دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی عملگرهای انتگرال بر روی توابع تک ارز وستاره گون

نگارش
طیبه ابراهیمی

استاد راهنما
جناب آقای دکتر زیره

شهریور ۱۳۹۰

كلية حقوق اعم از چاپ و تكثير، نسخه برداري، ترجمه، اقتباس و ... از اين پايان نامه براي دانشگاه صنعتی شاهرود محفوظ است.
نقل مطالب با ذكر مأخذ آزاد است.

صفحة تصويب نامه توسط هيأت داوران (فرم پيوست ۳ يا ۴ با امضاي اصل هيأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

با حمد و سپاس فراوان از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش هستی و آشنایی با گوشه ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.

قلم از نگارش حق زحمات و مساعدت های اساتید گرانقدر و دوستان بزرگوار ناتوان است ، اما وظیفه حکم می کند که هر چند ناچیز ولی در حد توان تشکر و قدر دانی نمایم.

در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر زیره که با راهنمایی های حکیمانه خود افق های تازه ای برای اینجانب ایجاد نمودند و همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکتر هاشمی کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم می دانم از خانواده و تمام دوستانی که مرا در این مهم یاری کردند، تقدیر و تشکر نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه ، به بیان تعاریف و قضایای مربوط به رده های توابع تک ارز و ستاره گون می پردازیم. هم چنین بامعرفی چند عملگرانتگرال، شرایطی را که آنها در رده های مذکور قرار می گیرند را مورد مطالعه قرارمی دهیم در واقع معیارهایی برای تک ارزی این عملگرها ارائه می دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره گون، عملگرانتگرال

پیشگفتار

تابع تحلیلی که یک به یک می باشد را تک ارز می نامیم. از نظر تحلیلی تابع تک ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک ارز خم های ساده را بر خم های ساده می نگارد.

به دلیل اهمیت این رده قصد داریم تا در این پایان نامه محک های تک ارزی عملگرهای انتگرال را مورد بررسی قرار دهیم.

در این راستا ، درفصل اول، به بیان تعاریف اولیه ومفاهیم مقدماتی پرداخته ایم.

درفصل دوم، در هربخش به طورجداگانه عملگرهای انتگرال مختلفی را مد نظر داشته و محک های تک ارزی آنها را تفسیرکرده ایم. به عبارت دیگر دربخش اول، عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}$ ، دربخش دوم، عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{|[Re\eta]|},\beta,\eta}$ دربخش سوم، عملگر $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ دربخش چهارم، عملگرهای $\mathcal{F}_{n,\alpha}(z)$ و $\mathcal{G}_{n,\alpha}(z)$ دربخش پنجم و ششم، عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z)$ و دربخش هفتم، عملگر $F_\alpha(z)$ معرفی شده اند و هم چنین در پایان با مقایسه قضایا ومحک های تک ارزی، به جمع بندی نتایج پرداخته ایم.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازهاومفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه محک های تک ارزی را برای عملگرهای انتگرال مطالعه می کنیم. برای این منظور ، در این فصل تعاریف ، مفاهیم مقدماتی و چند قضیه پایه را آورده ایم:

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

از نمادهای زیر درمتن استفاده شده است.

$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{C}$	مجموعه اعدادمختلط
Re	قسمت حقیقی اعدادمختلط
Im	قسمت موهومی اعدادمختلط
$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| < 1\}$	دیسک واحد باز

تعریف ۱.۱.۱. هرمجموعه همبند و باز، میدان نامیده می شود. میدان را معمولا با D نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی می نامیم هرگاه f درهمسایگی از نقطه z_0 مشتق

پذیر باشد.

مثال. تابع $f(z) = z^{۲}$ را در نظرمی گیریم.f همواره مشتق پذیر است و برای هر$z \in \mathbb{C}$ ،

$f'(z) = ۲z$ بنابراین f همواره تحلیلی است.

مثال. تابع $f(z) = |z|^{۲}$ فقط دره $z =$ مشتق پذیر است بنابراین f غیرتحلیلی است.

تعریف ۳.۱.۱. هرگاه f در تمام نقاط دامنه D تحلیلی باشد تابع f را بر دامنه D تحلیلی می نامیم. اگر $D = \mathbb{C}$ وتابع f برروی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد آن گاه f را تابع تام می نامیم.

مثال. $f(z) = z^{۲}$ و درحالت کلی هرچندجمله ای همواره تحلیلی و درنتیجه تام است.

تعریف ۴.۱.۱. هر تابع تحلیلی یک به یک را تک ارز می نامیم. بنابراین اگر f تابع تک ارز باشد $f(z_{۱}) = f(z_{۲})$ نتیجه می دهد $z_{۱} = z_{۲}$.

تذکر: توابع تک ارز از نظر تحلیلی مشتق مخالف صفر دارند. از نظر هندسی تابع تک ارز، خم های ساده را بر خم های ساده می نگارد.

لم ۵.۱.۱. (لم شوارتز) [۱] [۴]

فرض کنید که $f(z)$ بردیسک $\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ تحلیلی باشدو$f(۰) = f'(۰) = ... =$ $f^{(m-۱)} = ۰$

اگربرای $|z| < R$،داشته باشیم$|f(z)| < M$ آن گاه

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m \quad z \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

و تساوی برقراراست اگر و تنها اگر

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

کهθ ثابت است.

[۱] Schwarz

۲.۱ رده $\mathcal{A}$

تعریف ۱.۲.۱. $\mathcal{A}$ را رده توابع f به فرم $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ در نظر می گیریم که در دیسک باز $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$ تحلیلی اند و $f(0)=f'(0)-1=0$.

مثال. تابع $f(z)=z+3z^2$ به رده $\mathcal{A}$ تعلق دارد.

لم ۲.۲.۱. (لم کاراتئودوری) [۲] ([۱]) فرض کنید که fتابع تحلیلی در$\mathcal{U}$باشد و $f(0)=0$ اگر مقدار $M>0$ موجود باشد که $Ref(z)\leq M$ آن گاه،

$$(1-|z|)|f(z)|\leq 2M|z| \quad (z\in\mathcal{U})$$

اثبات. تابع $h(z)$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(z)=\frac{f(z)}{2M-f(z)}$$

تابع $h(z)\in\mathcal{A}$ و $|h(z)|\leq 1$ زیرا($|f(z)|\leq|2M-f(z)|$)

حال بنابر لم شوارتز داریم:

$$|h(z)|\leq|z| \quad z\in\mathcal{U}$$

هم چنین

$$|f(z)|\leq|z||2M-f(z)|\leq|z|(2M+|f(z)|)$$

که نتیجه می دهد

$$(1-|z|)|f(z)|\leq 2M|z|$$

□

[۲] Caratheodory

۳.۱ رده $\mathcal{S}$

تعریف ۱.۳.۱. رده $\mathcal{S}$ را زیررده توابع $f \in \mathcal{A}$ که در $\mathcal{U}$ تک ارزند، تعریف می کنیم در واقع رده توابع $f(z)$ که در قرص واحد $|z| < ۱$ تحلیلی ، یک به یک و نرمال شده می باشند.

لم ۲.۳.۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه ، $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in S$

اثبات. فرض کنیم $f(z) = z + a_۲z^۲ + ...$ ، لذا داریم:

$$g(z) = z\sqrt{۱ + a_۲z^۲ + a_۳z^۴} + ... \qquad (۱.۱)$$

تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می باشد و $g(۰) = ۰$ و $g'(۰) = ۱$.

اثبات تک ارزی: اگر $g(z_۱) = g(z_۲)$ یعنی $z_۱\sqrt{\frac{f(z_۱^۲)}{z_۱^۲}} = z_۲\sqrt{\frac{f(z_۲^۲)}{z_۲^۲}}$ در اینصورت:

$f(z_۱^۲) = f(z_۲^۲)$ و چون f یک به یک می باشد، داریم: $z_۲^۲ = z_۱^۲$ یعنی: $z_۲ = z_۱$ یا $z_۱ = -z_۲$.

و از (۱.۱) ملاحظه می شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_۱ = -z_۲$ تساوی $g(z_۱) = -g(z_۲)$ را نتیجه می دهد که با فرض در تناقض است پس $z_۲^۲ = z_۱^۲$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می شود. ■

قضیه ۳.۳.۱. اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in S$ باشد ، آنگاه $|a_۲| \leq ۲$.

اثبات. با توجه به لم قبل ثابت می شود. □

مثال. (تابع کوئب) در قضیه ي قبل اگر $a_۲ = ۲e^{i\alpha}$ و α حقيقي باشد آنگاه ،

لذا $g(z) = \frac{z}{۱-e^{i\alpha}z^۲} = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$

$$f(z) = \frac{z}{(۱ - e^{i\alpha}z)^۲} = z + ۲e^{i\alpha}z^۲ + ۳e^{۲i\alpha}z^۳ + ...$$

با قرار دادن $\alpha = ۰$ به تابع زیر مي رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(۱ - z)^۲} = \frac{۱}{۴}(\frac{۱ + z}{۱ - z})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

که به تابع کوئب معروف است این تابع قرص $|z| < ۱$ را بر صفحه اي که در امتداد محور حقيقي منفي از $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بريده شده است مي نگارد.

قضیه ۴.۳.۱. (پوشش) فرض کنيد $f(z) \in S$،c عدد مختلط و $|z| < ۱$ اگر $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۴}$.

اثبات. مي دانيم $f(z) = z + a_۲ z^۲ + ...$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نيز متعلق به S مي باشد

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + ...$$

بنا به قضيه ي قبل داريم: $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$ از طرفي:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

و چون $f(z) \in S$ پس $|a_۲| \leq ۲$ لذا داريم:

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}.$$

■

لم ۵.۳.۱. اگر $f(z) \in S$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه:

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$$

اثبات. چون براى $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$ پس مى توان شاخه اى از $\log f'(z)$ را براى $|z| < ۱$ در نظر گرفت. حال براى $f(z) = f(re^{i\theta})$ داريم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه ی قسمت های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

■

قضیه ۱.۳.۶. ۱اگر $f(z) \in S$ آنگاه،

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \quad (|z| = r < ۱).$$

اثبات. مي دانيم تابع $(|z_\circ| < ۱)$ $w = \frac{z+z_\circ}{۱+\overline{z_\circ}z}$ تحليلي، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش مي نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_\circ}{۱+\overline{z_\circ}z}) = b_\circ + b_۱z + b_۲z^۲$ نيز به ازاي $(|z| < ۱)$ تحليلي و تک ارز است، ازطرفی:

$$g(\circ) = b_\circ = f(z_\circ) \quad b_۱ = g'(\circ) = f'(z_\circ)(۱-|z_\circ|^۲)$$

$$b_۲ = \frac{g''(\circ)}{۲} = \frac{۱}{۲}(f''(z_\circ)(۱-|z_\circ|^۲)^۲ - ۲f'(z_\circ)\overline{z_\circ}(۱-|z_\circ|^۲))$$

چون $g(z)$ نرماليزه نمي باشد پس متعلق به S نمي باشد، با توجه به اينكه تابع $\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_۲}{b_۱}z^۲ + ...$ در S قرار مي گيرد لذا بنابر قضيه قبل $|\frac{b_۲}{b_۱}| \leq ۲$ يعني:

$$\frac{۱}{۲}|\frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(۱-|z_\circ|^۲) - ۲\overline{z_\circ}| \leq ۲$$

با قرار دادن $z_\circ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفين در $\frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$ داريم:

$$|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{۲|z_\circ|^۲}{۱-|z_\circ|^۲}| \leq \frac{۴|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$$

حال چون z_0 دلخواه است قرار مي دهيم:

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

يعني $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دايره اي به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مركز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

بنا به لم قبل مى دانيم $Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ يعني:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفين نامساوي از ۰ تا r انتگرال مي گيريم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتيجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

■

مثال. مشتق تابع كوئب برابر است با $k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ ، لذا كران بالاي قضيه ي (۶.۳.۱) در مورد اين تابع در $z = r$ وكران پايين در $z = -r$ تعيين مي شود.

قضیه ۷.۳.۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه،

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

اثبات. از لم قبل داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$ براي $|z| = r \leq 1$، نقطه ي ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روي این پاره خط انتگرال مي گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(z)|dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوي $\frac{1}{4} \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ آنگاه $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه ي پوششي مسیر c داخل دایره ي یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از ۰ تا $f(z)$ را مي پوشاند در اینصورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفي بنا به قضیه ي قبل:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \geq \int_c |f'(s)|d|s| \geq \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

■

مثال. براي تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + ...$ کران بالاي قضیه ي قبل در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین مي شود.

قضیه ۸.۳.۱ $(Littlewood)$ اگر $f(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد آنگاه براي هر n، $|a_n| \leq en$.

اثبات. با توجه به فرمول انتگرال کوشي

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (n = 2, 3, ...; 0 < r < 1)$$

داریم:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta$$

از طرفی $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{r}{1-r}$ پس $|a_n| \leq \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$ چون براي هر r در فاصله $0 < r < 1$ نامساوي برقرار است بهترين كراني كه با اين روش بدست مي آيد اينست كه در رابطه ي بالا كمينه سازي كنيم لذا:

$$|a_n| \leq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < en.$$

■

قضیه ۱.۳.۹. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده ی S باشد و ضرایب حقیقي داشته باشد، آنگاه براي هر n داریم: $|a_n| \leq n$.

اثبات. برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می دهیم:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال یابی از 0 تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \qquad (1.2)$$

با توجه به رابطه ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$ لذا از رابطه ی (۲.۱) نتیجه می شود که:

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \tag{3.1}$$

سپس نشان می دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ ،$(0 < r < 1, 0 < \theta < \pi)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta - e^{-in\theta}}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است می بایست در فاصله ی $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا:

$$r = |a_1 r| = |\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta d\theta| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta. \tag{4.1}$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) رابطه ی $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می آید و وقتی $r \to 1$ قضیه ثابت می گردد. ■

۴.۱ رده S^*

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را نسبت به $(z = 0)$ ستاره گون می گوییم اگر $0 \in D$ و هرپاره خط مستقیمی که هرنقطه ازD رابه ۰ وصل می کند در داخل D بیفتد.

تابع $f(z) \in S$ را ستاره گون نامیم هرگاه قرص $|z| < 1$ توسط تابع $f(z)$ بر یک میدان نگاشته شود که نسبت به مبدا ستاره گون باشد. این زیررده های S را با S^* نشان می دهیم.

لم ۲.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$، در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in S^*$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد اگر $w \in D$، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $tw \in D$ (چون D ستاره گون می باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < ۱$ صدق می کند، چون $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰))$، با توجه به لم شوارتز، $|g(z)| \leq |z|$، اکنون نقطه ی $w_۱ \in D_r$ را انتخاب می کنیم در اینصورت برای نقطه ی $z_۱$ای با $|z_۱| < r$، $f(z_۱) = w_۱$ برای t دلخواه، $۰ < t < ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(tw_۱)| = |f^{-۱}(tf(z_۱))| = |g(z_۱)| \leq |z_۱| < r$$

ولی این بدان معنی است که $tw_۱$ در D_r قرار دارد چون این مطلب برای همه ی $w_۱$ ها در D_r و همه ی t ها، $۰ < t < ۱$ درست است میدان D_r نسبت به $w = ۰$ ستاره گون است.

به عکس، اگر $f(z)$ در رده ی S^* قرار نداشته باشد آنگاه نقطه $w_۰ \in D$ موجود است بطوریکه برای $t_۰$ ای، $(۰ < t_۰ < ۱)$ ، $t_۰w_۰$ متعلق به D نمی باشد اینک قرص $|z| < r < ۱$ را انتخاب می کنیم بطوریکه تصویرش D_r شامل نقطه ی $w_۰$ باشد چون $D_r \subset D$ نقطه ی $t_۰w_۰$ متعلق به D_r نیست پس $f(z)$، $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره گون نمی نگارد. ■

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$ در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر:

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰.$$

اثبات. با توجه به لم قبل ، $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان ستاره گون باشد به بیان معادل برای هر $\theta(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = ۰$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است زیرا در غیر اینصورت بردار شعاعی می بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند پس یک تابع در S^* با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta} \arg f(re^{i\theta}) > ۰$ مشخص می گردد.

ازطرفی $\arg f(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$ بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{Im\log f(re^{i\theta})\} = Im\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\} = Im\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\} = Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰$$

■

مثال. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ در رده ی S^* قرار دارد زیرا تصویر $|z| < ۱$ کل صفحه ی مختلط می باشد که در امتداد پرتو $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\} = Re\{\frac{۱+z}{۱-z}\} > ۰.$$

قضیه ۱.۴.۴. ([۱۲]) فرض کنید$f(z)$ بر $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و$f(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n z^n$ اگر $Ref(z) > ۰$ آن گاه به ازای هر n داریم$|a_n| \leq ۲$

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.

اثبات. چون برای $۰ < |z| < ۱$ ، $f(z) \neq ۰$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \qquad (۱.۵)$$

در $|z| < ۱$ تحلیلی است می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad (۱.۶)$$

از طرفی برای $|z| < ۱$ ، $f(z) \in S^*$ پس $Re\{P(z)\} > ۰$ بنا به قضیه ی (۱.۴.۴) داریم:

$$|\alpha_n| \leq ۲ \qquad n = ۱, ۲, ۳, ... \qquad (۱.۷)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$۱+\sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^{n-۱} = (۱+\sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱+\sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n)$$

با تساوی قرار دادن ضرایب به رابطه ی زیر می رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + ... + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱}$$

و یا به صورت معادل:

$$(k-۱)a_k = a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + ... + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱} \qquad (k=۲,۳,...) \qquad (۸.۱)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) بکار برد لذا:

$$(k-۱)|a_k| \leq ۲(|a_{k-۱}| + |a_{k-۲}| + ... + |a_۲| + ۱)$$

از رابطه ی فوق در می یابیم $|a_۲| \leq ۲$ ، سپس فرض کنیم برای $k = ۲,۳,...,n-۱$ ، $|a_k| \leq k$ در اینصورت:

$$(n-۱)|a_n| \leq ۲[(n-۱)+(n-۲)+...+۲+۱] = \frac{۲(n-۱)n}{۲}$$

و این به $|a_n| \leq n$ برمی گردد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. ■

۵.۱ رده های T و $T_{۲,\mu}$

تعریف ۱.۵.۱. ردهT را زیررده توابع تک ارز از A درنظر می گیریم که در شرط $|\frac{z^۲ f'(z)}{f(z)^۲} - ۱| < ۱, z \in \mathcal{U}$ صدق می کنند.هم چنین زیررده هایی از Tرا که $f''(۰) = ۰$ با $T_۲$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۵.۱. منظوراز $T_{2,\mu}$، رده توابع تک ارزی ست که برای $z \in \mathcal{U}$ درشرط $|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1| < \mu$ صدق می کنندکه f به فرم $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ و $0 < \mu < 1$ می باشند

قضیه ۳.۵.۱. ([۷]) اگر $f \in T_2$ آنگاه

الف: به ازای هر $z \in \mathcal{U}$، $Re(\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2})$

ب: برای $|z| < \frac{1}{4\sqrt{2}}$ ، fستاره گون است .

ج:برای $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $Re\ f'(z) > 0$

۶.۱ رده $S(\alpha)$

تعریف ۱.۶.۱. به ازای هرعددحقیقی α که $0 < \alpha \leq 2$ ، $S(\alpha)$ رارده توابع $f \in \mathcal{A}$ تعریف می کنیم که درشرایط $0 < |z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ و $z \in \mathcal{U}; |(\frac{z}{f(z)})''| \leq \alpha$ صدق می کنند.

قضیه ۲.۶.۱. [۱۳] اگر $f(z) \in S(\alpha)$ آن گاه برای $z \in \mathcal{U}$ داریم $|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1| \leq \alpha |z|^2$

قضیه ۳.۶.۱. اگر $f(z) \in S(\alpha)$ و به فرم $f(z) = z + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots$ باشد، آنگاه

الف: اگر $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq \alpha \leq 2$ ، آنگاه $f(z)$ در ناحیه $|z| < \sqrt{\frac{2}{\alpha}.\frac{1}{4\sqrt{5}}}$ ستاره گون است.

ب: اگر $\sqrt{3} - 1 \leq \alpha \leq 2$ ، آنگاه برای $|z| < \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\alpha}}$ داریم $Re\ f'(z) > 0$

قضیه ۴.۶.۱. **(نگاشت ریمان)** [۱۲] فرض کنیم D میدان همبند ساده ای باشدو z_0 نقطه ای در این میدان،در این صورت تابع منحصر به فردوتک ارز$f(z)$ وجود دارد که Dرا به قرص $|z| < 1$ تصویر می کندو $f'(z_0) > 0$، $f(z_0) = 0$

طبق قضیه نگاشت ریمان هر دامنه همبند ساده با دیسک واحد هم ارز است. پس هر تابع تحلیلی و یک به یک که دامنه تعریف آن یک دامنه همبند ساده باشد می تواند به تابع تحلیلی و تک ارز که دامنه تعریف آن دیسک واحد است تبدیل شود.

فصل ۲
بررسی محک های تک ارزی برای عملگرهای انتگرال

رده توابع تحلیلی، رده توابع تک ارز،رده توابع ستاره گون ،.....دربخش قبل معرفی شدند. افرادمتعددی به مطالعه این مطلب پرداخته اند که تحت چه شرایطی عملگرهای انتگرال در رده های مختلف توابع فوق قرارمی گیرند و اصولاً این عملگرها با تغییر شرایط تعیین شده،چه نتایجی رادربرخواهندداشت.

ما دراین فصل نتایج حاصل از تحقیق آنها را بررسی و تحلیل کرده و سعی میکنیم ضمن معرفی یک عملگرانتگرال جدید به محک های تک ارزی این عملگربپردازیم

۱.۲ عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}$

در این بخش عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}$ را تعریف و محک های مختلف تک ارزی را در مورد این عملگر بیان می کنیم؛ پس از آن نتایجی برای عملگرهای $\mathcal{M}_\alpha$ و $\mathcal{G}$ به دست خواهیم آورد.

در ابتدا قضیه ای را مطرح می کنیم که در اثبات قضایای این فصل ، مورد استفاده قرار می گیرد.

قضیه ۱.۱.۲. ([۱۰]) فرض کنیدα عددمختلط باشدو $Re\alpha > 0$ هم چنین $f \in \mathcal{A}$ اگر

$\frac{1-|z|^{2Re\alpha}}{Re\alpha}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq 1 \quad \forall z \in \mathcal{U}$

آن گاه عملگر انتگرال $F_\alpha(z)=[\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du]^{\frac{1}{\alpha}}$ دررده $\mathcal{S}$ می باشد.

قضیه فوق به محک بکر [1]معروف می باشد

برای $f\in\mathcal{A}$ که $\mathcal{A}$ مجموعه توابع تحلیلی ونرمالیزه دردیسک واحد(۱.۲.۱) و عددمختلط α که $(\alpha\neq 0)$ عملگرانتگرال

$$M_\alpha(z)=\{\frac{1}{\alpha}\int_0^z u^{-1}(f(u))^{\frac{1}{\alpha}}du\}^\alpha \quad (z\in\mathcal{U}) \qquad (۱.۲)$$

رادرنظربگیرید.

میلر [2] ومکانو [3] ([۵]) ثابت کرده اند که اگر$f\in S^*$ آنگاه$M_\alpha(z)\in S$.

باقراردادن $\alpha=1$ در رابطه ۱.۲ ، عملگرانتگرال

$$\mathcal{G}(z)=\int_0^z \frac{f(u)}{u}du$$

راخواهیم داشت.

ویرجیل پیسکار [4] عملگرانتگرال زیرراتعریف کرده است که حالت کلی ازعملگر $M_\alpha(z)$ و$\mathcal{G}(z)$ می باشد.

تعریف ۲.۱.۲. برای$j=1,2,..,n$، $f_j\in\mathcal{A}$ و اعداد مختلطγ_j $(\gamma_j\neq 0)$ عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}(z)=\{(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+...+\frac{1}{\gamma_n})\int_0^z u^{-1}(f_1(u))^{\frac{1}{\gamma_1}}...(f_n(u))^{\frac{1}{\gamma_n}}du\}^{\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1}+...+\frac{1}{\gamma_n}}} \qquad (۲.۲)$$

[1] Becker
[2] Miller
[3] Mocanu
[4] Virgil pescar

اگر در رابطه قبل$n=1, f_1=f, \gamma_1=\alpha$ قراردهیم عملگرانتگرال $M_\alpha(z)$ به دست می آید و اگر $n=1, f_1=f, \gamma_1=1$ جایگذاری نماییم عملگرانتگرال $\mathcal{G}$به دست می آید.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنیم $j=1,2,..,n$، γ_j اعداد مختلط که $Re\gamma_j \neq 0$ و M_j اعدادحقیقی مثبت ، $b=\sum_{j=1}^{n} Re\frac{1}{\gamma_j}>0$، $f_j \in \mathcal{A}$، $f_j(z)=z+a_{2j}z^2+a_{3j}z^3+...$

اگر

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}-1| \leq M_j \quad (z\in\mathcal{U}, j=1,2,..,n) \tag{3.2}$$

که

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{M_j}{|\gamma_j|} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}b \quad (0<b<1) \tag{4.2}$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{M_j}{|\gamma_j|} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (b\geq 1) \tag{5.2}$$

آن گاه عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ رابطه۲.۲دررده $\mathcal{S}$ قراردارد.

اثبات. مشاهده می کنیم که عملگر انتگرال ۲.۲ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}(z)=\{(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j})\int_0^z u^{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}-1}(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}}.....(\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}}du\}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}}} \tag{6.2}$$

تابع

$$g(z)=\int_0^z(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}}....(\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}}du \tag{7.2}$$

را که $f_j \in \mathcal{A}$، $j = 1, 2, .., n$ درنظرمی گیریم. تابع g در $\mathcal{U}$تحلیلی است.

تابعp را به صورت

$$p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)} \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{8.2}$$

تعریف می کنیم.$p(0) = 0$ و از روابط (۷.۲) و (۸.۲) خواهیم داشت

$$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\gamma_j|} |\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{9.2}$$

از روابط (۳.۲) و (۹.۲) به ازای هر$z \in \mathcal{U}$ نتیجه می شود:

$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|}$

با استفاده از لم (۵.۱.۱) داریم:

$$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} |z| \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{10.2}$$

از (۸.۲) و (۱۰.۲) برای هر $z \in \mathcal{U}$ نتیجه می گیریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} |\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq \frac{1 - |z|^{2b}}{b} |z| \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} \tag{11.2}$$

اگر$b \in (0, 1)$ آن گاه$1 - |z|^{2b} \leq 1 - |z|^2$ و از (۱۱.۲) داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} |\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq \frac{1 - |z|^{2}}{b} |z| \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} \tag{12.2}$$

چون

$$\max_{|z| \leq 1} (1 - |z|^2)|z| = \frac{2}{3\sqrt{3}} \tag{13.2}$$

از (۴.۲) و (۱۲.۲) به ازای هر $z \in \mathcal{U}$ و $b \in (0, 1)$ خواهیم داشت

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} |\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq 1 \tag{14.2}$$

برای حالتیکه $b \in [۱,\infty)$ می بینیم که $\frac{۱-|z|^{۲b}}{b} \leq ۱ - |z|^۲$ و با استفاده از (۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{۱-|z|^{۲b}}{b}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq (۱-|z|^۲)|z|\sum_{j=۱}^{n}\frac{M_j}{|\gamma_j|} \tag{۱۵.۲}$$

از روابط (۵.۲) ، (۱۳.۲) ، (۱۵.۲) برای هر $z \in \mathcal{U}$ و $b \in [۱,\infty)$ نتیجه می گیریم که:

$$\frac{۱-|z|^{۲b}}{b}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq ۱ \tag{۱۶.۲}$$

با مراجعه به (۷.۲) مشاهده می کنیم که $g'(z)$به صورت

$g'(z) = (\frac{f_۱(z)}{z})^{\frac{۱}{\gamma_۱}}.....(\frac{f_n(z)}{z})^{\frac{۱}{\gamma_n}}$

خواهدبود و با درنظرگرفتن (۱۴.۲) و (۱۶.۲) و قضیه (۱.۱.۲) نتیجه می شود که عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_۱,\gamma_۲,...,\gamma_n}$ در رده $\mathcal{S}$ قراردارد. □

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنیدα عدد مختلط که$Re\ \alpha \neq ۰$ و$f \in \mathcal{A}$ اگر به ازای هر $z \in \mathcal{U}$

$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱| \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}|\alpha| Re\ \frac{۱}{\alpha} \quad (۰ < Re\ \frac{۱}{\alpha} < ۱)$

یا

$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱| \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}|\alpha| \quad (Re\ \frac{۱}{\alpha} \geq ۱)$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ در رده$\mathcal{S}$ قراردارد.

اثبات. درقضیه (۳.۱.۲) ، قراردهید $n = ۱, \gamma_۱ = \alpha, f_۱ = f, b = Re\ \frac{۱}{\alpha}$. □

با نگاهی به تعریف رده توابع ستاره گون$\mathcal{S}^*$ (۱.۴.۱) و رده توابع تحلیلی $\mathcal{A}$ (۱.۲.۱) می بینیم که$\mathcal{S}^*$ زیر رده ای از$\mathcal{A}$ می باشد.

قبلا بیان کردیم که میلر و مکانو ثابت کرده اند که $\mathcal{M}_\alpha$ برای $f \in \mathcal{S}^*$ در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اگرمجددا نگاهی برقضیه فوق بیافکنید می بینید که $\mathcal{M}_\alpha$ برای $f \in \mathcal{A}$ دررده $\mathcal{S}$ است. پس این نتیجه بهبودی بر مطالعات میلر و مکانو است. لازم است در اینجا اشاره ای کلی بر بخشی از این تحقیقات داشته باشیم .

فرض کنید E

$$E = \{\phi; \mathcal{U}\text{در تحلیلی } \phi, \phi(z) \neq 0, \phi(0) = 1\}$$

باشد.

قضیه:فرض کنید $\phi, \psi \in E$ و η, β, γ و δ اعداد حقیقی که $\eta > 0, \beta > 0, \delta \geq 0$ و $\eta + \delta = \beta + \gamma$ همچنین عدد نامنفی J وجود داشته باشد به طوریکه

$$\beta + \gamma > J \geq \gamma + Re[\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}] \tag{۲.۱۷}$$

و

$$\delta + Re[\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}] \geq max[0, J - \lambda(J)] \tag{۲.۱۸}$$

که

$$\lambda(J) = \frac{1}{2} min[\frac{\beta + \gamma - J}{J}, \frac{J}{\beta + \gamma - J}] \tag{۲.۱۹}$$

و $\lambda(0) = 0$

اگر $f \in \mathcal{S}^*$ آن گاه

$$[\frac{\beta + \gamma}{z^\gamma \phi(z)} \int_0^z f^\eta(u) u^{\delta - 1} \psi(u) du]^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S} \tag{۲.۲۰}$$

اثبات. به مرجع [۵] رجوع شود. □

درنتیجه (۴.۱.۲) بررسی کردیم در حالتی که αعددمختلط است چه شرایطی برای تک ارزی عملگر $\mathcal{M}_\alpha$ نیاز است حال با توجه به قضیه قبل، می توان محک های تک ارزی عملگر $\mathcal{M}_\alpha$ را برای حالتیکه α عدد حقیقی مثبت است ، مشخص کرد.(کافیست $\phi = \psi = ۱, \eta = \beta = \frac{۱}{\alpha},$ $\delta = \gamma = ۰$ قرار دهید.)

در ادامه کار، برای عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ شرایط ضعیف تری خواهیم دید و به تبع آن ، شرایط جدیدی برای $\mathcal{M}_\alpha$ پیش خواهد آمد. قبل از آن نتیجه دیگری را ارایه می کنیم.

نتیجه ۵.۱.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_{۲۱}z^۲ + a_{۳۱}z^۳ + ...$ ۱ اگر

$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱| \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \quad z \in \mathcal{U}$

آن گاه عملگرانتگرال الکساندرکه به صورت

$$\mathcal{G}(z) = \int_۰^z \frac{f(u)}{u} du \qquad (۲۱.۲)$$

تعریف می شود در رده S قرار می گیرد.

اثبات. با قرار دادن $n = ۱, \gamma_1 = ۱, f_1 = f$ در قضیه (۳.۱.۲) نتیجه حاصل می شود. □

درقضیه زیر،شرایط دیگری برای تک ارزی عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ (۲.۲) بیان می شود. شما هم بعد از مطالعه قضیه ذیل درخواهید یافت که قضیه (۶.۱.۲) در واقع بهبودی از قضیه (۳.۱.۲) است.

قضیه ۶.۱.۲. فرض کنید $j = ۱, ۲, .., n$ ، γ_j ۱عدادمختلط باشندو ، $Re\,\gamma_j \neq ۰$ ، $f_j \in \mathcal{A}$ ، $f_j(z) = z + a_{۲j}z^۲ + a_{۳j}z^۳ + ...$ ، $b = \sum_{j=1}^n Re\,\frac{۱}{\gamma_j} > ۰$ ۱گربرای هر $z \in \mathcal{U}$ و $\theta \in [۰, ۲\pi)$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)}-1)\} \leq \frac{|\gamma_j|Re\frac{1}{\gamma_j}}{4} \qquad j=1...n, b\in(0,1) \tag{۲۲.۲}$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)}-1)\} \leq \frac{|\gamma_j|}{4n} \qquad j=1...n, b\in[1,\infty) \tag{۲۳.۲}$$

آن گاه عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ در رده $\mathcal{S}$ قرار می گیرد.

اثبات. فرض کنیم

$$h(z)=\int_0^z(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}}....(\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}}du \tag{۲۴.۲}$$

تابع h در $\mathcal{U}$تحلیلی است و داریم:

$$\frac{zh''(z)}{h'(z)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)}-1) \tag{۲۵.۲}$$

تابع

$$\Psi_j(z)=e^{i\theta}(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)}-1) \quad j=1...n, \theta\in[0,2\pi)$$

را در نظر می گیریم و مشاهده می کنیم که

$$\Psi_j(0)=0 \quad j=1....n$$

از (۲۲.۲) و لم کاراتئودوری برای$b\in(0,1)$ داریم:

$$|\Psi_j(z)| \leq \frac{|z||\gamma_j|Re\frac{1}{\gamma_j}}{2(1-|z|)} \tag{۲۶.۲}$$

همچنین از رابطه (۲۳.۲) و لم کاراتئودوری برای حالتیکه$b \in [1, \infty)$ باشد، خواهیم داشت:

$$|\Psi_j(z)| \leq \frac{|z||\gamma_j|}{2n(1-|z|)} \tag{۲۷.۲}$$

اگر روابط (۲۵.۲) و (۲۶.۲) را در نظربگیریم، مشاهده می کنیم

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b}\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq \frac{1-|z|^{2b}|z|}{2(1-|z|)} \quad (z \in \mathcal{U}, b \in (0, 1)) \tag{۲۸.۲}$$

چون برای$z \in \mathcal{U}, b \in (0, 1)$

$1-|z|^{2b} \leq 1-|z|^2$

لذا با توجه به رابطه (۲۸.۲) خواهیم داشت

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b}\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1 \quad (\forall z \in \mathcal{U}, b \in (0, 1)) \tag{۲۹.۲}$$

برای$z \in \mathcal{U}, b \in [1, \infty)$

$\frac{1-|z|^{2b}}{b} \leq 1-|z|^2$

است و از روابط (۲۵.۲) و (۲۷.۲) خواهیم داشت

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b}\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1 \quad b \in (0, 1) \tag{۳۰.۲}$$

بادقت در رابطه (۲۴.۲) متوجه خواهیم شد که

$h'(z) = \int_0^z (\frac{f_1(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma_1}} \ldots (\frac{f_n(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma_n}} du$

با استفاده از روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) و لم بکر (۱.۱.۲) نتیجه می گیریم که $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}$ متعلق به رده $\mathcal{S}$ است. $\square$

همان طور که می دانیم برای عدد مختلط دلخواهz ، $Re\, z \leq |z|$ که $Re\, z$ قسمت حقیقی z است. با در نظر گرفتن این مطلب ، قضیه (۶.۱.۲) بهبودی از قضیه (۳.۱.۲) است.

نتیجه ۷.۱.۲. فرض کنیم αعدد مختلط، $Re\, \alpha \neq 0$، $b = Re\, \frac{1}{\alpha} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \ldots$ اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\alpha| Re \frac{1}{\alpha}}{4} \quad b \in (0, 1)$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\alpha|}{4} \quad b \in [1, \infty)$$

آن گاه عملگرانتگرال$M_\alpha(z)$ (۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ قرارمی گیرد.

اثبات. در قضیه (۶.۱.۲) قرار دهید $n = 1, f_1 = f, \gamma_1 = \alpha$. □

نتیجه (۷.۱.۲) بهبودی از نتیجه (۴.۱.۲) است.

نتیجه ۸.۱.۲. فرض کنید تابع $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \ldots$ اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{1}{4}$$

آن گاه عملگر انتگرال الکساندر که به صورت $G(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u}$ تعریف می شود، در رده $\mathcal{S}$ خواهد بود.

اثبات. باجایگزینی $n = 1, f_1 = f, \gamma_1 = 1$ درقضیه (۶.۱.۲)
نتیجه می شود که $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$ □

نتیجه (۸.۱.۲) بهبودی ازنتیجه (۵.۱.۲) است.

۲.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|[Re\ \eta]|},\beta,\eta}$

در این بخش ازفصل دوم، به مطالعه عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|[Re\ \eta]|},\beta,\eta}$ خواهیم پرداخت و سپس محک های تک ارزی برای حالت های جزیی ترعملگرهای $\mathcal{M}_\alpha$ ، $\mathcal{K}_\alpha$، $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ به دست خواهیم آورد.

عملگرانتگرال

$$\mathcal{K}_\alpha(z) = \int_0^z (\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}} du \tag{۳۱.۲}$$

که $f \in \mathcal{A}$، α عدد مختلط($\alpha \neq 0$) در نظر بگیرید.

کیم [۵] و مرکز [۶] ([۳]) ثابت کرده اند که عملگر انتگرال $\mathcal{K}_\alpha(z)$ برای$f \in \mathcal{S}$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{|\alpha|}$ در رده $\mathcal{S}$ قرارمی گیرد.

پاسکو [۷] و پیسکار [۸] عملگر انتگرال

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta \int_0^z u^{\beta-1} (\frac{f(u)}{u})^{\alpha} du]^{\frac{1}{\beta}} \tag{۳۲.۲}$$

کهα وβ اعداد مختلط، $\beta \neq 0$ و $f \in \mathcal{A}$ راتعریف کرده اند. در[۹] شرایط تک ارزی برای عملگرانتگرال $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ بحث شده است.

نیکولیتا بریز [۹] ، ویرحیل پیسکار و دنیل بریز [۱۰] به بررسی عملگر انتگرال

$$\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|[Re\ \eta]|},\beta,\eta}(z) = \{\eta\beta \int_0^z u^{\eta\beta-1} (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}} \ldots\ldots\ldots (\frac{f_{|[Re\ \eta]|}(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_{|[Re\ \eta]|}}} du\}^{\frac{1}{\eta\beta}} \tag{۳۳.۲}$$

که$f_j \in \mathcal{A}$ ، γ_j ، η, β اعدادمختلط،$\gamma_j \neq 0$ ، $Re\ \eta \notin [0, 1)$ ، $j = 1, \ldots\ldots, |[Re\ \eta]|$ ، $\beta \neq 0$

[۵] Y.J.Kim
[۶] E.P.Merkes
[۷] N.N.Pascu
[۸] V.pescar
[۹] Nicoleta Breaz
[۱۰] Daniel Breaz

پرداخته اند و ما مروری بر این روند خواهیم داشت.

اگر در رابطه (۳۳.۲) ، مقادیر $\eta = ۱$ ، $\gamma_۱ = \frac{۱}{\alpha}$ ، $f_۱ = f$ را در نظر بگیریم عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ (۳۲.۲) به دست می آید.

برای $\eta\beta = ۱$ ، $|[Re\,\eta]| = ۱$ ، $\gamma_۱ = \gamma$ و $f_۱ = f$ در رابطه (۳۳.۲) ، عملگرانتگرال $\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) به دست خواهد آمد.

اگر در رابطه (۳۳.۲) قرار دهیم $\eta\beta = \frac{۱}{\alpha}$ ، $\gamma_۱ = \alpha$ ، $|[Re\,\eta]| = ۱$ ، $f_۱ = f$ آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) را خواهیم داشت.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم γ_j ، η, β اعداد مختلط $\beta \neq ۰$ ، $Re\,\eta \notin [۰, ۱)$ ، $j = ۱, ..., |[Re\,\eta]|$ ، $a = \sum_{j=۱}^{|[Re\,\eta]|} Re\,\frac{۱}{\gamma_j} > ۰$ ، $f_j \in \mathcal{A}$، $f_j(z) = z + b_{۲j}z^۲ + b_{۳j}z^۳ + ...$ اگر برای هر $z \in \mathcal{U}$ و $Re\,\eta\beta \geq a$

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - ۱| \leq \frac{(۲a + ۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲|[Re\,\eta]|}|\gamma_j| \quad j = ۱, ..., |[Re\,\eta]| \qquad (۳۴.۲)$$

آن گاه عملگر

$\mathcal{H}_{\gamma_۱,\gamma_۲,...,\gamma_{|[Re\,\eta]|},\beta,\eta}(z) = \{\eta\beta \int_۰^z u^{\eta\beta-۱}(\frac{f_۱(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma_۱}}.........(\frac{f_{|[Re\,\eta]|}(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma_{|[Re\,\eta]|}}}du\}^{\frac{۱}{\eta\beta}}$ در $\mathcal{S}$ است.

اثبات. تابع

$$g(z) = \int_۰^z (\frac{f_۱(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma_۱}}.........(\frac{f_{|[Re\,\eta]|}(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma_{|[Re\,\eta]|}}}du \qquad (۳۵.۲)$$

را در نظر بگیرید. تابع g در $\mathcal{U}$ تحلیلی می باشد.

تابع $p(z)$ را به صورت $p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)}$ تعریف می کنیم. بنابراین

$$p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)} = \sum_{j=۱}^{|[Re\,\eta]|}[\frac{۱}{\gamma_j}(\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - ۱)] \quad z \in \mathcal{U} \qquad (۳۶.۲)$$

از (۳۴.۲) و (۳۶.۲) نتیجه می گیریم که

$$|p(z)| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} \qquad (37.2)$$

با استفاده از لم شوارتز (۵.۱.۱) برای هر $z \in \mathcal{U}$خواهیم داشت:

$$|p(z)| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2}|z| \qquad (38.2)$$

از روابط (۳۶.۲) و (۳۸.۲) نتیجه می شود که:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq \frac{(1-|z|^{2a})|z|}{a}\frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} \quad \forall z \in \mathcal{U} \qquad (39.2)$$

چون $\max\limits_{|z|\leq 1}\frac{(1-|z|^{2a})|z|}{a} = \frac{2}{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}$

لذا از رابطه (۳۹.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1 \quad \forall z \in \mathcal{U}$$

حال طبق لم (۱.۱.۲) عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{[[Re\ \eta]]},\beta,\eta}$ متعلق به رده $\mathcal{S}$ است. □

در نتایج (۴.۱.۲) و (۷.۱.۲) شرایطی را که عملگر$\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ قرارمی گرفت ، را ارایه و مقایسه نمودیم. هم چنین عملگر $\mathcal{M}_\alpha$ حالت خاصی از عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{[[Re\ \eta]]},\beta,\eta}$ به شمار می رود. پس با توجه به قضیه قبل می توان شرایط جدیدی را تعیین نمود که عملگر $\mathcal{M}_\alpha$ در رده $\mathcal{S}$ قرار گیرد.

نتیجه ۲.۲.۲. فرض کنیم αعدد مختلط، $a = Re\,\frac{1}{\alpha} > 0$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + b_{21}z^2 + b_{31}z^3 + \dots$ اگر

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2}|\alpha| \quad \forall z \in \mathcal{U}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ به رده $\mathcal{S}$ تعلق دارد.

اثبات. درقضیه قبل، $\eta = 1$ ، $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ، $\gamma_1 = \alpha$ ، $f_1 = f$ قرار دهید. □

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنید α ،βاعداد مختلط، $\beta \neq 0$ ، $a = Re\,\alpha > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + b_{21}z^2 + b_{31}z^3 + \dots$ اگر

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2|\alpha|} \quad \forall z \in \mathcal{U}$$

آن گاه برای $Re\,\beta \geq Re\,\alpha$ عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ (۳۲.۲) در رده $\mathcal{S}$ قرار دارد.

اثبات. با درنظر گرفتن $\eta = 1$ ، $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha}$ ، $f_1 = f$ در قضیه (۱.۲.۲) ، نتیجه حاصل خواهد شد. □

نتیجه ۴.۲.۲. فرض کنید αعدد مختلط، $a = Re\frac{1}{\alpha} \in (0, 1]$، $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + b_{21}z^2 + b_{31}z^3 + \dots$ اگر

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2}|\alpha| \quad \forall z \in \mathcal{U}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه (۱.۲.۲) ، قرار دهید $\eta\beta = 1$ ، $|[Re\,\eta]| = 1$ $\gamma_1 = \alpha$ ، $f_1 = f$ □

نتیجه ۵.۲.۲. فرض کنید α و η اعداد مختلط ، $a = |[Re\,\eta]|.Re\,\frac{1}{\alpha}$ ، $Re\,\eta \notin [0, 1)$ ، $a \in (0, 1]$ ، $j = 1 \dots .|[Re\,\eta]|$ ، $f_j \in \mathcal{A}$ ، $f_j(z) = z + b_{2j}z^2 + b_{3j}z^3 + \dots$ اگر

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2|[Re\,\eta]|}|\alpha| \qquad \forall z \in \mathcal{U}, j = 1 \dots |[Re\,\eta]|$$

آن گاه عملگر انتگرال

$\mathcal{L}_\alpha(z) = \int_0^z (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}} .... (\frac{f_{|[Re\ \eta]|}(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}$

متعلق به رده $\mathcal{S}$ است.

اثبات. با جایگذاری $\eta\beta = 1$ ، $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{|[Re\ \eta]|} = \alpha$ در قضیه (۱.۲.۲) نتیجه می شود که $\mathcal{L}_\alpha(z)$ در رده $\mathcal{S}$ می باشد. □

در قضیه (۱.۲.۲) محک تک ارزی عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{|[Re\eta]|},\beta,\eta}$ ، برای $f_j \in \mathcal{A}$ بررسی شد. در قضیه ذیل خواهیم دید که اگر $f_j \in \mathcal{S}$ چه تغییری در شرایط پیش خواهد آمد.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید γ_j ، δ ، β ، η اعدادمختلط باشند، $\gamma_j \neq 0$ ، $Re\,\eta \notin [0,1)$ ، $\beta \neq 0$ ، $a = Re\,\delta > 0$ ، $j = 1...|[Re\,\eta]|$ ، $f_j \in \mathcal{S}$ ، $f_j(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{kj} z^k$ اگر

$$\sum_{j=1}^{|[Re\ \eta]|} \frac{1}{|\gamma_j|} \leq \frac{a}{2} \quad ; \qquad 0 < a < \frac{1}{2} \tag{۴۰.۲}$$

یا

$$\sum_{j=1}^{|[Re\ \eta]|} \frac{1}{|\gamma_j|} \leq \frac{1}{4} \quad ; \qquad a \geq \frac{1}{2} \tag{۴۱.۲}$$

آن گاه برای $Re\,\eta\beta \geq a$ ، عملگرانتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{|[Re\ \eta]|},\beta,\eta}$ (۳۳.۲) در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. تابع $g(z)$ رابه صورت زیر در نظر می گیریم

$g(z) = \int_0^z (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}} .... (\frac{f_{|[Re\ \eta]|}(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_{|[Re\ \eta]|}}} du$

تابع g در $\mathcal{U}$ تحلیلی است و

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq \frac{(1-|z|^{2a})}{a} \sum_{j=1}^{|[Re\ \eta]|} \frac{1}{|\gamma_j|}\left|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1\right| \tag{۴۲.۲}$$

چون $f_j \in \mathcal{S}(j = 1...|[Re\,\eta]|)$ بنابراین

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad z \in \mathcal{U}, j = 1...|[Re\,\eta]| \tag{۴۳.۲}$$

از روابط (۴۲.۲) و (۴۳.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq \frac{(1-|z|^{2a})}{a}.\frac{2}{1-|z|}\sum_{j=1}^{|[Re\,\eta]|}\frac{1}{|\gamma_j|} \quad \forall z \in \mathcal{U} \tag{۴۴.۲}$$

اگر $0 < a < \frac{1}{2}$ آن گاه $\max_{|z|\leq 1}\frac{1-|z|^{2a}}{1-|z|} = 1$ و از روابط (۴۰.۲) و (۴۴.۲) نتیجه می گیریم که:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq 1 \quad z \in \mathcal{U} \tag{۴۵.۲}$$

واگر $a \geq \frac{1}{2}$ باشد $\max_{|z|\leq 1}\frac{1-|z|^{2a}}{1-|z|} = 2a$ لذاباکمک (۴۱.۲) و (۴۴.۲) مجددا به نامساوی (۴۵.۲) خواهیم رسید. حال با استناد به لم بکر می توان نتیجه گرفت که عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{|[Re\eta]|},\beta,\eta}$ متعلق به رده $\mathcal{S}$ می باشد □

نتیجه ۷.۲.۲. فرض کنید α و δ اعداد مختلط، $a = Re\,\delta > 0$ ، $f \in \mathcal{S}$ ، $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k1}z^k$ اگر

$$\tfrac{1}{|\alpha|} \leq \tfrac{a}{2} \quad 0 < a < \tfrac{1}{2}$$

یا

$$\tfrac{1}{|\alpha|} \leq \tfrac{1}{4} \quad a \geq \tfrac{1}{2}$$

آن گاه برای $a \geq Re\,\frac{1}{\alpha}$ عملگر انتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ است.

اثبات. در قضیه (۶.۲.۲) قرار دهید $\eta\beta = \frac{1}{\alpha}$، $|[Re\,\eta]| = 1$، $\gamma_1 = \alpha$، $f_1 = f$ □

نتیجه ۸.۲.۲. فرض کنید α، β و γ اعداد مختلط، $a = Re\,\gamma > 0$ ، $f \in \mathcal{S}$،
$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k1} z^k$ اگر

$$|\alpha| \leq \frac{a}{2} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

یا

$$|\alpha| \leq \frac{1}{4} \quad a \geq \frac{1}{2}$$

آن گاه برای$a \geq Re\,\beta$ عملگر انتگرال$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ (۳۲.۲) در رده‌ی$\mathcal{S}$ قرار دارد.

اثبات. در قضیه (۶.۲.۲) فرض کنید ، $\eta = 1$ ، $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha}$، $f_1 = f$، آن گاه نتیجه به دست خواهدآمد. □

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنیدα وγ اعداد مختلط،$a = Re\,\gamma \in (0, 1]$ ، $f \in \mathcal{S}$،
$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k1} z^k$ اگر

$$\frac{1}{|\alpha|} \leq \frac{a}{2} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

یا

$$\frac{1}{|\alpha|} \leq \frac{1}{4} \quad a \geq \frac{1}{2}$$

،آن گاه عملگر انتگرال$\mathcal{K}_{\alpha}$ (۳۱.۲) در رده‌ی$\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. با جایگزینی $\eta\beta = 1$، $||[Re\eta]|| = 1$، $\gamma_1 = \alpha$، $f_1 = f$ در قضیه (۶.۲.۲) نتیجه حاصل خواهد شد. □

نتیجه ۱۰.۲.۲. فرض کنیدα، η و γ اعداد مختلط، $Re\,\eta \notin [0, 1)$، $a = Re\gamma \in (0, 1]$
، $f_j \in \mathcal{S}$، $f_j(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{kj} z^k$ اگر

$$\frac{|[Re\eta]|}{|\alpha|} \leq \frac{a}{۲} \quad ۰ < a < \frac{۱}{۲}$$

یا

$$\frac{|[Re\eta]|}{|\alpha|} \leq \frac{۱}{۴} \quad a \geq \frac{۱}{۲}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{L}_\alpha$ که در نتیجه (۵.۲.۲) مورد بحث واقع شد در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه (۶.۲.۲) فرض کنید $\eta\beta = ۱$، $Re\,\eta \notin [۰, ۱)$، $\gamma_۱ = \gamma_۲ = ... = \gamma_{|[Re\ \eta]|} = \alpha$ آن گاه نتیجه حاصل خواهد شد. □

۳.۲ عملگرانتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$

در این بخش از فصل دوم، شرایطی که عملگر انتگرال

$\mathcal{J}_{\gamma,\beta} = \{\frac{1}{\gamma}\int_0^z u^{-\beta}(f(u))^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du\}^{\gamma}$

در رده $\mathcal{S}$ قرار می گیرد را مرور می کنیم و در ادامه بخش، با توجه به بحث انجام شده شرایط جدیدی برای عملگرهای $\mathcal{M}_\alpha$ و$\mathcal{K}_\alpha$ که دربخش های قبلی آنها را معرفی کرده ایم، به دست خواهیم آورد.

عملگرانتگرال

$$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(z) = \{\frac{1}{\gamma}\int_0^z u^{-\beta}(f(u))^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du\}^{\gamma} \quad z\in\mathcal{U} \tag{۴۶.۲}$$

که$\gamma,\beta\in\mathbb{C}$ در نظر بگیرید.

تذکر: اگر $\beta = 1$ و$\gamma = \alpha$ آن گاه عملگر انتگرال$\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) حاصل خواهد شد.

هم چنین اگر$\frac{1}{\gamma} = 1$ و$\beta = \frac{1}{\alpha}\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ آن گاه عملگرانتگرال$\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) که همان انتگرال کیم -مرکز می باشد، به دست می آید.

اگر$\frac{1}{\gamma} = 1$ و$\beta = 1$ عملگر انتگرال الکساندر (۲۱.۲) به دست می آید.

اگر$\beta = 0$ عملگر انتگرال$J_{\gamma,0}(z) = \{\frac{1}{\gamma}\int_0^z(f(u))^{\frac{1}{\gamma}-1}du\}^{\gamma}$ را خواهیم داشت.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم γعدد مختلط $Re\,\frac{1}{\gamma} > 0$، $f\in\mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2z^2+\dots$ اگربرای هر $z\in\mathcal{U}$، $\theta\in[0,2\pi]$ و $\beta\in\mathbb{C}$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1)\} \leq \frac{|\gamma|Re\frac{1}{\gamma}}{4+(1+|\gamma||\beta-1|)} \quad ; \quad 0 < Re\,\frac{1}{\gamma} < 1 \tag{۴۷.۲}$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1)\} \leq \frac{|\gamma|}{4+(1+|\gamma||\beta-1|)} \quad ; \quad Re\,\frac{1}{\gamma} \geq 1 \tag{۴۸.۲}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ ، در رده $\mathcal{S}$خواهد بود.

اثبات. عملگرانتگرال$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ رامی توان به فرم

$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(z) = \{\frac{1}{\gamma}\int_0^z u^{\frac{1}{\gamma}-1}(\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du\}^{\gamma}$

بازنویسی کرد.

تابع $g(z) = \int_0^z(\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}$ در $\mathcal{U}$تحلیلی می باشد و داریم:

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = (\frac{1}{\gamma} + \beta - 1)(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1) \tag{۴۹.۲}$$

تابع $\psi(z)$ را به صورت

$\psi(z) = e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1) \quad z \in \mathcal{U}, \theta \in [0, 2\pi]$

تعریف می کنیم و مشاهده می کنیم که $\psi(0) = 0$

از رابطه (۴۷.۲) و لم کاراتئودوری برای وقتی که $Re\,\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$ خواهیم داشت:

$$|\psi(z)| \leq \frac{|z||\gamma|Re\frac{1}{\gamma}}{2(1 - |z|)(1 + |\gamma||\beta - 1|)} \quad ; \quad z \in \mathcal{U}, \beta \in \mathbb{C} \tag{۵۰.۲}$$

و از (۴۸.۲) و لم کاراتئودوری (۱.۲.۲) برای حالتیکه$Re\,\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ خواهیم داشت:

$$|\psi(z)| \leq \frac{|z||\gamma|}{2(1 - |z|)(1 + |\gamma||\beta - 1|)} \quad ; \quad z \in \mathcal{U}, \beta \in \mathbb{C} \tag{۵۱.۲}$$

با استفاده از (۴۹.۲) و (۵۰.۲) نتیجه می گیریم:

$$\frac{1 - |z|^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq \frac{(1 - |z|^{2Re\frac{1}{\gamma}})|z|}{2(1 - |z|)} \quad ; \quad z \in \mathcal{U}, Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1) \tag{۵۲.۲}$$

چون برای $Re\,\frac{1}{\gamma}\in(0,1)$

$$1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma}}\leq 1-|z|^{2}$$

لذااز (۵۲.۲) برای هر $z\in\mathcal{U}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right|\leq 1 \quad ; \quad Re\frac{1}{\gamma}\in(0,1) \tag{۵۳.۲}$$

درحالتیکه $Re\,\frac{1}{\gamma}\in[1,\infty)$ داریم،

$$\frac{1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}}\leq 1-|z|^{2} \quad z\in\mathcal{U}$$

و با کمک روابط (۴۹.۲) و (۵۱.۲) برای هر $z\in\mathcal{U}$ داریم:

$$\frac{1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right|\leq 1 \quad Re\frac{1}{\gamma}\in[1,\infty) \tag{۵۴.۲}$$

باتوجه به روابط (۵۳.۲) و (۵۴.۲) ولم بکر (۱.۱.۲) می توان اظهار داشت که $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ در رده$\mathcal{S}$ قرار دارد. □

نتیجه ۲.۳.۲. فرض کنیم α عدد مختلط، $Re\frac{1}{\alpha}>0$، $f\in\mathcal{A}$، $f(z)=z+a_2z^2+\dots$
اگر به ازای هر $z\in\mathcal{U},\theta\in[0,2\pi]$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1)\}\leq\frac{|\alpha|Re\frac{1}{\alpha}}{4} \quad ; \quad Re\frac{1}{\alpha}\in(0,1)$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1)\}\leq\frac{|\alpha|}{4} \quad ; \quad Re\frac{1}{\alpha}\in[1,\infty)$$

آن گاه عملگرانتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ ، ۱.۲ در رده$\mathcal{S}$ خواهد بود.

اثبات. در قضیه قبل، قرار دهید $\beta=1,\gamma=\alpha$. □

نتیجه ۳.۳.۲. فرض کنیم $\beta \in \mathbb{C}$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ اگر به ازای هر $z \in \mathcal{U}$ و $\theta \in [0, 2\pi]$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{1}{4(1+|\beta-1|)}$$

آن گاه عملگرانتگرال $\mathcal{K}_\alpha$ ، (۳۱.۲) در رده‌ی $\mathcal{S}$ خواهد بود.

اثبات. در قضیه قبل، قرار دهید $\beta = \alpha, \gamma = 1$. □

نتیجه ۴.۳.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط، $Re\,\frac{1}{\gamma} > 0$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ اگر

$$Re\,\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma| Re\,\frac{1}{\gamma}}{4(1+|\gamma|)} \quad ; \quad Re\,\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$$

یا

$$Re\,\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma|}{4(1+|\gamma|)} \quad ; \quad Re\,\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$$

آن گاه عملگرانتگرال $J_{\gamma,0}(z)$ ، در رده‌ی $\mathcal{S}$ خواهد بود.

اثبات. در قضیه قبل، قرار دهید $\beta = 0$. □

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط که $a = Re\frac{1}{\gamma} > 0$، $\beta \in \mathbb{C}$، $f(z) \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$،

اگر

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}|\gamma|}{2(1+|\gamma||\beta-1|)} \tag{۵۵.۲}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ (۴۶.۲) در رده‌ی $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. عملگر $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ را می توانیم به فرم زیر بنویسیم:

$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(z)=\{\frac{۱}{\gamma}\int_{۰}^{z}u^{\frac{۱}{\gamma}-۱}(\frac{f(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma}+\beta-۱}du\}^{\gamma} \quad z\in\mathcal{U}$

تابع $g(z)$ را به صورت

$g(z)=\int_{۰}^{z}(\frac{f(u)}{u})^{\frac{۱}{\gamma}+\beta-۱}$

تعریف می کنیم.$g(z)$ در$\mathcal{U}$ تحلیلی است.

حال تابع $p(z)$ رابه صورت زیر در نظر می گیریم:

$$p(z)=\frac{zg''(z)}{g'(z)}=(\frac{۱}{\gamma}+\beta-۱)(\frac{zf'(z)}{f(z)}-۱) \quad z\in\mathcal{U} \qquad (۵۶.۲)$$

با توجه به روابط(۵۵.۲) و (۵۶.۲) برای هر $z\in\mathcal{U}$ داریم:

$|p(z)|\leq\frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}$

با استناد به لم شوارتز میتوانیم بگوییم:

$|p(z)|\leq\frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}|z| \quad ,z\in\mathcal{U}$

از رابطه فوق ، به ازای هر$z\in\mathcal{U}$ داریم:

$$\frac{۱-|z|^{۲a}}{a}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}|\leq\frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}\frac{(۱-|z|^{۲a})}{a}|z| \qquad (۵۷.۲)$$

چون

$$\max_{|z|\leq ۱}\frac{(۱-|z|^{۲a})}{a}|z|=\frac{۲}{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}$$

از (۵۷.۲) برای هر $z\in\mathcal{U}$ نتیجه می گیریم :

$\frac{۱-|z|^{۲a}}{a}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}|\leq ۱$

از رابطه اخیر و این مطلب که $g'(z)=(\frac{f(z)}{z})^{\frac{۱}{\gamma}+\beta-۱}$ و لم بکر (۱.۱.۲) ، نتیجه می شود که عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ در رده$\mathcal{S}$ می باشد. $\square$

نتیجه ۶.۳.۲. فرض کنیم α عدد مختلط که $a = Re\frac{1}{\alpha} > 0$ ، $f(z) \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$
اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}|\alpha|}{2}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه قبل، قرار دهید $\gamma = \alpha, \beta = 1$. □

اگر در نتیجه فوق قرار دهیم $a = 1$ ، شرایط نتیجه (۴.۱.۲) به دست می آید. لذا این نتیجه تعمیمی از نتیجه مذکور می باشد.

نتیجه ۷.۳.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ ، $f(z) \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$
اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2(1+|\alpha-1|)}$$

آن گاه عملگر انتگرال $\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) متعلق به رده $\mathcal{S}$ خواهد بود.

اثبات. در قضیه (۵.۳.۲) قراردهید $\beta = \alpha, \frac{1}{\gamma} = 1$ □

نتیجه ۸.۳.۲. فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

آن گاه عملگر انتگرال الکساندر (۲۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ است.

اثبات. باقراردادن $\beta = 1, \frac{1}{\gamma} = 1$ در قضیه (۵.۳.۲) نتیجه به دست می آید. □

نتیجه ۹.۳.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط، $a = Re\frac{1}{\gamma} > 0$ ، $f(z) \in \mathcal{A}$ اگربرای هر $z \in \mathcal{U}$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right| \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}\frac{|\gamma|}{۱+|\gamma|}$$

آن گاه عملگر انتگرال $J_{\gamma,۰}(z)$ در رده$\mathcal{S}$ می باشد

اثبات. در قضیه قبل قراردهید، $\beta = ۰$. □

۴.۲ عملگر های انتگرال $\mathcal{F}_{n,\alpha}(z)$ و $\mathcal{G}_{n,\alpha}(z)$

در بخش جاری،دو عملگر

$$\mathcal{F}_{n,\alpha}(z)=([n(\alpha-1)+1]\int_0^z\prod_{j=1}^n(\frac{g_j(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}u^{n(\alpha-1)}du)^{\frac{1}{[n(\alpha-1)+1]}}\quad g_j\in\mathcal{A},j=1,...,n$$

و

$$\mathcal{G}_{n,\alpha}(z)=([n(\alpha-1)+1]\int_0^z\prod_{j=1}^n g_j(u)^{\alpha-1}du)^{\frac{1}{[n(\alpha-1)+1]}}\quad g_j\in\mathcal{A},j=1,...,n$$

را مورد بررسی قرار می دهیم . قبل از آن به لم ها و قضایای مورد استفاده در این قسمت اشاره می کنیم.

قضیه ۱.۴.۲. ([۱۱]) فرض کنیم $f\in\mathcal{A}$ ودر شرط

$$|\frac{z^2f'(z)}{(f(z))^2}-1|\leq 1 \tag{۵۸.۲}$$

صدق کند آن گاه ، تابع $f(z)$ تک ارز می باشد.

قضیه ۲.۴.۲. ([۸]) فرض کنیم $g\in\mathcal{A}$ و در نامساوی (۵۸.۲) صدق کند هم چنین فرض کنید $(a,b\in R)\quad \alpha=a+ib$ عدد مختلط که

$$a^4+a^2b^2-a\geq 0,\text{ و } a\in(0,\sqrt{3}]$$

اگر $(z\in\mathcal{U})\quad |g(z)|\leq 1$ آن گاه تابع $\xi_\alpha(z)$ که

$$\xi_\alpha(z)=[\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}(\frac{g(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{۵۹.۲}$$

متعلق به رده $\mathcal{S}$ می باشد.

قضیه ۲.۴.۳. ([۲]) فرض کنیم $g \in \mathcal{A}$ و در نامساوی (۲.۵۸) صدق کند. عدد مختلط $\alpha = a + ib \quad (a, b \in R)$ در نظر بگیرید که

$$a \in [\tfrac{۳}{۴}, \tfrac{۳}{۲}] \quad , b \in [۰, \tfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}]$$

و

$$۸a^۲ + ۹b^۲ - ۱۸a + ۹ \leq ۰$$

اگر $(z \in \mathcal{U}) \quad |g(z)| \leq ۱$ آن گاه

$$\vartheta_\alpha(z) = (\alpha \int_۰^z [g(u)]^{\alpha-۱} du)^{\frac{۱}{\alpha}} \tag{۲.۶۰}$$

به رده $\mathcal{S}$ تعلق دارد.

عملگر انتگرال

$$\mathcal{F}_{n,\alpha}(z) = ([n(\alpha - ۱) + ۱] \int_۰^z \prod_{j=۱}^{n} (\frac{g_j(u)}{u})^{\frac{۱}{\alpha}} u^{n(\alpha-۱)} du)^{\frac{۱}{[n(\alpha-۱)+۱]}} \quad g_j \in \mathcal{A}, j = ۱, ..., n \tag{۲.۶۱}$$

توسط بریز [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

برای حالت $n = ۱$ یعنی عملگر $\mathcal{F}_{۱,\alpha}$ قبلا توسط پیسکار بررسی شده است که برای اطلاعات بیشتر می توانید ([۱۴]) را مطالعه کنید.

حالت $\alpha = ۱ = n$ عملگر انتگرال الکساندر $\mathcal{F}_{۱,۱}$ (۲.۲۱) است.

بریز عملگرانتگرال دوم یعنی

$$\mathcal{G}_{n,\alpha}(z) = ([n(\alpha - ۱) + ۱] \int_۰^z \prod_{j=۱}^{n} g_j(u)^{\alpha-۱} du)^{\frac{۱}{[n(\alpha-۱)+۱]}} \quad g_j \in \mathcal{A}, j = ۱, ..., n \tag{۲.۶۲}$$

[۱۱] Breaz

را هم بررسی کرده است.

برای حالت $n=1$ عملگر $\mathcal{G}_{1,\alpha}$ قبلا توسط مولدوینو [12] وپاسکو ([۶]) موردتحقیق قرار گرفته است. اگر ما $n=1$ و $(a,b\in R)\quad \alpha=a+ib$ اختیار کنیم، عملگرهای انتگرال $\mathcal{F}_{n,\alpha}$ (۶۱.۲) و $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ (۶۲.۲) تعمیمی از انتگرال های ξ_α (۵۹.۲) و ϑ_α (۶۰.۲) می باشند.

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنیم $M\geq 1$ و همچنین هر تابع $j=1...n \quad g_j\in\mathcal{A}$ در نامساوی (۵۸.۲) صدق کند و عدد مختلط $(a,b\in R)\quad \alpha=a+ib$ در نظر بگیرید که

$$a\in(0,\sqrt{(2M+1)n}] \tag{۶۳.۲}$$

و

$$a^4+a^2b^2-[(2M+1)n]^2\geq 0 \tag{۶۴.۲}$$

اگر

$$|g_j(z)|\leq M \qquad\qquad (z\in\mathcal{U}, j=1...,n)$$

آن گاه تابع $\mathcal{F}_{n,\alpha}$ (۶۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. $f(z)=\int_0^z\prod_{j=1}^n(\frac{g_j(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}$ در نظر بگیرید. بوضوح

$$f'(z)=\prod_{j=1}^n(\frac{g_j(z)}{z})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{۶۵.۲}$$

و

$$f''(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^n(\frac{g_j(z)}{z})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\frac{zg_j'(z)-g_j(z)}{z^2})\prod_{k=1,k\neq j}^n(\frac{g_k(z)}{z})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{۶۶.۲}$$

با توجه به (۶۵.۲) و (۶۶.۲) داریم:

[12] Moldoveanu

$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}(\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1)$

بنابراین

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}|=\frac{1-|z|^{2a}}{a}\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}|\sum_{j=1}^{n}(\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1)|\leq\frac{1-|z|^{2a}}{a}\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sum_{j=1}^{n}|(\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1)|\leq$$
$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sum_{j=1}^{n}(|\frac{z^2g_j'(z)}{g_j^2(z)}|\frac{|g_j(z)|}{|z|}+1)\qquad(z\in\mathcal{U})$$

هم چنین از صورت قضیه می دانیم که:

$$|g_j(z)|\leq M\qquad(z\in\mathcal{U},j=1,...,n)$$

حال بنابرلم شوارتز

$$|g_j(z)|\leq M|z|\qquad(z\in\mathcal{U},j=1,...,n)\qquad(۶۷.۲)$$

با کمک از نامساوی (۵۸.۲) و نامساوی فوق، نامساوی زیر نتیجه می شود:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}|\leq\frac{1-|z|^{2a}}{a}\frac{(2M+1)n}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{(2M+1)n}{a\sqrt{a^2+b^2}}\qquad(z\in\mathcal{U})$$

اگر دوباره به صورت قضیه برگردیم از (۶۳.۲) و (۶۴.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}|\leq 1\qquad(z\in\mathcal{U})$$

و در نهایت با استفاده از محک بکر، می توانیم ادعا کنیم که $\mathcal{F}_{n,\alpha}$ به رده $\mathcal{S}$ تعلق دارد. □

:

نتیجه ۵.۴.۲. فرض کنید هر تابع $j=1...n$ $g_j\in\mathcal{A}$ درنامساوی (۵۸.۲) صدق کند و عدد مختلط $(a,b\in R)$ $\alpha=a+ib$ را در نظر بگیرید که

$$a \in (0, \sqrt{3n}]$$

و

$$a^4 + a^2b^2 - [3n]^2 \geq 0$$

اگر

$$|g_j(z)| \leq 1 \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1..., n)$$

آن گاه تابع $\mathcal{F}_{n,\alpha}$ (۶۱.۲) در رده‌ی $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. اگر در قضیه قبل قرار دهیم $M = 1$ ، نتیجه به دست می آید.

□

نتیجه ۶.۴.۲. فرض کنید $M \geq 1$ و $g \in \mathcal{A}$ درنامساوی (۵۸.۲) صدق کند و نیز $\alpha = a + ib \quad (a, b \in R)$ یک عدد مختلط در نظر بگیرید که

$$a \in (0, \sqrt{(2M+1)}]$$

و

$$a^4 + a^2b^2 - [(2M+1)]^2 \geq 0$$

اگر

$$|g(z)| \leq M \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1..., n)$$

آن گاه تابع $\xi_\alpha(z)$ (۵۹.۲) در رده‌ی $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. با جای گذاری $n = 1$ در قضیه قبل ، نتیجه حاصل خواهد شد. □

تذکر اگر در قضیه (۴.۴.۲) قرار دهیم $M = n = 1$، آن گاه قضیه (۲.۴.۲) حاصل می شود.

در ادامه، به سراغ شرایط تک ارزی عملگر $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ (۶۲.۲) میرویم:

قضیه ۷.۴.۲. فرض کنیم $M \geq 1$ و همچنین هر تابع $j = 1...n \quad g_j \in \mathcal{A}$ درنامساوی (۵۸.۲) صدق کند و عدد مختلط $(a, b \in R) \quad \alpha = a + ib$ را در نظر بگیرید که

$$a \in [\frac{(2M+1)n}{(2M+1)n+1}, \frac{(2M+1)n}{(2M+1)n-1}] \quad b \in [0, \frac{1}{\sqrt{([(2M+1)n]^2 - 1)}}] \tag{۶۸.۲}$$

و

$$[(a-1)^2 + b^2][(2M+1)n]^2 - a^2 \leq 0 \tag{۶۹.۲}$$

اگر

$$|g_j(z)| \leq M \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1..., n)$$

آن گاه تابع $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ (۶۲.۲) در رده‌ی $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ را با بازنویسی مجدد ، به صورت زیر داریم:

$$\mathcal{G}_{n,\alpha}(z) = ([n(\alpha-1)+1]\int_0^z \prod_{j=1}^n (\frac{g_j(u)}{u})^{\alpha-1} u^{n(\alpha-1)} du)^{\frac{1}{[n(\alpha-1)+1]}} \quad g_j \in \mathcal{A}, j = 1, ..., n$$

حال تابع$h(z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$h(z) = \int_0^z \prod_{j=1}^n (\frac{g_j(u)}{u})^{\alpha-1} du \quad g_j \in \mathcal{A}, j = 1, ..., n$$

بنابراین

$$h'(z) = \prod_{j=1}^n (\frac{g_j(z)}{z})^{\alpha-1} \qquad (z \in \mathcal{U})$$

مشاهده می کنیم که $h(0)=0$ و $h'(0)=1$ به علاوه

$$h''(z)=(\alpha-1)\sum_{j=1}^{n}(\frac{g_j(z)}{z})^{\alpha-2}(\frac{zg_j'(z)-g_j(z)}{z^2})\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(\frac{g_k(z)}{z})^{\alpha-1}$$

با درنظر گرفتن دو رابطه اخیر داریم

$$\frac{zh''(z)}{h'(z)}=(\alpha-1)\sum_{j=1}^{n}(\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1) \quad g_j\in\mathcal{A}, j=1,...,n$$

و

$$\begin{aligned}\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zh''(z)}{h'(z)}| &= \frac{1-|z|^{2a}}{a}|\alpha-1||\sum_{j=1}^{n}(\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1)| \\ &\leq \frac{1-|z|^{2a}}{a}\sqrt{(a-1)^2+b^2}\sum_{j=1}^{n}|\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}-1| \\ &\leq \frac{1-|z|^{2a}}{a}\sqrt{(a-1)^2+b^2}\sum_{j=1}^{n}(|\frac{z^2g_j'(z)}{g_j^2(z)}|\frac{|g_j(z)|}{|z|}+1) \quad (j=1,...,n, z\in\mathcal{U})\end{aligned}$$

از (۵۸.۲) و (۶۷.۲) داریم

$$\begin{aligned}\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zh''(z)}{h'(z)}| &\leq \frac{1-|z|^{2a}}{a}(2M+1)n\sqrt{(a-1)^2+b^2} \\ &\leq \frac{(2M+1)n\sqrt{(a-1)^2+b^2}}{a} \qquad (z\in\mathcal{U})\end{aligned}$$

حال از (۶۸.۲) و (۶۹.۲) نتیجه می شود

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}|\frac{zh''(z)}{h'(z)}|\leq 1 \qquad (z\in\mathcal{U})$$

لذا طبق محک بکر برای $h(z)$ ، تابع $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ در رده‌ی $\mathcal{S}$ می باشد. □

نتیجه ۸.۴.۲ فرض کنید هر تابع $(j=1...n)$ $g_j\in\mathcal{A}$ درنامساوی (۵۸.۲) صدق کند. عددمختلط $(a,b\in R)$ $\alpha=a+ib$ را در نظر بگیرید که

$$a\in[\frac{3n}{3n+1},\frac{3n}{3n-1}] \quad ,b\in[0,\frac{1}{\sqrt{9n^2-1}}]$$

و

$$۹[(a-۱)^۲+b^۲]n^۲-a^۲\le ۰$$

اگر

$$|g_j(z)|\le M \qquad (z\in\mathcal{U}, j=۱...,n)$$

آن گاه تابع $\mathcal{G}_{n,\alpha}$ در رده$\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه قبل در نظر بگیرید $M=۱$. □

نتیجه ۹.۴.۲. فرض کنید $M\ge ۱$ وتابع $g\in\mathcal{A}$ در نامساوی شرط (۵۸.۲) صدق کند. عددمختلط $(a,b\in R)\quad \alpha=a+ib$ را طوری در نظر بگیرید که:

$$a\in[\tfrac{۲M+۱}{۲M+۲},\tfrac{۲M+۱}{۲M}] \quad ,b\in[۰,\tfrac{۱}{۲\sqrt{M(M+۱)}}]$$

و

$$[(a-۱)^۲+b^۲](۲M+۱)^۲-a^۲\le ۰$$

اگر

$$|g(z)|\le M \qquad (z\in\mathcal{U}, M\ge ۱)$$

آن گاه تابع $\vartheta_\alpha(z)$ در رده$\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه (۷.۴.۲) قراردهید ،$n=۱$ □

اگر در قضیه قبل قراردهیم $M=n=۱$ آن گاه به تعمیمی از قضیه (۳.۴.۲) دست میابیم.

۵.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z)$

تا این قسمت از فصل دوم، ضمن معرفی چند عملگر انتگرال بررسی کردیم که این عملگرها زمانیکه $f\in\mathcal{A}$ است، با چه شرایطی در رده $\mathcal{S}$ قرار می گیرند. در این بخش با عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z)$ برای $f_j\in T_{2,\mu}$ کار را ادامه می دهیم که $T_{2,\mu}$ رده توابع تک ارزی ست که برای $z\in\mathcal{U}$ در شرط $|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2}-1|<\mu$ صدق می کنند که f به فرم $f(z)=z+\sum_{k=3}^{\infty}a_kz^k$ و $0<\mu<1$ می باشند.

برای $f\in\mathcal{A}$، α,β,γ اعداد مختلط ، $\alpha\neq 0$، $\beta\neq 0$، $\gamma\neq 0$، $f_j\in\mathcal{A}$، γ_j اعداد مختلط، $\gamma_j\neq 0$ $j=1,\dots,n$ عملگر های انتگرال زیر را که در بخش های گذشته معرفی کرده ایم در نظر بگیرید:

$$M_\alpha(z)=\{\frac{1}{\alpha}\int_0^z u^{-1}(f(u))^{\frac{1}{\alpha}}du\}^\alpha$$

۱.۲

$$\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}(z)=(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\dots+\frac{1}{\gamma_n})\int_0^z u^{-1}(f_1(u))^{\frac{1}{\gamma_1}}\dots(f_n(u))^{\frac{1}{\gamma_n}}du\}^{\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1}+\dots+\frac{1}{\gamma_n}}}$$

۲.۲

$$\mathcal{K}_\alpha(z)=\int_0^z(\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du$$

۳۱.۲

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z)=[\beta\int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^\alpha du]^{\frac{1}{\beta}}$$

۳۲.۲

....

محک های تک ارزی را برای عملگر های انتگرال ذکر شده، ارائه نمودیم. حال برای $f_j \in \mathcal{A}$ اعدادمختلط β, γ_j، $\beta \neq 0$ ، $\gamma_j \neq 0$، $j = 1, \dots, n$، $n \in N - \{0\}$ عملگر انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z) = [\beta \int_0^z u^{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} (\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_j}} du]^{\frac{1}{\beta}} \tag{۷۰.۲}$$

عملگرهای $M_\alpha(z)$، $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}(z)$، $\mathcal{K}_\alpha(z)$، $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z)$ و...حالت های خاصی از عملگر رابطه (۷۰.۲) هستند.

در قضیه زیر، برای حالتیکه $f_j \in T_{2,\mu}$ ، محک های تک ارزی عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}$ را بررسی می کنیم.

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید αوγ_j اعداد مختلط $\gamma_j \neq 0$ ، $j = 1, \dots, n$ ، $Re\, \alpha > 0$ ، M_j ها اعداد مثبت و$f_j \in T_{2,\mu}$ ، $f_j(z) = z + a_{3j} z^3 + \dots$ ، $j = 1, \dots, n$ اگر

$$|f_j(z)| \leq M_j \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, \dots, n) \tag{۷۱.۲}$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu+1)M_j + 1}{|\gamma_j|} \leq Re\, \alpha \tag{۷۲.۲}$$

آن گاه برای هر عدد مختلط β که$Re\, \beta \geq Re\, \alpha$ ،تابع

$$\mathcal{H}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z) = [\beta \int_0^z u^{\beta-1} (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots (\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}} du]^{\frac{1}{\beta}}$$

در رده $\mathcal{S}$ است.

اثبات. تابع زیر را در نظر بگیرید

$$p(z) = \int_0^z (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots (\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}} du \qquad (f_j \in T_{2,\mu}, j = 1, \dots, n)$$

تابع $p \in \mathcal{A}$و مشاهده می کنیم که $p(0) = p'(0) - 1 = 0$

با کمی محاسبات، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$|\frac{zp''(z)}{p'(z)}| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\gamma_j|}|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \qquad (z \in \mathcal{U}) \qquad (73.2)$$

هم چنین

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \leq |\frac{z^2 f_j'(z)}{f_j^2(z)}||\frac{f_j(z)}{z}| + 1 \leq |\frac{z^2 f_j'(z)}{f_j^2(z)} - 1|\frac{|f_j(z)|}{|z|} + \frac{|f_j(z)|}{|z|}| + 1 \qquad (74.2)$$

چون$f_j \in T_{2,\mu}$ لذا

$$|\tfrac{z^2 f_j'(z)}{f_j^2(z)} - 1| \leq \mu \qquad (z \in \mathcal{U}, 0 < \mu < 1)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۷۱.۲) و لم شوارتز داریم:

$$|f_j(z)| \leq M_j|z| \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

با این شرایط و رابطه (۷۴.۲) خواهیم داشت:

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \leq (\mu + 1)M_j + 1 \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n) \qquad (75.2)$$

بارجوع به معادلات (۷۲.۲)، (۷۳.۲)، (۷۵.۲) برای هر $z \in \mathcal{U}$ داریم:

$$\tfrac{1-|z|^{2Re\alpha}}{Re\alpha}|\tfrac{zp''(z)}{p'(z)}| \leq 1$$

حال بنابر محک بکر عملگر انتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}$ متعلق به رده $\mathcal{S}$ است. □

عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ (۲.۲) حالت خاصی از عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}$ است. $(\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j})$ ودر بخش اول اشاره به این مطلب شد که اگر $f_j \in \mathcal{A}$ باشند چه شرایطی برای تک ارزی عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ نیاز است. در اینجا محک های تک ارزی عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$را برای حالتیکه

$f_j \in T_{2,\mu}$ ها باشند، بیان می کنیم.

نتیجه ۲.۵.۲. فرض کنید γ_jوα اعدادمختلط $Re\,\gamma_j \neq 0$ ، $j = 1, ..., n$
$\sum_{j=1}^{n} Re\,\frac{1}{\gamma_j} \geq Re\,\alpha > 0$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و$f_j \in T_{2,\mu}$ ، $f_j(z) = z + a_{3j}z^3 + ...$
اگر

$$|f_j(z)| \leq M_j \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu+1)M_j+1}{|\gamma_j|} \leq Re\,\alpha$$

آن گاه عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ در رده $\mathcal{S}$ است.

نتیجه ۳.۵.۲. برای $n = 1$ ، $\gamma_1 = \alpha$ ، $f_1 = f$ از نتیجه قبل، خواهیم دید که عملگر $\mathcal{M}_\alpha$ (۱.۲) در رده $\mathcal{S}$ است.

نتیجه ۴.۵.۲. فرض کنید γ_jوα اعدادمختلط $\gamma_j \neq 0$ ، $j = 1, ..., n$ ، $0 < Re\,\alpha \leq 1$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و$f_j \in T_{2,\mu}$ ، $f_j(z) = z + a_{3j}z^3 + ...$ ، $j = 1, ..., n$ اگر

$$|f_j(z)| \leq M_j \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu+1)M_j+1}{|\gamma_j|} \leq Re\,\alpha$$

آن گاه عملگر

$$\int_0^z \left(\frac{f_1(u)}{u}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} .... \left(\frac{f_n(u)}{u}\right)^{\frac{1}{\gamma_n}} du$$

در رده $\mathcal{S}$ است

اثبات. در قضیه (۱.۵.۲) قرار دهید $\beta = 1$

□

نتیجه ۵.۵.۲. برای $n = 1, \gamma_1 = \alpha, f_1 = f$ از نتیجه قبل ، متوجه خواهیم شد که عملگر $\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) در رده است.

نتیجه ۶.۵.۲. فرض کنید γوα اعداد مختلط $\alpha \neq 0$ ، $j = 1, ..., n$ ، $Re\,\gamma > 0$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و$f_j \in T_{2,\mu}$ ، $f_j(z) = z + a_{3j}z^3 + ...$ ، $j = 1, ..., n$ ، $n \in N - \{0\}$ اگر

$$|f_j(z)| \leq M_j \qquad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu+1)M_j+1}{|\alpha|} \leq Re\,\gamma$$

آن گاه برای هر عدد مختلط β که$Re\,\alpha$ $Re\,\beta \geq$ عملگر

$$[\beta \int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}........(\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du]^{\frac{1}{\beta}}$$

در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. با جایگذاری $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_n = \alpha$ در قضیه (۱.۵.۲) نتیجه به دست می آید. □

نتیجه ۷.۵.۲. اگر در نتیجه فوق $n = 1, f_1 = f$ جای گذاری کنیم نتیجه می گیریم که عملگر

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta \int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^{\alpha}du]^{\frac{1}{\beta}}$$

در رده $\mathcal{S}$می باشد.

قضایا و نتایجی را که در این بخش به مطالعه آن پرداختیم، مربوط به f_j هایی بود که متعلق به رده $T_{2,\mu}$ بودند. حال بررسی می کنیم که اگر $f_j \in S(\alpha)$ ها باشند که $S(\alpha)$ زیر رده ای از $\mathcal{A}$ بود که در شرایط $0 < |z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ و $\forall z \in \mathcal{U}; |(\frac{z}{f(z)})''| \leq \alpha$ صدق می کرد، چه تغییری باید در شرایط ایجاد شود؟

قضیه ۸.۵.۲ فرض کنیم γ_j ها اعدادمختلط، $j = 1, ..., n$ $\quad \gamma_j \neq 0$ ، α عددحقیقی مثبت که $0 < \alpha \leq 2$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و

$$f_j \in S(\alpha) \quad f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + ... \quad j = 1, ..., n$$

اگر

$$|f_j| \leq M_j \quad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n) \tag{۷۶.۲}$$

و

$$\alpha^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} + (\alpha+1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j+1}{|\gamma_j|} \leq \alpha(\alpha+1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \tag{۷۷.۲}$$

آن گاه برای هر عدد مختلط β که $Re\,\beta \geq \alpha$ عملگرانتگرال $\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}$ (۷۰.۲) متعلق به رده $\mathcal{S}$ است.

اثبات. تابع $g(z)$را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\int_0^z (\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}} .... (\frac{f_n(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_n}} du \qquad (f_j \in S(\alpha), j = 1, ..., n)$$

تابع $g(z)$ در $\mathcal{U}$ تحلیلی است وه $g(0) = g'(0) - 1 = 0$

$$|\frac{zg''(z)}{g'(z)}| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\gamma_j|} |\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)} - 1| \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{۷۸.۲}$$

هم چنین:

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}-1|\leq|\frac{z^2f_j'(z)}{f_j^2(z)}-1|\frac{|f_j(z)|}{|z|}+|\frac{|f_j(z)|}{|z|}+1 \qquad (z\in\mathcal{U}, j=1,...,n) \tag{۷۹.۲}$$

چون $f_j\in S(\alpha)$ می باشد بنابراین

$$|\frac{z^2f_j'(z)}{f_j^2(z)}-1|\leq\alpha|z|^2 \qquad (\forall z\in\mathcal{U}, j=1,...,n)$$

ازرابطه (۷۶.۲) و لم شوارتز داریم

$$|f_j(z)|\leq M_j|z| \qquad (z\in\mathcal{U}, j=1,...,n)$$

با استفاده از رابطه (۷۹.۲) داریم:

$$|\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}-1|\leq\alpha M_j|z|^2+M_j+1 \qquad (z\in\mathcal{U}, j=1,...,n) \tag{۸۰.۲}$$

ازمعادلات (۷۸.۲) و (۸۰.۲) به نامساوی زیر دست می یابیم:

$$\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}|\leq(1-|z|^{2\alpha})|z|^2\sum_{j=1}^{n}\frac{M_j}{|\gamma_j|}+\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{M_j+1}{|\gamma_j|} \tag{۸۱.۲}$$

اگر $(z\in\mathcal{U}) \quad |z|=x$ و $\phi(x)=(1-x^{2\alpha})x^2$ آنگاه

$$\max_{x\leq 1}\phi(x)=\frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$$

از معادله اخیر و روابط (۷۷.۲) و (۸۱.۲) نتیجه می شود که:

$$\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}|\frac{zg''(z)}{g'(z)}|\leq 1 \qquad (\forall z\in\mathcal{U}) \tag{۸۲.۲}$$

چون $g'(z)=(\frac{f_1(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma_1}}...(\frac{f_n(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma_n}}$ لذااز (۸۲.۲) و (۱.۱.۲) می توانیم نتیجه بگیریم که $\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}$ در رده $\mathcal{S}$ است. □

نتیجه ۹.۵.۲. فرض کنیم γ_j ها اعدادمختلط، $j = 1, ..., n$ $Re\,\gamma_j \neq 0$ ، α عددحقیقی مثبت که $0 < \alpha \leq 2$ ، $\sum_{j=1}^{n} Re\,\frac{1}{\gamma_j} \geq \alpha$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و

$$f_j \in S(\alpha) \quad f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + ...$$

اگر

$$|f_j| \leq M_j \quad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\alpha^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} + (\alpha + 1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j + 1}{|\gamma_j|} \leq \alpha(\alpha + 1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}$$

آن گاه عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n}$ (۲.۲) متعلق به رده $\mathcal{S}$ می باشد.

اثبات. در قضیه قبل، $\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j}$ در نظر بگیرید. □

نتیجه ۱۰.۵.۲. اگر در نتیجه قبل قراردهیم $n = 1, \gamma_1 = \alpha, f_1 = f$ مشاهده خواهیم کرد که $\mathcal{M}_\alpha$ در رده$\mathcal{S}$ است.

نتیجه ۱۱.۵.۲. فرض کنید γ_j ها اعداد مختلط، $j = 1, ..., n$ $\gamma_j \neq 0$ ، $0 < \alpha \leq 1$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و

$$j = 1, ..., n \quad f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + ... \quad f_j \in S(\alpha) ، n \in N - \{0\}$$ اگر

$$|f_j| \leq M_j \quad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\alpha^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{|\gamma_j|} + (\alpha + 1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j + 1}{|\gamma_j|} \leq \alpha(\alpha + 1)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}$$

آن گاه عملگر $\int_0^z \prod_{j=1}^{n} (\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_j}} du$ در رده $\mathcal{S}$ می باشد.

نتیجه:اگر در نتیجه فوق $f_1 = f$,$\gamma_1 = \alpha$,$n = 1$قرار دهیم آن گاه عملگر $\mathcal{K}_\alpha$ (۳۱.۲) در رده$\mathcal{S}$ می باشد.

نتیجه ۱۲.۵.۲. فرض کنیم α عددمختلط، γ عددحقیقی مثبت که $0 < \gamma \leq 2$ ، M_j ها اعداد حقیقی مثبت و

$$f_j \in S(\gamma) \quad f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + ... \quad j = 1, ..., n$$

اگر

$$|f_j| \leq M_j \quad (z \in \mathcal{U}, j = 1, ..., n)$$

و

$$\frac{\gamma^2}{|\alpha|}\sum_{j=1}^n M_j + \frac{(\gamma+1)^{\frac{(\gamma+1)}{\gamma}}}{|\alpha|}\sum_{j=1}^n (M_j + 1) \leq \gamma(\gamma+1)^{\frac{(\gamma+1)}{\gamma}}$$

آن گاه برای هر عددمختلطβ، $Re\,\beta \geq \gamma$ عملگر انتگرال$[\beta\int_0^z u^{\beta-1}\prod_{j=1}^n (\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du]^{\frac{1}{\beta}}$ در رده $\mathcal{S}$می باشد.

اثبات. $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_n = \alpha$ را در قضیه قبل جای گذاری کنید. □

نتیجه ۱۳.۵.۲. اگر در نتیجه فوق $f_1 = f$,$\gamma = \alpha$,$n = 1$ جای گذاری کنیم ، نتیجه می گیریم که عملگر $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta\int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^{\alpha}du]^{\frac{1}{\beta}}$ (۳۲.۲) در رده $\mathcal{S}$است.

۶.۲ عملگر انتگرال $F_\alpha(z)$

در این بخش، محک های تک ارزی را برای عملگر انتگرال $F_\alpha(z) = [\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du]^{\frac{1}{\alpha}}$ بررسی می کنیم ؛ در واقع قضیه ای را مطرح می کنیم که بهبودی از محک بکر است. ابتدا لم ها و قضیه هایی را که در این قسمت لازم داریم را بیان می کنیم.

لم ۱.۶.۲. اگر $f \in \mathcal{A}$ وبرای هر $\theta \in [0, 2\pi]$ در نامساوی

$Re[e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}] \leq \frac{1}{4}$

صدق کند آن گاه، $f \in \mathcal{S}$

اثبات. $g(z) = e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در نظر می گیریم. باتوجه به لم کاراتئودوری (۲.۲.۱)

$(1 - |z|)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq 2.\frac{1}{4}|z| = \frac{|z|}{2}$

به علاوه می بینیم که:

$$(1 - |z|^2)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| = (1 + |z|)(1 - |z|)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq (1 + |z|)\frac{|z|}{2} \leq 1 \qquad (۸۳.۲)$$

حال بنابرمحک بکر نتیجه می گیریم که $f \in \mathcal{S}$

□

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنید $Re\,\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{A}$ اگر برای $\theta \in [0, 2\pi]$، نامساوی

$Re[e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}] \leq \begin{cases} \frac{Re\,\alpha}{2} & 0 < Re\,\alpha < 1 \\ \frac{1}{4} & Re\,\alpha \geq 1 \end{cases}$

برقرار باشد آن گاه، تابع $F_\alpha(z) = [\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du]^{\frac{1}{\alpha}}$ به ازای هر $\theta \in [0, 2\pi]$ در $\mathcal{S}$ است.

این قضیه را با محک بکر (۱.۱.۲) مقایسه کنید.

اثبات. دو حالت در نظر می گیریم:

حالت الف: $Re\,\alpha \geq 1$ به آسانی می توان چک کرد که تابع $h : (0,\infty) \to R$ یک تابع نزولی است اگر $z \in \mathcal{U}$ $a = |z|$ در نظر بگیریم آن گاه ،

$$\frac{1 - |z|^{2Re\,\alpha}}{Re\,\alpha} \leq 1 - |z|^2 \qquad (۸۴.۲)$$

در لم کاراتئودوری $g(z) = e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ و $M = \frac{1}{4}$ قرار میدهیم آن گاه نامساوی (۸۳.۲) به دست می آید و طبق (۸۴.۲) داریم:

$\frac{1-|z|^{2Re\,\alpha}}{Re\,\alpha}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq (1 - |z|^2)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq 1$

حالت ب: $0 < Re\,\alpha < 1$

تابع$0 < a < 1$ $q(x) = 1 - a^{2x}$ یک تابع صعودی است وبرای $z \in \mathcal{U}$ $a = |z|$

$$1 - |z|^{2Re\,\alpha} \leq 1 - |z|^2 \qquad (0 < Re\,\alpha < 1) \qquad (۸۵.۲)$$

حال اگر در لم کاراتئودوری قرار دهیم $M = \frac{Re\alpha}{4}$ آن گاه:

$(1 - |z|^2)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq Re\,\alpha$

حال طبق رابطه (۸۵.۲) داریم:

$(1 - |z|^{2Re\alpha})|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq (1 - |z|^2)|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq Re\alpha$

لذا به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $Re\,\alpha > 0$

$\frac{1-|z|^{2Re\,\alpha}}{Re\,\alpha}|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \leq 1$

حال بنا بر محک بکر تابع F_α در رده$\mathcal{S}$ می باشد. □

۷.۲ عملگر انتگرال$\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}(z)$

درقضیه (۱.۵.۲) محک های تک ارزی عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}(z) = \beta\int_0^z u^{\beta-1}\prod_{j=1}^n(\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_j}}du\}^{\frac{1}{\beta}}$
برای حالتیکه $f_j \in T_{2,\mu}$ بود، مشخص شد.

در این بخش محک های تک ارزی این عملگر را برای حالتیکه$f_j \in \mathcal{A}$ باشد ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۷.۲. فرض کنید به ازای $j = 1,...,n$ ، $\frac{1}{\gamma_j} > 0$ ها اعدادحقیقی مثبت باشند، $\beta \in \mathbb{C}$
$Re\,\beta > 0$ ،اگربرای هر $j = 1,...,n$ ،$f_j \in \mathcal{A}$ و به ازای هر$z \in \mathcal{U}, \theta \in [0, 2\pi]$ داشته باشیم

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}) \leq \begin{cases} \frac{Re\,\beta}{2\sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}} + cos(\theta) & 0 < Re\,\beta < 1 \\ \frac{1}{4\sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}} + cos(\theta) & Re\,\beta \geq 1 \end{cases} \quad (۸۶.۲)$$

آن گاه به ازای هر $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{H}_{\gamma_1,...,\gamma_n,\beta}(z) = [\beta\int_0^z u^{\beta-1}\prod_{j=1}^n(\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_j}}du]^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. عملگر $F_n(z) = \int_0^z(\frac{f_1(t)}{t})^{\frac{1}{\gamma_1}}.....(\frac{f_n(t)}{t})^{\frac{1}{\gamma_n}}dt$ رادر نظر بگیرید.مشاهده می کنید که$F_n \in \mathcal{A}$
یعنی$F_n(0) = F_n'(0) - 1 = 0$ از طرف دیگر به آسانی می توان دید که

$$F_n'(z) = \prod_{j=1}^n(\frac{f_j(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma_j}}$$

و

$$(\frac{zF_n''(z)}{F_n'(z)}) = \sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}(\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}) - \sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}$$

بنابراین:

$$(e^{i\theta}\frac{zF_n''(z)}{F_n'(z)}) = \sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}(e^{i\theta}\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}) - e^{i\theta}\sum_{j=1}^n\frac{1}{\gamma_j}$$

از رابطه اخیر و (۸۶.۲) نتیجه می گیریم که:

$$Re(e^{i\theta}\frac{zF_n''(z)}{F_n'(z)}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}Re(e^{i\theta}\frac{zf_j'(z)}{f_j(z)}) - cos(\theta)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j} \leq \begin{cases} \frac{1}{2}Re\,\beta & 0 < Re\,\beta < 1 \\ \frac{1}{4} & Re\,\beta \geq 1 \end{cases}$$

حال با استنادبه قضیه (۲.۶.۲) داریم:

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}F_n'(u)du\}^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

یا به طور معادل، به ازای هر $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}\prod_{j=1}^{n}(\frac{f_j(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_j}}du\}^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

□

تاکنون عملگر $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta\int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^{\alpha}du]^{\frac{1}{\beta}}$ (۳۲.۲) را درحالت های مختلف بررسی کردیم.(درنتیجه ۳.۲.۲، برای $f \in \mathcal{A}$، درنتیجه ۸.۲.۲ برای $f \in \mathcal{S}$ درنتیجه ۷.۵.۲ برای $f \in T_{2,\mu}$ در نتیجه ۱۳.۵.۲ برای $f \in S(\alpha)$)حال این عملگر$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ حالت خاصی ازعملگر کلی قضیه قبل می باشد لذا باتوجه به قضیه قبل، می توانیم محک های تک ارزی دیگری را برای این عملگر مشخص کنیم.

نتیجه ۲.۷.۲. فرض کنیده $\alpha > 0$ عددحقیقی باشد، $Re\,\beta > 0, \beta \in \mathbb{C}$ اگر$f \in \mathcal{A}$ و به ازای هر $z \in \mathcal{U}$ و$\theta \in [0, 2\pi]$ داشته باشیم

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf'(z)}{f(z)}) \leq \begin{cases} \frac{Re\,\beta}{2\alpha} + cos\theta & 0 < Re\,\beta < 1 \\ \frac{1}{4\alpha} + cos\theta & Re\,\beta \geq 1 \end{cases}$$

آن گاه به ازای هر$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta\int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^{\alpha}du]^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. در قضیه قبل قراردهید $\alpha_1 = \alpha, n = ۱$.

□

نتیجه ۳.۷.۲. فرض کنید $Re\,\beta > ۰, \beta \in \mathbb{C}$ اگر $f \in \mathcal{A}$ و به ازای هر $z \in \mathcal{U}$ و $\theta \in [۰, ۲\pi]$

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf'(z)}{f(z)}) \leq \begin{cases} \frac{Re\,\beta}{۲} + cos\theta & ۰ < Re\,\beta < ۱ \\ \frac{۱}{۴\alpha} + cos\theta & Re\,\beta \geq ۱ \end{cases}$$

آن گاه به ازای هر$\theta \in [۰, ۲\pi]$

$$\{\beta \int_۰^z u^{\beta-۲} f(u) du\}^{\frac{۱}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. در نتیجه قبل قراردهید $\alpha = ۱$. □

نتیجه ۴.۷.۲. اگر $f \in \mathcal{A}$ و به ازای هر $z \in \mathcal{U}$ و $\theta \in [۰, ۲\pi]$

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf'(z)}{f(z)}) \leq \frac{۱}{۴} + cos\theta$$

آن گاه به ازای هر$\theta \in [۰, ۲\pi]$ عملگر الکساندر در رده $\mathcal{S}$می باشد.

$$\int_۰^z \frac{f(u)}{u} du \in \mathcal{S}$$

اثبات. در نتیجه قبل قراردهید $\beta = ۱$. □

قضیه ۵.۷.۲. فرض کنید برای $j = ۱, \ldots, n$ ، $\alpha_j > ۰$ ها اعدادحقیقی باشند، $Re\,\beta > ۰, \beta \in \mathbb{C}$ اگر$j = ۱, \ldots, n \quad f_j \in \mathcal{A}$ وبه ازای هر$z \in \mathcal{U}$ و$\theta \in [۰, ۲\pi]$ در شرایط زیر صدق کنند:

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}) \leq \begin{cases} \frac{Re\,\beta}{۲\sum_{j=۱}^n \alpha_j} & ۰ < Re\,\beta < ۱ \\ \frac{۱}{۴\sum_{j=۱}^n \alpha_j} & Re\,\beta \geq ۱ \end{cases}$$

آن گاه به ازای هر$\theta \in [۰, ۲\pi]$

$$\{\beta \int_۰^z u^{\beta-۱} \prod_{j=۱}^n (f_j'(u))^{\alpha_j} du\}^{\frac{۱}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. عملگر $F_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)=\int_0^z (f_1'(t))^{\alpha_1}..........(f_n'(t))^{\alpha_n}dt$ را درنظربگیرید. داریم:

$$F_{\alpha_1,...,\alpha_n}(0)=F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(0)-1=0$$

هم چنین با یک محاسبه ساده می توان دید:

$$\left(\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{zf_j''(z)}{f_j'(z)}\right)$$

بنابراین

$$Re\left(e^{i\theta}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j Re\left(e^{i\theta}\frac{zf_j''(z)}{f_j'(z)}\right)$$

چون به ازای هر $j=1,...,n$ ، f_j ها در شرایط قضیه صدق می کنند با توجه به رابطه بالا ، به ازای هر $z\in\mathcal{U}$ و $\theta\in[0,2\pi]$ مشاهده می کنیم:

$$Re\left(e^{i\theta}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\right)\leq\begin{cases}\frac{1}{2}Re\,\beta & 0<Re\,\beta<1\\ \frac{1}{4} & Re\,\beta\geq 1\end{cases}$$

لذا

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(u)du\}^{\frac{1}{\beta}}\in\mathcal{S}$$

یابه طور معادل به ازای هر$\theta\in[0,2\pi]$

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}\prod_{j=1}^{n}(f_j'(u))^{\alpha_j}du\}^{\frac{1}{\beta}}\in\mathcal{S}$$

□

نتیجه ۶.۷.۲. فرض کنید $\alpha>0$ و $\beta\in\mathbb{C}$ که $Re\beta>0$ ۱ اگر $f\in\mathcal{A}$ و به ازای هر $z\in\mathcal{U}$ و$\theta\in[0,2\pi]$ در شرایط زیر صدق کند:

$$Re\left(e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\leq\begin{cases}\frac{Re\,\beta}{2\alpha} & 0<Re\,\beta<1\\ \frac{1}{4\alpha} & Re\,\beta\geq 1\end{cases}$$

آن گاه به ازای هر$\theta\in[0,2\pi]$

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}(f'(u))^\alpha du\}^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. در قضیه قبل قراردهید $f_1 = f, \alpha_1 = \alpha, n = 1$. □

نتیجه ۷.۷.۲. فرض کنید$\beta \in \mathbb{C}, Re\beta > 0$ اگر $f \in \mathcal{A}$ و به ازای هر$z \in \mathcal{U}$ و$\theta \in [0, 2\pi]$ در شرایط زیر صدق کنند:

$$Re(e^{i\theta}\frac{zf''(z)}{f'(z)}) \leq \begin{cases} \frac{Re\beta}{2} & 0 < Re\beta < 1 \\ \frac{1}{4} & Re\beta \geq 1 \end{cases}$$

آن گاه به ازای هر$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\{\beta\int_0^z u^{\beta-1} f'(u) du\}^{\frac{1}{\beta}} \in \mathcal{S}$$

اثبات. در نتیجه قبل قراردهید $\alpha = 1$. □

نتیجه گیری

عملگرهای انتگرال که در این پایان نامه موردمطالعه قرار گرفتند،عبارتند:

$M_\alpha(z)=\{\frac{1}{\alpha}\int_0^z u^{-1}(f(u))^{\frac{1}{\alpha}}du\}^\alpha$

$\mathcal{G}(z)=\int_0^z \frac{f(u)}{u}du$

$\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(z)=(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\ldots+\frac{1}{\gamma_n})\int_0^z u^{-1}(f_1(u))^{\frac{1}{\gamma_1}}\ldots(f_n(u))^{\frac{1}{\gamma_n}}du\}^{\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\gamma_n}}}$

$\mathcal{K}_\alpha(z)=\int_0^z(\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du$

$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z)=[\beta\int_0^z u^{\beta-1}(\frac{f(u)}{u})^\alpha du]^{\frac{1}{\beta}}$

$\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|[Re\eta]|},\beta,\eta}(z)=\{\eta\beta\int_0^z u^{\eta\beta-1}(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_1}}\ldots\ldots\ldots(\frac{f_{|[Re\eta]|}(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_{|[Re\eta]|}}}du\}^{\frac{1}{\eta\beta}}$

$\mathcal{L}_\alpha(z)=\int_0^z(\frac{f_1(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}\ldots\ldots\ldots(\frac{f_{|[Re\eta]|}(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}$

$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}=\{\frac{1}{\gamma}\int_0^z u^{-\beta}(f(u))^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du\}^\gamma$

$J_{\gamma,0}(z)=\{\frac{1}{\gamma}\int_0^z(f(u))^{\frac{1}{\gamma}-1}du\}^\gamma$

$\mathcal{F}_{n,\alpha}(z)=([n(\alpha-1)+1]\int_0^z\prod_{j=1}^n(\frac{g_j(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}u^{n(\alpha-1)}du)^{\frac{1}{[n(\alpha-1)+1]}}$

$\mathcal{G}_{n,\alpha}(z)=([n(\alpha-1)+1]\int_0^z\prod_{j=1}^n g_j(u)^{\alpha-1}du)^{\frac{1}{[n(\alpha-1)+1]}}$

$\xi_\alpha(z)=[(\alpha)\int_0^z u^{\alpha-1}(\frac{g(u)}{u})^{\frac{1}{\alpha}}du]^{\frac{1}{\alpha}}$

$\vartheta_\alpha(z)=(\alpha\int_0^z[g(u)]^{\alpha-1}du)^{\frac{1}{\alpha}}$

$F_\alpha(z)=[\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du]^{\frac{1}{\alpha}}$

مادر این بخش پایانی، نتایج بخش های گذشته رامقایسه ، تحلیل و جمع بندی میکنیم.

$M_\alpha(z)=\{\frac{1}{\alpha}\int_0^z u^{-1}(f(u))^{\frac{1}{\alpha}}du\}^\alpha$

در قضایا و نتایج (۴.۱.۲)، (۷.۱.۲)، (۲.۲.۲)، (۷.۲.۲)، (۶.۳.۲)، (۱۰.۵.۲)، عملگر M_α را بررسی کردیم:

نتیجه (۷.۱.۲) بهبودی از نتیجه (۴.۱.۲) است.

نتیجه (۲.۲.۲) نیز بهبودی از (۴.۱.۲) است.

در (۷.۲.۲)، $f \in \mathcal{S}$ و$\mathcal{S}$زیر رده ای از$\mathcal{A}$است. پس در واقع در این نتیجه f هایی که انتخاب می کنیم در شرط ضعیف تری گنجانده شده اند به عبارتی از دیدگاه دیگر، شرط انتخاب fنسبت به نتایج (۴.۱.۲) و (۷.۱.۲) و (۲.۲.۲) محدود شده است و لذا از این حیث نتیجه مزبور بهبود یافته است.

هم چنین شرایط (۶.۳.۲) بهبودی از (۴.۱.۲) است.

می دانیم $T_{2,\mu}$و $S(\alpha)$ زیر رده هایی از $\mathcal{A}$ هستند لذا نتایج (۳.۵.۲)و (۱۰.۵.۲) در مورد انتخاب fشرط ضعیف تری اعمال شده است.

$\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}(z)=(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\dots+\frac{1}{\gamma_n})\int_0^z u^{-1}(f_1(u))^{\frac{1}{\gamma_1}}\dots(f_n(u))^{\frac{1}{\gamma_n}}du\}^{\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1}+\dots+\frac{1}{\gamma_n}}}$

این عملگر انتگرال را در قضایا و نتایج (۳.۱.۲)، (۶.۱.۲)، (۲.۵.۲)، (۹.۵.۲)، مورد مطالعه قرار دادیم.

با در نظر گرفتن این مطلب که $(\forall z \in \mathcal{U}) \quad Re\, z \leq |z|$ می توان گفت قضیه (۶.۱.۲) بهبودی از قضیه(۳.۱.۲) است.

اگر نتیجه (۹.۵.۲) را با قضیه (۳.۱.۲) مقایسه کنیم مشاهده می کنیم که (۹.۵.۲) بهبودی از(۳.۱.۲) است.

در نتایج(۹.۵.۲) و(۲.۵.۲) ، $f_j \in S(\alpha)$ و $f_j \in T_{2,\mu}$ انتخاب شده اند در حالیکه در دو قضیه دیگر $f_j \in \mathcal{A}$ هستند.

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = [\beta \int_0^z u^{\beta-1} (\frac{f(u)}{u})^\alpha du]^{\frac{1}{\beta}}$$

این عملگر در قضایا و نتایج (۳.۲.۲)، (۸.۲.۲)، (۷.۵.۲)، (۱۳.۵.۲)، (۲.۷.۲)، مطالعه شد.

درنتیجه (۳.۲.۲) و (۲.۷.۲) برای$f \in \mathcal{A}$ شرایط تعیین شده است در حالیکه در نتیجه (۸.۲.۲) برای$f \in \mathcal{S}$ در نتیجه (۷.۵.۲) برای $f \in T_{2,\mu}$ و در نتیجه (۱۳.۵.۲) برای $f \in S(\alpha)$ شرایط مشخص گردیده اند. می دانیم$T_{2,\mu}$ و $S(\alpha)$ و $\mathcal{S}$همگی زیر رده هایی از $\mathcal{A}$ می باشند.

مراجع

[1] D Blezu. On univalence criteria. *Gen . math*, (1):87–93, 2006. 3

[2] D. Breaz and V. pescar. Some integral operators and their univalence. *Acta univ apulensis math*, 15(1):147–152, 2008. 41

[3] Y.J Kim and E.P Merkes. On an integral of powers of a spirallike function. *Kyungpook Math.*, (12):249–253, 2000. 25

[4] O Mayer. The functions theory of on variable complex. *Bucureti*, 1981. 2

[5] S. S. Miller and P. Mocanu. Differential subordinations. *Theory and Applications,in: Monographs and Text Books in Pure and Applied Mathematics.*, 255:Marcel Dekker, 2000. 16, 21

[6] S. Moldoveanu and N.N. Pascu. On the univalence of an integral operator. *Mathematical)*, 43:113–116, 2001. 42

[7] M. Obradovic, N .N Pascu, and I Radomir. A class of univalent functions. *Discrete Math.*, 44(3):565–568, 1996. 14

[8] S. Ozaki and M. Nunokawa. The schwartzian derivative and univalent functions. *proc.amer.*, 24(7):392–394, 1972. 40

[9] N.N Pasco. On a univalence criterion ii. *Itinerant seminar Functional Equations*, pages 153–154, 1985. 25

[10] N.N Pasco. An improvement of becker s univalence criterion. *Proceedings of the commemorative session stoilov.*, pages 43–48, 1987. 15

[11] v. Pescar. New criteria for univalence of certain integral operators. *demonstratio math.*, 33(5):51–54, 2000. 40

[12] Herb Silverman. Complex variabls. 1975. 12, 14

[13] V Singh. On class of univalent functions. *internat.*, 285(1-3):855–857, 2000. 14

[14] H.M Srivastava and S. Owa. Current topics in analytic function theory. *world scientific publishing company*, (1), 1992. 41

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

تابع تک ارز	Univalent function
تابع تحلیلی	Analytic function
تابع یک به یک	Injective function
تابع ستاره گون	Starlike function
تابع هلومورفیک	Holomorphic function
زیر رده	Subclass
عملگر انتگرال	Integral operator
کران	Bound
میدان	Field
مشتق	Derivative
مثبت	Positive
مختلط	complex
نامساوی مثلث	Triangle inequality
معادله	Equation
واحد	Unit

Abstract

In this work, we study some integral operators and determine conditions for the univalence of these integral operators.

Keywords: *Analytic functions, univalent functions, starlike functions, integral operator.*

Shahid Beheshti University
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Title

By:
Name

Supervisor:
Professor ...

Date