترین آماره مرتب است)

ضمیمه (۴)

۱) برنامه محاسبه انتگرالها در مثال ۴.۳ با استفاده از نرم افزار $Maple$

در این برنامه‌ها $a = \alpha$ و $t = \theta$ است.

(الف)

$$
\begin{aligned}
> \quad & (int(int(۲*t*(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x)),t=a/۲..۱/۲),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int((۲-۲*t)*(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x)),t=۱/۲..۱-(a/۲)),a=۰..۱))\\
/ \quad & (int(int(۲*t,t=a/۲..۱/۲),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int(۲-۲*t,t=۱/۲..۱-(a/۲)),a=۰..۱))\\
/ \quad & (int(int(۳*t*(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x)),t=a/۳..۱/۳),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int((۲-۳*t)*(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x)),t=۱/۳..(۲-a)/۳),a=۰..۱))\\
/ \quad & (int(int(۳*t,t=a/۳..۱/۳),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int(۲-۳*t,t=۱/۳..(۲-a)/۳),a=۰..۱));
\end{aligned}
$$

(ب)

α_ψ :

$$
\begin{aligned}
> \quad & (int(int(۳*t*int(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x),x=c..۱),t=a/۳..۱/۳),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int((۲-۳*t)*int(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x),x=c..۱)\\
> \quad & ,t=۱/۳..(۲-a)/۳),a=۰..۱))\\
/ \quad & (int(int(۳*t,t=a/۳..۱/۳),a=۰..۱)\\
+ \quad & int(int(۲-۳*t,t=۱/۳..(۲-a)/۳),a=۰..۱));
\end{aligned}
$$

β_ψ :

$$
\begin{array}{ll}
> & (int(int(۲*t*(۱-int(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x),x=c..۱)) \\
> & ,t=a/۲..۱/۲),a=۰..۱) \\
+ & int(int((۲-۲*t)*(۱-int(۲*t*x+۲*(۱-t)*(۱-x),x=c..۱)) \\
> & ,t=۱/۲..۱-(a/۲)),a=۰..۱)) \\
/ & (int(int(۲*t,t=a/۲..۱/۲),a=۰..۱) \\
+ & int(int(۲-۲*t,t=۱/۲..۱-(a/۲)),a=۰..۱));
\end{array}
$$

۲) برنامه مثال ۵.۳ با استفاده از نرم‌افزار $Maple$

در این برنامه و برنامه بعدی $b=\theta$، $e=\epsilon$ و $a=\alpha$ است.

$$
\begin{array}{ll}
> & limit((int(int((((t-b)/e)+۱)*t*exp(-x*t),t=b-(۱-a)*e..b),a=۰..۱) \\
+ & int(int((((b-t)/e)+۱)*t*exp(-x*t),t=b..b+(۱-a)*e),a=۰..۱)) \\
/ & (int(int(((t-b)/e)+۱,t=b-(۱-a)*e..b),a=۰..۱) \\
+ & int(int(((b-t)/e)+۱,t=b..b+(۱-a)*e),a=۰..۱)),e=۰);
\end{array}
$$

۳) برنامه مثال ۶.۳ با استفاده از نرم‌افزار $Maple$

$$
\begin{array}{ll}
> & D:=diff((-۱۲*exp(-x*b))/(x^۳*e^۲)-(۶*b*exp(-x*b))/(x^۲*e^۲) \\
+ & (۹*exp(-b*x+e^۳)+(۳*b*exp(-x*b+e*x))/(x^۳*e^۳)
\end{array}
$$

$- \quad (۳ * exp(x * b + e * x))/(x^{۳} * e^{۲}) - (۹ * exp(-e * x - b * x))/(x^{۴} * e^{۳})$

$- \quad (۳ * b * exp(-e * x - b * x))/(x^{۳} * e^{۳}) - (۳ * exp(-e * x - b * x))/(x^{۳} * e^{۲}), b);$

$> \quad solve(D, b);$

کتاب‌نامه

[۱] اکبری، م. ق، (۱۳۸۷)، رساله دکتری: استنباط آماری بر اساس داده‌های فازی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] زینلی، ف. اکبری، م. ق. عارفی، م. (۱۳۹۱) آزمون فرضیه میانگین فازی شهودی بر اساس متر L_2 و با استفاده از روش بوت‌استرپ، دوازدهمین کنفرانس فازی، ص ۱—۸، دانشگاه بابلسر.

[۳] رویدن، اچ.ال. (۱۹۲۹)، **آنالیز حقیقی**، ترجمه ایزد دوستدار، ن. چاپ پنجم، دانشگاه تهران.

[۴] طاهری، س. م. (۱۳۷۵)، **آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی**، چاپ اول، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

[۵] طاهری، س. م.، ماشین‌چی، م.(۱۳۸۷)، **مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی**، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[٦] طاهری، س. م.، ارقامی، ن.، (۱۳۷۴) متغیرهای تصادفی فازی، **گلچین ریاضی**، جلد سوم، شماره ۱ ، ٦—۱۵ .

[7] Akbari, M. G. and Rezai, A. (2010) *Bootstrap Fuzzy hypotheses and observations on fyzzy statistic.* Expert Systems With Applications,**37**:5782-5787.

[8] Akbari, M. G. and Khanjari Sadegh, M. (2012) *Estimators based on fuzzy random variables and theirs mathematical properties*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, **9**:79-95.

[9] Akbari, M. G. and Saeidi, A. (2012) *Neyman-Pearson Lemma based on Fuzzy hypothetses testing*, Journal of Uncertain Systems, Inpress.

[10] Akbari, M. G. and Rezai, A. and Waghei Y. (2009) *Statistical Inference about the Variance of Fuzzy Random Variables*, Sankhya,The Indian Journal of Statistics,**71-B,Part 2**:206-221.

[11] Arnold, B. F. (1998) *Testing fuzzy hypotheses with crisp data*, Fuzzy Sets and Systems, **94**:323-333.

[12] Arnold, F. Shapiro (2009) *Fuzzy random variables*, Mathematics and Economics, **44**:307-314.

[13] Buckley, J. J. (1983) *Fuzzy decision making with data: applications to statistics*, Fuzzy Sets and Systems, **16**:139-174.

[14] Buckley, J. J. (2005) *Fuzzy statistics: hypothesis testing*, Soft Computing,**9**:512-518.

[15] Buckley, J. J. (2006) *Fuzzy Probability and Statistics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[16] Cai, K. Y. (1993) *Parameter estimation of normal fuzzy variables*, Fuzzy Sets and Systems, **55**:179-185.

[17] Casals M.R. and Gil M.A. and Gil P. (1986) *On the use of Zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypothesis from fuzzy information*, Fuzzy Sets and Systems, **20**:175-190.

[18] Casals M.R. and Gil M.A. (1986) *a note on the operativeness of Neyman-Pearson tests with fuzzy information*, Fuzzy Sets and Systems, **30**:215-220.

[19] Diamond P. and Kloeden P. (1994) *Metric Space of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

[20] Filzmoser P. and Viertl R. (2004) *Testing hypotheses with fuzzy data: The fuzzy p-value*, Metrika, **59**:21-29.

[21] Gut A. (2005) *Probability: A Graduate Course*, Springer Science, Inc. New York.

[22] Hong-Zhong H. and Ming J. Z. and Zhan-Quan S. (2006) *Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data*, Fuzzy Sets and Systems, **157**:1674-1686.

[23] Kahraman C. and Bozdag C.E. Ruan D. and Ozak A.F. (2004) *Fuzzy sets approaches to statistical parametric and nonparametric tests*, International Journal of Intelligent Systems, **19**:1-19.

[24] Korner R. (1990) *An asymptotic α-tests for expectation of random fuzzy variables*, Journal of Statistical Planing and Inference, **83**:331-346.

[25] Kruse R. (1984) *Statistical estimation with linguistic data*, Information Science, **33**:197-207.

[26] Kruse R. and Meyer K. D. (1987) *Statistics with vague data*, Reidel Publishing Company.

[27] Klir G. and Yuan B. (1995) *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic-Theory and Applications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

[28] Kwakernaak H. (1978) *Fuzzy random variable I*, Information Sciences, **45**:1-29.

[29] Lopez-Diaz M. and Gil M. A. (1998) *Reversing the order of integration in iterated expectations of fuzzy random variables, and statistical applications*, Journal of Statistical Planing and Inference, **74**:11-29.

[30] Lubiano M. A., Gil M. A. and Lopez-Diaz M. (1999) *On the Rao-Blackwell theorem for fuzzy random variables*, Kybernetica, **35**:167-175.

[31] Montenegro M. Casals M.R. Lubiano M.A. Gil M.A. (2001) *Two-sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variables*, Information Sciences, **133**:89-100.

[32] Najafi Z., Taheri S.M. and Mashinchi M. (2010) *Likelihood ratio test based on fuzzy data*, International Journal of Intelligent Technologics and Applied Statistics, **3**:263-279.

[33] Nather W. (2006) *Regression with fuzzy data*, computational Statistics and Data Analysis, **51**:235-252.

[34] Parchami A., Taheri S. M. and Mashinchi M. (2010) *Fuzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data*, Statistical Papers, **51**:209-226.

[35] Puri M. L. and Ralescu (1986) *Fuzzy random variables*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **114**:409-422.

[36] Puri M. L. and Ralescu D. A. (1991) *Convergence theorem for fuzzy martingales*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **160**:107-122.

[37] Rockafellar R. T. (1970) *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

[38] Sadeghpour Gildeh B. and Gien D. (2002) $d_{p,q}-$*distance and Rao-Blackwell theorem for fuzzy random variables*, In Proc, of the **8th** international Conference of Fuzzy Theory and Technology. Durham, USA, 78-81.

[39] Shao J. (2003)*Mathematical Statistics*, Springer-Verlag, (2nd ed.), New York:John Wiley.

[40] Taheri S. M. and Arefi M. (2009) *Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy statistics*, Soft Computing, **13**:617-625.

[41] Taheri S. M. and Behboodian J. (1999) *Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing*, Metrika, **49**:3-17.

[42] Taheri S. M. and Behboodian J. (2001) *A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing*, Fuzzy Sets and Systems, **123**:39-48.

[43] Taheri S. M. and Behboodian J. (2006) *On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **19**:139-154.

[44] Tanaka H., Okuda T. and Asai K. (1979) *Fuzzy information and decision in statistical model*, In Gupta M. M. et al., editor, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, 303-320.

[45] Torabi S. (2006) *Cramer-Rao lower bound for fuzzy-valued random variables*, Austrian Journal of Statistics, **4** :471-482.

[46] Torabi H., Behboodian J. and Taheri S. M. (2006) *Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data*, Metrika, **64**:289-304.

[47] Torabi H. and Behboodian J. (2007) *Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing* , Statistical Papers, **48**:509-522.

[48] Viertl R. (2006) *Univariate statistical analysis with fuzzy data*, Computational Statistics and Data Analysis, **51**:133-147.

[49] Wu H. C. (1999) *The central limit theorem for fuzzy random variables*, Information Sciences, **120**:239-256.

[50] Wu H. C. (2005) *Statistical hypotheses testing for fuzzy data*, Information Sciences, **175**:30-56.

[51] Yao J. S. and Wu K. (2000) *Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance*, Fuzzy Sets and Systems, **11**:275-288.

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

Bayes estimator	برآوردگر بیز
Bootstrap	بوت‌استرپ
Canonical fuzzy number	عدد فازی متعارف
Estimation	برآورد
Estimator	برآوردگر
Expectation	امید ریاضی
Extention principle	اصل گسترش
Fuzzy Bayes estimator	برآوردگر بیز فازی
Fuzzy estimator	برآوردگر فازی
Fuzzy expectation	امید ریاضی فازی
Fuzzy hypothesis	فرضیهٔ فازی
Fuzzy hypothesis testing	آزمون فرضیهٔ فازی
Fuzzy unbiased estimator	برآوردگر نااریب فازی
Fuzzy UMVU estimator	برآوردگر به طور یکنواخت نااریب با کمترین واریانس فازی
Fuzzy probabilities	احتمالات فازی
Fuzzy random variable	متغیر تصادفی فازی

نمونه تصادفی فازی .... Fuzzy random sample
مجموعه‌های فازی .... Fuzzy sets
آمار فازی .... Fuzzy statistics
آماره فازی .... Fuzzy statistic

واریانس فازی .... Fuzzy variance
تابع عضویت .... Membership function
لم نیمن—پیرسن .... Neyman-Pearson Lemma
نمونه تصادفی .... Random sample
آماره .... Statistic
استنباط آماری .... Statistical inference
آماره بسنده .... Sufficient statistic
تابع تکیه‌گاه .... Support function
عدد فازی مثلثی .... Triangular fuzzy number
نیم‌پیوسته بالایی .... Upper semicontinuous
واریانس .... Variance

Abstract

Statistical analysis, in traditional form, is based on crispness of data, random variables, parameters, point estimations and testing statistical hypotheses. In some cases, these concepts are vaguely observed or reported, therefore theory of fuzzy sets is a well known tool for formulation and analysis of this concepts.

In this study, we first present the basic concepts of fuzzy sets such as fuzzy random variables, fuzzy probability density function and mathematical expectation of fuzzy random variable. Then we described L_2-metric and Yao-Wu signed distance and will discussed fuzzy uniformly minimum variance unbiased (UMVU) and Bayesian estimators by this two meters. Also we compare crisp Neyman-Pearson Lemma and generalized Neyman-Pearson Lemma in three fuzzy cases. In the end, we option a new maximum likelihood estimation on based presented probability density function of the one cases. New subjects in the text are marked with (*).

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy random variable, L_2-metric, Yao-Wu signed distance, Fuzzy parameter, Fuzzy uniformly minimum variance unbiased estimator, Fuzzy Bayesian estimator, Fuzzy hypotheses testing, Fuzzy probability density function.

Shahrood University of Technology

Faculty Mathematical Science

Department of Mathematics

Estimatores based on fuzzy random variables

By:

Zeynab Zamani

Supervisor:

Dr. Ahamad Nezakati Rezazade

Consultant:

Dr. Mohammad Ghasem Akbari

Date:

24 December 2012