طرح‌ریزی کد در گراف

توسط

عالیه جلالی

رساله ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه

کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

زیرنظر

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر احمد نزاکتی

اساتید مشاور:

دکتر نادر جعفری‌راد
دکتر مرتضی زاهدی

نیمسال دوّم سال تحصیلی ۸۹–۸۸

دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی شاهرود

قدردانی

اکنون که به فضل خداوند متعال به واسطه‌ی نگارش این پایان نامه، فرصتی برای سپاسگزاری اینجانب فراهم شده، بر خود لازم می دانم تا از همه عزیزان و بزرگوارانی که تا به امروز به نحوی آموزنده‌ام بوده‌اند، تشکر نمایم. نخست از پدر و مادر خود که شرایط و محیط را برایم فراهم کردند تا بتوانم این مسیر را با آرامش طی کنم و دعای خیرشان همواره همراهم بوده، سپاسگزارم و برایشان آرزوی سلامتی و کامیابی دارم. همچنین از همکاری صمیمانه و مساعدت جناب آقای دکتر احمد نزاکتی استاد راهنما و اساتید مشاورم، که مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند تشکر و قدردانی می نمایم و برای ایشان آرزوی توفیق و سربلندی دارم. مسلماً در طول مدت اجرای این پایان نامه، اگر پیشرفتی در کار شکل می‌گرفت، به واسطه‌ی دلگرمی‌ها و راهنمایی‌های درست استادان بزرگوارم بود. همچنین وظیفه خود می‌دانم از همه عزیزانی که به نوعی در تکمیل پایان نامه مرا یاری رساندند و همسر عزیزم کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم.

طرح‌ریزی کد در گراف

چکیده

کدهای شناسایی در گراف‌ها، وابسته به مفاهیم کلاسیک مجموعه‌های غالب و صورت‌های مکان‌یاب آنست. آن‌ها ویژگی‌ای دارند که شناسایی یکتای همه رئوس گراف را میسر می‌سازد. کدهای شناسایی ابتدا در ۱۹۹۸ توسط کارپوسکی [۱] و همکارانش[۱] معرفی شدند و از آن پس محققان نظریه گراف [۲] و تئوری کدگذاری [۳] مطالعات گسترده‌ای در این زمینه انجام داده‌اند.
فصل اول این پایان‌نامه با برخی تعاریف موردنیاز، خلاصه‌ای از مهم‌ترین خواص کدهای شناسایی و ایجاد انگیزش برای فصل‌های بعدی شروع می‌شود. در **فصل دوم** به بررسی کدهای شناسایی در برخی گراف‌های خاص می‌پردازیم. در **فصل سوم** کران‌های کد در توپولوژی‌های مختلف گراف‌های غیرتصادفی را پیدا کرده و در **فصل‌چهارم** در جستجوی گراف بهینه برای یک کد مشخص هستیم. در **فصل‌پنجم** با گراف تصادفی آشنا می‌شویم. بعد از آشنایی با گراف تصادفی، در **فصل ششم** کدها و کران‌های آن در گراف‌های تصادفی را بیان می‌کنیم و بالاخره یک کاربرد زیبا از کدهای شناسایی در شبکه‌های حسگر اضطراری را در **فصل هفتم** می‌بینیم.

واژه‌های کلیدی: تئوری کدگذاری، شعاع پوششی، تئوری گراف، سیستم‌های چندپردازنده، شبکه‌های تصادفی، کدهای شناسایی رأسی.

---

[۱] M.G. Karpovsky

[۲] Graph theory

[۳] Coding theory

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مفاهیم اولیه

هدف این فصل مقدماتی، ایجاد یک زمینه شهودی (به کمک مثال‌های ساده) برای مطالبی است که در فصل‌های بعد به صورت رسمی‌تر ارائه خواهند شد. بدین منظور ابتدا برخی تعاریف مربوط به گراف را بیان کرده و مفهوم کدهای شناسایی را به گونه‌ای آسان و قابل درک مطرح می‌کنیم.

۱–۱ گراف

ابتدا برخی تعاریف و نشانه‌گذاری‌های استاندارد تئوری گراف را که در این پایان‌نامه به‌کار خواهیم برد، یادآوری می‌کنیم. برای یک معرفی کامل از تئوری گراف به کتاب برگ[۱] ۱۹۵۸[۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱ درگراف **غیرجهت‌دار** $G = (V, E)$، $V = V(G)$ مجموعه رئوس G و $E = E(G)$ مجموعه یال‌های G نامیده می‌شود که $E(G)$ یک مجموعه از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ است. اگر u و v دو رأس از G باشند، یال بین u و v به صورت $\{u, v\}$ یا uv نمایش داده می‌شود.

---

[۱] C. Berge

تعریف ۲.۱ گراف جهت‌دار $G = (V, A)$ شامل یک مجموعه رأس $V(G)$ و یک مجموعه کمان $A(G)$ از ازواج مرتب از عناصر $V(G)$ می‌باشد. اگر u و v دو رأس از G باشند، یک کمان بین u و v به صورت (u, v) یا $\overrightarrow{uv}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱ اندازه $V(G)$ از گراف G، معمولا با n مشخص و مرتبه G نامیده می‌شود. اگر همه یال‌های $E(G)$ مجزا باشند(G یال چندگانه نداشته باشد) و اگر هیچ یالی دو بار شامل یک رأس مشابه نشود(G طوقه نداشته باشد) آن‌گاه گراف G ساده است. اگر $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند، گراف G متناهی و درغیراینصورت نامتناهی است.

تعریف ۴.۱ دو رأس u و v از گراف G **همسایه‌اند**، اگر به وسیله یک یال از G به هم متصل باشند. **درجه** v در G یعنی تعداد همسایه‌های v را با $deg_G(v)$ یا به طور ساده‌تر با $deg(v)$ نشان می‌دهیم. ماکزیمم درجه G که بیشترین درجه یک رأس از V است را با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه مینیمم درجه G که کمترین درجه یک رأس از V است را با $\delta(G)$ می‌شناسیم. گرافی که همه رئوس آن درجه مشابهی، k، دارند $k-$ منتظم نامیده می‌شود. یک گراف که ماکزیمم درجه ۳ داشته باشد زیرمکعبی و یک گراف ۳− منتظم مکعبی نام دارد.

تعریف ۵.۱ یک **مسیر** به طول k بین دو رأس v_0 و v_k به صورت یک دنباله، $\{v_0, \ldots, v_k\}$، از $k+1$ رأس G است به‌طوریکه برای همه $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ داشته باشیم $\{v_i, v_{i+1}\}$.

تعریف ٦.۱ فاصله بین دو رأس u و v در گراف G که با $d_G(u, v)$(یا $d(u, v)$) نمایش داده می‌شود طول کوتاهترین مسیر بین u و v در G است. اگر چنین مسیری بین u و v وجود نداشته باشد آن‌گاه فاصله بین u و v تعریف نشده است.

تعریف ۷.۱ فرض کنید v یک رأس از G باشد. $B_r(v)$ گوی به مرکز v و به شعاع r را نشان می‌دهد یعنی همه رئوسی از V که به فاصله کمتر یا مساوی r از v هستند. همچنین برای $N[v] = B_1(v)$، همسایگی بسته v رابا $N[v] = N(v) \bigcup \{v\}$، نشان می‌دهیم، که در آن $N(v)$ مجموعه همسایه‌های v به جز خودش می‌باشد .

تعریف ۸.۱ در گراف جهت‌دار $G = (V, A)$ **گوی ورودی**، $B^+(v)$، شامل خود v و رئوسی است که یک یال جهت‌دار به $v \in V$ دارند. همچنین **گوی خروجی**، $B^-(v)$، شامل خود v و رئوسی است که یک یال جهت‌دار از v به آن‌ها وجود دارد. برای گراف‌های غیرجهت‌دار نوشتار ساده $B(v) = B^+(v) = B^-(v)$ را به‌کار می‌بریم.

تعریف ۹.۱ اگر برای هر جفت از رئوس مجزای u و v یک مسیر بین u و v موجود باشد، G **همبند** نامیده می‌شود. اگر G ناهمبند باشد، شامل تعداد متناهی گراف همبند است، هریک از این گراف‌ها یک مولفه همبندی از G نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱ یک **دور** به طول k در گراف G به‌صورت یک دنباله، $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$، از k رأس مجزا از G است به طوریکه برای همه $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ داشته باشیم $\{v_i, v_{(i+1) mod k}\} \in E(G)$. گراف همبندی که هیچ دوری نداشته باشد، **درخت** نام دارد.

تعریف ۱۱.۱ یک **درخت ریشه‌دار** درختی است که در آن یک رأس از دیگر رأس‌ها متمایز بوده و ریشه نامیده می‌شود.**عمق** یا سطح یک رأس، تعداد یال‌های روی یک مسیر منحصربه‌فرد بین ریشه و

آن رأس است.**ارتفاع** یک درخت ریشه‌دار، بزرگترین عمق هر رأس درخت است. اگر v رأس داخلی دلخواهی از یک درخت ریشه‌دار باشد، فرزندان v، رأس‌هایی از درخت هستند که مجاور v بوده و در مقایسه با v، یک عمق دورتر از ریشه باشند.

تعریف ۱۲.۱ گراف $H = (V_H, E_H)$ را یک زیرگراف از G گوییم هرگاه $V_H \subseteq V(G)$ و $E_H \subseteq E(G)$ باشد.

تعریف ۱۳.۱ گراف کامل از مرتبه n که با K_n نمایش داده می‌شود گرافی است که هر دو رأس متمایز آن همسایه باشند.

تعریف ۱۴.۱ اگر $V(G)$ به دو مجموعه A و B افراز شود به صورتی که هر یال $E(G)$ شامل یک رأس از A و یک رأس از B باشد آن‌گاه گراف حاصل،**گراف دوبخشی** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱ گراف G **مسطح** است اگر امکان کشیدن آن روی صفحه اقلیدسی چنانکه هیچ یالی دیگری را قطع نکند، موجود باشد. اگر G مسطح باشد یال‌های آن صفحه را به یک یا چند ناحیه افراز می‌کنند. هرکدام از ناحیه‌ها را یک وجه می‌نامیم. یک گراف،**مسطح خارجی** نامیده می‌شود اگر تمام رئوس آن روی وجه بیرونی باشند.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید G و H دو گراف ساده و $f : V(G) \to V(H)$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا باشد. f را **یکریختی** گوییم هرگاه برای هر دو رأس u و v از G اگر u و v در G مجاور باشند(نباشند)، آن‌گاه $f(u)$ و $f(v)$ در H مجاور باشند(نباشند).

تعریف ۱۷.۱ رئوسی که همسایه‌های یکسان داشته باشند،**رئوس دوقلو** نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۸.۱ اگر G گرافی با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد،**ماتریس مجاورت** A را به صورت یک ماتریس $n \times n$ تعریف می‌کنیم، که عنصر ij ام آن برابر تعداد یال‌هایی است که رئوس i ام و j ام را به هم وصل می‌کند.

تعریف ۱۹.۱ زیرمجموعه M از یال‌های G را درنظر بگیرید. اگر هیچ دو یالی در M مجاور نباشند، به عبارت دیگر، اگر برای هر دو یال u و v در M، دو انتهای رأس u با دو انتهای رأس v متفاوت باشد، M یک **تطابق** در G نامیده می‌شود.
اگر رأس v از گراف G انتهای رأس برخی از یال‌های تطابق M باشد آن‌گاه v، $M-$ **اشباع شده** نامیده می‌شود و می‌گوییم M، رأس v را اشباع می‌کند.
اگر M، یک تطابق در G باشد به گونه‌ای که هر رأس G، $M-$ اشباع شده باشد، M یک **تطابق کامل** نامیده می‌شود.

همه گراف‌هایی که از این پس درنظر می‌گیریم ساده، همبند، غیرجهتدار و متناهی هستند، مگر خلاف آن ذکر شود.

۱ – ۲ انگیزش

گراف‌ها دامنه‌ای وسیع از کاربردها در زمینه‌های متعدد مهندسی و علوم ارتباطات یافته‌اند. یک گراف می‌تواند برای نمایش دادن تقریباً هر حالت فیزیکی و ارتباط بین موجودات مختلف به‌کار برده شود.

از این‌رو مدل‌های گرافی اغلب در حل تعدادی از مسائل کاربردی استفاده می‌شوند(به هاررى [۲] [۲۲] مراجعه شود). کارپوسکی و همکاران[۱]، کدهای تشخیصی را برای مدل‌کردن فرایند تشخیص خطا در سیستم‌های چند پردازشگری تعریف کرده‌اند. در این سیستم‌ها ممکن است تعدادی از پردازنده‌ها به نحوی که به هدف سیستم وابسته است خراب شوند. هدف ما تشخیص و جایگزین کردن این پردازشگرهاست به صورتی که سیستم درست عمل کند. فرض می‌کنیم که سخت‌افزارهای ما از کیفیتی برخوردارند که در هر زمان حداکثر l تا از پردازشگرها معیوب هستند که l یک مقدار ثابت است و نیز فرض می‌کنیم که هر پردازنده P در این سیستم می‌تواند برنامه $test(P)$ را اجرا کند که وضعیت خود این پردازنده و تمام پردازنده‌های مجاورش، $N(P)$، را بررسی می‌کند. این برنامه تنها اطلاعات دودوئی برمی‌گرداند، یعنی اگر P یا یکی از پردازنده‌های مجاورش معیوب باشد صفر و در غیر اینصورت یک است. این اطلاعات به یک کنترل‌کننده مرکزی برگردانده می‌شود که آن را به عنوان بخشی از سیستم تلقی نمی‌کنیم. توجه کنید که این برنامه هویت پردازنده معیوب را آشکار نمی‌کند: اگر خروجی $test(P)$ صفر باشد تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم اینست که P و یا یکی از پردازنده‌های اطرافش در $N(P)$ معیوب هستند. ما علاقه‌مندیم که زیرمجموعه‌ای از پردازشگرها مانند Ç بسازیم که:

i) اگر تمام پردازنده‌های Ç یک برگرداند، آنگاه هیچ پردازشگری در سیستم خراب نباشد.

ii) اگر لااقل یک و حداکثر l تا از پردازشگرها به درستی کار نکند، کنترل‌کننده مرکزی بتواند آن‌ها را با استفاده از Ç مکان‌یابی کند.

F.Harary [۲]

۱–۳ کدهای شناسایی در گراف‌ها

اکنون برخی تعاریف خاص در زمینه مجموعه‌های غالب و شناسایی در گراف‌ها را مطرح می‌کنیم. معرفی کامل مجموعه‌های غالب در گراف را در هاینس [۳] و همکارانش ببینید[۱۲].

گراف $G = (V, E)$ را درنظر بگیرید، رأس $v \in V$ بر رأس u تسلط دارد یا آن را می‌پوشاند اگر $u \in N[v]$ (u به فاصله حداکثر یک از v است). فرض کنیم $C, C' \subseteq V$ دو مجموعه باشند، گوییم C بر C' تسلط دارد یا آن را می‌پوشاند اگر هر رأس C' با یک رأس از C پوشانده شود. مجموعه $C \subseteq V$ یک مجموعه غالب یا کد پوششی برای G است اگر C بر V مسلط باشد.

جفت $\{u, v\}$ از رئوس V به وسیله $x \in V$ تفکیک می‌شوند اگر x دقیقاً بر یکی از رئوس u و v مسلط باشد. فرض کنیم $C, C' \subseteq V$ دو مجموعه باشند، گوییم C، C' را تفکیک می‌کند اگر برای هر جفت $\{u, v\}$ از رئوس C'، u و v به وسیله حداقل یکی از رئوس C تفکیک شوند. مجموعه $C \subseteq V$ یک مجموعه غالب مکان‌یاب یا کد غالب مکان‌یاب از G است اگر:

۱) C یک مجموعه غالب از G باشد،
۲) C، $V \backslash C$ را تفکیک کند.

مجموعه $C \subseteq V$ یک کد شناسایی برای G است اگر:

۱) C یک مجموعه غالب از G باشد،
۲) C، V را تفکیک کند.

به عبارت دیگر، برای هر رأس $v \in V$، $N[v] \cap C \neq \varnothing$ و برای هر جفت $\{u, v\}$ از رئوس V،

$$N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$$

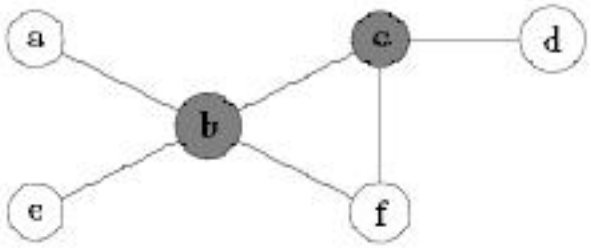
[۳] T.W. Haynes

در یک کد شناسایی C از G برای یک رأس $v \in V$ مجموعه $I_C(v) = I(v,C) = N[v] \cap C$، مجموعه شناسایی v و هریک از اعضای C یک کلمه‌کد نامیده می‌شود. پس مجموعه $C \subseteq V$ یک کد شناسایی برای گراف $G = (V,E)$ است اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم $I_C(v) \neq \varnothing$، و برای هر جفت از رئوس مجزای $u, v \in V$، $I_C(v) \neq I_C(u)$.

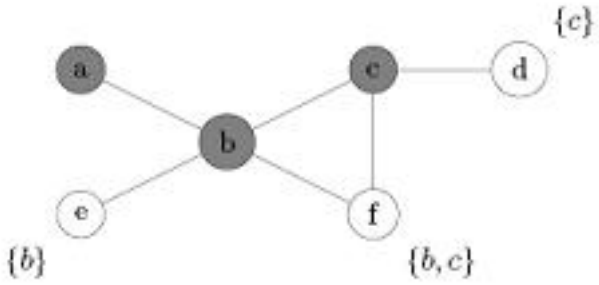
فرض کنیم $\oplus$ تفاضل متقارن بین دو مجموعه را نشان دهد: $A \oplus B = A \backslash B \cup B \backslash A$. شرط معادل با شرط تفکیکی (۲) در تعریف بالا را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

۲) برای هر جفت $\{u,v\}$ از رئوس V، $I_C(u) \oplus I_C(v) \neq \varnothing$.

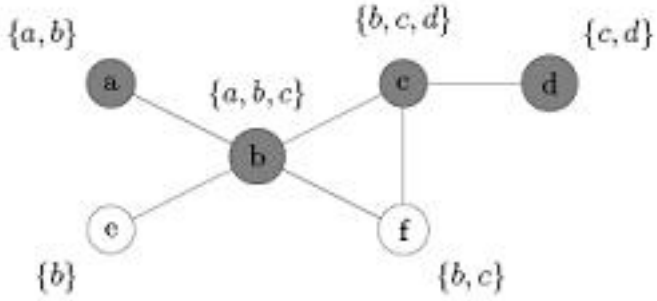
شکل‌های (۱.۱) و (۲.۱) و (۳.۱) مثال‌هایی از مجموعه غالب، مجموعه غالب مکان‌یاب و یک کد شناسایی است. رئوس این مجموعه‌ها به رنگ سیاه هستند و مجموعه‌های شناسایی در $\{\}$ آمده است. در (۱.۱) توجه کنید که یک مجموعه غالب یک مجموعه غالب مکان‌یاب نیست چون a و e تفکیک شده نیستند. به طور مشابه، مجموعه غالب مکان‌یاب یک کد شناسایی نیست چون c و f مجزا نیستند. (در شکل (۲.۱) $I_C(f) = I_C(c)$).



شکل ۱.۱: نمونه‌ای از یک مجموعه غالب



شکل ۲.۱: نمونه‌ای از یک مجموعه غالب مکان‌یاب



شکل ۳.۱: نمونه‌ای از یک کد شناسایی

فصل ۲

کدهای شناسایی در گراف‌های غیرتصادفی

۲—۱ ویژگی‌های اساسی

در حالیکه همه گراف‌هایک مجموعه غالب یا یک مجموعه غالب مکان‌یاب(به سادگی $C = V$ را در نظر بگیرید) می‌پذیرند، اما همه آن‌ها دارای یک کد شناسایی نیستند، مثلاً اگر دو رأس $u, v \in V$ موجود باشد که $N[u] = N[v]$، آن‌گاه G نمی‌تواند کد شناسایی داشته باشد، چون برای هر زیرمجموعه از رأس‌های C داریم $N[u] \cap C = N[v] \cap C$، چنین رئوسی، رئوس دوقلو نامیده می‌شوند و نمی‌توانند تفکیک شوند.

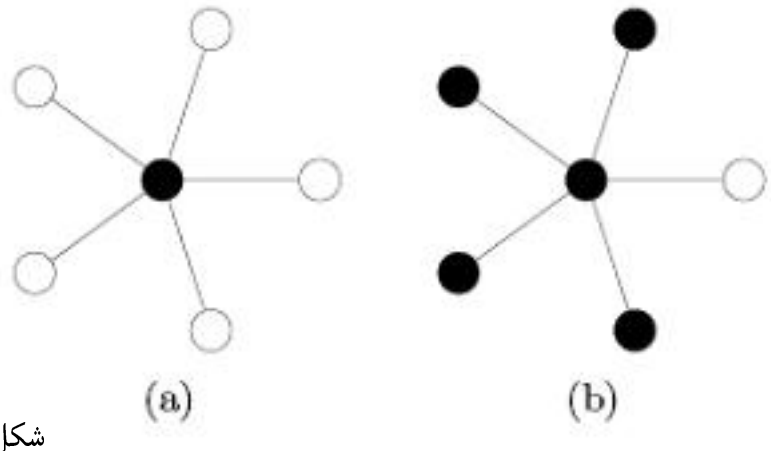
گراف‌هایی که کد شناسایی می‌پذیرند، گراف‌های قابل شناسایی یا گراف‌های بدون رئوس دوقلو نامیده می‌شوند. یک مثال ساده از گراف‌های دارای رئوس دوقلو، گراف‌های کامل K_n هستند، که شامل n رأسند و همه رئوس به یکدیگر متصلند، بنابراین گراف کامل K_n کد شناسایی نمی‌پذیرد.

در حالتیکه G یک کد شناسایی داشته باشد، $C = V$ همیشه یک کد شناسایی برای G است.

یک سؤال طبیعی برای گراف G داده شده، تعیین می‌نیمم اندازه یک مجموعه غالب، یک مجموعه غالب مکان‌یاب و یا یک کد شناسایی برای G و ساختن مجموعه‌های بهینه آن‌ها می‌باشد.

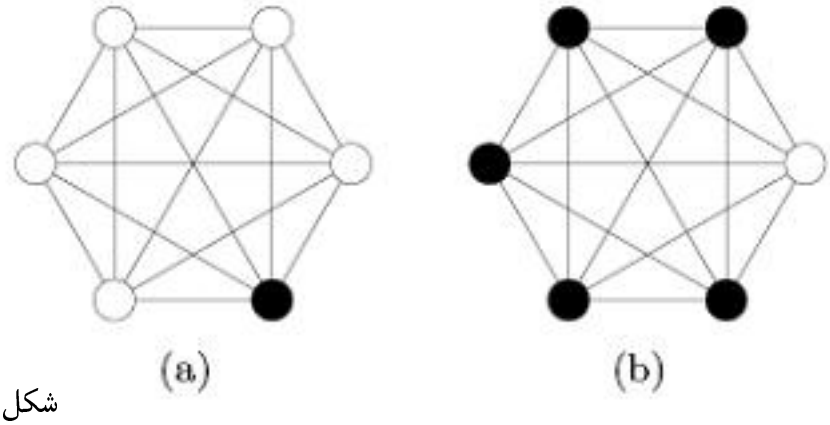
فرض کنید $\Upsilon(G)$، می‌نیمم اندازه یک مجموعه غالب از G، $\Upsilon_l(G)$، می‌نیمم اندازه یک مجموعه غالب مکان‌یاب از G و $M_1(G)$، می‌نیمم اندازه یک کد شناسایی از G را نشان دهد. توجه کنید هر کد شناسایی از G یک مجموعه غالب مکان‌یاب برای G و هر مجموعه غالب مکان‌یاب از G یک مجموعه غالب برای G می‌باشد. بنابراین رابطه زیر بین این سه مجموعه برقرار است: برای گراف Gی بدون رئوس دوقلو، $\Upsilon(G) \leq \Upsilon_l(G) \leq M_1(G)$.

با اینکه رابطه نزدیک بین مجموعه‌های غالب، مجموعه‌های غالب مکان‌یاب و کدهای شناسایی وجود دارد، اما در کل امکان بدست آوردن یک کد شناسایی از یک مجموعه غالب یا حتی یک مجموعه غالب مکان‌یاب وجود ندارد. برخی گراف‌ها وجود دارند که می‌نیمم اندازه این مجموعه‌ها در آن‌ها بسیار متفاوت است. برای مثال، در گراف ستاره $K_{1,n-1}$، که n رأس دارد و یک رأس مرکزی به $n-1$ رأس مستقل دیگر متصل است، اندازه بهینه مجموعه غالب یک است، در حالیکه برای هر دو مجموعه غالب مکان‌یاب و کد شناسایی به $n-1$ رأس نیاز هست(شکل (۱.۲) را ببینید که در آن a یک مجموعه غالب بهینه و b یک مجموعه غالب مکان‌یاب بهینه در گراف ستاره $K_{1,5}$ می‌باشد).



شکل (۱.۲)

در گراف کامل K_n، اندازه بهینه یک مجموعه غالب مجدداً یک است و به $n-1$ رأس برای مجموعه غالب مکان‌یاب نیاز هست اما همانطور که قبلاً ذکر کردیم این گراف کد شناسایی نمی‌پذیرد(شکل (۲.۲) را ببینید که در آن a یک مجموعه غالب بهینه و b یک مجموعه غالب مکان‌یاب بهینه در گراف کامل $K_۸$ می‌باشد).



شکل (۲.۲)

توجه کنید که اگر G ناهمبند باشد، آن‌گاه یک کد شناسایی می‌نیمم، اجتماع کدهای شناسایی می‌نیمم همه مؤلفه‌های همبند آن است. از اینرو، کافیست کدهای شناسایی را در گراف‌های همبند بررسی کنیم.

اکنون کدهای شناسایی را از منظر دیگری معرفی می‌کنیم. فرض کنید G یک گراف با n گره و مجموعه رأس $\{v_۰,\ldots,v_{n-۱}\}$ و C یک کد شناسایی از G از اندازه k باشند. ماتریس M را با n ستون و k سطر که فقط شامل عناصر صفر و یک می‌باشد در نظر بگیرید، $M[i,j]=۱$ اگروتنهااگر $v_i \in I_C(v_j)$. اگر همه ستون‌های M مجزا و دارای حداقل یک درایه، ۱ باشد، آن‌گاه C یک کد شناسایی است. مسأله پیدا کردن یک کد شناسایی می‌نیمم معادل با یافتن یک ماتریس با n ستون و کمترین تعداد سطر است چنان‌که اگر v_i و v_j در G به هم متصل نباشند، $M[i,j]=۰$ باشد.

۲–۲ تعمیم‌ها و انواع

تعمیم‌های بسیاری از کدهای شناسایی وجود دارد که در اینجا برخی از مهم‌ترین آن‌ها را بیان می‌کنیم. کدهای شناسایی می‌تواند برای گراف‌های نامتناهی تعمیم یابد. فرض کنید G گراف ساده، نامتناهی و بدون رأس دوقلو باشد. آن‌گاه به جای $M_1(G)$ (که در گراف نامتناهی مفهومی ندارد) می‌توانیم تراکم کد شناسایی در G را در نظر بگیریم. تراکم کد شناسایی C در G را با $d_C(G)$ و می‌نیمم تراکم کد شناسایی در G را با $d^*(G)$ نشان می‌دهیم. در حقیقت، این تراکم نسبت بین تعداد کلمه‌کدها و مجموع تعداد رئوس در یک بخش محدود از گراف است. فرض کنید v یک رأس دلخواه از گراف G باشد، آن‌گاه

$$d_C(G) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|C \cap B_n(v)|}{|B_n(v)|}$$

(به کوهن[۱] و همکاران [۸] مراجعه کنید). اگر G متناهی و دارای n رأس باشد، تراکم C از G به صورت $d_C(G) = \frac{|C|}{n}$ تعریف می‌شود.

مهم‌ترین تعمیم کدهای شناسایی تعمیم $t-$ فاصله می‌باشد، مشابه این تعمیم در مجموعه‌های غالب نیز وجود دارد. فرض کنید G یک گراف و $t \geq 1$ باشد. یک مجموعه $t-$ غالب یا مجموعه غالب $t-$ فاصله(همچنین کد $t-$ پوششی یا کد پوششی به شعاع t نیز نامیده می‌شود)، یک زیر مجموعه C از V است چنان‌که برای هر رأس v از G داشته باشیم $B_t(v) \bigcap C \neq \emptyset$. یک مجموعه $t-$ غالب مکان‌یاب یک زیرمجموعه C از $V(G)$ می‌باشد چنان‌که C یک مجموعه غالب است و برای رئوس $u, v \in V \backslash C$ مجموعه‌های $B_t(v) \bigcap C$ و $B_t(u) \bigcap C$ مجزا هستند. یک کد شناسایی به شعاع t از G [۱] یک زیر مجموعه C از $V(G)$ است چنانکه C یک مجموعه $t-$ غالب از G است و هر جفت از رئوس به وسیله

[۱] G.Cohen

C به فاصله t تفکیک می‌شوند. به عبارت دیگر

۱) برای هر رأس $v \in V$، $B_t(u) \bigcap C \neq \emptyset$

۲) برای هر جفت $\{u, v\}$ از رئوس V، $B_t(u) \bigcap C \neq B_t(v) \bigcap C$.

کمترین اندازه یک کد شناسایی به شعاع t از G را با $M_t(G)$ نمایش می‌دهیم.

یک تعمیم دیگر، شناسایی کردن مجموعه‌هایی از رئوس است(به [۱] و فریز[۲] و همکاران [۴۰] مراجعه شود). اگر C و X دو زیرمجموعه از رئوس گراف G باشند، مجموعه شناسایی X را به صورت $I_C(X)$ نشان می‌دهیم که به صورت اجتماع مجموعه‌های شناسایی همه رئوس x از X، $I_C(x)$، تعریف می‌شود. فرض کنید C، X و Y سه زیرمجموعه از رئوس G که $|X| = |Y| = l$ و $X \neq Y$ باشد، گوییم C، X و Y را تفکیک می‌کند اگر $I_C(X) \neq I_C(Y)$ باشد. یک کد $(\leq l)$− شناسایی یک زیرمجموعه C از رئوس G است که بر $V(G)$ غلبه دارد و هر دو زیرمجموعه از رئوس حداکثر l رأسی را تفکیک می‌کند. می‌توانیم دو تعمیم قبل را در هم ادغام کرده و کدهای $(t, \leq l)$− شناسایی بدست آوریم. برای سهولت اغلب $t = ۱$ را درنظر می‌گیریم. اصطلاح تخصیص‌یافته به کدهای $(۱, \leq l)$− شناسایی، کدهای $l-$ شناسایی($l - ID$) و به کدهای $(۱, \leq ۱)$− شناسایی، کدهای شناسایی(ID) است.

کدهای شناسایی می‌تواند برای گراف‌های جهت‌دار نیز تعریف شود. فرض کنید $G = (V, A)$ یک گراف جهت‌دار باشد. به راحتی، گوی رأس v، $B(v)$، در تعریف با گوی‌های $B^+(v)$ و $B^-(v)$ جایگزین می‌شود.

به‌علاوه، یک تعمیم از کدهای شناسایی با وزن‌ها و هزینه روی رئوس، کدهای $d-$ شناسایی نامیده می‌شود که در تلاسیرامن [۳] و همکاران[۱۸] آمده است.

[۲] A. Frieze

[۳] K.Thulasiraman

یک تعمیم وزندار و جهت‌دار، شناسایی کردن منبع نام دارد که در برگرولف [۴] و همکاران[۵] موجود است.

با اینحال، در این پایان‌نامه کار خود را روی حالت کلاسیکی که گراف متناهی و غیرجهت‌دار و $t = ۱$ و $l = ۱$ است انجام می‌دهیم، در برخی بخش‌ها روی حالت کلی نیز بحث می‌کنیم.

۲—۳ کدهای شناسایی در برخی گراف‌های خاص

در این‌جا مسأله ساختن یک کد شناسایی می‌نیمم در برخی طبقه‌بندی‌های خاص از گراف‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲—۳—۱ مسیرها

یک مسیر با n رأس که با P_n نمایش داده می‌شود، دارای مجموعه رئوس $\{v_۰, \ldots, v_{n-۱}\}$ و مجموعه یال $\{\{v_i, v_{i+۱}\},\ i \in \{۰, \ldots, n-۱\}\}$ می‌باشد. اندازه کد شناسایی می‌نیمم در مسیرها در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱.۲ (برترند[۵] و همکارانش ۲۰۰۴،[۲]): برای مسیر P_n

- $M_۱(P_۲)$ تعریف نشده است(چون $P_۲$ گراف کامل است)، $M_۱(P_{۲k}) = k + ۱;\ k \geq ۲$ که کد بهینه آن عبارتست از

$$\{v_i| \text{ زوج است } i)\}\bigcup\{v_{۲k-۳}\}$$

[۴] T.Y.Berger- Wolf

[۵] N.Beratrand

- $M_1(P_{2k+1}) = k+1;\ k \geq 0$ و کد بهینه آن به‌صورت زیر است:

$\{v_i | i$ زوج است$\}$

- $d^*(P_\infty) = \frac{1}{2}$ و کد شناسایی بهینه آن عبارتست از

$\{i \in \mathbb{Z} | i$ زوج است$\}$

مثال‌هایی از کدهای بهینه در P_7 و P_8 در شکل‌های(۳.۲) و (۴.۲) آمده است(رئوس کد سیاهرنگند).

شکل (۳.۲): مثالی از کد های بهینه در P_7

شکل (۴.۲): مثالی از کد های بهینه در P_8

۲–۳–۲ دورها

یک دور با n رأس که با C_n نمایش داده می‌شود، دارای مجموعه رئوس $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ و مجموعه یال $\Big\{\{v_i, v_{(i+1) mod n}\},\ i \in \{0, \ldots, n-1\}\Big\}$ می‌باشد. اندازه یک کد شناسایی می‌نیمم در دورها در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۲.۲ (برترند همکاران[۲]): برای دور C_n

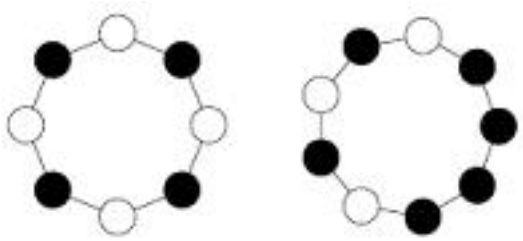
- $M_1(C_4) = 3$ و $\{v_0, v_1, v_2\}$ **کد بهینه آنست و** $M_1(C_{2k}) = k;\ k \geq 3$ **که کد بهینه آن** به‌صورت زیر است

$$\{v_i | i \text{ زوج است}\}$$

- $M_1(C_3)$ **تعریف نمی‌شود(** چون C_3 گراف کامل است)، $M_1(C_5) = 3$ و $\{v_0, v_1, v_2\}$ کدی بهینه برای آنست و $M_1(C_{2k+1}) = k+2;\ k \geq 3$ که کد بهینه آن عبارتست از

$$\{v_i | i \text{ زوج است}\} \bigcup \{v_{2k-1}\}$$

مثال‌هایی از کدهای بهینه در C_8 و C_9 در شکل (۵.۲) آمده است که رئوس کد در آن‌ها سیاهرنگ است.



شکل(۵.۲): مثال هایی از کدهای بهینه در C_8 و C_9

۲–۳–۳ گراف‌های مسطح و مسطح خارجی

یک کران پایین برای مینیمم اندازه یک مجموعه غالب مکان‌یاب گراف‌های مسطح و غیرمسطح خارجی در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۳.۲ (اسلتروورال[۶] [۱۷]): فرض کنید G یک گراف با n رأس و L یک مجموعه غالب مکان‌یاب از G با اندازه k باشد. آن‌گاه

- اگر G مسطح و $k \geq ۴$ باشد، $n \leq ۷k - ۱۰$.
- اگر G مسطح خارجی باشد $n \leq \lfloor \frac{۷k-۳}{۲} \rfloor$

چون هر کد شناسایی یک مجموعه غالب مکان‌یاب است، کران‌های پایین قبلی برای کدهای شناسایی نیز برقرار است، کران‌ها را به صورت کران‌های پایین $M_۱(G)$ فرمول‌بندی می‌کنیم:

نتیجه ۱.۲ : فرض کنیم G یک گراف بدون رأس دوقلو با n رأس باشد:

- اگر G مسطح و $M_۱(G) \geq ۴$ باشد، $M_۱(G) \geq \frac{n+۱۰}{۷}$.
- اگر G مسطح خارجی باشد $M_۱(G) \geq \frac{۲n+۳}{۷}$

۲–۳–۴ درخت‌ها

در یک درخت با n رأس، یک کد غالب مکان‌یاب حداقل $\frac{n}{۳}$ رأس دارد. همچنین یک نتیجه مشابه برای کدهای شناسایی داریم.

[۶] P.J.slater and D.F.Rall

قضیه ۴.۲ (برترند[۷] و همکارانش ۲۰۰۵[۳]): برای همه $n \geq ۳$ و همه درخت‌های با n رأس، یک کد شناسایی حداقل $\frac{۳(n+۱)}{۷}$ رأس دارد.

اثبات. فرض کنید $T = (V, E)$ یک درخت با n رأس و C یک کد شناسایی در آن باشد. E' را مجموعه یال‌هایی در نظر بگیرید که هر دو انتهای آن کلمه‌کد است و $e' = |E'|$. برای هر $v \in V$، $f(v) = |\{c \in C : d(v,c) = ۱\}|$ و $C^* = \{c \in C : f(c) = ۰\}$ را در نظر بگیرید. مجموع یال‌هایی که یک سر آن کلمه‌کد و سر دیگر آن غیرکد یا هر دو سر آن کلمه‌کد است به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{v \in V} f(v) \leq |E| + e' \leq n - ۱ + e' \qquad (۱.۲)$$

به وضوح

$$\sum_{c \in C \backslash C^*} f(c) = ۲e' \qquad (۲.۲)$$

اما حداکثر $|C \backslash C^*|$، vی غیرکلمه‌کد با $f(v) = ۱$ وجود دارد و بنابراین

$$\sum_{v \in V} f(v) \geq ۲|V \backslash C| - |C \backslash C^*| + \sum_{c \in C \backslash C^*} f(c) \qquad (۳.۲)$$

از تلفیق (۱.۲) و (۲.۲) و(۳.۲) داریم

$$n - ۱ \geq ۲n - ۳|C| + |C^*| + \frac{۱}{۲} \sum_{c \in C \backslash C^*} f(c)$$

اکنون مجموع سمت راست را تخمین می‌زنیم. اگر $F = (C \backslash C^*, E')$ آن‌گاه یک مولفه همبند با i رأس در F، $۲(i-۱)$ سهم در مجموع دارد، پس میانگین $f(c)$ در این مولفه $\frac{۲(i-۱)}{i}$ است. چون C یک کد شناسایی است، اندازه هر مولفه همبند در F حداقل ۳ است و بنابراین میانگین $f(c)$ روی

[۷] N. Bertrand

$C\backslash C^*$ روی‌هم‌رفته حداقل $\frac{۴}{۳}$ است. پس بدست می آوریم

$$n-۱ \geq ۲n-۳|C|+|C^*|+\frac{۲}{۳}(|C|-|C^*|) \geq ۲n-\frac{۷}{۳}|C|$$

و قضیه ثابت می‌شود. □

برای مقادیر نامتناهی n، یک درخت با n رأس که یک کد شناسایی از اندازه $\frac{۳(n+۱)}{۷}$ می‌پذیرد، می‌توانیم بسازیم.

قضیه ۵.۲ ([۳]): اگر $n = ۶ + ۷(m-۱),\ m \geq ۲$، آن‌گاه یک درخت با n رأس که یک کد شناسایی $۳m = \frac{۳(n+۱)}{۷}$ عضوی می‌پذیرد، وجود دارد.

اثبات. نحوه ساختن به صورت زیر است:

ابتدا الگوی (a) در شکل(۶.۲)، سپس الگوی(b) را $(m-۱)$ مرتبه رسم کرده، هر بار سمت چپ‌ترین رأس الگوی(b) را به سمت راست‌ترین رأس بالایی ساختار قبلی وصل می‌کنیم. این نحوه ساختن به وضوح یک کد شناسایی را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۶.۲ یک درخت نامتناهی که یک کد شناسایی با تراکم $\frac{۳}{۷}$ می‌پذیرد، وجود دارد.

اثبات. تعداد نامتناهی بار نحوه ساختن در قضیه ۵.۲ را تکرار می‌کنیم. □

۲–۳–۵ درخت کامل q– تایی

برای $q \geq ۲$، درخت کامل q– تایی به ارتفاع h را با CT_h^q نشان می‌دهیم[۳]. این درخت

$$X_h^q = \sum_{۱ \leq i \leq h} q^{i-۱} = \frac{q^h - ۱}{q - ۱}$$

رأس دارد که آن‌ها را از ۱ تا X_h^q، از چپ به راست و از بالا به پایین شماره‌گذاری می‌کنیم. سطح i ($۱ \leq i \leq h$) شامل $q^{i-۱}$ رأس شماره‌گذاری شده از $\sum_{۱ \leq j \leq i-۱} q^{j-۱} + ۱$ تا $\sum_{۱ \leq j \leq i} q^{j-۱}$ می‌باشد. همه رئوس داخلی q فرزند دارند و رئوسی که در عمق h قرار دارند برگ نامیده می‌شوند.

مقدار دقیق می‌نیمم اندازه یک کد شناسایی در درخت کامل در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۷.۲ (برترند و همکاران[۳]): در درخت کامل CT_h^q:

- $M_۱(CT_h^۲) = \lceil \frac{۲۰.X_h^q}{۳۱} \rceil$
- فرض کنید $q \geq ۳$ باشد، داریم $M_۱(CT_h^q) = \lceil \frac{q^۲.X_h^q}{q^۲ + q + ۱} \rceil$

فرض کنیم سطوح CT_h^q از ۱ تا h باشد که سطح ۱ شامل ریشه و سطح h شامل برگ‌هاست. برای $q \geq ۳$، نحوه ساختن یک کد شناسایی بهینه برای CT_h^q در زیر آمده است:

- اگر $h \equiv ۱ \pmod ۳$، ریشه در کد هست.
- برای همه $i > ۱$ اگر $i \equiv h \pmod ۳$ باشد، هر رأس در سطح $i - ۱$ دقیقاً $q - ۱$ تا از q فرزندش کد است.
- در همه سطوح i اگر $i \equiv h - ۱ \pmod ۳$، هر رأس کد است.
- در همه سطوح i اگر $i \equiv h - ۲ \pmod ۳$، هیچ رأسی کد نیست.

یک نمونه از کدهای بهینه در درخت کامل $CT_۴^۳$ در شکل (۷.۲) آمده است که کلمه‌کدها در آن سیاهرنگند.

شکل(۷.۲): نمونه یک کد بهینه در درخت کامل $CT_۴^۳$

۲−۴ نتایج ساختاری

یک کران پایین و بالای کلی برای می‌نیمم اندازه یک کد شناسایی وجود دارد.

قضیه ۸.۲ (کارپوسکی و همکاران[۱]):فرض کنید G یک گراف بدون رأس دوقلو و دارای n رأس باشد، آن‌گاه:

$$M_۱(G) \geq \lceil \log_۲(n+۱) \rceil$$

قضیه ۹.۲ (شارون[۸] و همکاران [۶]، گراویر و مانسل[۹][۱۱]) : فرض کنید G یک گراف متناهی، همبند و بدون رئوس دوقلو با n رأس باشد، آن‌گاه $M_۱(G) \leq n - ۱$.

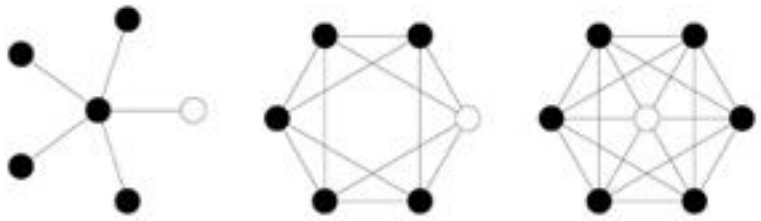
کران بالا دقیق است و گراف‌های بسیاری که این کران را می‌پذیرند وجود دارند، اما با اینحال، مجموعه این گراف‌ها هنوز مشخص نشده‌اند. برای یک n داده شده، سه گراف داریم که این کران را می‌پذیرند. اولی گراف ستاره، $K_{۱,n-۱}$، شامل یک رأس مرکزی که به $n-۱$ رأس مستقل دیگر متصل است،

[۸] I.charon

[۹] S.Gravier and J.Moncel

می‌باشد. برای $n > ۳$، به راحتی می‌بینیم که هر مجموعه $n-۱$ رأسی از $K_{۱,n-۱}$ را می‌توان به عنوان یک کد در نظر گرفت. گراف دوم با n زوج ساخته می‌شود. گراف کامل k_n را در نظر می‌گیریم و یک جورسازی کامل($\frac{n}{۲}$ یال مستقل) از $E(K_n)$ را حذف می‌کنیم. این گراف را با $G_n^۲$ نمایش می‌دهیم. گراف سوم را با n فرد می‌سازیم. گراف $G_{n-۱}^۲$ را در نظر می‌گیریم، رأس v را که به همه رئوس دیگر متصل است به آن اضافه می‌کنیم، این گراف را با $G_n^۳$ نمایش می‌دهیم. در $G_n^۳$ همه رئوس به جز v باید کد باشند.

نمونه‌هایی از این گراف‌ها در شکل (۸.۲) با می‌نیمم تعداد کد شناسایی آمده است، که در آن از راست به چپ عبارت از گراف$G^۳$، گراف $G_۶^۲$ و گراف $K_{۱,۵}$ می‌باشد.



شکل(۸.۲): نمونه‌هایی از گراف‌های دارای کمترین تعداد کد شناسایی از اندازه $n-۱$

ثابت شده است که همه مقادیر ممکن $M_۱(G)$ بین کران‌های قضایای ۸.۲ و ۹.۲ قرار می‌گیرد.

۲—۵ کاربردها

کدهای شناسایی دارای گستره وسیعی از کاربردها هستند، در اینجا به طور مختصر مهم‌ترین آن‌ها را بیان می‌کنیم.

یک کاربرد آن برای تشخیص خطا در سیستم‌های چندپردازشگری در [۱] آمده است. یک شبکه

از پردازشگرها را که به صورت یک گراف غیرجهت‌دار مدل شده است درنظر بگیرید. برخی از پردازشگرها (که بخشی از کدها هستند) می‌توانند تست کنند که آیا پردازشگر همسایه (یا خودشان) معیوبند، اگر چنین بود آن‌ها وارد یک وضعیت خاص می‌شوند. اگر برخی از پردازشگرهای تست کننده خطایی را تشخیص دادند این امکان وجود دارد که پردازشگر معیوب دقیقاً شناسایی شود: این پردازشگر معیوب همانی است که مجموعه شناسایی‌اش با مجموعه پردازشگرهایی که خطا را تشخیص داده‌اند یکی است. در حالتی‌که شبکه‌ای از هزاران پردازشگر داشته باشیم کمینه‌کردن اندازه مجموعه پردازشگرهای تست‌کننده به شدت مفید است.

کاربرد دیگری از این مسئله در ری[۱۰] و همکاران[۱۵] آمده است که تعمیمی از مجموعه‌های غالب مکان‌یابی است که در کالبرن[۱۱] و همکارانش[۹] و اسلتر[۱۶] آورده شده است. یک وسیله یا یک ساختمان مدل شده با یک گراف را در نظر بگیرید: رئوس معرف نواحی یا اتاق‌ها و یال‌ها نشان‌دهنده اتصالات بین نواحی هستند. یک حسگر در برخی اتاق‌ها نصب می‌شود، حسگرها می‌توانند یک خطر یا تهدید مثل آتش را در همسایگی نزدیک خود تشخیص دهند. هدف می‌نیمم کردن تعداد حسگرهای موردنیاز به منظور مکان‌یابی موقعیت خطر احتمالی است. اگر حسگرها سه وضعیتی باشند و بتوانند حالت‌های بدون خطر، خطر در یک اتاق نزدیک و خطر در همان اتاق را تمیز دهند آن‌گاه یک مجموعه غالب مکان‌یاب برای تعیین یکتای مکان خطر کافیست. اگر حسگرها بتوانند حالت‌های بدون خطر و خطر در همسایگی بسته را تمیز دهند آن‌گاه برای تشخیص مکان خطر به یک کد شناسایی احتیاج است. روش مکان‌یابی خطر از طریق چک‌کردن مجموعه‌ای از حسگرهاست که در وضعیت اعلام خطر هستند، چون این مجموعه برای هر رأس یکتاست، مکان خطر به روشنی بدست می‌آید.

---

[۱۰] S.Ray

[۱۱] C.J.Colbourn

فصل ۳

کران‌های کد برای گراف مشخص

۳—۱ کران وابسته به ماکزیمم درجه گراف

سوالات طبیعی راجع به کدهای شناسایی مسائل حدی هستند: تعیین کران‌های بالا و پایین برای $M_1(G)$ و مشخص‌کردن گراف‌هایی که این کران‌ها را دارند. در حالیکه بیشتر این سوالات پیش از این در حالت کلی حل شده‌اند، تقریباً هیچ نتیجه‌ای روی روابط بین این مسأله و ماکزیمم درجه گراف بدست نیامده است. بهرحال، این یک سوال جالب است چون خیلی از گراف‌های معمول نظیر شبکه‌ها، دورها و چنبره‌ها دارای یک درجه بیشینه محدود هستند.

۳—۱—۱ کران پایین وابسته به ماکزیمم درجه گراف

قضیه زیر برای گراف‌های $\Delta-$ منتظم بیان شده است، اما برای گراف‌های با درجه ماکزیمم Δ نیز معتبر است. قضیه را در حالت کدهای ۱ — شناسایی بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۳ (کارپوسکی و همکاران[۱]): فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف همبند و غیرجهت‌دار با n رأس و ماکزیمم درجه Δ باشد. آن‌گاه $M_1(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$.

اثبات. فرض کنید $C \subseteq V$ یک کد شناسایی G از اندازه k باشد. V را به چهار مجموعه زیر، به صورتی که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است، تفکیک می‌کنیم:

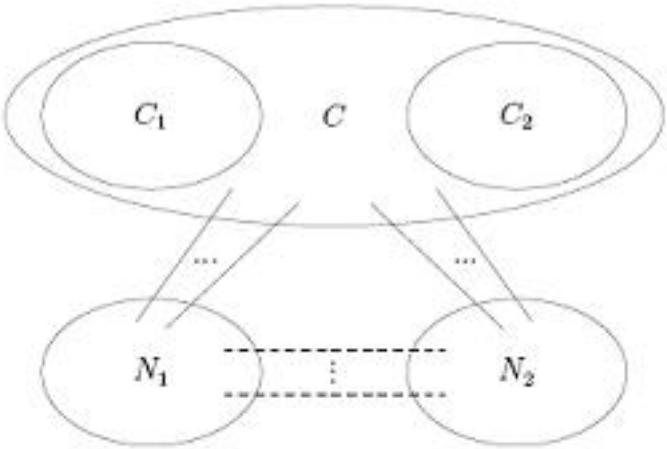
$$C_1 = \{x \in C| \ |I_C(x)| = 1\}, \qquad C_2 = \{x \in C| \ |I_C(x)| \geq 2\},$$

$$N_1 = \{v \in V\backslash C| \, |I_C(v)| = 1\}, \qquad N_2 = \{v \in V\backslash C| \ |I_C(v)| \geq 2\},$$

به آسانی می‌بینیم که روابط زیر برقرار است:

$$|C_1| + |C_2| = k, \tag{۱.۳}$$

$$|C_1| + |N_1| \leq k, \tag{۲.۳}$$



شکل (۱.۳): تفکیک V

فرض کنید m تعداد یال‌های بین C و $V\backslash C = N_1 \bigcup N_2$ باشد. مشاهدات زیر را می‌سازیم:

- هر رأس C_2 حداقل به یکی دیگر از رئوس C_2 متصل است. به‌علاوه، این ممکن نیست که دو رأس از C_2 فقط به یکدیگر متصل باشند، در واقع، این دلالت می‌کند که آن‌ها مجموعه شناسایی

مشابه دارند و از هم مجزا نیستند. ازاین‌رو، حداقل یکی از آن‌ها باید به رأس دیگری از $C_۲$ وصل باشند، پس بنابراین حداقل $\frac{۳|C_۲|}{۲}$ یال در $C_۲$ وجود دارد. چون ماکزیمم درجه G برابر Δ است، پس $m \leq k \cdot \Delta - \frac{۳|C_۲|}{۲}$.

- هیچ یالی از هر رأس $C_۱$ به رأس دیگری از C وجود ندارد.
- حداقل $۲|N_۲|$ یال بین C و $N_۲$ وجود دارد چون هر رأس از $N_۲$ حداقل دو عنصر از C به صورت کلمه‌کد دارد و دقیقاً $|N_۱|$ یال بین C و $N_۱$ موجود است.

پس داریم $m \geq |N_۱| + ۲|N_۲|$، این نتیجه می‌دهد

$$k \cdot \Delta - \frac{۳|C_۲|}{۲} \geq |N_۱| + ۲|N_۲|,$$

بنابراین

$$k \cdot \Delta \geq \frac{۳|C_۲|}{۲} + |N_۱| + ۲|N_۲|,$$

از(۱.۳) چون داریم $|C_۲| = k - |C_۱|$، پس

$$k \cdot \Delta \geq k - |C_۱| + |N_۱| + ۲|N_۲| + \frac{|C_۲|}{۲},$$

از (۲.۳) داریم: $-|C_۱| \geq |N_۱| - k$، پس

$$\begin{aligned} k \cdot \Delta &\geq ۲.(|N_۱| + |N_۲|) + \frac{|C_۲|}{۲}, \\ k \cdot \Delta &\geq ۲.(n-k) + \frac{|C_۲|}{۲}, \\ k \cdot (\Delta + ۲) &\geq ۲n + \frac{|C_۲|}{۲} \geq ۲n, \end{aligned} \qquad (۳.۳)$$

بنابراین $k \geq \frac{۲n}{\Delta + ۲}$. □

۳–۱–۲ کران بالای وابسته به ماکزیمم درجه گراف

در یک گراف با n رأس، کران بالای یک کد شناسایی $n-$ ۱ است. این کران دقیق است و گراف‌های متعددی وجود دارند که این کران‌ها را می‌پذیرند(قضیه ۹.۲ ، [٦] و [۱۱] را ببینید). با اینحال همه این چنین گراف‌هایی دارای ماکزیمم درجه($n-$ ۲ یا $n-$ ۱) هستند. این ما را به ساختن این فرض که گراف‌های دارای ماکزیمم درجه Δ، یک کد شناسایی از اندازه حداکثر $n-\frac{n}{f(\Delta)}$ دارند، که f یک چندجمله‌ای از Δ است، سوق می‌دهد. به‌طور شهودی، اگر در گراف G با $C=V(G)$ به عنوان یک کد شناسایی از G شروع کنیم، حذف کردن رأس v از C تنها روی شناسایی رئوسی که از v خیلی دور نیستند اثر می‌گذارد و این به ما اجازه می‌دهد رئوس دیگری که به اندازه کافی از v دور هستند را جدا کنیم. در حقیقت هیچ گراف شناخته‌شده‌ای که کمترین تعداد کد شناسایی آن بزرگتر از $n-\frac{n}{\Delta}$ باشد وجود ندارد و این حدس زیر را در پی دارد که در آن $f(\Delta)=\Delta$.

حدس ۱.۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف همبند، بدون رأس دوقلو، دارای n رأس با ماکزیمم درجه Δ باشد. آن‌گاه یک کد شناسایی C از G به صورت زیر موجود است

$$|C|\leq n-\frac{n}{\Delta},$$

حدس بالا را نمی‌توان اثبات کرد.

یک کران پایین کلی برای اندازه یک کد شناسایی در گراف بدون رأس دوقلو با n رأس وجود دارد. در واقع، یک گراف با یک کد شناسایی از اندازه k را در نظر می‌گیریم. می‌توان دید که مجموعه‌های شناسایی رئوس به صورت عبارات دودوئی از اندازه‌ی k است. تعداد مجزا و ناتهی عبارت که با k بیت می‌تواند کدگذاری شود، دقیقاً ۲^k- ۱ می‌باشد.

فرض کنید $M_t(G)$ کمترین تعداد کلمه‌کد لازم برای شناسایی کردن هر رأس به طور منحصربه‌فرد،

وقتی که یک گوی به شعاع t به کار می‌بریم، باشد. ابتدا برخی حدود پایینی روی $M_t(G)$ را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۳ برای یک گراف با n رأس

۱) $M_t(G) \geq \lceil \log_۲(n+۱) \rceil$،

۲) فرض کنید K کوچکترین عدد صحیح و $V_i(t)$ حجم گوی به شعاع t و مرکز v_i باشد که برای یک l خاص $(۱ \leq l \leq min(K, V_۱(t)))$ در شرایطی که در زیر آمده صادق است:

$$n \leq \sum_{j=۱}^{l-۱} \binom{K}{j} + \lfloor \frac{۱}{l} (\sum_{i=۱}^{K} V_i(t) - \sum_{j=۱}^{l-۱} j \binom{K}{j}) \rfloor, \qquad (۴.۳)$$

$$\sum_{j=۱}^{l-۱} j \binom{K}{j} < \sum_{i=۱}^{K} V_i(t) \leq \sum_{j=۱}^{l} j \binom{K}{j}, \qquad (۵.۳)$$

آنگاه $M_t(G) \geq K$.

اثبات. کران قسمت اول از این حقیقت نتیجه می‌شود که $n+۱$ حالت وجود دارد(n رأس متفاوت و انتخاب هیچ رأس، یعنی رأسی شناسایی نمی‌شود). بنابراین اطلاعات می‌تواند در $\lceil \log_۲(n+۱) \rceil$ بیت به رمز نوشته شود.(کد k بیتی، ۲^k موقعیت را مشخص می‌کند، پس اگر از موقعیت‌ها در مبنای ۲ لگاریتم بگیریم k را بدست می‌آوریم، اما پس از گرفتن لگاریتم، سقف جزءصحیح را در نظر می‌گیریم، زیرا به عنوان مثال اگر کد چهار بیتی داشته باشیم به دو عدد ۰ و ۱ نیاز داریم ولی اگر کد، پنج، شش، هفت یا هشت بیتی باشد به سه عدد ۰ و ۱ نیاز داریم). برای اثبات قسمت دوم به [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۳ اندازه یک کد شناسایی برای یک گراف منتظم با n رأس با

$$M_t(G) \geq \frac{۲n}{V(t)+۱}, \qquad (۶.۳)$$

از پایین کراندار است، که $V(t)$ حجم گوی به شعاع t یعنی تعداد رئوسی که به فاصله حداکثر t از هر رأس V است، می‌باشد.

اثبات. یک ماتریس دودوئی با $M_t(G)$ سطر و n ستون درنظر بگیرید. اگر رأس i رأس j را بپوشاند آن‌گاه درایه x_{ij} در این ماتریس برابر ۱ است. تعداد یک‌ها در ماتریس برابر $M_t(G) \cdot V(t)$ است. تعریف $M_t(G)$ ایجاب می‌کند که بیشترین تعداد ستون‌ها با یک درایه ۱ برابر $M_t(G)$ باشد، پس $M_t(G) \cdot V(t) - M_t(G)$ درایه ۱ دیگر در ماتریس وجود دارد، در نتیجه ستون‌های باقیمانده حداقل دو درایه ۱ دارند. پس

$$M_t(G) + \frac{M_t(G) \cdot V(t) - M_t(G)}{۲} \geq n,$$

و این نتیجه می‌دهد

$$M_t(G) \geq \frac{۲n}{V(t) + ۱}.$$

□

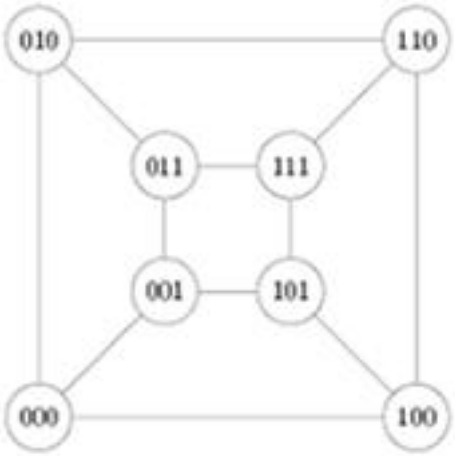
حال برخی توپولوژی‌های خاص گراف را بررسی می‌کنیم.

۳—۲ مکعب‌های دودوئی

حالت مکعب‌های دودوئی n بعدی، H_n، یکی از موارد جالب توجه در تئوری کد است و در [۱] مطالعه شده است. ابتدا مجموعه رئوس و یال‌های H_n را تعریف می‌کنیم.

$$E(H_n) = \{\{\alpha, \alpha(i) | \, i \in \{۰, ..., n-۱\}, \alpha \in \{۰, ۱\}^n\}, \qquad V(H_n) = \{۰, ۱\}^n.$$

که برای $\alpha = \alpha_۰\alpha_۱...\alpha_{n-۱} \in \{۰, ۱\}^n$ و $i \in \{۰, ..., n-۱\}$، داریم $\alpha(i) = \alpha_۰\alpha_۱...\bar{\alpha_i}...\alpha_{n-۱}$ (iامین بیت α عوض می شود). برای مثال، ابر مکعب ۳ بعدی $H_۳$، در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۲.۳)

ابتدا چند تعریف را که در این بخش به آن‌ها نیاز داریم بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ در تئوری اطلاعات، فاصله همینگ[۱] بین دو رشته با طول‌های مساوی، برابر تعداد مکان‌های متناظری است که دو رشته در آن با هم تفاوت دارند. به عبارت دیگر، فاصله همینگ کمترین تعداد جایگزینی‌های لازم برای تبدیل یکی از رشته‌ها به دیگری، و یا تعداد خطاهایی که در انتقال یکی از رشته‌ها به دیگری رخ داده است را اندازه می‌گیرد.

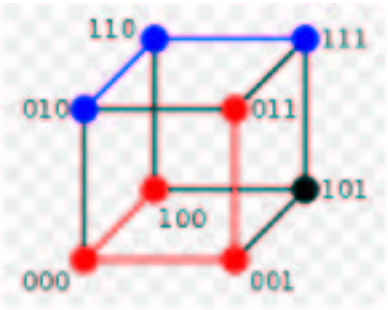
مثال ۱.۳ فاصله همینگ بین

- "$toned$" و "$roses$" برابر ۳ است.
- ۱۰۱۱۱۰۱ و ۱۰۰۱۰۰۱ برابر ۲ است.
- ۲۱۷۳۸۹۶ و ۲۲۳۳۷۹۶ برابر ۳ است.

[۱] Hamming distance

۰۱۱ $\rightarrow$ ۱۰۰ دارای فاصله همینگ ۳ است (مسیر قرمز)

۱۱۱ $\rightarrow$ ۰۱۰ دارای فاصله همینگ ۲ است (مسیر آبی)



(شکل ۳. ۳)

برای رشته‌های دودوئی a و b فاصله همینگ برابر تعداد یک‌ها در $a\ XOR\ b$ می‌باشد. فضای همینگ مجموعه همه رشته‌های دودوئی به طول N است.

تعریف ۲.۳ یک $(n, k, ۲l + ۱)$ـکد دودوئی کامل است اگر $\sum_{i=۱}^{l} \binom{k}{l} = ۲^{n-K}$.

تعریف ۳.۳ یک کد پوششی بهینه آنست که کمترین تعداد کلمه‌کدها را دارد.

فرض کنید $M_t(H_n)$ مینیمم تعداد کلمه‌کد مورد نیاز برای شناسایی رئوس در یک مکعب دودوئی nـبعدی با استفاده از گوی‌های به شعاع t باشد. ابتدا حالت $t = ۱$ را در نظر می‌گیریم. اندازه دقیق $M_۱(H_n)$ هنوز تعیین نشده است، اما طبق قضایای زیر کران‌های بالا و پایینی آن موجود است.

قضیه ۴.۳ برای یک مکعب دودوئی nـبعدی، $n \geq ۳$، داریم

$$M_۱(H_n) \geq \frac{n.۲^n}{V(۲)} = \frac{n.۲^{n+۱}}{n(n+۱)+۲} \qquad (۷.۳)$$

که در آن $V(۲) = ۱ + n + \binom{n}{۲}$، حجم گوی به شعاع ۲ در فضای همینگ، $Z_۲^n$ است.

کران پایین (۷.۳) وقتی بدست می آید که یک پوشش کامل برای مکعب nبعدی باگوی‌های به شعاع دو موجود باشد، یعنی یک کد کامل با فاصله ۵. تنها چنین حالتی برای $n = ۵$ موجود است.

مثال ۲.۳ یک مکعب دودوئی ۵ بعدی درنظر بگیرید. بهترین کد با شعاع پوششی ۲، $C^* = \{۰۰۰۰۰, ۱۱۱۱۱\}$ می‌باشد. بنابراین همه رئوس به وزن ۱ و ۴، یعنی مجموعه $\{۱۰۰۰۰, \ldots, ۱۱۱۱۰\}$ با ۱۰ کلمه‌کد می‌تواند به عنوان کد شناسایی، C، انتخاب شود. کران پایین بدست آمده از (۶.۳) برابر است با $M_۱(H_۵) = \frac{۶۴}{۷}$، یعنی $M_۱(H_۵) \geq ۱۰$. بنابراین تعداد کلمه‌کدهای کد شناسایی در این مثال مینیمال بوده و $M_۱(H_۵) = ۱۰$ که این تعداد با (۷.۳) نیز بدست می آید.

فرض کنید $K(n,q)$ اندازه یک کد بهینه C^* به طول n با شعاع پوششی q باشد، یعنی هر رأس در فاصله همینگ حداکثر q از یک کلمه‌کد C^* است(برای اطلاعات بیشتر به کوهن [۲] و همکاران[۲۰]، کوهن و همکاران[۲۱]، هنکالا[۲۳] و استرگارد[۴۱] مراجعه کنید). یک کران بالا روی $M_۱(H_n)$ از قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۳ فرض کنید C^* یک کد دودوئی بهینه به طول n و شعاع پوششی ۲ باشد یعنی C^*، $K(n,۲)$ کلمه‌کد دارد. آنگاه برای $t = ۱$ یک کد C که رئوس را در مکعب دودوئی n بعدی شناسایی می‌کند می‌تواند به صورت $C = \{w | \exists v \in C^*, d(v,w) = ۱\}$ انتخاب شود($d(v,w)$ فاصله همینگ بین v و w است).

---

[۲] G.D.Cohen

[۳] I.S.Honkala

[۴] P.R.J.österqard

اثبات. نشان می‌دهیم که هر رأس در ابرمکعب H_n به وسیله یک مجموعه منحصربه‌فرد از کلمه‌کدها پوشیده می‌شود.

حالت ۱: فرض کنید $v \in C^*$، هر همسایه v به C متعلق است و بنابراین v را می‌پوشاند. باید ثابت کنیم که هیچ رأس v'ای که به وسیله مجموعه مشابهی از رئوس پوشیده می‌شود وجود ندارد. فرض کنید $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ باشد. کلمه‌کدهای پوششی v عبارتند از

$$(\overline{v_1}, v_2, \ldots, v_n), (v_1, \overline{v_2}, \ldots, v_n), \ldots, (v_1, v_2, \ldots, \overline{v_n})$$

که در آن $v_i \in \{0, 1\}$ و $\bar{v_i} = 1 - v_i$ می باشد. به وضوح v تنها رأسی است که یک همسایگی از همه این کلمه‌کدهاست.

حالت ۲: فرض کنید $v \in C$ و $v \notin C^*$ باشد. v توسط خودش و هر همسایه $v' \in C$ پوشیده می‌شود. نشان می‌دهیم که $v'' \in C$ وجود دارد چنان‌که $d(v, v'') = 1$ ولی $d(v', v'') > 1$ می‌باشد. توجه کنید که چون در H_n هیچ مثلثی وجود ندارد، رأس u چنان که $d(u, v) = d(u, v') = 1$ باشد، موجود نیست. از اینرو باید فقط وجود v'' برای هر v را ثابت کنیم. فرض کنید $x \in C^*$ مجاور v' باشد، از آنجا که $d(v, x) = 2$، دقیقاً دو رأس وجود دارد که به فاصله یک از هردوی x و v است، یکی از این رئوس v' و دیگری v'' است.

حالت ۳: فرض کنید $v \notin C$ و $v \notin C^*$، همچنین فرض کنید v توسط l کلمه‌کد در C ($l > 2$) پوشیده می‌شود. بدون اینکه از کلیت مسأله کم شود فرض کنید $v = (0, 0, \ldots, 0)$، کلمه‌کدهایی که v را می‌پوشانند عبارتند از

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{l}, 0, \ldots, 0)$$

روشن است که هیچ رأس دیگری به جز v وجود ندارد که از همه این کلمه‌کدها به فاصله یک باشد. از اینرو v به طور یکتا شناخته می‌شود. حال فرض کنید $l = ۱$ باشد. بدون ازدست‌دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $v = (۰, ۰, \ldots, ۰)$ و تنها کلمه‌کد v' که v را می‌پوشاند $(۱, ۰, \ldots, ۰)$ باشد. باید حداقل یک رأس w در کد پوششی C^* موجود باشد چنانکه $d(w, v') = ۱$ باشد، بنابراین

$$w \in \{(۱, ۱, ۰, \ldots, ۰), (۱, ۰, ۱, ۰, \ldots, ۰), \ldots, (۱, ۰, ۰, \ldots, ۰, ۱)\}$$

اکنون به راحتی دیده می‌شود که هر رأس در مجموعه بالا کلمه‌کدهایی به C می‌دهد که v را می‌پوشانند که این با فرض $l = ۱$ در تناقض است. سرانجام فرض کنید $l = ۲$ باشد. دو کلمه‌کد که v را می‌پوشانند، $(۰, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ و $(۱, ۰, \ldots, ۰)$ را در نظر بگیرید. حال $w = (۱, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ تنها رأس غیر از v است که به فاصله یک از هر دوی این کلمه‌کدهاست. اگر $w \in C^*$ باشد آنگاه w به طور یکتا شناسایی می‌شود. اگر $w \notin C^*$، آنگاه $w^* \in C^*$ وجود دارد که $(۱, ۰, \ldots, ۰)$ را به عنوان یک کلمه‌کد از C مشخص می‌کند. یکبار دیگر، بدون نقصان در کلیت $w^* = (۱, ۰, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه $(۰, ۰, ۱, ۰, \ldots, ۰) \in C$، که با فرض $l = ۲$ در تناقض است. از اینرو $w \in C^*$ و v به طور یکتا شناسایی می‌شود. □

نتیجه ۱.۳ : تعداد کلمه‌کدها در یک کد شناسایی بهینه با $t = ۱$ برای یک مکعب nـبعدی $(n \geq ۳)$ از بالا کراندار است با

$$M_۱(H_n) \leq nK(n, ۲). \qquad (۸.۳)$$

مقدار دقیق برای n کوچک و نیز کران‌ها روی $K(n,۲)$ در مرجع کوهن و همکاران [۷] قابل دسترسی می‌باشد. به صورت خاص

$$K(n,۲) \leq K(\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor, ۱) K(\lceil \frac{n}{۲} \rceil, ۱). \qquad (۹.۳)$$

با استفاده از (۷.۳) و (۹.۳) می‌توان بدست آورد

$$\frac{n.۲^n}{V(۲)} \leq M_۱(H_n) \leq nK(\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor, ۱) K(\lceil \frac{n}{۲} \rceil, ۱).$$

برای مثال اگر $m = ۲^s - ۱$ باشد آنگاه $K(m,۱) = \frac{۲^m}{m+۱}$. بنابراین برای $n = ۲^s - ۲$ داریم

$$\frac{n \cdot ۲^{n+۱}}{n(n+۱)+۲} \leq M_۱(H_n) \leq \frac{n \cdot ۲^{n+۲}}{(n+۲)^۲}.$$

r_n نسبت کران بالا به کران پایین وقتی $n \to \infty$ عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۲(n^۲+n+۲)}{(n+۲)^۲} = ۲.$$

راه حل دیگر برای مسئلهٔ ساختن کد شناسایی برای یک مکعب دودوئی nـبعدی به وسیله انتخاب کلمه‌کدهای جداگانه برای مکعب‌های $(n-۱)$ـبعدی بدست می‌آید. این یک نوع دیدگاه "*divide and conquer*" است که $M_۱(H_n) \leq ۲M_۱(H_{n-۱})$ را ایجاب می‌کند و اغلب برای n کوچک نتایج بهتری از روش‌های ساختنی با استفاده از $K(n,۲)$ ارائه می‌دهد.

جدول زیر تعداد کلمه‌کدهای موردنیاز برای شناسایی رئوس در مکعب‌های دودوئی را نشان می‌دهد، که در آن علامت $*$ کران پایین بدست آمده به وسیله ساختار را نشان می‌دهد.

n	کران پایین روی M_1	$M_1(n)$ (با استفاده از $K(n,2)$)	$M_1(n)(divide\ and\ conquer)$
۳	۴*	٦	–
۴	٦*	۸	–
۵	۱۰	۱۰	–
٦	۱٦	۲۴	۲۰
۷	۲۹	۴۴	۴۰
۱۰	۱۷۷	۳۰۰	۳۲۰
۱٦	۷۲۸۲	۱۴۳۳٦	۲۰۴۸۰

جدول ۳–۱

توجه کنید که برای $n = 3$ و $n = 4$، کران پایین روی $M_1(H_n)$ را با استفاده از روش های ساختنی ad hoc (تک منظوره) بدست می آوریم.

ساختار قضیه (۵.۳) می تواند برای $t > 1$ تعمیم یابد. اکنون یک C^* بهینه با شعاع پوششی $2t$ می‌سازیم، تعداد کلمه‌کدها در C^*، $K(n, 2t)$ می‌باشد. کد شناسایی C به وسیله انتخاب رئوس که به فاصله دقیقاً t از رئوس C^* هستند، ایجاد می‌شود.

قضیه ٦.۳ برای هر $t < \frac{n}{2}$ یک کد C برای شناسایی رئوس در مکعب دودوئی n ـبعدی($n > 2$) را بوسیله انتخاب کلمه‌کدهای همه رئوس در فاصله دقیقاً t از کلمه‌کدهای یک کد بهینه C^* به شعاع پوششی $2t$ می‌توان بدست آورد. یعنی

$$C = \{x | \exists u \in C^*,\ d(x, u) = t\}.$$

اثبات. ابتدا مشاهدات را به شرح ذیل می‌سازیم:

اگر رئوس v_1 و v_2 چنان باشند که حداقل یک گوی به مرکز یک رأس در C^* موجود باشد به گونه‌ای که $v_1(v_2)$ به آن تعلق داشته باشد اما $v_2(v_1)$ متعلق به آن نباشد آنگاه v_1 و v_2 می‌توانند با بکار بردن کلمه‌کدهایی از C تمیز داده شوند. بنابراین تنها لازم است ثابت کنیم که هر دو رأس می‌توانند

تشخیص داده شوند اگر به گوی مشابه به شعاع $۲t$ و به مرکز یک رأس $u \in C^*$ تعلق داشته باشند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $u = (\underbrace{۰, ۰, \ldots, ۰}_{n})$ باشد. همه رئوس به وزن t متعلق به C هستند و به صورت کلمه‌کد برای شناسایی کردن یک رأس به کار می‌روند. دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ را در نظر می‌گیریم که در یک گوی به مرکز u هستند. نشان می‌دهیم همواره می توانیم یک کلمه‌کد $x \in C$ بیابیم که x یکی از آن‌ها را می‌پوشاند اما دیگری را نمی‌پوشاند. $z = x \cdot y$ را به صورت یک بردار با مؤلفه‌های $z_i = x_i y_i$ تعریف می‌کنیم، بعلاوه اگر $x \cdot y = y$ باشد آنگاه $y \leq x$ است و همچنین $\bar{y}$ را قرینه مؤلفه به مؤلفه y در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $w(v_۱) = l_۱$ و $w(v_۲) = l_۲$ که $w(v)$ وزن v است. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $l_۱ \leq l_۲$ باشد، برای اینکه این رابطه برقرار باشد باید $l_۲ \geq ۱$ باشد، زیرا در غیراین‌صورت هر دوی $v_۱$ و $v_۲$ یک رأس مشابه $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ خواهند بود. سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $w(v_۱ \cdot \overline{v_۲}) \geq t$، $x \leq v_۱ \cdot \overline{v_۲}$، در این‌صورت $x \in C$ $(w(x) = t)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که داریم $d(x, v_۱) = l_۱ - t \leq t$ و $d(x, v_۲) = t + l_۲ > t$.

۲) اگر $w(v_۱ \cdot \overline{v_۲}) = l_۳ < t$، توجه کنید که اگر $l_۳ = ۰$ آنگاه $l_۲ > l_۱$ می‌شود، در غیر این صورت $v_۱$ و $v_۲$ همانند هستند. فرض کنید حداقل یکی از دو شرط برآورده شود یعنی $l_۳ > ۰$ یا $l_۱$ زوج باشد. $x \in C$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$v_۱ \cdot \overline{v_۲} \leq x, \qquad w(x \cdot v_۱ \cdot v_۲) = \max\{۰, \lceil \frac{l_۱}{۲} \rceil - l_۳\}$$

و

$$w(x \cdot \overline{v_۱} \cdot \overline{v_۱} \cdot \overline{v_۲}) = \min\{n - l_۲ - l_۳, t - \lceil \frac{l_۱}{۲} \rceil\} = l_۴$$

آنگاه

$$w(x \cdot v_۱) = \lceil \frac{l_۱}{۲} \rceil, \qquad d(x, v_۱) = t + l_۱ - ۲\lceil \frac{l_۱}{۲} \rceil \leq t$$

از طرف دیگر

$$d(x, v_۲) = t + l_۲ - ۲(t - l_۳ - l_۴) > t.$$

بنابراین در هر دو حالت، کلمه‌کد x، $v_۱$ را می پوشاند اما $v_۲$ را نمی‌پوشاند.

۳) اگر $w(v_۱ \cdot \overline{v_۲}) = ۰$ و $l_۱$ فرد باشد پس $v_۱ \leq v_۲$ و حداقل یکی از دو شرط برقرار است، یعنی یا $l_۱$ فرد است یا $l_۲ - l_۱ \geq ۲$. $x \in C$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $w(x \cdot v_۲) = \lceil \frac{l_۲}{۲} \rceil$ و $w(x \cdot v_۱) = max\{۰, \lceil \frac{l_۲}{۲} \rceil - l_۲ + l_۱\}$، آنگاه $d(x, v_۲) = t + l_۲ - ۲\lceil \frac{l_۲}{۲} \rceil \leq t$ و $d(x, v_۱) = t + l_۱ - ۲ \max\{۰, \lceil \frac{l_۲}{۲} \rceil - l_۲ + l_۱\} \geq t$ پس در این حالت کلمه‌کد x، $v_۲$ را می‌پوشاند اما $v_۱$ را نمی‌پوشاند.

□

نتیجه ۲.۳ : برای $t < \frac{n}{۲}$، تعداد کلمه‌کدهای لازم برای شناسایی رئوس در یک مکعب دودوئی از بالابوسیله

$$M_t(H_n) \leq K(n, ۲t)\binom{n}{t},$$

کراندار است.

حال r_n نسبت کران بالا به کران پایین روی تعداد کلمه‌کدها، $M_t(H_n)$، وقتی $\frac{n}{۲t}$ یک عدد صحیح است، را بدست می‌آوریم. از (۶.۳) و نتیجه(۲.۳) می‌دانیم که

$$\frac{۲^{n+۱}}{V(t) + ۱} \leq M_t(H_n) \leq \binom{n}{t} K(n, ۲t)$$

از آنجا که $K(n_۱ + n_۲, t_۱ + t_۲) \leq K(n_۱, t_۱)K(n_۲, t_۲)$ [۷]، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۲^{n+۱}}{۱ + \sum_{i=۰}^{t} \binom{n}{i}} \leq M_t(H_n) \leq \binom{n}{t} (K(\frac{n}{۲t}, ۱))^{۲t}$$

با بکار بردن کران بالای معروف زیر روی $K(q,۱)$(مرجع [۷] را ببینید)،

$$K(q,۱) \leq \frac{۲^q}{۲^{\lfloor \log_۲ (q+۱) \rfloor}},$$

نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۲^{n+۱}}{۱+\sum_{i=۰}^{t} \binom{n}{i}} \leq M_n(t) \leq \binom{n}{t} \frac{۲^n}{۲^{۲t\lfloor \log_۲ (\frac{n}{۲t}+۱) \rfloor}},$$

زمانی که $n \to \infty$ و $\frac{t}{n} \to ۰$ می‌توانیم $\binom{n}{t}$ را به صورت $V(t) = \sum_{i=۰}^{t} \binom{n}{i}$ درنظر بگیریم. اگر $\frac{n}{۲t} + ۱ = ۲^s$ باشد، آنگاه با بکار بردن $V(t) = \sum_{i=۰}^{t} \binom{n}{i} \sim \frac{n^t}{t!}$، برای زمانی که n به سمت ∞ میل می کند و برای ثابت t بدست می آوریم(می‌دانیم $a(n) \sim b(n)$، اگروتنهااگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = ۱$)

$$\frac{۲^{n+۱}}{۱+\frac{n^t}{t!}} \leq M_t(H_n) \precsim \frac{n^t}{t!} (\frac{۲t \cdot ۲^{\frac{n}{۲t}}}{n})^{۲t}$$

$$۲^{n+۱} t!\, n^{-t} \precsim M_t(H_n) \precsim (۲t)^{۲t} ۲^n n^{-t} (t!)^{-۱}$$

در نتیجه نسبت r_∞ از کران بالا به کران پایین(وقتی n به سمت ∞ میل می کند)، به صورت زیر بدست می آید

$$r_\infty = ۲^{۲t-۱} t^{۲t} (t!)^{-۲}$$

برای $t = ۱$ مانند آنچه قبلاً بدست آوردیم، $r_\infty = ۲$ و برای $t = ۲$، $r_\infty = ۳۲$ می‌شود.

برای حالت خاص $s \geq ۱$ و $n = (۴s+۱)t$، نتیجه زیر را داریم که از این حقیقت تبعیت می‌کند که

$$K(r(۲s+۱), rs) \leq (K(۲s+۱, s))^r = ۲^r,$$

نتیجه ۳.۳ : تعداد کلمه‌کدهای مورد نیاز برای یک مکعب دودوئی با بعد $t(۴s+۱)$ با بکار بردن گوی‌های به شعاع st از بالا به صورت زیر کراندار است

$$M_{st}(H_{(۴s+۱)t}) \leq \binom{(۴s+۱)t}{st} ۲^t.$$

در حالت خاص برای $s=۱$، داریم $M_t(H_{۵t}) \leq \binom{۵t}{t} ۲^t$ و برای $s=۲$ داریم $M_{۲t}(H_{۹t}) \leq \binom{۹t}{۲t} ۲^t$.

جدول (۲.۳) کران‌های بالا و پایین روی $M_۲(H_n)$ را نشان می‌دهد. برای کران های پایین وقتی $n>۹$ فرمول (۶.۳) را بکار می‌بریم، چون برای این حالات $V(۲) \leq \sqrt{۲n}$ و (۶.۳) با کران داده شده از قضیه (۲.۳)(قسمت ۲) منطبق است. برای $n \leq ۹$، قضیه(۲.۳)(قسمت ۲) را به طور مستقیم به کار می‌بریم و کران‌های دقیق‌تر از آنچه (۶.۳) نتیجه‌می‌دهد، بدست می آوریم. برای $n \leq ۴$، شعاع پوششی نمی‌تواند با $t=۲$ بکار رود. ستون آخر جدول(۲.۳) بر اساس نتیجه زیر که بعداً ثابت می‌کنیم، می‌باشد(نتیجه(۷.۳)).

$$M_۲(H_n) \leq M_۱(H_{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}) \cdot M_۱(H_{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}). \qquad (۱۰.۳)$$

به طور شهودی ممکن است انتظار رود که تعداد کلمه‌کدهای موردنیاز برای شناسایی رئوس هنگامیکه t افزایش می‌یابد، کاهش یابد اما این موضوع لزوماً برقرار نیست. مثلاً $M_۳(۲)=۷$، اما $M_۳(۱)=۴$.

جدول زیر کران‌ها روی تعداد کلمه‌کدها در یک کد شناسایی با $t=۲$ برای یک مکعب دودوئی n بعدی را نشان می‌دهد، که در آن علامت $\uparrow$ کران پایین از قضیه (۲.۳) و $\updownarrow$ کران پایین از فرمول (۶.۳) را نشان می‌دهد.

n	$V(۲)$	کران پایین روی $M_۲(H_n)$	کران بالا روی $K(n,۴)$	کران بالا روی $M_۲(H_n)$ با استفاده از $K(n,۴)$	کران بالا روی $M_۲(H_n)$ با استفاده از فرمول (۱۰.۳)
۴	۱۱	$۵^{\uparrow}$	۱	–	۹
۵	۱۶	$۶^{\uparrow}$	۲	–	۱۲
۶	۲۲	$۸^{\uparrow}$	۲	–	۱۶
۸	۳۷	$۱۷^{\uparrow}$	۲	۵۶	۳۶
۹	۴۶	$۲۶^{\uparrow}$	۲	۷۲	۸۰
۱۲	۷۹	$۱۰۴^{\updownarrow}$	۱۲	۷۹۲	۴۰۰
۱۶	۱۳۷	$۹۵۰^{\updownarrow}$	۶۴	۷۶۸۰	۶۴۰۰
۲۰	۲۱۱	$۹۸۹۲^{\updownarrow}$	۵۱۲	۹۷۲۲۰	۹۰۰۰۰

جدول ۳–۲

حال کدهای شناسایی برخی گراف‌های خاص مرتبط با مکعب‌های دودوئی را بررسی می‌کنیم. کدهای شناسایی در مکعب‌های n بعدی، H_n، مطالعه شده است، اما $M_۱(H_n)$ شناخته نشده است. ما این مسأله را در دو خانواده مرتبط با مکعب‌ها بررسی می کنیم:

گراف مکعبی ـهمبند ـدوری و گراف پروانه‌ای.

۳–۲–۱ گراف مکعبی‌ـهمبندـدوری

گراف مکعبی‌ـهمبندـدوری n بعدی که با CCC_n نمایش داده می‌شود یک نوع گراف ابرمکعبی n بعدی است و در سال ۱۹۸۱ برای استفاده در محاسبات موازی توسطپریپاراتا و ویلمین[۵][۱۴] معرفی شده است(برای جزئیات بیشتر به رومر[۶] [۱۰] یا هرمکویک[۷] و همکاران [۱۳] مراجعه کنید). CCC_n یک ابرمکعب H_n است که رئوس آن با یک دور C_n جایگزین شده است.

$$V(CCC_n) = \{۰,\ldots,n-۱\}\times\{۰,۱\}^n,$$

$$E(CCC_n) = \{\{(i,\alpha),((i+۱)\,mod\,n,\alpha)\}|\ i\in\{۰,\ldots,n-۱\},\alpha\in\{۰,۱\}^n\}$$

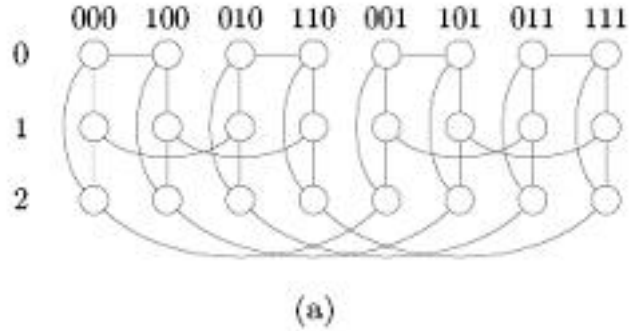
[۵] F.P.Preparata and J.Vuillemin

[۶] J.de Rumeur

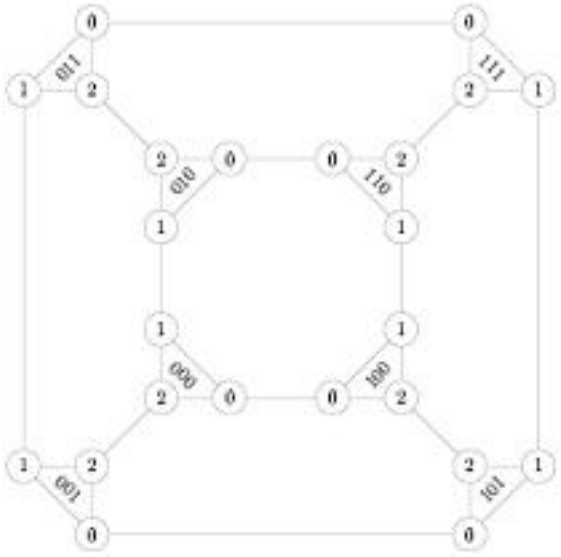
[۷] J.Hromkovic

$$\cup \quad \{\{(i,\alpha),(i,\alpha(i))\}|\ i \in \{۰,\ldots,n-۱\}, \alpha \in \{۰,۱\}^n\}.$$

که برای $\alpha = \alpha_۰\alpha_۱\ldots\alpha_{n-۱} \in \{۰,۱\}^n$ و $i \in \{۰,\ldots,n-۱\}$، $\alpha(i) = \alpha_۰\alpha_۱\ldots\overline{\alpha_i}\ldots\alpha_{n-۱}$ (iامین بیت α تعویض می‌شود). برای مثال شکل(۴.۳) مکعب همبند دوری ۳ـبعدی و شکل‌های (۵.۳) و (٦.۳) مکعب همبند دوری ۴ـبعدی هستند.



(a)



(b)

شکل(۴.۳): دو نمایش از گراف $CCC_۳$

چون هر گراف CCC_n مکعبی است، طبق قضیه(۱.۳) گزاره زیر را داریم:

گزاره ۱.۳ : فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و C یک کد شناسایی CCC_n باشد، آنگاه $|C| \geq \frac{۲|V(CCC_n)|}{۵}$.

با استفاده از قضیه زیر می‌توانیم به این کران نزدیک شویم.

قضیه ۷.۳ فرض کنید $n \geq ۴$، آنگاه $M_۱(CCC_n) \leq n \cdot ۲^{n-۱} = \frac{|V(CCC_n)|}{۲}$

اثبات. فرض کنید

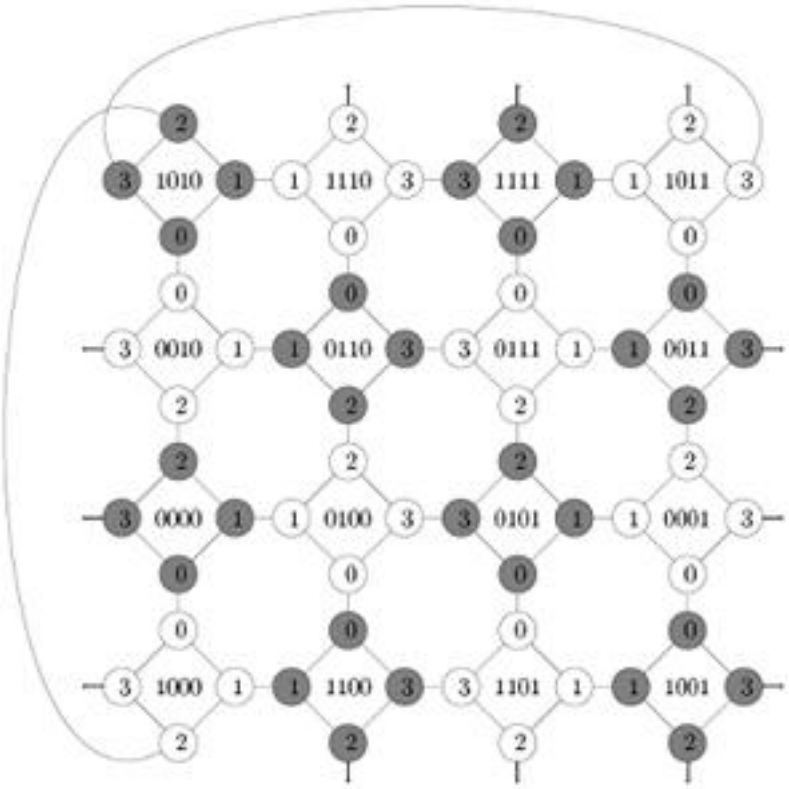
$$C = \left\{ (i,\alpha) \in V(CCC_n) | \, i \in \{۰,\dots,n-۱\},\, \alpha \in \{۰,۱\}^n,\, \sum_{i=۰}^{n-۱} \alpha_i \equiv ۰ \pmod ۲ \right\}$$

ادعا می‌کنیم که C یک کد شناسایی CCC_n است. در واقع، C چنان است که نیمی از دورهای CCC_n تماماً در آن است و دورها به فاصله ۲ از دیگری هستند. بنابراین هر رأس از یک دور C به وسیله خودش و دو همسایه‌اش شناخته می‌شود(چون $n \geq ۴$ است دورهای C_n بدون رأس دوقلو هستند)، با این‌حال یک رأس از دورهای دیگر به طور یکتا به وسیله همسایه‌اش در یک دور C شناخته می‌شود. بنابراین هر دو شرط غلبه و تفکیک حاصل می‌شود و C یک کد شناسایی از اندازه $\frac{|V(CCC_n)|}{۲}$ است.

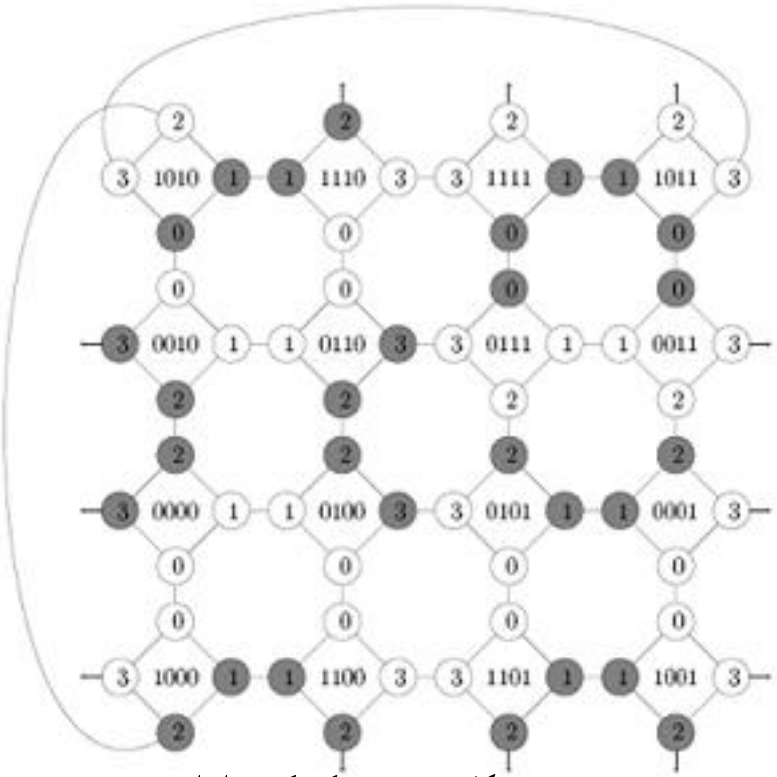
□

یک نمونه از یک کد ساخته شده در اثبات قضیه(۷.۳) برای گراف $CCC_۴$ در شکل (۵.۳) آمده است. کلمه‌کدها سیاهرنگ هستند و پیکان‌ها یال‌های اطراف را نشان می‌دهند.

نسبت بین کران بالای داده شده به وسیله قضیه قبلی و کران پایین داده شده با گزاره(۱.۳)، $\frac{۵}{۴}$ است. کران بالا احتمالاً دقیق نیست، در واقع برای گراف‌های $CCC_۴$ و $CCC_۵$، کدهای شناسایی از اندازه کمتر نیز یافته‌ایم. یک کد شناسایی بهتر برای $CCC_۴$ در شکل (۶.۳) آمده است(کلمه‌کدها سیاهرنگند و پیکان‌ها یال‌های اطراف را نشان می‌دهند).



شکل(۳. ۵): یک کد شناسایی از گراف CCC_4 شامل نصف رئوسش



شکل(۳. ٦): یک کد شناسایی بهتر در CCC_4

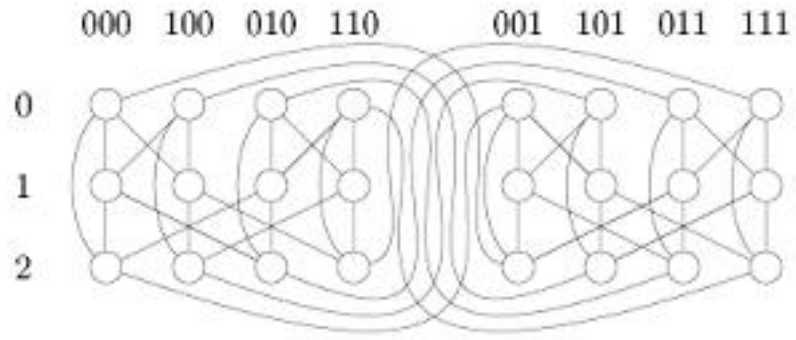
چون $CCC_۴$، $n_۴ = ۶۴$ رأس دارد، هر کد شناسایی $CCC_۴$ طبق گزاره(۱.۳) از اندازه حداقل ۲۶ است. در $CCC_۵$، که $n_۵ = ۱۶۰$ رأس دارد، هر کد شناسایی طبق گزاره(۱.۳) از اندازه حداقل ۶۴ است.

۳–۲–۲ گراف پروانه‌ای

گراف پروانه‌ای n بعدی، به صورت BF_n نشان داده می‌شود و نوعی از گراف ابرمکعبی n بعدی است که برای استفاده در محاسبات موازی معرفی شده است([۱۰] یا [۱۳]).

$$\begin{aligned} V(BF_n) &= \{۰,\dots,n-۱\}\times\{۰,۱\}^n, \\ E(BF_n) &= \{\{(i,\alpha),((i+۱)\,mod\,n,\alpha)\}\mid i\in\{۰,\dots,n-۱\},\alpha\in\{۰,۱\}^n\} \\ &\cup\ \{\{(i,\alpha),((i+۱)\,mod\,n,\alpha(i))\}\mid\ i\in\{۰,\dots,n-۱\},\alpha\in\{۰,۱\}^n\}. \end{aligned}$$

که برای $\alpha=\alpha_۰\alpha_۱\dots\alpha_{n-۱}\in\{۰,۱\}^n$ و $i\in\{۰,\dots,n-۱\}$، $\alpha(i)=\alpha_۰\alpha_۱\dots\overline{\alpha_i}\dots\alpha_{n-۱}$ (i امین بیت α تعویض می‌شود). نمونه‌هایی در شکل (۷.۳) برای گراف پروانه‌ای ۳ بعدی و شکل (۸.۳) برای گراف پروانه‌ای ۴ بعدی می‌بینیم(یال‌های بین سطح ۵ و سطح ۳ نشان داده نشده‌اند).



شکل(۷.۳) :گراف $BF_۳$

چون هر گراف BF_n، منتظم است، طبق قضیه (۱.۳)، گزاره زیر را داریم:

گزاره ۲.۳ : فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و C یک کد شناسایی BF_n باشد، آنگاه $|C| \geq \frac{|V(BF_n)|}{۳}$.

به کمک قضیه زیر می‌توانیم به این کران نزدیک شویم.

قضیه ۸.۳ فرض کنید $n \geq ۴$، آنگاه $M_۱(BF_n) \leq \lceil \frac{۳n}{۴} \rceil .۲^{n-۱} \simeq \frac{۳}{۸} \cdot |V(BF_n)|$.

اثبات. توابع $f, g : \{۰,۱\}^n \to \{۰,۱\}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$f(\alpha) = \sum_{i=۰}^{n-۱} \alpha_i \ mod\ ۲\ , \qquad g(\alpha) = \sum_{\{i | i = ۰ \ mod\ ۴\}} \alpha_i \ mod\ ۲$$

حال کد C را به صورت $C = \{(i,\alpha) | f(\alpha) = ۰, i \neq g(\alpha)\ mod\ ۴\}$ می‌سازیم. به عبارت دیگر، رئوس مربوط به نیمی از دورها در کد درنظر گرفته می‌شوند. در آن دورها یک رأس از چهار رأس در کد نیست، در نیمی از آن‌ها رئوسی که شماره مضرب ۴ دارند عضو کد نیستند و در بقیه، رئوسی که باقیمانده شماره‌شان بر چهار، یک است، این چنین هستند. نمونه‌ای از چنین کدی روی گراف $CCC_۴$ در شکل (۸.۳) نشان داده شده است، یال‌های متقاطع بین سطوح ۰ و ۳ نادیده گرفته شده‌اند و رئوس کد سیاهرنگ هستند. به وضوح، $\lceil \frac{۳n}{۴} \rceil$ رأس از هر دو دور در C داریم، پس در مجموع $|C| = \lceil \frac{۳n}{۴} \rceil .۲^{n-۱}$.

اکنون نشان می‌دهیم که C یک کد شناسایی است. ابتدا بررسی می‌کنیم که یک مجموعه غالب است. فرض کنیم $x = (i,\alpha) \in V(BF_n)$،

۱) اگر $f(\alpha) = ۰$ باشد، هر یک از x یا دو همسایه‌اش روی دورهای مشابه در C هستند، پس x مغلوب است.

۲) اگر $f(\alpha) = ۰$ باشد، x دو همسایه در دورهای دیگر دارد که عبارت از $y = (i-۱, \alpha(i-۱))$ و $z = (i+۱, \alpha(i))$ هستند. توجه کنید که $f(\alpha(i-۱)) = f(\alpha(i)) = ۰$.

i)اگر $y \in C$، x مغلوب است.

ii) اگر $y \notin C$، چون $g(\alpha(i-۱)) = ۰ \pmod ۴$ و $i \equiv ۰ \pmod ۴$، آنگاه $i+۱ \equiv ۲ \pmod ۴$ و بنابراین $z \in C$، پس x مغلوب است.

iii) اگر $y \notin C$، چون $g(\alpha(i-۱)) = ۱ \pmod ۴$ و $i \equiv ۱ \pmod ۴$، آنگاه $i+۱ \equiv ۳ \pmod ۴$ و بنابراین $z \in C$، پس x مغلوب است.

حال نشان می‌دهیم که C همه رئوس را تفکیک می‌کند. فرض کنید $x=(i,\alpha)$، $y=(i',\alpha')$ و $x,y \in V(BF_n)$ باشد و حالات زیر متمایز باشند:

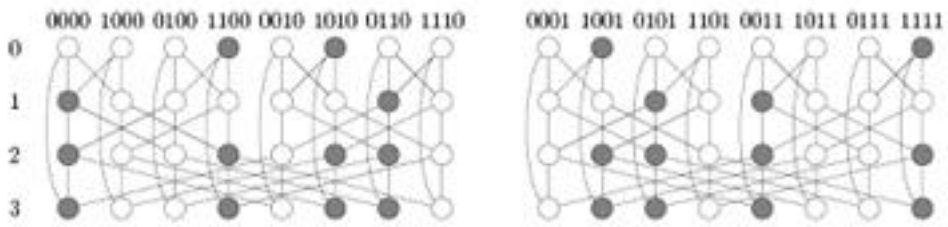
۱) اگر $f(\alpha)=f(\alpha')=۰$ باشد، دراینصورت هیچ رأسی از دور α نمی‌تواند به رأسی از دور α' متصل باشد. پس رئوسی که x و y را روی دورهای متناظرشان می‌پوشاند، آن‌ها را تفکیک می‌کند.

۲) اگر $f(\alpha)=f(\alpha')=۱$ باشد، می‌دانیم که از هر دوی x و y حداقل یکی از آن‌ها دو همسایه روی دورهای متفاوت که در C هستند، دارد. فرض کنید n_x و n_y این دو همسایه باشند. اگر n_x و n_y مجزا باشند، x و y به وسیله آن‌ها تفکیک می‌شود. پس فرض می‌کنیم $n_x=n_y$. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $n_x=(i+۱,\alpha(i))$ و $y=(i+۲,\alpha(i)(i+۱))$، آن‌گاه همسایه‌های دیگر x و y در دورهای دیگر به صورت $n'_x=(i-۱,\alpha(i-۱))$ و $n'_y=(i+۳,\alpha(i)(i+۱)(i+۲))$ هستند. چون $n_x=(i+۱,\alpha(i)) \in C$، بنابراین $g(\alpha(i))=۰ \pmod ۴$ و $i+۱ \not\equiv ۰ \pmod ۴$، یا $g(\alpha(i))=۱ \pmod ۴$ و $i+۱ \not\equiv ۱ \pmod ۴$. اگر $i+۱ \equiv ۰ \pmod ۴$، یا $i+۱ \equiv ۱ \pmod ۴$، باشد آن‌گاه $i-۱=i+۳ \equiv ۲ \pmod ۴$ یا $i-۱=i+۳=۳ \pmod ۴$ خواهد بود و بنابراین $n'_x,n'_y \in C$ می‌باشد وکار تمام است.

در غیراینصورت، $i+۳ = i-۱ \equiv ۰ \pmod ۴$ یا $i+۳ = i-۱ \equiv ۱ \pmod ۴$. اگر $n'_x \in C$ کار تمام است. پس فرض می کنیم اینطور نباشد یعنی $i-۱ \not\equiv g(\alpha(i-۱)) \pmod ۴$. اما طبق تعریف g، اگر ۴ بیت از یک سطر در $\alpha(i-۱)$ را معکوس کنیم و بدست آوریم $\alpha(i-۱)(i-۱)(i)(i+۱)(i+۲) = \alpha(i)(i+۱)(i+۲)$، خواهیم داشت $i-۱ \equiv g(\alpha(i)(i+۱)(i+۲)) \pmod ۴$ بنابراین $i-۱ = i+۳$، که بدان معنی است که $n'_y \in C$ و بنابراین x و y تفکیک شده‌اند.

۳) اگر $f(\alpha) \neq f(\alpha')$ باشد، بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $f(\alpha) = ۰$. طبق ساختمان C، x حداقل دو همسایه در C دارد. چون y تنها می‌تواند به یکی از آن‌هامتصل باشد، x و y به وسیله همسایه دیگری تفکیک می شوند.

پس، C یک کد شناسایی BF_n است. □



شکل(۸.۳):گراف $BF_۴$ با یک کد شناسایی در اثبات قضیه(۸.۳)

توجه کنید که کد ساخته شده در قضیه قبلی می‌نیمال است و نمی‌توانیم هیچ رأس کد را حذف کنیم. با اینحال یک فاصله بین کران پایین و اندازه این کد وجود دارد. برای گراف $BF_۴$، کد ساخته شده ۲۴ رأس دارد، و طبق گزاره (۲.۳) هر کد شناسایی $BF_۴$، حداقل ۲۲ رأس دارد. علاوه‌براین، ما یک برنامه

کامپیوتری روی گراف BF_4، اجرا شده است تا بررسی کند که آیا یک کد شناسایی از اندازه کمتر در آن وجود دارد. چون این گراف ۶۴ رأس دارد، امکان بررسی 2^{64} زیر مجموعه ممکن از رئوس در یک زمان، معقول نیست. بنابراین، در این تست بنابر روشی که کد با آن ساخته شد تنها زیر مجموعه‌هایی را بررسی کرده‌اند که شامل نیمی از دورها هستند. نتیجه این تست منفی بوده و بنابراین یا این کد بهینه است و یا باید کدی با رئوسی شامل بیش از نیمی از دورها در BF_4 ساخت. همچنین بسیار محتمل است که این نکته برای گراف‌های پروانه‌ای از ابعاد بالاتر نیز برقرار باشد. بنابراین کران بالایی برای $M_1(BF_n)$ ارائه دادیم که به کران پایین آن بسیار نزدیک است و این بدان علت است که برای تمام $n \equiv 0 \pmod 4$، نسبت اندازه کد ساخته شده و مقدار کران پایین دقیقاً برابر $\frac{9}{8}$ است، برای سایر مقادیر n این نسبت نزدیک است. با اینحال همچنان یک فاصله وجود دارد که می‌توان آن را با اثبات یک کران پایین بزرگتر و یا ساختن یک کد شناسایی کوچکتر برای BF_n پر کرد.

۳–۳ مکعب‌های غیر دودوئی

توپولوژی بعدی که بررسی می‌کنیم، یک مکعب غیردودوئی است که کاربردهای بسیاری در پردازش موازی دارد. یک مکعب n بعدی p ـتایی، p^n پردازشگر دارد و هر پردازشگر به $2n$ همسایه متصل است(هر پردازشگر دو همسایه در هر بعد دارد). حال به انتخاب کلمه‌کد برای شناسایی رئوس در مکعب‌های p ـتایی n بعدی می‌پردازیم. هر رأس در این حالت را می‌توان با یک بردار مختصات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به طول n نشان داد که $0 \leq x_i \leq p_{i-1}$ و دو رأس $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $x' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ همسایه‌اند اگر $x - x' = (0, 0, \ldots, \pm 1, 0, \ldots, 0) \,(mod\, p)$ باشد.

فرض کنید $P(x) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$، بردار هم‌نوع متناظر با $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باشد چنانکه اگر

x_i زوج (فرد) باشد، $p_i = ۰ (۱)$ است. برای کد p– تایی C فرض کنید $\wp(C) = \{P(x)|x \in C\}$ کد دودوئی هم نوع با کلمه‌کدهای $(p_۱, p_۲, \ldots, p_n)$ باشد. $M_t^{(p)}(H_n)$ را برای نشان دادن تعداد کلمه‌کدهای موردنیاز برای شناسایی کردن رأس‌ها در یک مکعب p ـتایی n بعدی با به کار بردن گوی‌های به شعاع $t(t < n)$ استفاده می‌کنیم(در حالت $p = ۲$، بالانویس حذف می‌شود) . ابتدا ساختن کد شناسایی C برای $t = ۱$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۹.۳ برای یک مکعب p ـتایی n بعدی($n = ۲^s - ۱$ و p زوج و $p > ۴$) شناسایی رأس با کمترین تعداد کلمه‌کد ممکن، یعنی $M_۱^{(p)}(H_n) = \frac{p^n}{(n+۱)}$ حاصل می‌شود، اگروتنهااگر کد شناسایی C شامل همه کلمه‌کدهایی باشد که بردارهای هم‌نوع آن‌ها به شکل $(n, n-s, ۳)$– کد دودوئی کامل است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که هر رأس به وسیله یک ترکیب واحد از کلمه‌کدها پوشیده می‌شود. هر کلمه‌کد تنها به وسیله خودش پوشیده می‌شود چون فاصله همینگ بین هر دو بردار هم‌نوع از کلمه‌کدها حداقل ۳ است. سپس یک رأس غیرکلمه‌کد با مختصات $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و بردار هم‌نوع متناظر با آن $(p_۱, p_۲, \ldots, p_n)$ را در نظر می‌گیریم. دو بردار با مختصات $x' = (x'_۱, x'_۲, \ldots, x'_n)$ و $x'' = (x''_۱, x''_۲, \ldots, x''_n)$ وجود دارد که بردار هم‌نوع مشابه، $(q_۱, q_۲, \ldots, q_n)$، دارند، پس x' و x'' همسایه‌های x در مکعب غیر دودوئی n بعدی هستند، $(q_۱, q_۲, \ldots, q_n)$ متعلق به کد C است و فاصله همینگ بین $(p_۱, p_۲, \ldots, p_n)$ و $(q_۱, q_۲, \ldots, q_n)$ یک است. توجه داریم برای $p > ۴$، x منحصراً به وسیله x' و x'' تعیین می‌شود.

برای اثبات لزوم، توجه داریم که اگر دو رأس در مکعب p ـتایی n بعدی همسایه باشند، بردارهای هم نوع آن‌ها به فاصله یک هستند، بنابراین برای یک کد شناسایی، شعاع پوششی مجموعه بردارهای

هم‌نوع باید برابر یک باشد و کوچکترین مجموعه با این خاصیت یک $(n, n-s, ۳)$– کد دودوئی کامل است. □

برای حالت مهم مکعب p ـتایی ۳ بعدی، نتیجه مفید زیر را داریم، که از قضیه بالا با $n = ۳$ بدست می آید.

نتیجه ۴.۳ : برای مکعب p ـتایی ۳ بعدی(p زوج و $p > ۴$)، گزینش کلمه‌کد بهینه($M_۱^{(p)}(H_۳) = \frac{p^۳}{۴}$)، حاصل می‌شود اگروتنهااگر رئوس با بردارهای هم‌نوع $(۰, ۰, ۰)$ و $(۱, ۱, ۱)$ به عنوان کلمه‌کد انتخاب شوند.

قضیه(۹.۳) و نتیجه(۴.۳) نشان می‌دهند که تراکم کلمه‌کدها برای مکعب‌های ۳بعدی تنها ۰/۲۵ است و وقتی n افزایش می‌یابد به صفر میل می‌کند. قضیه بعدی یک تعمیم از قضیه (۹.۳) برای n دلخواه است.

قضیه ۱۰.۳ فرض کنید C^* یک کد دودوئی بهینه به طول n و با شعاع پوششی یک باشد، آنگاه C یک کد شناسایی p ـتایی(p زوج و $p > ۴$) بهینه برای مکعب p ـتایی n بعدی است اگروتنهااگر C شامل همه بردارهایی باشد که بردار هم‌نوع آن‌ها $P(C) = C^*$ است.

نتیجه ۵.۳ : برای مکعب p ـتایی(p زوج و $p > ۴$) n بعدی($n = ۲^s$) داریم

$$\frac{p^n}{n+۱} \leq M_n^{(p)}(۱) \leq \frac{p^n}{n} \qquad (۱۱.۳)$$

اثبات. کران پایین از (۶.۳) و کران بالا از قضیه(۱۰.۳) تبعیت می‌کند، چون $K(۲^s, ۱) = ۲^{۲^s - s} = \frac{۲^n}{n}$. □

توجه کنید که ساختار بالا برای همه مقادیر n بهترین نیست. برای مثال، اگر این ساختار را برای حالت

$n = ۲$ به کار ببریم آنگاه $C^* = \{۰۰, ۱۱\}$ و یک مجموعه با $\frac{p^۲}{۲}$ کلمه‌کد، در روش "$checkerboard$" بدست می‌آوریم که تراکم کلمه‌کد ۰/۵ را ایجاب می‌کند. قضیه زیر ساختار بهتری برای $n = ۲$ ارائه می‌دهد.

تعریف ۴.۳ در تئوری کدگذاری، فاصله لی[۸] فاصله بین دو رشته $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ و $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_n$ با طول یکسان n است که هریک از مکان‌های آن‌ها عددی متعلق به $\{۰, \ldots, q-۱\}$ برای یک $q \geq ۲$ مشخص است و متریک آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{i=۱}^{n} \min\{|X_i - Y_i|,\ q - |X_i - Y_i|\}$$

اگر $q = ۲$ یا $q = ۳$ باشد فاصله لی بر فاصله همینگ منطبق است.

مثال ۳.۳ اگر $q = ٦$ آن‌گاه فاصله لی بین ۳۳۴۰ و ۲۵۴۳ برابر $٦ = ۳ + ۰ + ۲ + ۱$ است.

قضیه ۱۱.۳ فرض کنید $K^{(p)}(n, ۲)$ کمترین تعداد کلمه‌کد در یک مکعب pـتایی n بعدی با شعاع پوششی ۲ در فضای متریک لی [۹] (به مرجع مک ویلیامز و اسلون[۱۰][۲٦] مراجعه کنید)، باشد. آنگاه برای هر $p > ۴$ داریم

$$M_۱^{(p)}(H_n) \leq (۲n + ۱)K^{(p)}(n, ۲) \qquad (۱۲.۳)$$

---

[۸] Lee distance

[۹] lee metric

[۱۰] F.J. MacWiliams and N.J.A.Sloane

اثبات. برای ثابت کردن(۱۲.۳) کافیست نشان دهیم که همه رئوس در گوی لی $B_۲$ با شعاع پوششی ۲ به مرکز v می‌توانند به وسیله گوی‌های به شعاع ۱ و به مرکز همه رئوسی که متعلق به گوی $B_۱$، به شعاع ۱ و به مرکز v هستند، شناسایی شوند. بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توانیم فرض کنیم $v = (۰, ۰, \ldots, ۰)$، بنابراین

$$B_۱ = \{(۰, ۰, \ldots, ۰)\} \bigcup \{(۰, \ldots, ۰, \pm ۱, ۰, \ldots, ۰) \pmod p\}$$

و

$$\begin{aligned} B_۲ &= B_۱ \bigcup \{(۰, \ldots, ۰, \pm ۲, ۰, \ldots, ۰) \pmod p\} \\ &\cup \{(۰, \ldots, \pm ۱, ۰, \ldots, ۰, \pm ۱, ۰, \ldots, ۰) \pmod p\} \end{aligned}$$

فرض کنید $x \in B_۲$ باشد، چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $x = (۰, ۰, \ldots, ۰)$، آنگاه x به همه گوی‌های به شعاع ۱ با مراکزی در $B_۱$ متعلق است.

۲) اگر $x = (۰, \ldots, ۰, \pm ۱, ۰, \ldots, ۰)$، آنگاه x به دو گوی به شعاع ۱ با مراکز x و $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ تعلق دارد.

۳) اگر $x = (۰, \ldots, \underbrace{\pm ۱}_{i}, ۰, \ldots, ۰, \underbrace{\pm ۱}_{j}, ۰, \ldots, ۰)$، آنگاه x به دو گوی با مراکز

$$(۰, \ldots, ۰, \underbrace{\pm ۱}_{j}, ۰, \ldots, ۰) \qquad (۰, \ldots, ۰, \underbrace{\pm ۱}_{i}, ۰, \ldots, ۰)$$

متعلق است.

۴) اگر $x = (۰, \ldots, ۰, \underbrace{\pm ۲}_{i}, ۰, \ldots, ۰)$، آنگاه x به یک گوی به مرکز $(۰, \ldots, ۰, \underbrace{\pm ۱}_{i}, ۰, \ldots, ۰)$ متعلق است.

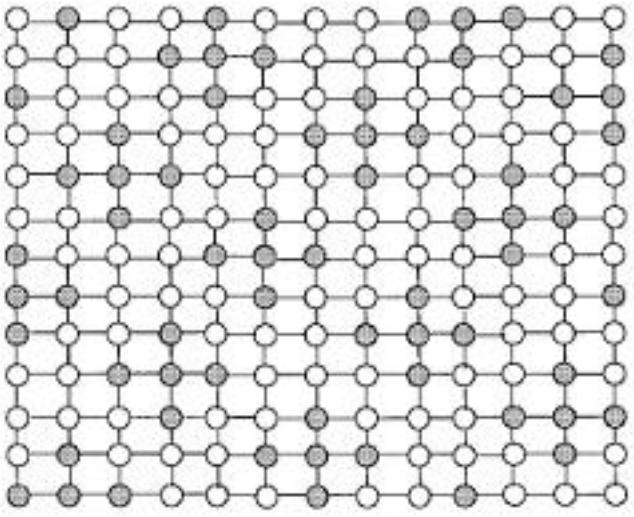
و این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۶.۳ : فرض کنید $n = ۲$ و $p = ۱۳s$ باشد. آنگاه

$$M_۱^{(p)}(H_۲) \leq \frac{۵}{۱۳}p^۲ \qquad (۱۳.۳)$$

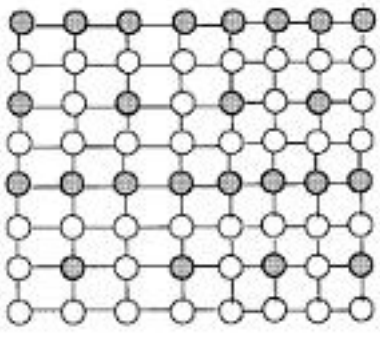
اثبات. $|B_t|$ یعنی تعداد رئوسی که از رأس v به فاصله حداکثر t می‌باشند. در یک چهارم از گوی B_t، t مسیر متفاوت به طول t از v به رئوس دیگر، $t-۱$ مسیر متفاوت از v به طول $t-۱$، ...، ۲ مسیر به طول ۲ و بالاخره یک مسیر به طول ۱ داریم، پس در کل گوی $\frac{n(n+۱}{۲} \times ۴ + ۱ = ۲n^۲ + ۲n + ۱$ رأس داریم. پس $|B_۱| = ۵$ و $|B_۲| = ۱۳$ و $K^{(p)}(۳,۲) = \frac{p^۲}{۱۳}$. □

شکل (۹.۳) ساختار حاصل از قضیه (۱۱.۳) را برای $n = ۲$ و $p = ۱۳$ نشان می‌دهد، در این‌حالت داریم $K^{(۱۳)}(۲,۲) = ۱۳$ و $M_۲^{(۱۳)}(۱) = ۶۵$. با این‌حال ساختار بالا برای $n = ۲$ بهینه نیست.



شکل (۹.۳): • کلمه‌کد

شکل (۱۰.۳) ساختار بهتری برای $n = ۲$ و $p = ۸s$ را نشان می‌دهد که در آن $M_۱^{(p)}(H_۲) = \frac{۳}{۸}p^۲$.



شکل (۱۰.۳):• کلمه‌کد

حال به مسأله ساختار کد وقتی گوی‌های به شعاع بزرگتر از یک به کار می‌بریم، می‌پردازیم. قضیه زیر یک تکنیک "$divide-and-conquer$" مفید برای تعیین $M_t^{(p)}(H_n)$ وقتی $t > ۱$ است را فراهم می‌کند(توجه کنید $M_t^{(۲)}(t)$ تعریف نمی‌شود.)

قضیه ۱۲.۳ تعداد کلمه‌کدهای موردنیاز برای شناسایی رئوس در یک مکعب p ـتایی n بعدی به صورت زیر بدست می آید

$$M_t^{(p)}(H_n) \leq M_s^{(p)}(H_a) \cdot M_{t-s}^{(p)}(H_{n-a})$$

که $۰ \leq t < n$، $۰ \leq s \leq t$، $۰ \leq s \leq a$، $۰ \leq t-s \leq n-a$ و $۱ \leq a \leq n-۱$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$، بردارهایی به طول n باشند،که $x_۱(y_۱)$ و $x_۲(y_۲)$ به ترتیب به طول a و $n-a$ هستند. فرض کنید $v = (v_۱, v_۲)$ برداری به طول n باشد چنانکه $v_۱(v_۲)$ به وسیله یک گوی به شعاع $s(t-s)$ و به مرکز خودش $x_۱(x_۲)$ را بپوشاند ولی $y_۱(y_۲)$ را نپوشاند، آنگاه $d(v_۱, x_۱) \leq s$ و $d(v_۲, x_۲) \leq t-s$ می‌باشد که $d(x,y)$ فاصله بین رئوس x و y در مکعب غیر دودوئی pـتایی است. این ایجاب می‌کند که $d(v,x) = d(v_۱, x_۱) + d(v_۲, x_۲) \leq t$ باشد. از اینرو v، x را با گوی به شعاع t می‌پوشاند. اما $d(v_۱, y_۱) > s$ و $d(v_۲, y_۲) > t-s$ است که ایجاب می‌کند $d(v,y) > t$ باشد. پس v، y را با گوی به شعاع t نمی‌پوشاند. بنابراین کد شناسایی $C(n,t)$ برای یک مکعب pـتایی n بعدی می‌تواند با استفاده از کدهای شناسایی برای ابعاد کوچکتر a و $n-a$ به صورت زیر ساخته شود:

$$C(n,t) = \{(x,y) | x \in C(a,s),\ y \in C(n-a, t-s)\}$$

و $M_t^{(p)}(H_n) \leq |C(n,t)|$. □

نتیجه ۷.۳ : به عنوان یک حالت خاص از قضیه (۱۲.۳) داریم

$$M_t^{(p)}(H_n) \leq p^a \cdot M_t^{(p)}(H_{n-a})$$

که در آن $n-a \geq t$.

اثبات. از قضیه (۱۲.۳) داریم

$$M_t^{(p)}(H_n) \leq M_\circ^{(p)}(H_a) \cdot M_t^{(p)}(H_{n-a}) = p^a \cdot M_t^{(p)}(H_{n-a})$$

(وقتی $t = \circ$، هر رأس در مکعب pـتایی a بعدی باید به عنوان یک کلمه‌کد انتخاب شود.) □

نتیجه ۸.۳ : برای هر $p \geq ۲$ و $t < n$ داریم

$$M_t^{(p)}(H_n) \leq M_{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}^{(p)}(\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor) \cdot M_{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}^{(p)}(\lceil \frac{t}{۲} \rceil)$$

نتیجه ۹.۳ : کران‌های بالای زیر بر می‌نیمم تعداد کلمه‌کدها در کدهای شناسایی بهینه برای مکعب‌های دودوئی و غیردودوئی موجود است.

۱) $M_t^{(p)}(H_{۲t}) \leq \circ/۴^t \cdot p^{۲t}$ برای $p = ۵s$.

۲) $M_t^{(p)}(H_{۲kt}) \leq \circ/۴^t \cdot p^{۲kt}$ برای هر $k > \circ$ و $p = ۵s$.

۳) $M_t^{(p)}(H_{(۲^s-۱)t}) \leq (\frac{p^{۲^s-۱}}{۲^s})^t$ به ازاء هر $s > \circ$ و $p > ۴$ که p زوج است.

۴) $M_t^{(۲)}(H_{۲t}) \leq \circ/۷۵^t \cdot ۲^{۲t}$.

۵) $M_t^{(۲)}(H_{۳t}) \leq \circ/۵^t \cdot ۲^{۳t}$.

۶) $M_t^{(۲)}(H_{۵t}) = (\frac{۵}{۱۶})^t \cdot ۲^{۵t}$.

۷) $M_t^{(۲)}(H_{۴t}) \leq \circ/۱۲۵^t \cdot ۲^{۴t}$

اثبات. برای اثبات قسمت ۱ از قضیه (۱۰.۳) استفاده می‌کنیم

$$M_t^{(p)}(H_{۲t}) \leq (M_۱^{(p)}(H_۲))^t = \circ/۴^t \cdot p^{۲t}$$

بنابراین تراکم کلمه‌کدها در یک مکعب pتایی $2t$ بعدی حداکثر $0/4^t$ است و با افزایش t کاهش می‌یابد.

قسمت ۲ مستقیماً از نتیجه(۷.۳) و قسمت ۱ نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت ۳ نتیجه زیر را به کار می‌بریم

$$M_t^{(p)}(H_{(2^s-1)t}) \leq M_1^{(p)}(H_{2^s-1})^t = (\frac{p^{2^s-1}}{2^s})^t$$

برای هر $p > 4$ و $s = 2$ داریم $M_t^{(p)}(H_{3t}) \leq 0/25^t \cdot p^{3t}$.

اثبات ۴ و ۵ مشابه است. □

حال r_∞، نسبت بین کران بالا به کران پایین روی $M_t^{(p)}(H_n)$ را وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند محاسبه می‌کنیم. اگر $t = 1$ و $n = 2^s$ باشد $r_\infty = 1$ می‌شود، که از (۱۱.۳) تبعیت می‌کند. حال حالت $t = 2$ را بررسی می‌کنیم. با به کاربردن (۶.۳) و نتیجه(۸.۳)(برای $n > 2$ و $p > 4$ و p زوج) بدست می‌آوریم:

$$\frac{2p^n}{V(2)+1} \leq M_2^{(p)}(H_n) \leq \left(M_1^p(H_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})\right)^2$$

و

$$V(2) = 1 + 2n + \binom{n}{2} \cdot 4 + \binom{n}{1} \cdot 2 = 1 + 2n + 2n^2$$

اگر $\frac{n}{2} = 2^s$، آنگاه $M_1^{(p)}(H_{\frac{n}{2}}) \leq \frac{p^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}$.بنابراین داریم

$$\frac{p^n}{1+2n+n^2} \leq M_2^{(p)}(H_n) \leq \frac{4p^n}{n^2}$$

که برای n بزرگ

$$\frac{p^n}{n^2} \precsim M_2^{(p)}(H_n) \leq \frac{4p^n}{n^2}$$

r_∞، نسبت کران بالا به کران پایین(وقتی که n به سمت ∞ میل می‌کند و $\frac{n}{۲} = ۲^s$) برابر ۴ می‌باشد. حال این آنالیز را برای $t > ۲$ بسط می‌دهیم. ابتدا تخمین زیر را برای مکعب‌های pـتایی n بعدی که p و t مقادیر ثابت بوده و n به سمت ∞ میل می‌کند به کار می‌بریم:

$$V(t) \sim \sum_{i=۰}^{t} \binom{n}{i} ۲^i \sim \frac{n^t ۲^t}{t!}$$

بنابراین برای $\frac{n}{t} = ۲^s$ و مقادیر ثابت p و t داریم

$$\frac{p^n t!}{n^t ۲^{t-۱}} \precsim M_t^{(p)}(H_n) \leq \frac{p^n t^t}{n^t} \qquad (۱۴.۳)$$

بنابراین $r_\infty = \frac{t^t ۲^{t-۱}}{t!}$. مثلاً برای $t = ۲$ مانند قبل داریم $r_\infty = ۴$، در صورتیکه برای $t = ۳$، $r_\infty = ۱۸$ می‌شود.

۳—۴ درخت‌ها

توپولوژی دیگری که در نظر می‌گیریم یک درخت pـتایی متوازن است. تعدادی از سیستم‌های محاسباتی سلسله مراتبی مانند کتاب‌های لغت و ماشین‌های جستجو را می‌توان به عنوان یک درخت مدل کرد، بنتلی و کانگ[۱۱] [۱۹] و شین [۱۲] [۳۰] را ببینید. تعداد زیادی از الگوریتم‌های موازی را نیز می‌توتن به یک درخت pتایی نگاشت و ساختار یک چندپردازشگر کلی را معمولاً می‌توان با یک ساختار درختی مدل کرد(مید و کانوی [۱۳] [۲۸] را ببینید). کاربرد دیگری از ساختار درختی در شبکه داده‌های

[۱۱] J.Bentley and H.T.kung

[۱۲] K.G.shin

[۱۳] C.A.Mead and L.A.Conway

ماشین تفکر $CM-5$ است(هیلیس و تاکر[۱۴][۲۴] و لسرسون[۱۵] [۲۵] را ببینید).

رئوس را در یک درخت lـسطحی pـتایی با $t=1$ به وسیله انتخاب کلمه‌کدها در سطوح l و $l-2$ و $l-4$ و ... که ریشه در سطح یک و برگ‌ها در سطح l قرار دارند، به طور یکتا می‌توانیم شناسایی کنیم.

کران روی تعداد کلمه‌کدها، $M_1(T)$، به صورت زیر بدست می آید:

$$M_1(T) \leq \frac{p^{l+1}}{p^2-1}(1-p^{-2(\lfloor 0/5(l-1)\rfloor+1)}) \qquad (۱۵.۳)$$

قضیه ۱۳.۳ برای یک درخت pـتایی با l سطح($l \geq 3$) کران‌هایی به صورت زیر روی می‌نیمم تعداد کلمه‌کدها در کد شناسایی داریم:

$$p^{l-3}(p^2+1) \leq M_1(T) \leq \begin{cases} \frac{p^{l+1}-1}{p^2-1} & l \text{ فرد} \\ \frac{p^{l+1}-p}{p^2-1} & l \text{ زوج} \end{cases}$$

اثبات. کران بالا از رابطه(۱۵.۳) تبعیت می‌کند. اگر $l=2k+1$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} \frac{p^{2k+2}}{p^2-1}(1-p^{-2(\lfloor \frac{2k}{2}\rfloor+1)}) &= \frac{p^{2k+2}}{p^2-1}(1-p^{-2(k+1)}) \\ &= \frac{p^{2k+2}-1}{p^2-1} = \frac{p^{l+1}-1}{p^2-1}. \end{aligned}$$

و اگر $l=2k$ باشد

$$\begin{aligned} \frac{p^{2k+2}}{p^2-1}(1-p^{-2(\lfloor \frac{2k-1}{2}\rfloor+1)}) &= \frac{p^{2k+1}}{p^2-1}(1-p^{-2k}) \\ &= \frac{p^{2k+1}-p}{p^2-1} = \frac{p^{l+1}-p}{p^2-1}. \end{aligned}$$

کران پایین $M_1(T)$ با مشاهده درخت l سطحی pـتایی به صورتی که شامل p^{l-3} زیر درخت ۳ـسطحی که هر یک $1+p+p^2$ رأس و p^2 برگ دارد، بدست می آید. حال نشان می‌دهیم

[۱۴] W.D.Hillis and L.W.Tucker

[۱۵] C.E.Leiserson

حداقل $p^۲ + ۱$ رأس از هر یک از زیر درخت‌ها باید به عنوان کلمه‌کد انتخاب شود. ابتدا توجه داریم که حداقل $p(p - ۱)$ برگ باید کلمه‌کد باشد(تا رئوس برگ غیرکلمه‌کد را بپوشاند) و برای تشخیص بین رئوس دو سطح، ریشه زیردرخت باید انتخاب شود. یک بحث مشابه می‌تواند برای حالاتی که p رأس هم‌ردیف به عنوان کلمه‌کد انتخاب می‌شود، به کار رود. این یک می‌نیمم $p^۲ + ۱$ رأسی در هر زیر درخت بدست می‌دهد، و ازاینرو $M_۱(T) \geq p^{l-۳}(p^۲ + ۱)$. □

نتیجه ۱۰.۳ : برای درخت‌های p-تایی با $l = ۳$ سطح، $M_۱(T) = p^۲ + ۱$ و برای درخت p-تایی با $l = ۴$ سطح، $M_۱(T) = p(p^۲ + ۱)$.

اگر p به سمت ∞ میل کند، ساختار کد قضیه (۱۳.۳)، به طور مجانبی بهینه است، چون برای p بزرگ $M_۱(T) \sim p^{l-۱}$، که بر کران پایین منطبق است. در درخت دودوئی($p = ۲$) برای l بزرگ داریم:

$$۵ \cdot ۲^{l-۳} \leq M_۱(T) \leq (\frac{۱۶}{۳}) \cdot ۲^{l-۳}$$

از اینرو انتخاب کلمه‌کد بسیار به بهینه نزدیک است. جدول‌های (۳.۳) و (۴.۳) تعداد کلمه‌کدها برای برخی درخت‌های در مبنای ۲ و ۳ را نشان می‌دهد.

حال ثابت می‌کنیم در یک درخت اگر $t > ۱$ باشد، رئوس قابل شناسایی نیستند.

قضیه ۱۴.۳ شناسایی منحصر به فرد رئوس یک درخت p-تایی l سطحی برای $t > ۱$ ممکن نیست.

اثبات. زیر درخت شامل رئوس برگ هم‌ردیف $V_l = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\}$ و جد آن $v_{p+۱}$ را در نظر بگیرید. برای $t > ۱$، v_i و v_j $(۱ \leq i, j \leq p)$نمی‌توانند با هیچ انتخابی از کلمه‌کدها تشخیص داده شوند. چون رئوس در V_l به فاصله ۲ از هم هستند و هر رأس $v_j \notin V_l$،

در فاصله مشابه از همه رئوس در V_l است. بنابراین اگر $t > ۱$ باشد، رئوس در V_l غیر قابل تشخیصند. □

l	N	کران پایین $\hat{m}(۱)$ روی $M_۱(T)$	کران بالا $\hat{M}(۱)$ روی $M_۱(T)$	$\frac{\hat{M}(۱)}{N}$	$\frac{\hat{M}(۱)}{\hat{m}(۱)}$
۳	۷	۵	۵	۰/۷۱۴	۱
۴	۱۵	۱۰	۱۰	۰/۶۶۶	۱
۵	۳۱	۲۰	۲۱	۰/۶۶۷	۱/۰۵
۸	۲۵۵	۱۶۰	۱۷۰	۰/۶۶۶	۱/۰۶۲۵
۱۰	۱۰۲۳	۶۴۰	۶۸۲	۰/۶۶۶	۱/۰۶۵۶
۱۱	۲۰۴۷	۱۲۸۰	۱۳۶۵	۰/۶۶۶	۱/۰۶۶۴
۱۲	۴۰۹۵	۲۵۶۰	۲۷۳۰	۰/۶۶۶	۱/۰۶۶۴
۱۶	۶۵۵۳۵	۴۰۹۶۰	۴۳۹۶۰	۰/۶۶۶	۱/۰۶۶۶

جدول ۳.۳:تعداد کلمه‌کدها برای درخت در مبنای دو متوازن($p = ۲$)

l	N	کران پایین $\hat{m}(۱)$ روی $M_۱(T)$	کران بالا $\hat{M}(۱)$ روی $M_۱(T)$	$\frac{\hat{M}(۱)}{N}$	$\frac{\hat{M}(۱)}{\hat{m}(۱)}$
۳	۱۳	۱۰	۱۰	۰/۷۶۹	۱
۴	۴۰	۳۰	۳۰	۰/۷۵	۱
۵	۱۲۱	۹۰	۹۱	۰/۷۵۲	۱/۰۱۱۱
۸	۳۲۸۰	۲۴۳۰	۲۴۶۰	۰/۷۵	۱/۰۱۲۳
۱۰	۲۹۵۲۴	۲۱۸۷۰	۲۲۱۴۳	۰/۷۵	۱/۰۱۲۵
۱۱	۸۸۵۷۳	۶۵۶۱۰	۶۶۴۳۰	۰/۷۵	۱/۰۱۲۵
۱۲	۲۶۵۷۲۰	۱۹۶۸۳۰	۱۹۹۲۹۰	۰/۷۵	۱/۰۱۲۵
۱۶	۲۱۵۲۳۳۶۰	۱۵۹۴۲۳۰	۱۶۱۴۲۵۲۰۰	۰/۷۵	۱/۰۱۲۵

جدول ۴.۳: تعداد کلمه‌کدها برای درخت در مبنای سه متوازن($p = ۳$)

۳–۵ مشبکه‌ها

در نهایت مسأله ساختار کد برای مشبکه‌های شش گوشه‌ای و سه گوشه‌ای را نشان می‌دهیم. توپولوژی شکل‌دهنده آن‌ها اخیراً مورد توجه قرار گرفته است(به ساویر[۱۶] و همکاران[۲۹] مراجعه کنید). هر

[۱۶] J.Savir

مشبکه شش گوشه‌ای (سه‌گوشه‌ای)، سه (شش) همسایه دارد. شکل(۱۱.۳) این توپولوژی‌ها را با کلمه‌کدها(رئوس سایه‌دار) برای شناسایی رئوس با $t = ۱$ نشان می‌دهد. برای مشبکه شش گوشه‌ای تعداد کلمه‌کدها $M_۱(G) = \frac{N}{۲}$ است که N مجموع تعداد رئوس در گراف می‌باشد. هر کلمه‌کد تنها به وسیله خودش پوشیده می‌شود، در حالیکه هر رأس غیرکلمه‌کد به وسیله یک زیر مجموعه کلمه‌کد سه‌عضوی پوشیده می‌شود. کران پایین روی $M_۱(G)$ برای این توپولوژی از (۶.۳) بدست می آید و برابر $\frac{۲N}{۵}$ است.

ساختار کد برای مشبکه های سه گوشه‌ای کامل است، چون تعداد کلمه‌کدها $M_۱(G) = \frac{N}{۴}$ است که متناظر با کران پایین (۶.۳) است. در این حالت هر کلمه‌کد تنها به وسیله خودش پوشیده می‌شود در حالیکه هر رأس غیرکلمه‌کد به وسیله دقیقاً دو کلمه‌کد پوشیده می‌شود. بحث بالا در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۱۵.۳ برای یک مشبکه شش گوشه ای با N رأس(N به سمت ∞ میل می کند)، تعداد کلمه‌کدهای $M_۱(G)$ توسط رابطه

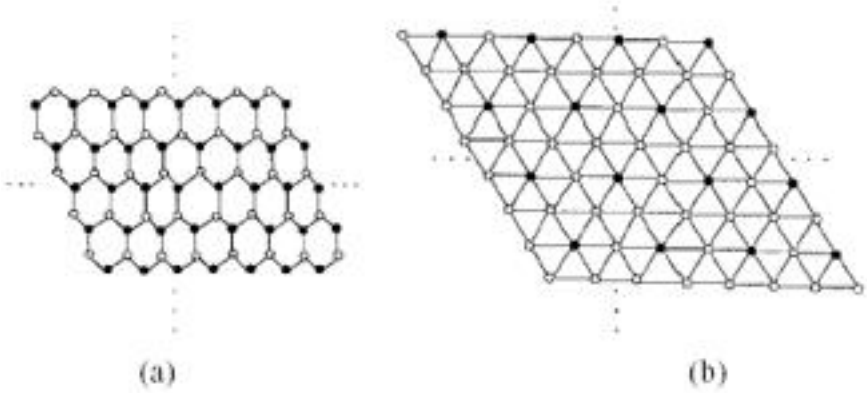
$$۰/۴N \precsim M_۱(G) \precsim ۰/۵N$$

و برای یک مشبکه سه گوشه‌ای با N رأس با رابطه

$$M_۱(G) \sim ۰/۲۵N$$

بدست می آید.

شکل (۱۱.۳) کلمه‌کدها با $t = ۱$ برای (a) مشبکه شش‌گوشه‌ای و (b) مشبکه سه‌گوشه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۳

فصل ۴

یافتن گراف بهینه برای تعداد کلمه‌کد مشخص

۴–۱ شناسایی مجموعه‌های رأسی

پیشتر فرض کرده‌ایم که تنها یک رأس در گراف G به طور یکتا شناسایی شود. در این قسمت نشان می‌دهیم که انتخاب کلمه‌کدها برای رئوس تنها، یک شناسایی تقریباً کامل مجموعه‌های رئوس از اندازه بالاتر را میسر می‌سازد[۱]. فرض کنید $C(l)$ بخشی از مجموعه‌های رئوس از اندازه دقیقاً l که به طور یکتا قابل شناسایی است، باشد.

قضیه ۱.۴ $C(l)$ که بخشی از مجموعه‌های رئوس از اندازه دقیقاً l است، به طور یکتا با $t = ۱$ به وسیله یک کد شناسایی رئوس منفرد قابل شناسایی است، و با

$$C(l) \geq \prod_{i=۰}^{l-۱} \frac{N - iV(۴)}{N - i}$$

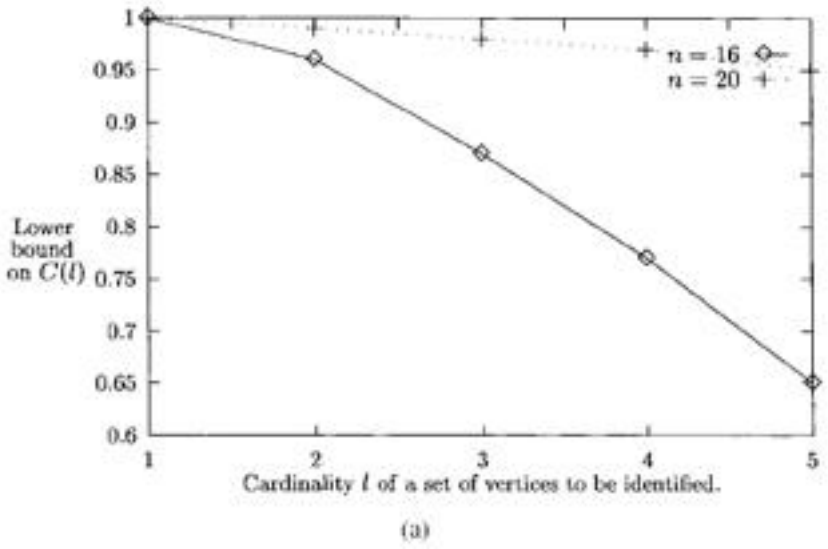
از پایین کراندار است، که در آن $V(۴)$ تعداد رئوس به فاصله ۴ یا کمتر از هر رأس موجود در گراف و N تعداد گره‌ها در گراف G است.

اثبات. اگر فاصله بین هر دو رأس در یک مجموعه حداقل ۵ باشد، این مجموعه از رئوس به طور یکتا قابل شناسایی است. توجه کنید که این شرط کافی است ولی لازم نیست. بنابراین بخشی از مجموعه‌های قابل شناسایی رئوس از پایین کراندار است با

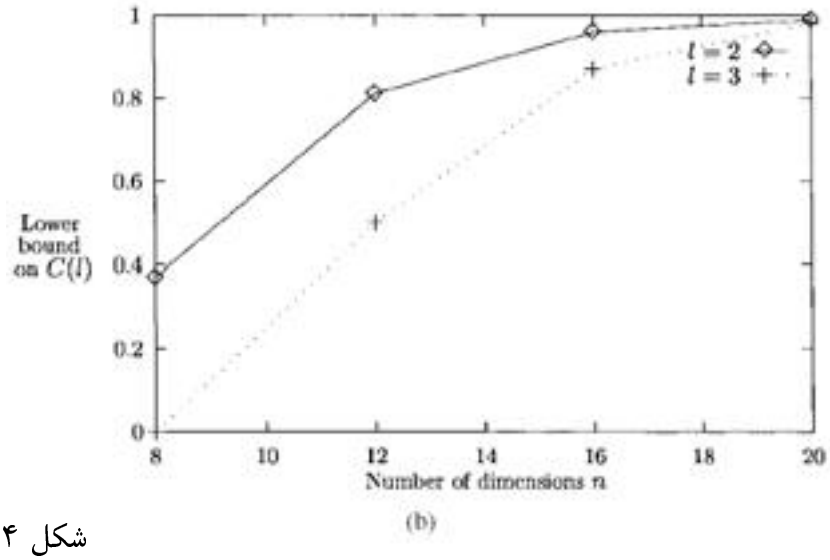
$$C(l) \geq \frac{N(N-V(۴))(N-۲V(۴))\cdots(N-(l-۱)V(۴))}{\binom{N}{l}\, l!} = \prod_{i=۰}^{l-۱} \frac{N-iV(۴)}{N-i}$$

□

مثلاً، برای یک مکعب p-تایی دو بعدی ($p \geq ۹$)، $V(۴) = ۴۰$ می‌باشد و برای یک مکعب دودوئی n بعدی، $V(۴) = \sum_{i=۱}^{۴} \binom{n}{i}$ می‌باشد. بالای ۹٦ درصد از مجموعه‌های دو رأسی در یک مکعب دودوئی ۱٦ بعدی قابل شناسایی هستند و این از قضیه پیروی می‌کند. شکل (۱.۴) کران پایین در بخشی از مجموعه‌های رئوس از اندازه بالاتر را در مکعب‌های دودوئی که به طور یکتا قابل شناسایی هستند، نشان می‌دهد.



(a)



شکل ۱.۴

نتیجه ۱.۴ : وقتی که تعداد رئوس در یک گراف با درجه ثابت به بینهایت میل کند، اگر $l = o(\sqrt{N})$، آنگاه بخشی از مجموعه‌های رئوس از اندازه دقیقاً l که به طور یکتا قابل شناسایی هستند به یک میل میکند.

اثبات. فرض کنید $\prod = \prod_{i=0}^{l-1} (\frac{N - iV(4)}{N - i})$، براحتی می‌بینیم که برای $i \precsim \sqrt{N}$

$$\ln \frac{N - iV(4)}{N - i} = \ln(1 - \frac{i(V(4) - 1}{N - i}) \sim -\frac{i(V(4) - 1)}{N - i}$$

و $\prod \sim \sum_{i=1}^{l-1} -\frac{i(V(4) - 1}{N - i}$.

حال داریم

$$\left| \sum_{i=1}^{l-1} \frac{i(V(4) - 1)}{N - i} \right| \leq \frac{(l - 1)(V(4) - 1)}{N - l + 1}(l - 1)$$

و اگر $\frac{l^۲}{N}$، به سمت ۰ میل کند چون $V(۴)$ ثابت است، خواهیم داشت

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(l-۱)(V(۴)-۱)}{N-l+۱}(l-۱) = ۰$$

□

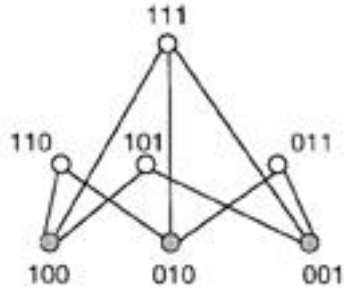
۴–۲ گراف‌های بهینه

در این‌جا یک روش برای ساختن گراف‌های بهینه که به کمترین تعداد کلمه‌کد برای شناسایی مجموعه‌های رئوس نیاز دارد، ارائه می‌دهیم. ما علاقه‌مند به ایجاد یک گراف با N رأس که تعداد کلمه‌کدهای آن برای شناسایی رئوس تنها، تا حد امکان نزدیک به $\lceil \log_۲(N+۱) \rceil$ و برای شناسایی مجموعه‌هایی تا l رأس، نزدیک به $\lceil \log_۲ \sum_{i=۰}^{l} \binom{N}{i} \rceil$ باشد، هستیم. ابتدا شناسایی رئوس منفرد ($l=۱$) را در نظر می‌گیریم.

یک گراف با $N = ۲^n - ۱$ رأس که رأس‌ها با بردارهایی به طول $n = \log_۲(N+۱)$ برچسب‌گذاری شده‌اند، را در نظر می‌گیریم:

$$(۱,۰,۰,\cdots,۰),\ (۰,۱,۰,\cdots,۰),\ \cdots,\ (۱,۱,\cdots,۱)$$

همه بردارهای به وزن یک را به عنوان کلمه‌کد انتخاب می‌کنیم. رئوس غیرکلمه‌کد $B = (b_۱ b_۲ \cdots b_n)$ که $b_j \in \{۰,۱\}$ را در نظر می‌گیریم. B به کلمه‌کد $(\underbrace{۰,\cdots,۰}_{i-۱},۱,۰,\cdots,۰)$ متصل است اگروتنهااگر $b_i = ۱$. (یک مثال از این توپولوژی برای $N=۷$ و $n=۳$ در شکل (۲.۴) آمده است). بنابراین ساختاری بدست می‌آید که هر رأس را به وسیله یک مجموعه یکتا از کلمه‌کدها می‌پوشاند، و بنابراین شناسایی رئوس منفرد با استفاده از کمترین کلمه‌کد حاصل می‌شود.



شکل (۲.۴): یک گراف بهینه برای شناسایی یکتای رئوس تنها

حال این روش ساختن را به یک روش کلی برای به وجود آوردن گراف‌های بهینه(و کدها) برای شناسایی مجموعه‌های رئوس تعمیم می‌دهیم.

ماتریس A با سطرهای متناظر با کلمه‌کدها و ستون‌های متناظر با رئوس گراف را در نظر می‌گیریم. اگر کلمه‌کد i رأس j را بپوشاند، درایه a_{ij} در این ماتریس یک است. یک گراف بهینه به وسیله ایجاد A با می‌نیمم تعداد سطر ساخته می‌شود. برای شناسایی رئوس منفرد، A می‌تواند هر ماتریسی با ستون‌های غیرصفر متفاوت باشد. اگر OR منطقی هر k($k \leq l$)، ستون از A یک بردار غیرصفر یکتا نتیجه دهد، آن‌گاه مجموعه‌های رئوس از اندازه حداکثر l قابل شناسایی هستند. $\sum_{i=0}^{l} \binom{N}{i}$ مجموعه از اندازه حداکثر l وجود دارد. بنابراین یک کران پایین روی کمترین تعداد سطرهای A، عبارت است از $r(N,l)$ که به صورت زیر است

$$r(N,l) \geq \left\lceil \log_2 \sum_{i=0}^{l} \binom{N}{i} \right\rceil$$

پیدا کردن مقدار دقیق $r(N,l)$ مشکل است. با اینحال، ساختار نزدیک به بهینه ماتریس A(و در نتیجه گراف) برای مجموعه‌های رئوس می‌تواند با به کاربردن کدهای افزوده به طول N(کاتز و سینگلتون [۳۶][1]، بخش (۷.۶)) و تکنیک‌هایی برای تحلیل ناسازگاری در کانال‌های چند کاربره با N کاربر(ماسی [۲۷][2])، بدست آید. جدول (۱.۴) تعداد کلمه‌کدها در کدهای بهینه برای مجموعه‌های رئوس با اندازه حداکثر دو ($l = ۲$) و شکل (۳.۴) ماتریس A را برای گرافی با ۱۶ رأس و $l = ۲$ نشان می‌دهد.

N	۱۶	۲۵	۴۹	۶۴	۱۲۵	۳۴۳	۵۱۲	۲۴۰۱
$r(N,۲)$	۱۲	۱۵	۲۱	۲۴	۲۵	۳۵	۴۰	۴۹

جدول (۱.۴): تعداد کلمه‌کدها برای شناسایی مجموعه‌های رئوس با اندازه حداکثر دو

[1] W.H.Kautz, R.R.Singleton

[2] J.L.Massey

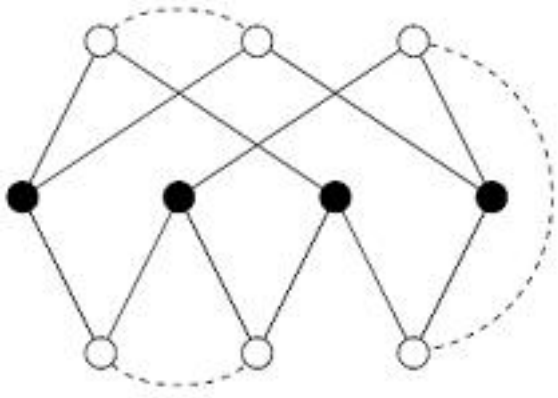
شکل زیر، ماتریس A متناظر با یک کد بهینه برای یک گراف با ۱۶ رأس، $l = ۲$، و ۱۲ کلمه‌کد را نشان می‌دهد.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

شکل (۳.۴)

۴–۳ گراف‌های بهینه بایک کران پایین مشخص

کران پایین قضیه(۱.۳) دقیق است. گراف‌هایی که به این کران می‌رسند را می‌توان به راحتی ساخت. برای هر Δ و k داده شده، می‌توان یک گراف با $n = k.\frac{\Delta + ۲}{۲}$ رأس که دارای یک کد شناسایی از اندازه k است، ساخت. برای ساختن چنین گرافی، مجموعه مستقل C با k رأس به عنوان کدشناسایی و $k.\frac{\Delta}{۲}$ رأس دیگر درنظر می‌گیریم. آن‌گاه $V\backslash C$ را به آن رئوسی از C وصل می‌کنیم که هیچ دو رأسی همسایه‌های مشابه در C نداشته باشد، همه رئوس C کمتر مساوی Δ همسایه و همه رئوس $V\backslash C$ حداقل دو همسایه در C داشته باشد. سرانجام، یال‌های بین رئوسی که کد نیستند را اضافه می‌کنیم. یک مثال از چنین گراف‌هایی برای $k = ۴$ و $\Delta = ۳$ در شکل(۴.۴) آمده است. کلمه‌کدها سیاهرنگ هستند و یال‌های نقطه‌چین یال‌های بهینه بین رئوسی که کد نیستند، می‌باشد.



شکل(۴.۴): گرافی که با کران پایین قضیه (۱.۳) بدست می‌آید.

توجه کنید که کران پایین کلی قضیه(۸.۲) روی k $(k \geq \lceil \log_{۲}(n+۱) \rceil)$ همچنان برقرار است، ازینرو روابط زیر باید برای این گراف‌ها برقرار باشد:

$$k \cdot \frac{\Delta + ۲}{۲} \leq ۲^{k} - ۱,$$

اگروفقطاگر

$$\Delta \leq \frac{۲^{k+۱} - ۲}{K} - ۲,$$

یا

$$\Delta \leq \frac{۲n}{\lceil \log_{۲}(n+۱) \rceil} - ۲.$$

حال، حالت گراف‌هایی که دقیقاً این کران پایین را می‌پذیرند در نظر می‌گیریم، یعنی گراف‌هایی که یک کد شناسایی از اندازه دقیقاً $k = \frac{۲n}{\Delta + ۲}$ (بدون حداکثر) دارند. می‌توانیم برای مشخص‌کردن ساختار چنین گراف‌هایی فرض کنیم که G دارای n رأس، ماکزیمم درجه Δ و یک کد شناسایی از اندازه

$k = \frac{۲n}{\Delta + ۲}$ است.

تقسیم $V(G)$ نشان داده شده در شکل(۱.۳) را در نظر بگیرید و رابطه(۳.۳) از اثبات قضیه(۱.۳) را به یاد آورید. داشتیم:

$$۲n + \frac{|C_۲|}{۲} \leq k \cdot (\Delta + ۲),$$

$$\frac{۲n}{\Delta + ۲} + \frac{|C_۲|}{۲(\Delta + ۲)} \leq k = \frac{۲n}{\Delta + ۲},$$

پس اگر نامساوی برقرار باشد، به‌وضوح $|C_۲| = ۰$. این ایجاب می‌کند که $|C_۱| = k$، پس $|N_۱| = ۰$ چون $|C_۱| + |N_۱| = k$. پس گرافی که این کران پایین را می‌پذیرد یک مجموعه مستقل به عنوان کد دارد و هر رأس غیرکد به حداقل دو رأس کد متصل است. توجه کنید که $k = \frac{۲n}{\Delta + ۲}$ و $k \cdot \Delta = ۲ \cdot (n - k)$، همه رئوس غیرکد به دقیقاً دو رأس کد متصل هستند، و همه رئوسی که کد هستند Δ همسایه دارند. فرض کنید Δ یک عدد صحیح باشد. برای ساختن یک گراف که دقیقاً دارای این کران پایین باشد، می‌توانیم روش ساختن زیر را به کار ببریم:

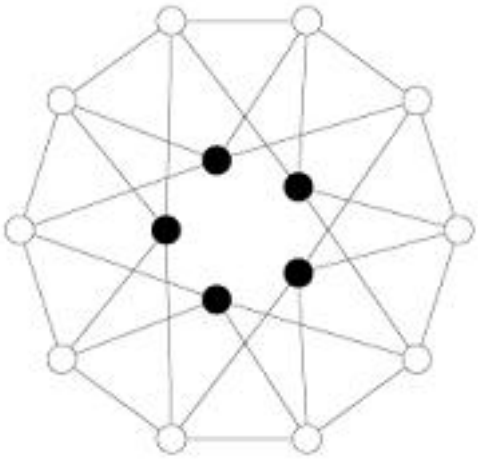
۱) گراف Δ-منتظم و ساده D را با k رأس درنظر می‌گیریم، این رئوس کد خواهند بود.

۲) روی هر یال از D یک رأس اضافه قرار می‌دهیم: هر یک از رئوس جدید به دو رأس متفاوت از گراف منتظم D متصل است.

۳) یال‌های دلخواه می‌تواند مجموعه بین رئوس غیرکد باشد، این عمل هیچ تأثیری روی کد ندارد.

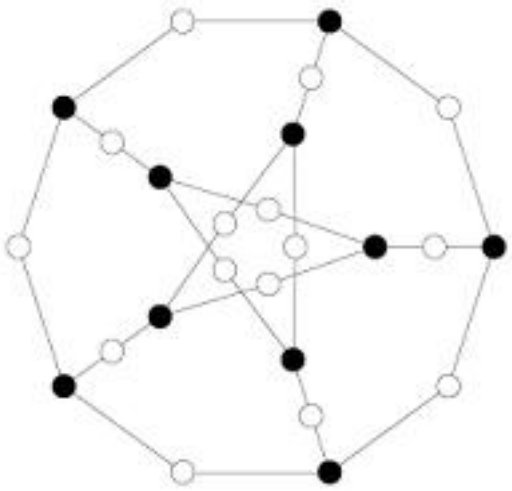
واضح است که این ساختار گرافی را بدست می‌دهد که خواص وصف شده در بحث قبلی را داراست. توجه کنید اگر کسی بخواهد گراف ساخته شده Δ-منتظم باشد، باید یک گراف $(\Delta - ۲)$-منتظم H با $(n - k)$ رأس موجود باشد و رئوس غیرکد باید در آخرین مرحله ساختار در H لحاظ شده باشد. چنین کاری لزوماً ممکن نیست: برای مثال، اگر گراف اصلی D دارای تعداد فرد n_e یال باشد، H باید دارای

n_e رأس باشد، که این غیرممکن است، چون هیچ گراف منتظمی با تعداد فرد رأس وجود ندارد. بنابراین در این حالت گراف ساخته شده نمی‌تواند منتظم باشد. یک نمونه از گراف بهینه ۴ـمنتظم ساخته شده با استفاده از گراف $D = K_5$ برای مرحله اول ساختن و دور $H = C_{10}$ در مرحله آخر را در شکل (۵.۴) ببینید. یک نمونه از گراف بهینه با ماکزیمم درجه ۳ که نمی‌تواند منتظم باشد، ساخته شده با استفاده از گراف پترسن P_{10} دارای ۱۰ رأس و ۱۵ یال به عنوان گراف D و بدون اضافه کردن یال بین رئوس غیرکد در شکل (۶.۴) آمده است



شکل۵.۴: نمونه‌ای از یک گراف بهینه ۴− منتظم

به طور معکوس، همه گراف‌هایی که اکیداً به این کران پایین می‌رسند را می‌توان با این روش ساخت. در واقع، چنین گرافی، G، و کد شناسایی بهینه آن، C، را درنظر می‌گیریم. همه یال‌های بین رئوس غیرکد به دقیقاً دو رأس کد متصل است و هر رأس کد دقیقاً Δ همسایه دارد. برای هر رأس غیرکد v، یک یال بین دو همسایه‌اش در C ایجاد کرده و v را حذف می‌کنیم، گراف بدست آمده یک گراف Δـمنتظم با k رأس است. بنابراین نحوه ساخت گفته شده را می‌توان برای بدست‌آوردن G به‌کار برد. پس همه چنین گراف‌هایی می‌توانند با کاربردن این روش بدست آیند.



شکل ٦.۴: نمونه‌ای از یک گراف بهینه با ماکزیمم درجه ۳

فصل ۵

گراف تصادفی

در ریاضیات، گراف تصادفی یک گراف است که به وسیله برخی فرایندهای تصادفی ایجاد می‌شود. تئوری گراف‌های تصادفی بر اشتراکات بین تئوری گراف و تئوری احتمال واقع است و خواص انواع گراف‌های تصادفی را بررسی می‌کند.

- فرض کنید E مجموع تعداد یال‌های ممکن باشد دراین‌صورت $E = \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$،
- $T(n,p)$: مجموعه گراف‌های ساخته شده بوسیله کشیدن یال‌ها با احتمال p، مستقل از دیگری است(احتمال وجود یال p و احتمال عدم وجود یال $p - ۱$ می‌باشد).
- $G(n,p)$ یک تحقیق تصادفی از $T(n,p)$ را نشان می‌دهد.
- $G(n,m)$: مجموعه همه گراف‌ها با n رأس و دقیقاً m یال است.
- $G(n,m)$ یک درک تصادفی از $T(n,m)$ را نشان می‌دهد.
- اگر $m = PE$ باشد، این دو گراف تقریباً با هم قابل تعویض هستند.
- می‌توانیم یک درک از $G(n,p)$ به طریق زیر بسازیم:

i) با n رأس مجزا شروع می‌کنیم.
ii) در هر مرحله زمان مجزا، یک یال که به صورت تصادفی از مجموعه یال‌های غایب انتخاب شده، اضافه می‌کنیم.
iii) در زمان t(یعنی زمان اضافه کردن t یال)، یک درک از $G(n,p)$ ساخته‌ایم که $p = \frac{t}{E}$.

- این یک فرایند مارکوف است(گراف در زمان $t+1$ را از گراف در زمان t می‌سازد).

۵–۱ تابع آستانه‌ای

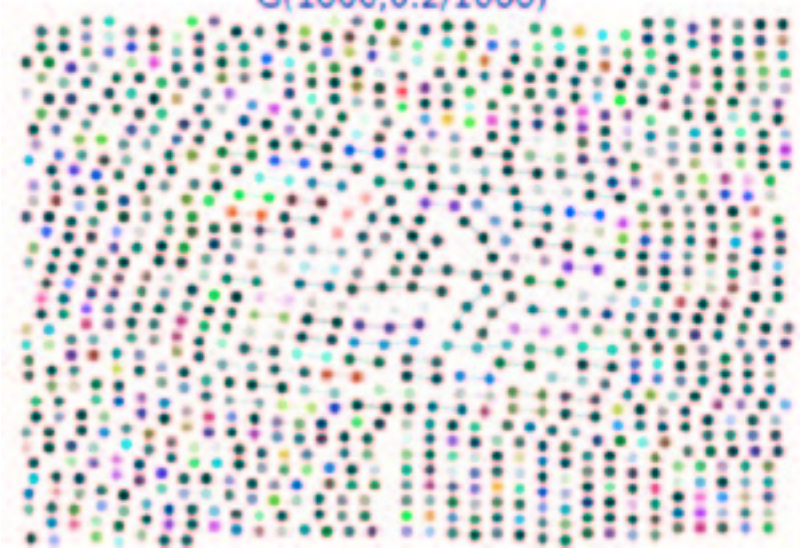
یک خاصیت یکنواخت، یک خاصیت گرافی است که با اضافه شدن یال‌ها حفظ می‌شود. یک تابع آستانه‌ای نسبت به خاصیت Q، تابعی مانند $t(n)$ است به طوریکه:

- $\frac{p(n)}{t(n)} \to 0$ ایجاب کند که هیچ گراف $T(n,p)$ در خاصیت Q صدق نکند.
- $\frac{p(n)}{t(n)} \to \infty$ نیز ایجاب کند که هر گراف $T(n,p)$ در خاصیت Q صدق کند.

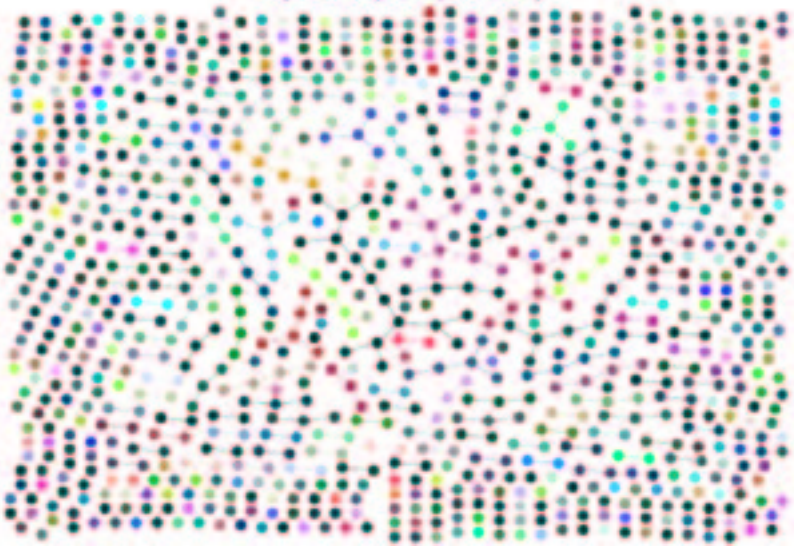
۵–۱–۱ تابع آستانه‌ای برای درخت‌ها و دورها

- درخت‌ها از مرتبه k $\quad t(n) = n^{-\frac{k}{k-1}}$
- دورها از مرتبه k $\quad t(n) = n^{-1}$
- گراف‌های کامل k_k $\quad t(n) = n^{-\frac{2}{(k-1)}}$

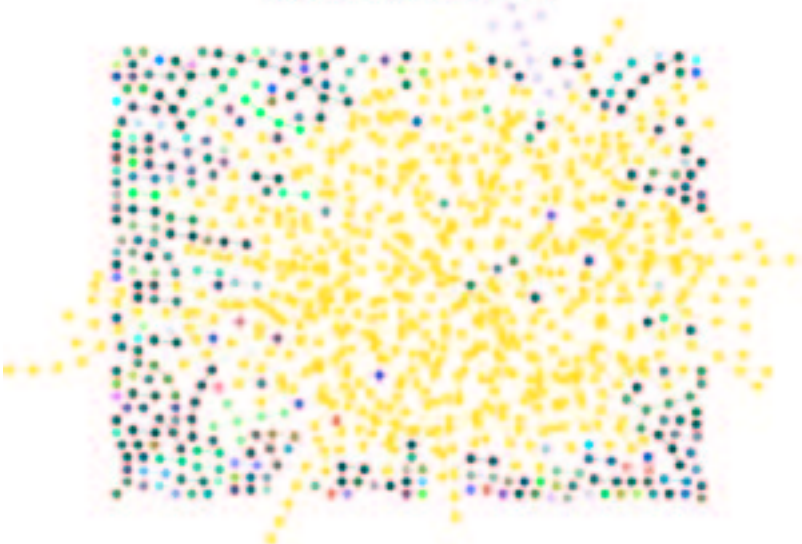
G(1000,0.2/1000)

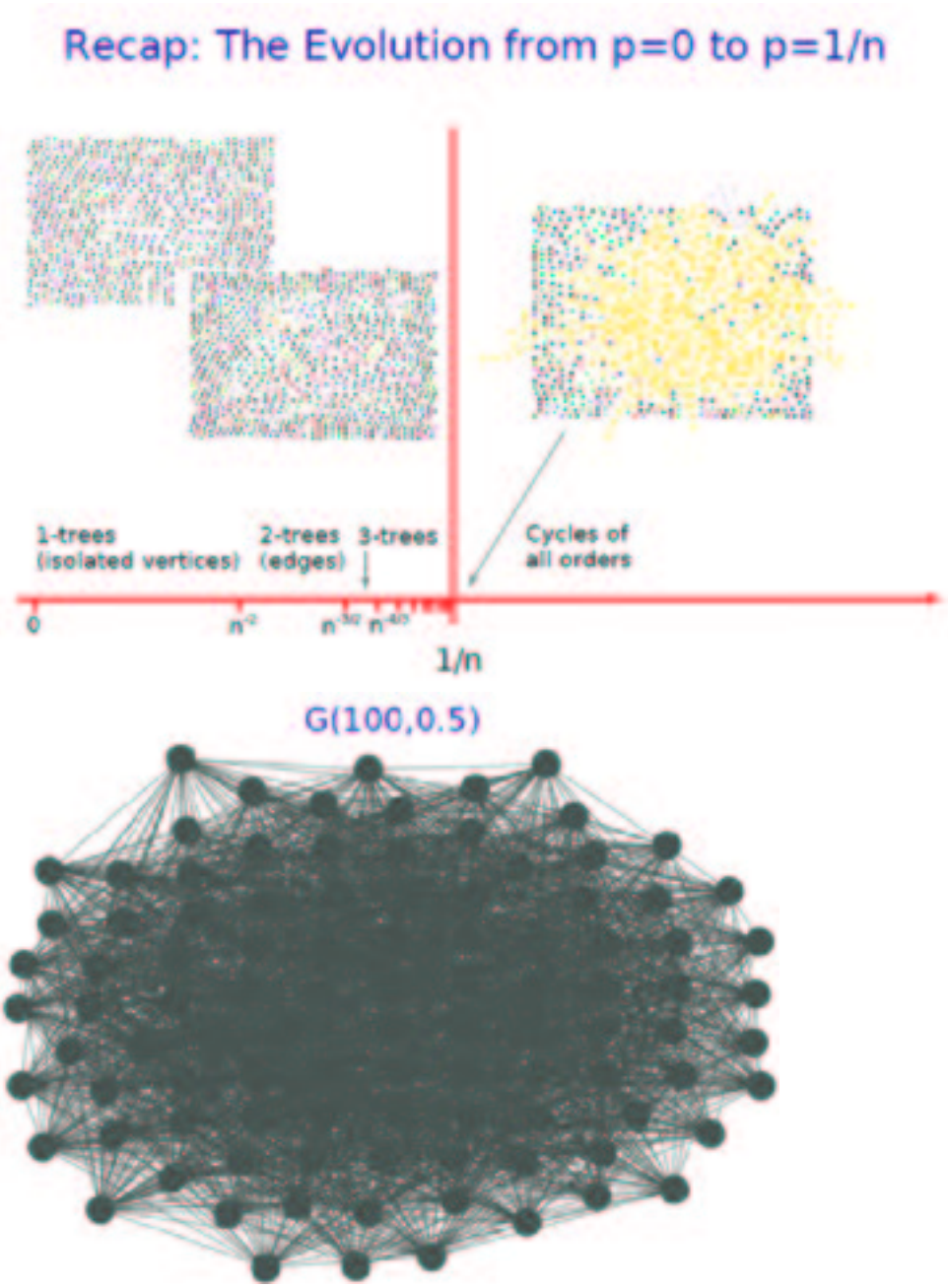


G(1000,0.5/1000)



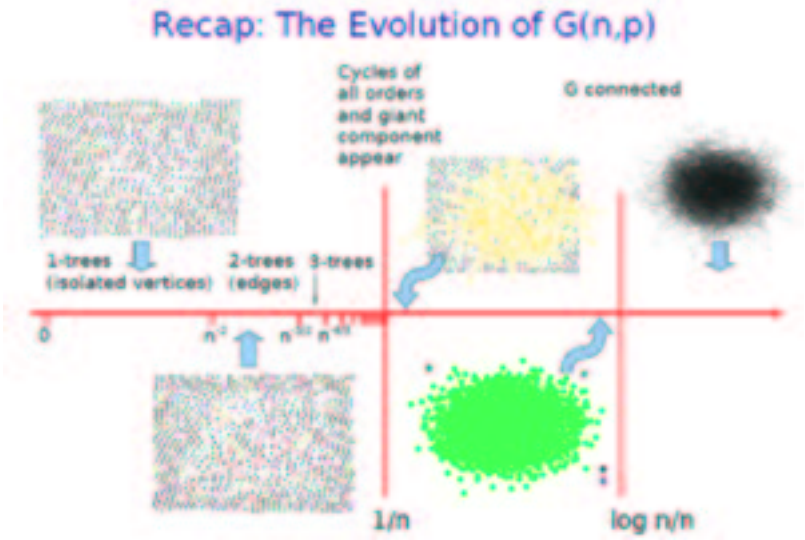
G(1000,1.5/1000)

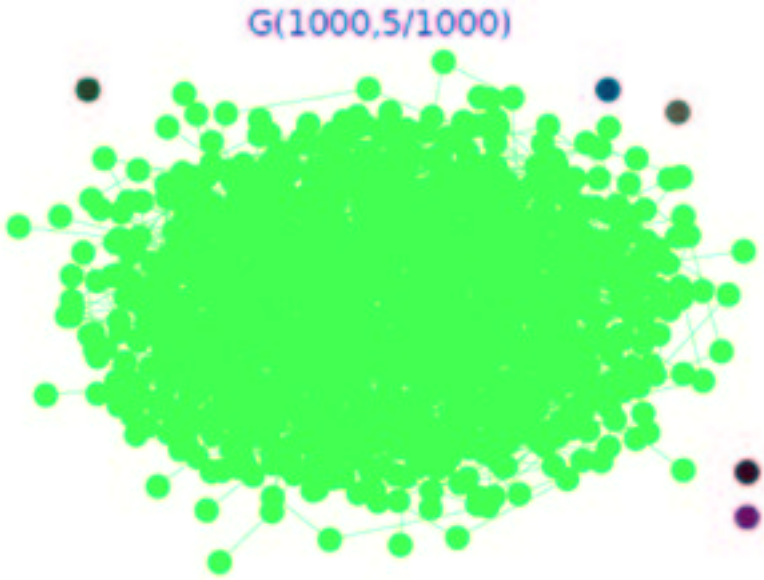


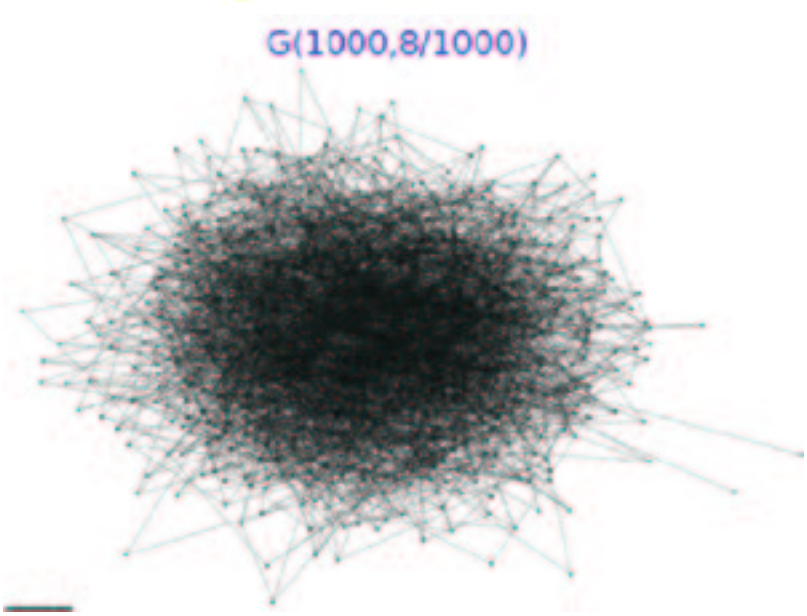


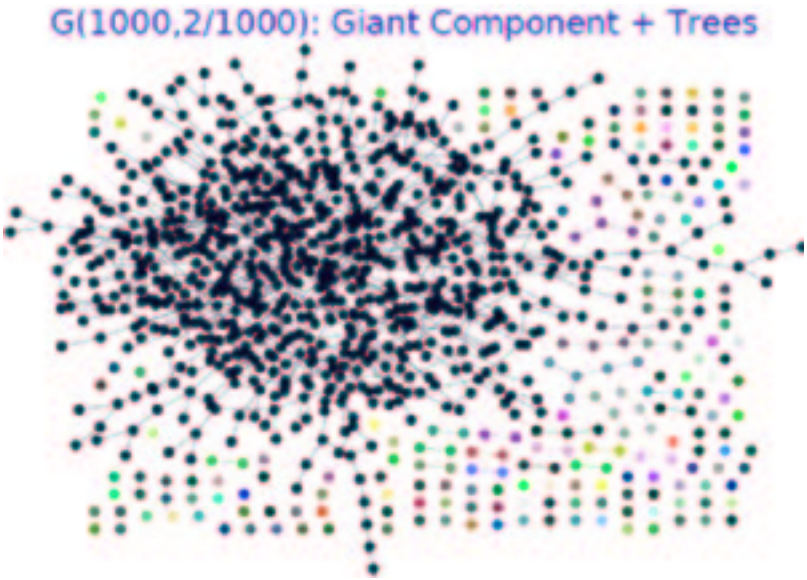
۵–۲ همبندی

$t(n) = \frac{\log n}{n}$، یک تابع آستانه‌ای برای ناپدید شدن رئوس تنهاست(یک تابع آستانه‌ای برای همبندی است).


Recap: The Evolution of G(n,p)
Cycles of all orders and giant component appear
G connected
1-trees (isolated vertices)
2-trees (edges)
3-trees
0
1/n
log n/n


G(1000,5/1000)


G(1000,8/1000)



۵–۲–۱ گذار فاز در همبندی

- زیر $p = \frac{۱}{n}$ فقط مؤلفه‌های همبند کوچک داریم.
- بالای $p = \frac{۱}{n}$ یک مؤلفه بزرگ داریم که به سرعت به بزرگترین حجم می‌رسد و همه مؤلفه‌های دیگر زیرخطی باقی می‌مانند.
- متوسط درجه رأس، z:

$$z = \frac{(۲ \times \text{تعداد یال‌ها})}{\text{تعداد رئوس}} = \frac{۲pE}{n} = \frac{pn(n-۱)}{n} = (n-۱)p \approx np.$$

۵–۲–۲ توزیع درجه $G(n,p)$

حال $G(n,p)$ را با یک مقدار ثابت p و n بزرگ درنظر می‌گیریم، یعنی درجه $z=(n-۱)p$ ثابت است. وجود یا عدم وجود هر یال مستقل از یال‌های دیگر است. احتمال اینکه رأس i به همه n رأس دیگر متصل باشد p^n است. احتمال اینکه رأس i تنها باشد $(۱-p)^n$ است. احتمال اینکه یک رأس از درجه k باشد از توزیع دوجمله‌ای زیر تبعیت می‌کند:

$$p_k=\binom{n}{k}p^k(۱-p)^{n-k}$$

وقتی $n\to\infty$، دو جمله‌ای به توزیع پواسن همگراست.

اثبات. می‌دانیم $z=(n-۱)p\sim np$ (برای n بزرگ)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_k &= \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(۱-p)^{n-k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}(\frac{z}{n})^k(۱-\frac{z}{n})^{n-k}\\ &= \frac{z^ke^{-z}}{k!}.\end{aligned}$$

□

فصل ٦

کدهای شناسایی در گراف‌های تصادفی

در این فصل با کدهای شناسایی مجموعه‌هایی از رئوس در شبکه‌های تصادفی سروکار داریم. برای گراف‌های تصادفی از مدل $T(n,p)$ استفاده خواهیم کرد که در آن هر کدام از $\binom{n}{۲}$ یال ممکن، با احتمال p وجود دارد. در این فصل علاوه بر حدود بالایی و پایینی برای کمترین اندازه ممکن یک کد($l \leq ۱,$)ـشناسایی در یک گراف تصادفی، توابع آستانه‌ای برای خاصیت دارا بودن چنین کدی را ارائه می‌دهیم. این نتایج وجودی را از ساختارهای احتمالاتی بدست می‌آوریم، همچنین کدهای شناسایی را با کدهای افزوده مرتبط می‌کنیم.

٦—١ شبکه‌هایی با ساختار غیرمشخص

بدون اینکه هیچ پیش فرضی روی ساختار شبکه داشته باشیم مایلیم بدانیم که این مسئله با رشد اندازه شبکه چه رفتاری دارد؟ اگر اتصالات بین پردازشگرها را به صورت تصادفی انتخاب کنیم احتمال اینکه شبکه حاصل دارای یک کدl— شناسایی باشد چیست؟ و امید ریاضی مجانبی یک کدl— شناسایی در چنین شبکه‌ای چه خواهد بود؟

برای بررسی چنین سؤالاتی کدهای l– شناسایی را در گراف‌های تصادفی بررسی می‌کنیم. ما از مدل $T(n,p)$ استفاده خواهیم کرد که در آن هر کدام از $\binom{n}{۲}$ یال ممکن به صورت مستقل با احتمال p وجود دارد که p احتمالاً تابعی از n است. ما از نوشتار استاندارد $G_{n,p}$ برای نشان دادن یک گراف تصادفی برچسب‌دار از فضای احتمال $T(n,p)$ استفاده خواهیم کرد. برای گراف G داده شده با n رأس و m یال احتمال آن‌که $G_{n,p}=G$ باشد برابر با $p^m(۱-p)^{\binom{n}{۲}-m}$ است.

می‌گوییم خاصیت $\prod$ برای تقریباً هر گرافی در $G_{n,p}$ برقرار است(یا $\prod$ با احتمال زیاد برقرار است) اگروتنهااگر احتمال($G_{n,p}$ خاصیت $\prod$ را دارد) Pr با بزرگ شدن n به یک میل کند. به طور مشابه $\prod$ برای تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$ برقرار نیست اگروتنهااگر($G_{n,p}$ خاصیت $\prod$ را دارد) Pr با بزرگ شدن n به صفر میل کند. در این‌جا $\log x$ نمایانگر لگاریتم در مبنای e است.نمادهای $\sim$، $\ominus$، O، o، w که تعریف آن‌ها به صورت زیر است را به کار خواهیم برد. برای دنباله‌های $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

i) اگر $\frac{f(n)}{g(n)}$ به سمت ∞ میل کند داریم $f(n)=w(g(n))$.

ii) اگر $\frac{f(n)}{g(n)}$ به سمت ۰ میل کند داریم $f(n)=o(g(n))$.

iii) اگر $g(n)(۱-o(۱))\leq f(n)\leq g(n)(۱+o(۱))$ باشد، داریم $f(n)\sim g(n)$.

iv) اگر $f(n)\leq cg(n)$ با ثابت c برای هر n برقرار باشد، داریم $f(n)=O(g(n))$.

v) اگر $c_۱f(n)\leq g(n)\leq c_۲f(n)$ برای هر n با ثابت‌های مناسب $c_۱$ و $c_۲$ برقرار باشد، داریم $f(n)=\ominus(g(n))$.

٦–۲ کدهای شناسایی در گراف‌های تصادفی

در قضیه‌ای که در ادامه می‌آید رفتار مجانبی دقیق اندازه $c=c(G)$ از یک کد شناسایی کمینه را در یک گراف تصادفی نه چندان تنک و نه چندان چگال مشخص خواهیم کرد.

٦–۳ اندازه کمینه یک کد شناسایی

در این بخش فرض می‌کنیم $q = p^۲ + (۱-p)^۲$، (یک رأس از C به هردوی x و y متصل است یا به هیچ‌یک از x و y متصل نیست.

قضیه ۱.٦ فرض کنیم $p, (۱-p) \geq \frac{۴ \log\log n}{\log n}$، آن‌گاه برای تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ داریم $c(G_{n,p}) \sim \frac{۲ \log n}{\log(\frac{۱}{q})}$. به عبارت دیگر برای هر ثابت $\varepsilon > ۰$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|c(G_{n,p}) \cdot (\frac{۲ \log n}{\log(\frac{۱}{q})})^{-۱} - ۱| \geq \varepsilon) = ۰$$

برای اینکه کران بالایی برای c را ببینیم به نتیجه بعدی نیاز داریم.

گزاره ۱.٦ : فرض کنیم C یک زیر مجموعه از رئوس از اندازه c در $G_{n,p}$ باشد، احتمال آن‌که C یک کد شناسایی از $G_{n,p}$ نباشد به وسیله

$$Pr(\text{ یک کد شناسایی نباشد } C) \leq \binom{c}{۲} pq^{c-۲} + c(n-c)pq^{c-۱} + \binom{n-c}{۲} q^c$$

محدود می‌شود.

اثبات. فرض کنید C یک زیر مجموعه از رئوس از اندازه c باشد. برای هر جفت از رئوس مجزای $x \neq y$ رخداد $\{B(x) \cap C = B(y) \cap C\}$ را با $A_{x,y}(C)$ نشان می‌دهیم. رخداد $A_{x,y}(C)$ بیان می‌دارد که هر رأس از C نسبت به x و y وضعیت اتصال مشابهی دارد و نتیجه روشن این جمله اینست که x و y به هم متصل‌اند اگر لااقل یکی از آن‌ها در C باشد. احتمال آن‌که C یک کد تفکیک کننده نباشد

$$Pr\left(\bigcup_{x\neq y} A_{x,y}(C)\right) \leq \sum_{x\neq y} Pr(A_{x,y}(C))$$

اگر $x \in C$ و $y \in C$ باشد آن‌گاه x با احتمال p به y متصل است و احتمال اتصال $c-۲$ رأس دیگر درون C به x و y برابر $q^{c-۲}$ می‌باشد، یعنی $c-۲$ رأس دیگر درون C یا به هر دوی x و y متصل است یا به هیچ‌کدام متصل نیست. پس $Pr(A_{x,y}(C)) = pq^{c-۲}$. اگر $x \in c$ و $y \notin c$ یا $x \notin c$ و $y \in c$ باشد، برای مثال حالت $x \in c$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $x \in B(x)$ و چون $x \in c$ پس $x \in B(x) \bigcap c$. اما طبق فرض $\{B(x) \cap C = B(y) \cap C\}$، درنتیجه $x \in B(y)$، پس x به y متصل است، و به‌این‌صورت جمله‌ای که در توضیح $A_{x,y}(C)$ آوردیم اثبات می‌شود، درنتیجه x با احتمال p به y متصل است و احتمال اتصال $c-۱$ رأس دیگر درون C به x و y برابر $q^{c-۱}$ می‌باشد پس $Pr(A_{x,y}(C)) = pq^{c-۱}$. و اگر $x \notin c$ و $y \notin c$، c رأس درون C نسبت به x و y وضعیت اتصال مشابهی دارند یعنی $Pr(A_{x,y}(C)) = q^c$. بنابراین

$$Pr(\bigcup_{x \neq y} A_{x,y}(C)) \leq \binom{c}{۲} pq^{c-۲} + c(n-c)pq^{c-۱} + \binom{n-c}{۲} q^c$$

□

اکنون حد بالایی واضح است، به عبارت دیگر:

لم ۱.٦ : فرض کنید ε دارای خاصیت $(n^{\varepsilon} \to \infty)$ باشد که معادل با $(\varepsilon = w((\log n)^{-۱}))$ است و p و $p-۱$ نیز به صورت $w((\log n)^{-۱})$ هستند، آن‌گاه تقریباً هر گراف در $T(n,p)$، کد شناسایی از اندازه کمتر یا مساوی $\frac{(۲+\varepsilon)\log n}{\log(\frac{۱}{q})}$ می‌پذیرد.

اثبات. از گزاره(۱.٦) برای هر زیر مجموعه $C \subseteq V$ از اندازه $c = c(n)$، داریم

$$Pr(\text{یک کد شناسایی نباشد } C) \leq \binom{c}{۲} pq^{c-۲} + c(n-c)pq^{c-۱} + \binom{n-c}{۲} q^c$$

به راحتی می‌بینیم که اگر هر دوی p و $p-۱$ به صورت $w((\log n)^{-۱})$ باشند آن‌گاه برای $c = n$ این کمیت به صفر میل می‌کند، که ثابت می‌کند برای چنین pیی تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ کد شناسایی

می‌پذیرد. قرار می‌دهیم $c = \frac{(٢+\varepsilon)\log n}{\log(\frac{١}{q})}$،

$$Pr(\text{یک کد شناسایی نباشد } C) \leq \frac{q^c(n-c)^٢}{٢}\left[\frac{c(c-١)}{(n-c)^٢}\cdot\frac{p}{q^٢}+\frac{٢c}{n-c}\cdot\frac{p}{q}+\frac{n-c-١}{n-c}\right],$$

$$Pr(\text{یک کد شناسایی نباشد } C) \leq \frac{(n-c)^٢}{٢}q^c\left[١+\frac{٢c}{n-c}\frac{p}{q}+\frac{c^٢}{(n-c)^٢}\frac{p}{q^٢}\right].$$

چون p و $p-١$ هر دو به صورت $w((\log n)^{-١})$ هستند داریم $c=o(n)$، یعنی $\frac{c}{n}\to ٠$، درنتیجه عبارت داخل کروشه به ١ میل می‌کند. نشان می‌دهیم عبارت باقیمانده یعنی $\frac{(n-c)^٢}{٢}q^c$ به صفر میل می‌کند. می‌دانیم $q^c=\exp\{c\log q\}$ و $(n-c)^٢=\exp\{٢\log(n-c)\}$ و نیز طبق فرض، $c\leq\frac{(٢+\varepsilon)\log n}{\log(\frac{١}{q})}$، درنتیجه $-c\log q\geq(٢+\varepsilon)\log n$ پس داریم

$$\begin{aligned}(n-c)^٢q^c &= \exp\{٢\log(n-c)+c\log q\}\\ &\leq \exp\{٢\log(n-c)-(٢+\varepsilon)\log n\}\\ &= \underbrace{\exp\{٢\log(n-c)-٢\log n\}}_{\text{عدد منفی}}\exp\{-\varepsilon\log n\}\\ &\leq n^{-\varepsilon}=o(١).\end{aligned}$$

□

روشن است که در هر گراف اندازه یک کد شناسایی لااقل $\lceil\log_٢(n+١)\rceil$ است(به روشنی مجموعه‌های تشخیصی $I(x,C)$ زیرمجموعه‌های ناتهی متمایز ٢^C هستند)، بنابراین اندازه کمینه یک کد شناسایی برای یک گراف تصادفی تقریباً به طور حتم $\ominus(\log n)$ است. برای عمده مدل‌های گراف تصادفی با $p=\frac{١}{٢}$ جواب در حالت مجانبی به صورت زیر است:

نتیجه ۱.٦ : با احتمال زیاد داریم $c(G_{n,\frac{1}{2}}) \sim 2\log_2^n$

توجه کنید که هر کد شناسایی در هر گراف n رأسی حداقل از اندازه $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ است.

٦—۴ آستانه احتمال برای داشتن کد شناسایی

به منظور سروکار داشتن با توابع آستانه‌ای، به دو نتیجه بنیادی از اردوس و رینی [1] (مراجع [۳۴, ۳۳] را ببینید) نیاز داریم، که در اینجا آمده است. این قضیه‌ها بسیار بدقت توابع آستانه‌ای را برای تعداد مؤلفه‌های همبندی در یک گراف تصادفی که درخت‌ها هستند توصیف می‌کنند.

قضیه ۲.٦ فرض کنید متغیر تصادفی X مساوی با تعداد رأس‌های تنها در $G_{n,p}$ باشد.

i) اگر $pn - \log n \to -\infty$، آن‌گاه برای هر $l \in \mathbb{R}$ داریم $Pr(X \geq l) \to 1$.

ii) اگر برای $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $pn - \log n \to x$، آن‌گاه X به توزیع پواسن با میانگین $\lambda := e^{-x}$ میل می‌کند که برای همه $r \geq 0$ خواهیم داشت $Pr(X = r) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$.

iii) اگر $pn - \log n \to +\infty$ ، آن‌گاه برای تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ داریم $X = 0$.

قضیه ۳.٦ اگر برای هر $k \geq 2$، T_k متغیر تصادفی مساوی با تعداد مؤلفه‌های $G_{n,p}$، که درخت از مرتبه k هستند، باشد آن‌گاه

i) اگر $p = o(n^{\frac{-k}{(k-1)}})$، آن‌گاه برای تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ داریم $T_k = 0$.

ii) اگر برای ثابت $z > 0$، داشته باشیم $n^{\frac{k}{(k-1)}}p \to z$، آن‌گاه T_k به توزیع پواسن با میانگین $\lambda := \frac{z^{k-1}k^{k-2}}{k!}$ میل می‌کند و برای همه $r \geq 0$ داریم $Pr(T_k = r) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$.

[1] P. Erdos, A Renyi

iii) اگر داشته باشیم $pn^{\frac{k}{(k-1)}} \to +\infty$ و $pkn - \log n - (k-1)\log\log n \to -\infty$، آن‌گاه برای هر $l \in \mathbb{R}$ داریم $Pr(T_k \geq l) \to 1$.

iv) اگر برای $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $pkn - \log n - (k-1)\log\log n \to x$، آن‌گاه T_k به توزیع پواسن با میانگین $\frac{e^{-x}}{k} \times k!$ میل می‌کند.

v) اگر داشته باشیم $pkn - \log n - (k-1)\log\log n \to +\infty$، آن‌گاه برای تقریباً هر گراف در $T(n,p)$، داریم $T_k = 0$.

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره(۱.٦)، می‌توان گفت اگر $p \neq 1$ ثابت باشد آن‌گاه هر گراف در $T(n,p)$ یک کد شناسایی دارد. اما اگر p را تابعی از n قرار دهیم این نتیجه لزوماً صحیح نخواهد بود. برای مثال اگر $p = p(n)$ بسیار بزرگ باشد آن‌گاه $G_{n,p}$ تقریباً به طور حتم شامل دو رأس جهانی خواهد بود(یعنی رأسی که با همه رئوس دیگر همسایه است)، که مانع می‌شود که $G_{n,p}$ یک کد شناسایی داشته باشد، از سوی دیگر اگر p بسیار کوچک باشد، طوری که تقریباً یالی وجود نداشته باشد آنگاه $G_{n,p}$ یک کد شناسایی خواهد داشت. اما برای یک p کوچک اما نه خیلی کوچک تقریباً به طور حتم یال‌هایی تنها در $G_{n,p}$ وجود خواهند داشت که مانع از داشتن یک کد شناسایی می‌شود. نشان خواهیم داد که یال‌های تنها و رئوس جهانی تنها موانع داشتن کد شناسایی هستند. به طور خلاصه وضعیت به صورت زیر است:

قضیه ۴.٦ برای هر $\epsilon > 0$

- اگر $p = o(n^{-2})$ باشد، آن‌گاه تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ یک کد شناسایی دارد(تقریباً به طور حتم C یکتاست ـتمام مجموعه رئوس).

- اگر $pn^{۲} \to \infty$ و $p \leq (\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱ - \varepsilon)\log\log n)$ باشد، آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$، کد شناسایی ندارد.
- اگر $p \leq ۱ - (\frac{۱}{n})(\log n + \varepsilon \log\log n) \leq (\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱ + \varepsilon)\log\log n)$، آن‌گاه تقریباً هر گراف در $T(n,p)$، کد شناسایی دارد.
- اگر $p \geq ۱ - \frac{۱}{n}(\log n - \varepsilon \log\log n)$، آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$، کد شناسایی ندارد.

توجه کنید که بازه غیربدیهی وجود یک کد، نامتقارن است، چون حد پایینی آن به طور مجانبی $\frac{\log n}{۲n}$ است درحالیکه حد بالایی آن تقریباً $\frac{\log n}{n} - ۱$ است. این مطلب از آن‌جا ناشی می‌شود که نیاز داریم تمام جفت رأس‌های مجاور را تفکیک کنیم. در واقع به شرط آنکه آن‌ها پوشیده شوند دو رأس غیرمجاور به طور خودکار تفکیک می‌شوند. به طور شهودی در یک گراف چگال (یعنی وقتی $p \to ۱$) هر دو رأس با احتمال بالا مجاورند و بنابراین نیاز داریم تعداد زیادی از جفت رأس‌ها را تفکیک کنیم. اما وقتی p به صفر میل می‌کند اکثر رئوس $G_{n,p}$ غیرمجاورند و بنابراین تنها تعداد کمی از جفت رأس‌ها باید درنظر گرفته شود. اثبات این قضیه را در چهار گزاره زیر تقسیم کرده‌ایم:

گزاره ۲.٦ : اگر $p = o(n^{-۲})$، آن‌گاه تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ یک کد شناسایی دارد.

اثبات. این نتیجه از این حقیقت ناشی می‌شود که برای چنین pیی تقریباً به طور حتم $G_{n,p}$ هیچ یالی ندارد، از اینرو V به عنوان یک کد شناسایی منحصربه فرد است. □

گزاره ۳.٦ : برای هر $\varepsilon > ۰$ اگر $pn^{۲} \to \infty$ و $p \leq (\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱ - \varepsilon)\log\log n)$، آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$، کد شناسایی ندارد.

اثبات. این از قضیه(۳.٦) قسمت (iii) با بکاربردن $k = ۲$ نتیجه می‌شود. برای چنین pیی تقریباً هر گراف در $T(n,p)$، یک مؤلفه همبندی دارد که یک درخت با دو رأس است، یعنی یک یال تنها. یک گراف دارای یک یال تنها، هیچ کد شناسایی ندارد. □

گزاره ۴.٦ برای هر $\varepsilon > ۰$، اگر $\left(p \geq (\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱+\varepsilon)\log\log n)\right)$ و $\left(p \leq ۱ - (\frac{۱}{n})(\log n + \varepsilon \log\log n)\right)$، آن‌گاه تقریباً هر گرافی در $T(n,p)$، یک کد شناسایی دارد.

اثبات. مجموعه رئوس $G_{n,p}$ یک کد شناسایی است اگروتنهااگر یک کد تفکیکی باشد. از گزاره(۱.٦)، احتمال آن‌که مجموعه رئوس $G_{n,p}$ یک کد تفکیکی نباشد کمتر یا مساوی با $f^n : x \to \binom{n}{۲}x(x^۲ + (۱-x)^۲)^{n-۲} = f^n(p)$ است. تابع $\binom{n}{۲}p(p^۲ + (۱-p)^۲)^{n-۲}$ از صفر به $\alpha_n = \ominus(n^{\frac{-۱}{۲}})$ افزایش یافته سپس به $\beta_n = (\frac{۱}{۲}) - \ominus(n^{-\frac{۱}{۲}})$ کاهش می‌یابد و پس از آن دوباره صعود می‌کند. چون $n^{\frac{-۱}{۲}}$ برای n بزرگ آهسته‌تر از $(\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱+\varepsilon)\log\log n)$ به صفر میل می‌کند، ماکزیمم $f^n(p)$ روی بازه

$$[\frac{۱}{۲n}(\log n + (۱+\varepsilon)\log\log n,\ ۱ - \frac{۱}{n}(\log n + \varepsilon\log\log n)]$$

برای $p = (\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱+\varepsilon)\log\log n)$ یا $p = ۱ - (\frac{۱}{n})(\log n + \varepsilon\log\log n)$ بدست می‌آید. پس کافیست بررسی کنیم که

$$f^n\left((\frac{۱}{۲n})(\log n + (۱+\varepsilon)\log\log)\right)$$

و

$$f^n\left(۱ - (\frac{۱}{n})(\log n + \varepsilon\log\log n)\right)$$

هر دو وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، به صفر می‌گرایند. □

گزاره ۵.٦ : برای هر $\epsilon > ۰$، اگر $p \geq ۱ - (\frac{۱}{n})(\log n - \varepsilon \log\log n)$ آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$، کد شناسایی ندارد.

اثبات. این حقیقت را که تعداد رئوس جهانی(یعنی رأسی که با همه رئوس دیگر همسایه است) در $T(n,p)$، با تعداد رئوس تنها در $G_{n,۱-p}$ برابر است به کار می‌بریم. از قضیه (۲.٦)(قسمت i)، تقریباً به طور حتم حداقل دو رأس جهانی در $T(n,p)$ برای چنین pیی وجود دارد. یک گراف دارای دو رأس جهانی کد شناسایی ندارد. □

نتایج قضیه (۴.٦) را می‌توان به صورت شکل (۱.٦) نشان داد، که آن را به عنوان شرح خلاصه‌ای از مقدار مجانبی ($G_{n,p}$ یک کد شناسایی دارد) Pr(محور قائم) به صورت تابعی از $p(n)$(محور افقی) رسم کرده‌ایم. دو بازه داریم که در آن‌ها احتمال وجود یک کد شناسایی بسیار بالاست. با دقت در نتایج قضایای (۲.٦) و (۳.٦)، می‌توانیم تقریباً به درستی آن‌چه در آستانه‌ها رخ میدهد را توصیف کنیم، یعنی وقتی p در یکی از سه ناحیه سایه‌دار در شکل (۱.٦) قرار دارد.

شکل (۱.٦): نمایش ترسیمی آستانه‌ها برای خاصیت دارا بودن یک کد شناسایی

قضیه ۵.٦ برای هر ثابت $z > ۰$ اگر $n^۲p \to z$، آن‌گاه احتمال آن‌که یک گراف در $T(n,p)$ یک کد شناسایی داشته باشد وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، به $e^{\frac{-z}{۲}}$ میل می‌کند.

اثبات. میدانیم که $G_{n,p}$ هیچ کد شناسایی ندارد اگروتنهااگر یک جفت رأس مجزا $u \neq v$ موجود باشد چنانکه $N[u] = N[v]$. اما می‌توانیم خود را به رئوس $u \neq v$ محدود کنیم به طوریکه $N[u] = N[v] = \{u, v\}$، که این از یال‌های تنهاست. در واقع وجود $u \neq v$ چنانکه $N[u] = N[v]$ با $|N[u]| \geq ۳$ وجود یک مثلث در $G_{n,p}$ را ایجاب می‌کند و برای چنین pیی احتمال آن‌که $G_{n,p}$ شامل یک مثلث باشد با $\binom{n}{۳}p^۳$ کراندار است و چنانچه n به بینهایت میل کند به صفر می‌گراید. از اینرو برای n بزرگ،

$$Pr(G_{n,p} \text{ هیچ کد شناسایی ندارد}) \sim Pr(G_{n,p} \text{ یک یال تنها دارد})$$

از قضیه (۳.٦)(قسمت ii) می‌دانیم که تعداد یال‌های تنها به توزیع پواسون با میانگین $(\frac{z}{۲})$ میل می‌کند. □

قضیه ٦.٦ برای هر ثابت $x \in \mathbb{R}$ اگر وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، $۲np - (\log n + \log\log n)$ به x میل کند آن‌گاه احتمال آن‌که یک گراف از $T(n,p)$ یک کد شناسایی داشته باشد وقتی n به سمت ∞ میل کند، به $e^{-e^{\frac{-x}{۲}}}$ میل می‌کند.

اثبات. مانند قضیه قبل کافیست به دنبال یال‌های تنها بگردیم. در واقع وجود رئوس $u \neq v$ چنانکه $N[u] = N[v]$ با $|N[u]| \geq ۴$ وجود یک زیرگراف هم‌ریخت با $H_۴$ در $G_{n,p}$ را ایجاب می‌کند که یک گراف با ۵ یال و ۴ رأس می‌باشد. تعداد موردانتظار زیرگراف‌های یک‌ریخت با $H_۴$ که $G_{n,p}$ دربر دارد، برابر است با $٦\binom{n}{۴}p^۵$ که برای چنین pیی وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، به صفر می‌گراید. پس احتمال آنکه $G_{n,p}$ شامل دو رأس $u \neq v$ چنانکه $N[u] = N[v]$ و $|N[u]| \geq ۴$ باشد، وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، به صفر می‌گراید. حال احتمال آن‌که $G_{n,p}$ شامل دو رأس $u \neq v$ که $N[u] = N[v]$ و $|N[u]| = ۳$ باشد را بررسی می‌کنیم. تعداد مورد انتظار چنین جفت رأس‌هایی $۳\binom{n}{۳}p^۳(۱-p)^{۲(n-۳)}$

است که وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند،به صفر می‌گراید، از اینرو $G_{n,p}$ تقریباً به طور حتم شامل دو رأس $u \neq v$ که $N[u] = N[v]$ و $|N[u]| = ۳$ نیست. بنابراین برای n بزرگ

$$Pr(\text{هیچ کد شناسایی ندارد } G_{n,p}) \sim Pr(\text{ یال تنها دارد } G_{n,p})$$

پس با بکاربردن قضیه (۳.٦) قسمت(iv) حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۷.٦ برای هر ثابت $x \in \mathbb{R}$، اگر وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، داشته باشیم $n(۱-p) - \log n \to x$، آن‌گاه احتمال آنکه یک گراف از $T(n,p)$ یک کد شناسایی داشته باشد، وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، به $e^{-e^{-x}}(۱+e^{-x})$ میل می‌کند.

اثبات. می‌دانیم $G_{n,p}$ هیچ کد شناسایی ندارد اگروتنها اگر یک جفت از رئوس $u \neq v$ موجود باشد که $N[u] = N[v]$، اما می‌توانیم عملاً خود را به رئوس جهانی محدود کنیم، یعنی به حالتی که $|N[u]| = |N[v]| = n$. در این حالت تعداد مورد انتظار جفت رئوس $u \neq v$ چنانکه $N[u] = N[v]$ و $|N[u]| \leq n-۱$ برابر $\binom{n}{۲}p((p^۲+(۱-p)^۲)^{n-۲} - p^{۲(n-۲)})$ است که برای چنین pیی اگر n به سمت ∞ میل کند، به صفر میل می‌کند. بنابراین برای n بزرگ

$$Pr(\text{هیچ کدی کد شناسایی ندارد } G_{n,p}) \sim Pr(\text{حداقل دو را } G_{n,p}\text{س جهانی دارد})$$

با به کاربردن قضیه (۲.٦) قسمت(ii) و استفاده از این حقیقت که تعداد رئوس جهانی $G_{n,p}$ برابر با تعداد رئوس تنهای $G_{n,۱-p}$ است، به نتیجه می‌رسیم. □

٦–۵ کدهای $l-$ شناسایی در گراف‌های تصادفی

یک جفت از زیرمجموعه‌های (X,Y) از مجموعه رئوس با $1 \leq |X|,|Y| \leq l$ ماکزیمال است اگر

- $|X| = l-1$، $|Y| = l$ و $X \subseteq Y$،
- یا $|Y| = l-1$، $|X| = l$ و $Y \subseteq X$،
- یا $|X| = l$، $|Y| = l$.

لم زیر نشان می‌دهد که به منظور داشتن یک کد $l-$ شناسایی می‌توانیم خود را به جفت‌های ماکزیمال زیرمجموعه‌های (X,Y) محدود کنیم:

لم ۲.٦ : C یک کد $l-$ شناسایی از G است اگروتنهااگر برای همه $X \subseteq V$ که $|X| \leq l$ است، داشته باشیم $I(X,C) \neq \emptyset$ و شرط $I(X,C) \neq I(Y,C)$ برای همه جفت‌های ماکزیمال (X,Y) صادق باشد.

اثبات. اگر (X,Y) ماکزیمال باشد، حکم برقرار است. فرض کنیم (X,Y) ماکزیمال نباشد و $|X| \leq |Y|$. دو حالت زیر را داریم:

۱) اگر $X \subseteq Y$ باشد فرض کنیم $Z \subseteq V \backslash Y$ از اندازه $l - |Y|$ باشد و $y_\circ \in Y \backslash X$ باشد. قرار میدهیم $X' := Y \cup Z \backslash \{y_\circ\}$ و $Y' := Y \cup Z$. به آسانی می‌بینیم اگر C، X و Y را تفکیک نکند، آنگاه C هیچ‌یک از X' و Y' را تفکیک نمی‌کند، و این با فرض اینکه (X',Y') ماکزیمال است، تناقض دارد.

۲) اگر $X \nsubseteq Y$، فرض می‌کنیم $Z \subseteq V \backslash Y$ از اندازه $l - |Y|$ و $T \subseteq Y \backslash X$ چنان باشد که $|X| + |T| + |Z| = l$. قرار می‌دهیم $X' := X \cup T \cup Z$ و $Y' := Y \cup Z$. به آسانی می‌بینیم اگر

C، X و Y را تفکیک نکند، آنگاه C هیچ‌یک از X' و Y' را تفکیک نمی‌کند، و این با فرض اینکه (X', Y') ماکزیمال است، تناقض دارد.

□

٦–٦ می‌نیمم اندازه یک کد $l-$ شناسایی

لم زیر مشابه گزاره (١.٦) است.

لم ٣.٦ : فرض کنید $C \neq V$ یک زیرمجموعه از رئوس گراف تصادفی $G_{n,p}$ باشد. احتمال آن‌که C یک کد $l-$ شناسایی نباشد با

$$Pr(\text{کد نیست } C) \leq n^{۲l}(۱ - \min\{p, ۲p\,(۱-p)\}(۱-p)^{l-۱})^{|C|-۲l}$$

و در حالتیکه $C = V$ با

$$Pr(\text{کد نیست } V) \leq n^{۲l}(۱ - (۱-p)^{l})(۱ - \min\{p, ۲p\,(۱-p)\}(۱-p)^{l-۱})^{n-۲l}$$

کراندار است(اثبات را در [۴۰] ببینید).

قضیه ٨.٦ فرض کنید ε چنان باشد که $n^{\varepsilon} \to +\infty$ و p ثابت، $p \neq ۰, ۱$ باشد. آن‌گاه تقریباً هر گرافی در $T(n,p)$ یک کد $l-$ شناسایی C از اندازه

$$|C| \leq \frac{۲(l+\varepsilon)\log n}{\log(\frac{۱}{q_l})}$$

دارد که $q_l = ۱ - \min\{p, ۲p(۱-p)\}(۱-p)^{l-۱}$ می‌باشد.

توجه کنید که این بدان معنا نیست که تقریباً به طور حتم می‌نیمم اندازه یک کد $l-$ شناسایی در $G_{n,p}$، از مرتبه $O(l\log n)$ است چون $\frac{۱}{\log(\frac{۱}{q_l})}$ از مرتبه $O(۲^l)$ است. پس می‌نیمم اندازه یک کد $l-$ شناسایی در $G_{n,p}$، تقریباً به طور حتم از مرتبه $O(l۲^l\log n)$ است.

قضیه بالا شبیه به کران بالا در قضیه (١.٦) است. کران پایین دقیقی برای حالت کد $l-$ شناسایی، $l\neq ۱$ نتوانسته‌ایم بیابیم و این مسأله به صورت باز باقی مانده است. یک نتیجه وجودی از لم (٣.٦) بدست می آوریم.

گزاره ٦.٦ : فرض کنید ε چنان باشد که $n^\varepsilon\to+\infty$. آن‌گاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ گراف G^n دارای کد $l-$ شناسایی C^n از اندازه زیر می‌باشد

$$|C^n|\leq\sqrt{۲}(l^۲+\varepsilon)\log n.$$

اثبات. فرض کنید $p=\frac{۱}{l}$. با جایگذاری‌های بالا در لم(٣.٦) می‌دانیم که

$$Pr(\text{کد نباشد } C)\leq n^{۲l}\left(۱-۲\frac{۱}{l}(۱-\frac{۱}{l})^l\right)^{|C|-۲l},$$

برای مقدار ثابت K_l داریم

$$\begin{aligned}Pr(\text{کد نباشد } C) &\leq K_l n^{۲l}\left(۱-۲\frac{۱}{l}(۱-\frac{۱}{l})^l\right)^{|C|},\\ &\leq K_l\exp\left(۲l\log n-۲\frac{|C|}{l}(۱-\frac{۱}{l})^l\right),\\ &\leq K_l\exp\left(۲l\log n-\sqrt{۲}\frac{|C|}{l}\right).\end{aligned}$$

چون برای $l>۱$، $(۱-\frac{۱}{l})^l\geq\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. محاسبات زیر را نتیجه می‌گیریم

$$Pr(\text{کد نباشد } C)\leq K_l\exp\left(\left(۲l-۲l-۲\frac{\varepsilon}{l}\right)\log n\right)$$

$$\leq K_l \exp\left(-۲\frac{\varepsilon}{l}\log n\right)$$
$$\leq K_l n^{\frac{-۲\varepsilon}{l}}.$$

چون $n^{\varepsilon} \to +\infty$، داریم

$$Pr(\text{ کد نباشد } C) \to ۰.$$

بنابراین برای چنین pیی تقریباً هر گراف $\psi(n,p)$ یک کد $l-$ شناسایی از اندازه $\sqrt{۲}(l^{۲}+\varepsilon)\log n$ دارد، به خصوص گراف n رأسی G^n یک کد $l-$ شناسایی C^n از اندازه $|C^n| \leq \sqrt{۲}(l^{۲}+\varepsilon)\log n$ دارد. □

٦—۷ آستانه احتمال برای داشتن یک کد $l-$ شناسایی

در حالت کلی $l > ۱$ تنها نتایج جزئی درباره توابع آستانه‌ای برای خاصیت پذیرفتن یک کد $l-$ شناسایی داریم. برخی نتایج درباره کدهای شناسایی را به‌کار می‌بریم:

گزاره ۷.٦ : اگر $p = o(n^{-۲})$ آن‌گاه تقریباً هر گراف در $T(n,p)$ یک کد $l-$ شناسایی دارد.

در واقع برای چنین pیی تقریباً به طور حتم $G_{n,p}$ هیچ یالی ندارد، از اینرو گراف یک کد $l-$ شناسایی یکتا، $C = V$، دارد.

گزاره ۸.٦ :فرض کنید $\varepsilon > ۰$. اگر $p \geq ۱ - (\frac{۱}{n})(\log n - \varepsilon \log\log n)$، آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$ کد $l-$ شناسایی ندارد.

برای چنین pیی گراف $G_{n,p}$ حتماً دو رأس جهانی دارد.

قضیه ۹.٦ فرض کنید $\varepsilon > ۰$ ثابت باشد و p چنان باشد که $\varepsilon n^{\frac{-۳}{۲}} \leq p \leq ۱ - \varepsilon n^{\frac{-۳}{۲}}$. k را یک عدد طبیعی و X_k را متغیر تصادفی برابر با تعداد رئوس از درجه k در $G_{n,p}$ درنظر بگیرید. قرار می‌دهیم

$$\lambda_k := \lambda_k(n) = n\binom{n-۱}{k}p^k(۱-p)^{n-k}$$

برای هر $t \geq ۰$ ثابت، اگر $\lim \lambda_k(n) = +\infty$، آنگاه $\lim Pr(X_k \geq t) = ۱$.

این نتیجه از آن جهت سودمند است که نشان می‌دهد یک گراف با یک رأس v از درجه $۱ \leq d(v) \leq l-۱$ هیچ کد $l-$ شناسایی ندارد(مثلا اگر یک رأس با درجه ۴ داشته باشیم کد ۵− شناسایی، ٦− شناسایی و ... نداریم). در حقیقت نمی‌توان مجموعه رئوس همسایه را (بدون v) از مجموعه همسایگی‌های بسته v جدا کرد.

گزاره ۹.٦ : برای هر $\varepsilon > ۰$ اگر $pn^۲ \to \infty$ و $p \leq (\frac{۱}{n})(\log n + (l-۱-\varepsilon)\log\log n)$ آن‌گاه تقریباً هیچ گرافی در $T(n,p)$ کد $l-$ شناسایی ندارد.

اثبات. از قضیه(۹.٦) با $k = l-۱$ و $t = ۱$ استفاده می‌کنیم. به‌راحتی می‌بینیم که اگر $pn^۲ \to \infty$ و $p \leq (\frac{۱}{n})(\log n + (l-۱-\varepsilon)\log\log n)$، آن‌گاه $\lambda_k(n) = n\binom{n-۱}{k}p^k(۱-p)^{n-k}$ به سمت ∞ میل می‌کند. درنتیجه گراف $G_{n,p}$ به‌طور حتم یک رأس از درجه $l-۱$ دارد. حال زیرمجموعه‌هایی از رئوس $X := N(x_۰)$ و $Y := N(x_۰) \cup \{x_۰\}$ را درنظر می‌گیریم، X و Y هردو از اندازه کمتر مساوی با l هستند و در $N(X) = N(Y)$ صدق می‌کنند ازاینرو $G_{n,p}$، کد $l-$ شناسایی ندارد. □

٦−۸ کدهای $l-$ شناسایی و $l-$ افزوده

مفهوم کدشناسایی با کدافزوده به صورت زیر مرتبط است. فرض کنید یک کد $l-$ شناسایی از گراف G با مجموعه رئوس $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ در اختیار داشته باشیم. فرض کنید برای هر i که $i = ۱, \ldots, n$،

$w(i)$ بردار مشخصه مجموعه شناسایی v_i را نشان دهد و $w(i)_j = ۱$ اگروتنها $v_j \in I(v_i, C)$.
$K := \{w(۱), \ldots, w(n)\}$ را درنظر بگیرید. برای همه $I, J \subseteq \{۱, \ldots, n\}$ که $|I| \leq l$، $|J| \leq$، K در شرط زیر صادق است(مانسل [۴۱][۲]):

$$\bigvee_{i \in I} w(i) \neq \bigvee_{j \in J} w(j) \qquad (۱.٦)$$

که $w = u \bigvee v$، OR بیت‌به بیت بردارهای u و v را نشان می‌دهد، $w_i = ۰$ اگروتنهااگر $u_i = v_i = ۰$.
در واقع (۱.٦) از این حقیقت ناشی می‌شود که $\bigvee_{i \in I} w(i)$ بردار مشخصه مجموعه شناسایی $\{v_i |\ i \in I\}$ می‌باشد و چون C یک کد $l-$ شناسایی از G است پس همه مجموعه‌های شناسایی مجزا هستند.

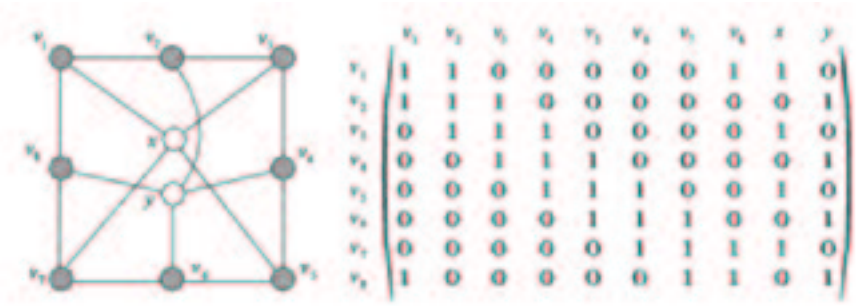
برای گراف G همراه با یک کد$l-$شناسایی از آن، یک ماتریس دودویی $M = M(G, C)$ به صورت زیر می‌توانیم بسازیم[۴۰]:

سطرهای ماتریس متناظر با رئوس کد و ستون‌های آن متناظر با رئوس G می‌باشد و $M_{ij} = ۱$ است اگروتنهااگر رأس i همسایه رأس j و یا $i = j$ باشد. M را از الحاق بردارهای مشخصه مجموعه‌های شناسایی $I(x, C)$ که $x \in V$ است، بدست می آوریم(شکل (۲.٦) را ببینید). توجه کنید که اگر A ماتریس مجاورت G و I ماتریس همانی باشد، M یک زیرماتریس از $A + I$ است. ستون‌های M در شرط(۱.٦) صدق می‌کنند. یک مجموعه از بردارهای K(یا یک مجموعه از بردارهای ۱−۰) که در (۱.٦) صدق می‌کند، UD_l- کد یا کد $l-$ افزوده نامیده می‌شود. این مفهوم در [۳٦] توسط کاتز و سینگلتون[۳] نیز معرفی شده است. بعد فضا در کد $l-$ افزوده برابر تعداد سطرها در ماتریس M و اندازه کد برابر تعداد ستون‌هاست[۴۰].

[۲] J.Moncel

[۳] Kautz and singleton

شکل زیر یک گراف همراه با یک کد شناسایی مجموعه‌های حداکثر ٢ رأسی و ماتریس متناظرش را نشان می‌دهد.



شکل (٢.٦)

قضیه ١٠.٦ (گراویر[۴][۵۷]): فرض کنید K کد $l-$ افزوده ماکزیمم از $\{۰,۱\}^N$ باشد. دو ثابت $c_۱$ و $c_۲$ مستقل از N و l وجود دارد که

$$۲^{\frac{c_۱ N}{l^۲}} \leq |K| \leq ۲^{\frac{c_۱ N \log l}{l^۲}}$$

علاوه‌براین، کران پایین ساختنی است: یک الگوریتم وجود دارد که با N و l داده شده، یک کد $l-$ افزوده از $\{۰,۱\}^N$ از اندازه $۲^{\frac{c_۱ N}{l^۲}}$ می‌سازد. کران پایین را در کاتز و سینگلتون[٣٦] و یک اثبات ترکیباتی از کران بالا را در راسزینکو[۵][٣٩] می‌توان یافت. یک الگوریتم حریصانه که یک کد $l-$ افزوده از اندازه $۲^{\frac{c_۱ N}{l^۲}}$ می‌سازد را می‌توان در ونگ و ساس [٦][٣٨] پیدا کرد.

قضیه ١١.٦ [۴۰]: یک کد $l-$ افزوده بهینه از اندازه t در $\{۰,۱\}^N$ را می‌توان روی یک گراف جهت‌دار با t رأس همراه با یک کد $l-$ شناسایی از اندازه N پیاده‌سازی کرد.

[۴] S.Gravier

[۵] M.Ruszinko

[٦] F.K.Hwang,V.sos

اثبات. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_t\}$ یک کد $l-$ شناسایی بهینه در $\{0,1\}^N$ و M یک ماتریس $N \times t$ باشد که ستون‌های آن بردارهای $v_1, \ldots, v_t$ هستند. اگر بتوانیم یک زیرماتریس M' با ابعاد $N \times N$ که فقط درایه‌های روی قطر اصلی آن ۱ است، بدست آوریم آن‌گاه می‌توانیم یک گراف جهت‌دار با t رأس و یک کد $l-$ شناسایی از اندازه N بسازیم: رئوس متناظر با M' کلمه‌کدها و بقیه کلمه‌کد نیستند. قبل از اثبات وجود چنین M'ی قضیه هال را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱۲.٦ (قضیه هال): فرض کنید G یک گراف دوبخشی با بخش‌های $V = X \bigcup Y$ باشد، آن‌گاه G شامل یک تطابق است که هر رأس در X را اشباع می‌کند اگروتنهااگر برای هر زیرمجموعه S از X داشته باشیم: $|N(S)| \geq |S|$.

اثبات وجود M': فرض کنید $\{A, B\}$ گراف دوبخشی وابسته به M باشد: $A = \{1, \ldots, N\}$ و $B = \{v_1, \ldots, v_t\}$ و یک یال بین i و v_j وجود دارد اگروتنهااگر iامین مختص از v_j یک باشد. ادعا می‌کنیم که تطابقی از $\{A, B\}$ وجود دارد که A را می‌پوشاند. در واقع، اگر اینطور نباشد، با استفاده از قضیه هال [۷] باید $X \subseteq A$ وجود داشته باشد که $|N(X)| < |X|$. حال اگر بردارهای $N(X)$ را با $|X|$ تا بردار واحد از مجموعه مختصاتی X جایگزین کنیم، یک کد $l-$ افزوده با اندازه‌ی بزرگتر از کد اصلی خواهیم داشت که یک تناقض است. بنابراین تطابقی وجود دارد که A را می‌پوشاند و با زیرماتریس M' با ابعاد $N \times N$ که همه درایه‌های قطری‌اش ۱ است، متناظر می‌باشد. □

همچنین از یک کد $l-$ شناسایی یک گراف جهت‌دار می‌توان یک کد $l-$ افزوده مانند حالت غیرجهت‌دار بدست آورد. بنابراین یک تناظر کامل بین ماکزیمم کدهای $l-$ افزوده و می‌نیمم کدهای $l-$ شناسایی در گراف‌های جهت‌دار وجود دارد.

---

[۷] Hall

فصل ۷

مسائل کاربردی در شبکه‌های حسگر اضطراری

در این فصل، یک چارچوب جدید برای ایجاد یک سیستم کشف موقعیت مطمئن در سیستم‌های اضطراری براساس تئوری کدهای شناسایی، ارائه شده است. کلید اصلی این رهیافت اینست که به حسگرهای پوششی مناطق مختلف این اجازه را می‌دهد که با هم به طریقی که هر موقعیت تفکیک‌پذیر به وسیله حسگرهای یکتا و منحصربه‌فرد پوشانیده شود، هم‌پوشانی کنند، که در اینصورت معین‌نمودن مکان حسگرها و می‌نیمم کردن تعداد آن‌ها در حکم ایجادکردن کدهای شناسایی بهینه می‌باشد. از طریق آنالیز و شبیه‌سازی نشان داده شده است که رهیافت کدهای شناسایی به صورت محسوس تعداد کمتری حسگر نسبت به رویه‌های تقریب همسایگی موجود، نیاز دارد. از طرف دیگر برای تعداد ثابتی از حسگرها، این رویه می‌تواند پایداری و اطمینان بخش بودن را در مواجهه با خرابی حسگرها یا خرابی فیزیکی در سیستم، تضمین نماید.

سیستم‌های ارتباطی نقش حیاتی در موقعیت‌های اضطراری مانند آتش‌سوزی‌ها، فروریختن ساختمان‌ها یا پدیده‌های هوایی مخرب بازی می‌کند. متأسفانه سیستم‌های موجود اغلب یک زیرساخت حداقلی ارتباطی، برای فراهم آوردن اطلاعات درباره نوع و مقدار سانحه را پدید می‌آورند، در نتیجه گروه نجات در حالی وارد موقعیت اضطراری می‌شوند که اطلاعات اندکی درباره مکان دارند و آن‌ها

باید با در دسترس بودن وسایل و تجهیزاتی که برحسب اتفاق همراهشان بوده، برای عملیات نجات اقدام کنند. یک روش امیدبخش برای تأمین نمودن بازخوردهای بلادرنگ از مکان‌های سانحه، استفاده از شبکه‌های سنسوری است. پیشرفت‌های اخیر در تکنولوژی‌های سنسوری(ادوارد و هالار[۱][۴۲] و استرین[۲] و همکاران[۴۳])، این امر را ممکن می‌سازد تا وسیله‌های ظریف را در بستر یک زیرساخت قوی نصب کرده و آن‌ها را به هم متصل نمائیم: مانند آشکارگردود یا شرایط روشنایی بیش از حد، که این وسیله‌های ظریف برای شبکه‌ها در حالت‌های اضطراری استفاده می‌شوند. این گونه شبکه‌ها می‌توانند مراکز کنترلی را با امکان نظارت بدون وقفه بر مکان‌های سانحه‌خیز و ردیابی کردن قربانی‌ها و پرسنل به صورت لحظه‌ای و بلافاصله ایجاد نمایند. به منظور ایجاد چنین خصیصه‌هایی باید بتوانیم توانایی آشکارسازی موقعیت مکانی را در مواجهه با بازتاب‌های غیرقابل پیش‌بینی(از اثاث خانه، مردم یا دیوارها)، شرایط عدم توانایی درخواست کمک(به علت دود آتش) و در شرایط تغییر توپولوژی ساختمان(به علت دیوارهای فروریخته) فراهم آوریم. بسیاری از کارهای مفید و مؤثری که یک سیستم پاسخ‌دهی اضطراری پیشرفته می‌تواند انجام دهد، مستلزم داشتن امکانات زیر است:

۱) قادر باشد به پرسنل این امکان را بدهد تا مکان فیزیکی خودشان و مکان فیزیکی دیگران را شناسایی کنند.
۲) قادر به شناسایی موقعیت قربانی‌ها، خطرهای بالقوه یا منبع ایجاد اضطرار باشد.
۳) توانایی شناسایی و نجات پرسنل به خطر افتاده را داشته باشد.

به هر حال چندین رویه آشکارسازی موقعیت در این فصل توصیف شده‌اند، اما برای نیل به این هدف مناسب نمی‌باشند. به طور عمده آن‌ها در مقابل خرابی تجهیزات و تغییر توپولوژی ساختاری دچار

[۱] S. Edward and A. Hollar

[۲] D. Estrin

کمبود پایداری و نیرومندی می‌باشند. چند مورد از سیستم‌های تقریب همسایگی وجود دارند که مکان کاربر را به وسیله حسگرهای نزدیکش(برج‌های دیده‌بانی) مشخص می‌کنند، اما وقتی که حسگرها در این سیستم‌ها خراب می‌شوند محدوده پوششی آن حسگر از بین می‌رود.

در این فصل، موضوع اکتشاف مکان را با یک چارچوب کاملاً جدید و براساس تئوری کدهای شناسایی ارائه می‌دهیم [۱]. رهیافت ما، تکنولوژی اکتشاف مکان موجود براساس تقریب می‌باشد که آن را با ایجاد هم‌پوشانی در ناحیه پوشش حسگر تعمیم می‌دهیم. ایده کلیدی اینست که هر مکان تفکیک‌پذیر به وسیله یک مجموعه یکتا از حسگرها پوشانیده شود، که این تحت پوشش قرار گرفتن به عنوان امضای آن‌ها مطرح می‌شود. به طور عام این رهیافت دو فایده اصلی نسبت به رویه‌های اکتشاف مکان موجود دارد:

۱) برای تعداد ثابتی از حسگرها که هر کدام محدوده پوششی مشخصی دارند، این طرح می‌تواند اکتشاف مکان را به صورت تفکیک‌پذیری پالاینده انجام دهد، که هم‌پوشانی را بین نواحی پوشش از بین می‌برد.
۲) راه حل ارائه شده به گونه‌ای طراحی شده است که حتی در مواجهه با موقعیت‌های خرابی در سیستم به طور صحیح عمل نماید.

این دو فایده در مواجهه با یکدیگر قابل جایگزینی و سبک و سنگین‌کردن هستند، یعنی در صورت داشتن تعداد ثابتی حسگر می‌توان سیستمی طراحی نمود که با داشتن تفکیک‌پذیری پالاینده هزینه مربوط به اطمینان‌پذیری و نیرومندی سیستم را کاهش دهد یا اطمینان‌پذیری بالا باعث کاهش هزینه تفکیک‌پذیری شود.

چالش اصلی در طراحی این سیستم مکان‌یابی حسگرهاست به طوریکه هر ناحیه تفکیک‌پذیر، بدون ابهام شناسانده شود. علاوه بر این، با وجود اینکه، این پروژه هزینه مربوط به حسگرها را کاهش

می‌دهد، مطلوبست که به منظور افزایش عمر شبکه، تعداد حسگرهای فعال در یک زمان معین(یعنی حسگرهایی که در حال خواب نیستند) را می‌نیمم کنیم. بنابراین هدف اینست که در یک سطح مشخص از اطمینان بخشی، به منظور اکتشاف مکان، تعداد می‌نیمم از حسگرها استفاده شوند. برای نیل به این هدف، تئوری کدهای شناسایی را به گونه‌ای به‌کار می‌بریم که یک تکنیک کلی برای مشخص کردن گره‌ها در یک گراف به صورت یکتا فراهم آورد. سیستم اکتشاف مکان را به عنوان یک گراف با تقسیم ناحیه پوششی پیوسته در داخل یک مجموعه، به نواحی متناهی مدل‌سازی می‌کنیم. هر ناحیه با یک نقطه که این نقاط معادل با گره‌های گراف می‌باشد، مشخص می‌شود و گره‌ها به وسیله یال‌ها چنان به هم متصل می‌شوند که نقاط معادل در سیستم فیزیکی موجود قابلیت ایجاد ارتباط مستقیم با هم را داشته باشند. اکنون در این سیستم، مسئله کد شناسایی، معین کردن مکان گره‌هایی در گراف که به عنوان کلمه‌کد مشخص می‌شوند و اینکه هر گره در گراف به وسیله یک مجموعه یکتا از حسگرها پوشانده شود، می‌باشد. از منظر قیاس، این نوع سیستم اکتشاف مکان باید گره‌های سنسوری خاصی را به گونه‌ای برگزینند که هر گره در گراف در محدوده ارتباطی یک مجموعه یکتا از حسگرها قرار گیرد. مسئله پیدا کردن یک کد شناسایی بهینه برای یک گراف دلخواه $NP - complete$ می‌باشد(رائو[۳][۴۴])، و به این خاطر در اینجا یک الگوریتم حریصانه جدید به نام $ID - CODE$ ارائه داده‌ایم که کدهای شناسایی ساده‌نشدنی ایجاد می‌کند. یک کدشناسایی ساده‌نشدنی است هرگاه هیچ کلمه‌کدی در آن قابل حذف نباشد تا بدین وسیله بتواند هر مکان را به صورت یکتا شناسایی نماید. نتایج عددی نشان می‌دهد که راه‌حل ارائه شده توسط الگوریتم برای رنج گسترده‌ای از پارامترها به راه‌حل بهینه نزدیک‌تر است.

---

[۳] N. S. V. Rao

۷–۱ چند رویه آشکارسازی موقعیت

سیستم‌های اکتشاف مکان برای کاربردهای مختلفی پیشنهاد و پیاده‌سازی شده‌اند. برای کاربردهای بیرونی، ماهواره‌ها برای سیستم GPS استفاده می‌شوند(هافمن[۴] و همکاران[۴۵]). GPS بر اساس مکان و زمان چهار ماهواره کار می‌کند و می‌تواند مکان را با تقریبی در حدود چند متر مشخص نماید، هر چند که بازتاب‌ها و اثرات چند مسیری، سودمندی GPS را در محیط‌های درونی محدود کرده است. سیستم‌های اکتشاف مکان درونی برای مواقعی که سودمندی GPS محدود شده است طراحی شده‌اند. این سیستم‌ها در سه گروه دسته‌بندی می‌شوند:

مادون قرمز(IR)، فراصوت(US) و رادیو(RF).

هر یک از این سیستم‌ها برای مقاصد طراحی خود به خوبی کار می‌کنند، اما کیفیت حیاتی و لازم برای شبکه‌های اضطراری را نمی‌توانند تأمین کنند.

- مادون قرمز: سیستم مکان‌یابی نشان برجسته یکی از اولین سیستم‌های مکان‌یابی داخلی است(وانت[۵] و همکاران[۴۶]، لانگ[۶] و همکاران[۴۷]، آزوما[۷][۴۸]). این سیستم با هر شخص به عنوان یک نشان برخورد می‌کند که به صورت تناوبی یک شناسه یکتا با استفاده از اشعه مادون قرمز از خود ساطع می‌کند و این اشعه به وسیله یکی از چندین گیرنده‌ای که در داخل ساختمان جاسازی شده، دریافت می‌شود. مکان این نشان با یک تقریب توسط همسایگی با نزدیکترین گیرنده مشخص می‌شود. سیستم‌های مادون قرمز به یک مسیر بین فرستنده و گیرنده که نور

[۴] B. Hofmann
[۵] R. Want
[۶] S. Long
[۷] R. Azuma

بتواند در آن مسیر حرکت نماید، احتیاج دارند. در شرایط اضطراری مسیر می‌تواند پویا و غیرقابل پیش‌بینی باشد و این باعث می‌شود که مسیر بین فرستنده و گیرنده به آسانی بسته شده و سیستم مستعد خطا و خرابی شود.

- فراصوت: سیستم‌های فراصوت نیز مکان‌یابی براساس همسایگی را فراهم می آورند اما میزان دقت را با اندازه‌گیری زمان فراصوت در حال انتشار نسبت به سیگنال رادیویی بهبود می‌بخشند(هارتر[۸] و همکاران[۴۹]، پریانتا[۹] و همکاران [۵۰]، پریانتا و همکاران[۵۱]) . این سیستم‌ها زمان رسیدن دو سیگنال از منابع انتشار سیگنال مختلف و شناخته شده را مقایسه می‌کنند و به گیرنده این اجازه را می‌دهند که مکان را محاسبه نماید. سیستم‌های فراصوتی کنونی نیز برای سیستم‌های اضطراری طراحی نشده‌اند. مسیرهای خط دید ممکن است مسدود شوند یا به وسیله تغییرات محیطی تغییر داده شوند که منتج به محدود شدن پوشش می‌شود.

- رادیو: امواج رادیویی به خاطر توانایی نفوذشان در مواد مختلف، توانایی قدرتمندی برای مکان‌یابی دارند. به جای استفاده از تفاوت در زمان رسیدن امواج که به وسیله سیستم‌های فراصوت انجام می‌شود، سیستم‌های مکان‌یابی رادیویی معمولاً مکان را بر اساس قدرت سیگنال دریافتی بر مبنای یک نسبت سیگنال به نویز(SNR) شناخته شده، مشخص می‌نماید. رادار(بهل و پادمانابهان [۱۰][۵۲]) یک نقشه SNR برای ساختمان از پیش محاسبه می‌کند، بردار قدرت سیگنال‌های دریافتی در ایستگاه‌های پایه مختلف با نقشه مقایسه می‌شوند تا مکان را معین نمایند. همانند طرح‌های ذکر شده قبلی، وقتی رادیو را در سیستم‌های اضطراری به کار می‌بریم،

[۸] A. Harter

[۹] N. B. Priyantha

[۱۰] P. Bahl, V. N. Padmanabhan

موضوعاتی در مورد اطمینان بخش بودن باقی می‌ماند. خرابی حسگر یا معرفی یک مسیر سیگنالی جدید، از شیفت دادن ساختارهای داخلی، می‌تواند شدیداً به سیستم‌های موجود آسیب بزند. سیستم‌های بر پایه SNR هم در مورد شرایط محیطی حساس هستند. اخیراً بالاسو [۱۱] و همکاران [۵۳] یک طرح موضعی کردن ساده که مکان‌یابی بر اساس نقاط نزدیک به آن را ارائه می‌دهد، پیشنهاد شده است. اگرچه این رویه فقط در مورد محیط‌های بیرونی قابل اجراست.

- کدهای شناسایی: سیستمی که در این رهیافت پیشنهاد می‌شود یک کدشناسایی را روی یک سیستم مکان‌یاب تقریب همسایگی قرار می‌دهد تا دقت و اطمینان بخش بودن را تقویت کند.

ساختمان موجود در تئوری به صورت شدیدی در گراف‌های منظم مانند ابرمکعب‌ها، مشبکه‌ها و درخت‌ها محدود شده است(شارون و همکاران [۱۲][۵۷]). رهیافت‌ها در چاکرابارتی و همکاران [۱۳][۵۴] و [۵۵] استفاده از این کدهای شناسایی شناخته شده را برای مقاصد تجسس در محیط‌های بیرونی پیشنهاد می‌کنند، اما آن‌ها یک ساختار منظم مشبکه‌گونه احتیاج دارند. به هر حال، گراف‌های منظم برای شبکه‌های چندپردازنده اختصاص داده شده‌اند اما آن‌ها به طور کلی برای شبکه‌های بی‌سیم به خصوص در محیط‌های درونی که موانع و بازتابنده‌های بسیاری در آن‌ها وجود دارد به سختی قابل فرض هستند. علاوه‌براین، شبکه‌های اضطراری اطمینان بخش بودن را نیاز دارند که در کدهای شناسایی استاندارد در دسترس نیستند.

سیستمی که‌در اینجا معرفی می‌کنیم یک تغییر شکل جهت‌دار قوی از کدهای شناسایی را به منظور ایجاد اطمینان بخشی بر روی یک توپولوژی دلخواه فراهم می‌آورد، تکنیک‌های به‌کار رفته برای

[۱۱] N . Bulusu

[۱۲] I.Charon

[۱۳] K. Chakrabarty

ساختن این کدها عملاً قابل تشخیص بوده و کدهایی فراهم می‌آورند که اندازه آن‌ها به پایین‌ترین حدود شناخته شده نزدیک بوده و تقریباً بهینه می‌باشند.

۷–۲ دید کلی

کارایی یک سیستم مکان‌یاب می‌تواند به وسیله صحت و درستی‌اش و دقت و تفکیک‌پذیری‌اش مشخص شود. صحت سیستم به وسیله احتمال اینکه ناحیه‌ای که هدف در آن حضور دارد به درستی تعیین شده باشد، سنجیده می‌شود. دقت و تفکیک‌پذیری سیستم، کوتاهترین فاصله بین هدف‌هایی که در یک ناحیه قابل تشخیص هستند، را منعکس می‌کند. به طور کلی صحت و درستی می‌تواند با دقت جایگزین شود و برعکس. در زمینه سیستم‌های پاسخی اضطراری، صحت و درستی بسیار مهم‌تر از دقت و تفکیک‌پذیری است. برای مثال، به منظور تعیین مکان یک پرسنل به خطر افتاده، معمولاً دانستن طبقه و اتاق کافی است، از طرف دیگر فرستادن گروه نجات به یک ناحیه اشتباه در موقعیت اضطراری مرگبار می‌باشد. بنابراین به جای مکان‌یابی پیوسته، این سیستم ناحیه پوشش را به نواحی قابل مکان‌یابی تقسیم می‌کند و یک نقطه در این ناحیه را به عنوان مکان هدف گزارش می‌دهد. سیستم می‌تواند در هر یک یا هردوی این مدل‌ها عمل کند:

سرویس مکان‌یابی یا ردیابی مکان.

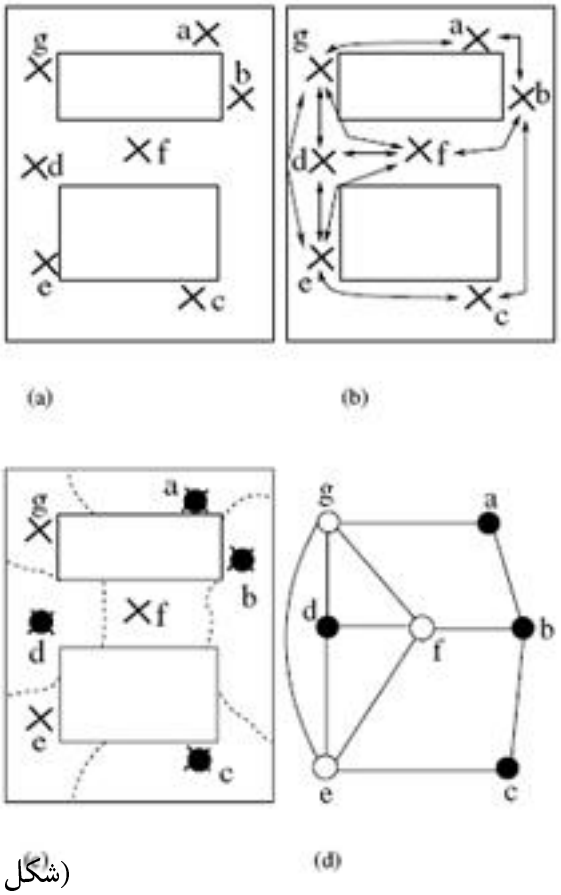
در سرویس مکان‌یابی، سیستم به طور متناوب بسته‌های IDی مربوط به حسگرهای مشخص شده را منتشر می‌کند. یک ناظر می‌تواند موقعیت خودش را از بسته‌هایی که دریافت می‌کند، مشخص نماید. در ردیابی مکان، ناظر IDی خودش را ارسال می‌کند و سیستم مکان او را از حسگرهایی که ID را دریافت کرده‌اند، تشخیص می‌دهد. در این‌جا سیستم را با مدل سرویس مکان‌یابی توصیف می‌کنیم،

هرچند تمام نتایج به طور برابر برای ردیابی مکان نیز قابل اعمال هستند. شبکه حسگر اضطراری موردنظر ما به صورت زیر طراحی می‌شود: اول، مجموعه‌ای از نقاط برای یک ناحیه داده شده انتخاب می‌شوند، سپس براساس اتصالات رادیویی بین نقاط، حسگرهای فرستنده بر روی یک زیرمجموعه از این نقاط که به وسیله کدشناسایی متناظر با آن مشخص می‌شود، واقع می‌شوند. این جایگذاری تضمین می‌کند که هر نقطه به وسیله یک مجموعه یکتا از فرستنده‌ها پوشش داده می‌شود. بنابراین ناظر می‌تواند موقعیت خودش را از مجموعه‌ای یکتا، توسط بسته‌های IDیی که دریافت می‌کند، تضمین نماید.

مثال ۱.۷ شکل (۱.۷) را در نظر بگیرید. این شکل نقشه ساده یک طبقه ساختمانی، اتصالات رادیویی بین آن‌ها و در نهایت گراف بدست آمده برای این طبقه ساختمانی را نشان می‌دهد. با اطلاعات اتصالی بین هر جفت از نقاط، هدف ما اینست که یک سیستم با استفاده از کمترین تعداد فرستنده‌ها بسازیم به‌طوریکه یک ناظر بتواند موقعیت خود را در هر یک از نقاط استنباط کند. برای نیل به این هدف چهار فرستنده بی‌سیم در نقاط a، b، c و d قرار می‌دهیم که هر فرستنده به طور متناوب و در فواصل معین یک ID یکتا پخش می‌کند. در شکل (۱.C) یک ناظر در ناحیه مربوط به f، IDهایی مربوط به فرستنده‌هایی در موقعیت‌های b و d را دریافت می‌کند. طبق تعریفی که در فصل ۱ بیان کردیم، مجموعه IDهایی که در موقعیت x دریافت می‌شود مجموعه شناسایی x نامیده می‌شود. اگر مجموعه شناسایی هر نقطه یکتا باشد، آن‌گاه اهداف می‌توانند به صورت صحیح در این نقاط واقع شوند.

۷–۳ کدهای شناسایی برای گراف‌های دلخواه

همانطور که گفتیم، مسئله ساختن کدهای شناسایی بهینه برای یک گراف دلخواه $NP-complete$ می‌باشد، بنابراین به جای اینکه به دنبال یک راه حل بهینه باشیم، یک الگوریتم حریصانه برای ساختن کدهای شناسایی ساده‌نشدنی پیشنهاد داده‌ایم. مشخصه ساده‌نشدنی بودن یعنی حذف نمودن یک کلمه‌کد از کدشناسایی باعث شود که آن کد دیگر کدشناسایی معتبری نباشد. بنابراین، الگوریتم پیشنهادی به سوی می‌نیمم کردن همگرا می‌شود. در حقیقت، نتایج تجربی نشان می‌دهد راه‌حلی که با این الگوریتم بدست می‌آید به راه‌حل بهینه بسیار نزدیک است. علاوه‌براین، می‌توانیم نشان دهیم الگوریتم پیشنهادی کامل است، یعنی تمام کدهای ساده‌نشدنی، شامل کدبهینه، که برای یک گراف وجود دارد، می‌توانند به وسیله اتخاب مناسب پارامترهای ورودی برای الگوریتم حاصل شوند.



(شکل ۱.۷)

۷–۳–۱ الگوریتم ساختن کد

به طور قراردادی، مسئله تعیین مکان بدین صورت است: گراف قابل شناسایی $G = (V, E)$ داده شده است، یک زیرمجموعه $C \subseteq V$ با مینیمم اندازه به گونه‌ای بیابید که یک کد شناسایی باشد. چون این مسأله $NP - complete$ است، به جای آن یک مدل اصلاح شده را در نظر می‌گیریم: گراف قابل شناسایی $G = (V, E)$ داده شده است، یک زیرمجموعه C از V به گونه‌ای بیابید که C یک کد شناسایی ساده‌نشدنی برای G باشد. **قدم اول** برای حل سؤال بالا اینست که آیا گراف داده شده قابل تشخیص است(فصل ۱).

لم ۱.۷ : برای گراف $G = (V, E)$ اگر C یک کد شناسایی باشد آن‌گاه $D \supseteq C$ نیز یک کد شناسایی است.

به صورت تجربی دریافته‌ایم که تقریباً تمامی گراف‌ها قابل شناسایی هستند مگر اینکه درجه متوسط آن‌ها خیلی کم یا خیلی زیاد باشد. گراف‌هایی که تشخیص‌ناپذیرند عموماً مجموعه‌ای از رئوس دارند که به صورت فیزیکی به یکدیگر نزدیک هستند. در ری[۱۴] و همکاران[۱۵] یک روش ساده برای حذف‌کردن کمترین تعداد از رئوس که یک گراف غیرقابل شناسایی را تشخیص‌پذیر کند بیان شده است. الگوریتم $ID - CODE$ که در شکل (۲.۷) نشان داده شده است با تخصیص هر رأس گراف ورودی، G، به عنوان یک کلمه‌کد شروع می‌شود. طبق آن‌چه در فصل ۱ ذکر کردیم تضمین می‌شود که V یک کد شناسایی برای هر گراف تشخیص‌پذیر است. در هر مرحله از الگوریتم، یک کلمه‌کد برای حذف کردن از کد جاری انتخاب می‌شود، چنانچه حذف کلمه‌کد منجر به حصول یک کد شناسایی شود الگوریتم ادامه می‌یابد، در غیراینصورت کلمه‌کد دوباره داخل کد قرار می‌گیرد و الگوریتم با درنظر

[۱۴] S. Ray

گرفتن یک کلمه‌کد دیگر ادامه پیدا می‌کند و این ادامه در امتداد یک سلسله از رئوس از پیش تعیین شده به عنوان پارامتر انجام می‌شود. با این طراحی، هر تکرار الگوریتم(شامل آخرین تکرار) با ایجاد یک کد شناسایی برای گراف به پایان می‌رسد. علاوه‌بر این، الگوریتم یک تکرار برای هر رأس در گراف انجام می‌دهد و در هر تکرار یکتایی مجموعه شناسایی برای هر گره را بررسی می‌کند. با استفاده از یک مرتب سازی مناسب برای تعیین نمودن یکتایی، مدت زمان اجرای الگوریتم $O(|V|^3 \log |V|)$ می‌باشد.

```
ID-CODE(G, a)
C = V
if C is not an identifying code
  do  EXIT
for each vertex x ∈ a, taken in order
  do  D = C \ {x}
      if ∃ u, v ∈ V such that I_D(u) = I_D(v)
            C = C
      else  C = D
return C
```

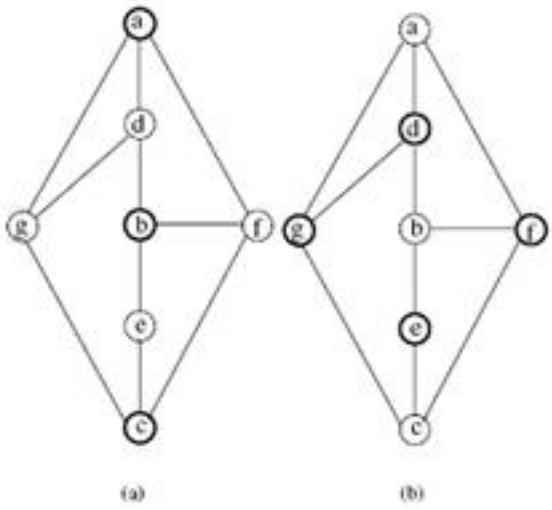
شکل (۲.۷): الگوریتم $ID - CODE$

قضیه ۱.۷ کد C بدست آمده با الگوریتم $ID - CODE$ ساده‌نشدنی است.

قضیه زیر، برعکس این قضیه یعنی هر کد شناسایی ساده‌نشدنی، شامل کد بهینه، می‌تواند به وسیله الگوریتم $ID - CODE$ از طریق انتخاب مناسب پارامترهای ورودی بدست آید، می‌باشد.

قضیه ۲.۷ برای هر کد شناسایی ساده‌نشدنی C از گراف G، یک دنباله ورودی $\hat{a}$ وجود دارد که $ID - CODE(G, \hat{a})$، C را برمی‌گرداند.

مثال ۲.۷ کارایی $ID-CODE$ به رشته رئوس انتخابی بستگی دارد. شکل (۳.۷) ثابت می‌کند که رشته‌های ورودی مختلف می‌توانند کدهای ساده‌نشدنی متفاوتی را نتیجه دهند، (a) اگر دنباله رئوس ورودی الگوریتم $ID-CODE$ ، $\hat{a}=\{f,g,d,e,a,b,c\}$ باشد، آن‌گاه کد حاصل $C=\{a,b,c\}$ و (b) اگر دنباله رئوس ورودی $\hat{a}=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ باشد، کد بدست آمده $C=\{d,e,f,g\}$ می‌باشد.



شکل ۳.۷: کدهای شناسایی ساده‌نشدنی برای دنباله‌های متفاوت.

چون حسگرهاممکن است خراب شوند یا اتصال‌های بین مکان‌های مختلف ممکن است در مواقع اضطراری تغییر کند، یک مفهوم جدید به نام کدهای r− قوی نیز معرفی می‌شود که خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر به [۱۵] رجوع کند. این کدها قادرند تا حدود r خطا در مدت جمع‌آوری بسته‌های ID در هر مکان را تصحیح نمایند و همزمان اطلاعات مکان را به‌درستی تشخیص دهند.

۷–۴ ارزیابی کارایی

در این بخش کارایی الگوریتم پیشنهادی را با شبیه‌سازی ارزیابی می‌کنیم. از آنجا که الگوریتم $ID-CODE$ پارامتر را به گونه‌ای دریافت می‌کند که براساس ترتیب رئوس ملاقات شده باشد، چند ترتیب ذهنی در نظر می‌گیریم.

۷–۴–۱ روش‌های موجود برای ترتیب‌دهی به رشته ورودی

ساده‌ترین روش اینست که تمام رئوس را با یک ترتیب تصادفی ملاقات کنیم. روش دیگر براساس یک مشاهده تجربی در الگوریتم‌های پیشنهادی مشابه به این صورت است که رئوسی که زودتر در رشته ملاقات می‌شوند، حذف شوند. بنابراین کارایی الگوریتم وقتی بیشتر می‌شود که کلمات‌کد "خوب" را در انتهای رشته ورودی قرار دهیم. از طریق تجربی، یک کلمه‌کد "خوب" است چنانچه به طور حداکثری از دیگر کلمات کد، دور باشد. برای اینکه کلمات کد خوب را حدس بزنیم، بین دو مورد زیر تفاوت قائل می‌شویم:

- اگر درجه متوسط رئوس در گراف پایین باشد، کلمات‌کد خوب باید درجه بالا داشته باشند، چون درجه‌های بالاتر تعداد کلمات‌کدی که برای پوشش تمامی رئوس گراف لازم است را می‌نیمم می‌کند.
- از طرف دیگر، چنانچه درجه متوسط رئوس در گراف بالا باشد، تعداد کمتری از رئوس می‌توانند گراف را پوشش دهند. گرچه، اگر کلمات کد، درجه بالایی داشته باشند آن‌گاه گوی‌های آن‌ها در تعدادی رأس متفاوت می‌شوند و در نتیجه باید تعداد بیشتری کلمه‌کد داشته باشیم. بنابراین در

این مورد، کلمات کد خوب باید درجه کمتری نسبت به هم داشته باشند.

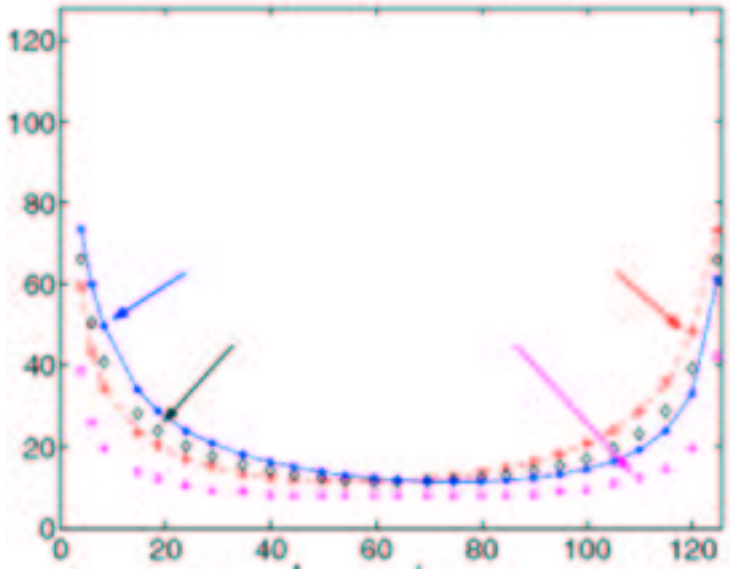
بر اساس این مشاهدات، یک راه حل تجربی ترکیبی برای ترتیب‌گذاری ارائه می‌دهیم: وقتی درجه متوسط گراف از نصف تعداد رئوس بیشتر باشد، رئوس را به ترتیب نزولی براساس درجه آن‌ها ملاقات می‌کنیم، در غیراین‌صورت آن‌ها را به ترتیب صعودی براساس درجه انتخاب می‌کنیم.

۷—۴—۲ نتایج شبیه‌سازی

برای ارزیابی الگوریتم آن را روی گراف‌های مختلف به‌کار بردیم. گراف‌های به کار رفته تصادفی، همبند، قابل شناسایی با درجه متوسط d_{ave} بودند که به وسیله الحاق هر دو رأس با احتمال $p(p = \frac{d_{ave}}{|V|-1})$ ایجاد شده بودند. برای هر d_{ave}، ۱۰۰ گراف مختلف به صورت تصادفی تولید و نتایج میانگین‌گیری شد. گراف‌هایی که در این شبیه‌سازی استفاده شد به خوبی برای مدل‌کردن یک ناحیه در قیاس با حوزه بی‌سیم با تعداد زیادی مانع، مناسب می‌باشند.

شکل (۴.۷) اندازه متوسط کد برآیندی را نشان می‌دهد که با الگوریتم $ID-CODE$ برای گراف‌های $|V| = ۱۲۸$ رأسی بدست آمده است. سه منحنی بالایی مربوط به ترتیب‌گذاری رشته رئوس به ترتیب بر اساس صعودی، نزولی و تصادفی می‌باشد. منحنی پایین، گونه اصلاح شده کران پایین در [۴۴ قضیه (۳)۱] می‌باشد. همچنین برای گراف‌های ۱۶، ۳۲، ۶۴ رأسی رفتار مشابهی مشاهده می‌شود. همانطور که از بخش(۷—۴—۱) انتظار می‌رود، ترتیب درجه‌های رشته رئوس براساس صعودی بودن وقتی $d_{ave} < \frac{|V|}{۲}$ است بهترین نتیجه و ترتیب نزولی وقتی $d_{ave} > \frac{|V|}{۲}$ است بهترین نتیجه را بدست می‌دهد. رشته‌های تصادفی از رئوس برای هر انتخابی از d_{ave} مابین دو مورد دیگر قرار می‌گیرد. تمام سه روش ترتیب‌گذاری، شامل ترتیب‌گذاری تصادفی، به طور معقولانه‌ای به کران پایین نزدیکند و به

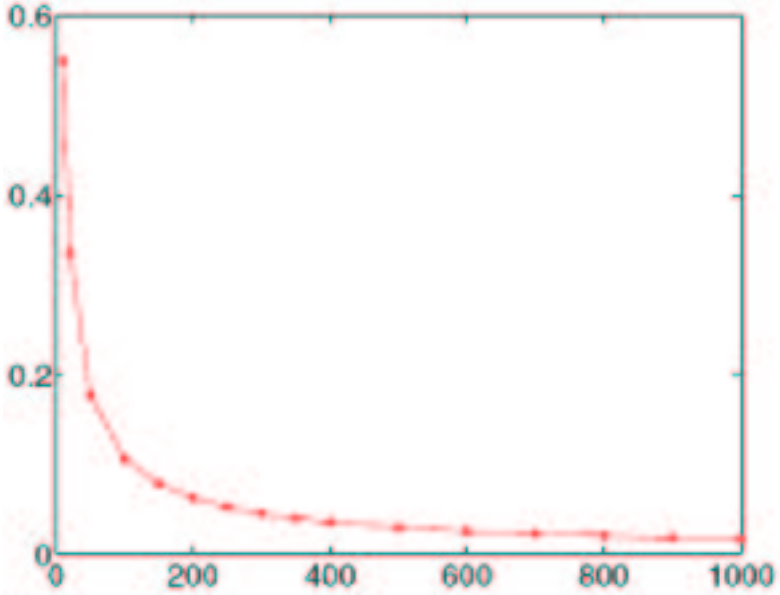
نظر نمی‌رسد که کارایی الگوریتم به مقدار زیادی توسط ترتیب رشته ورودی تحت تأثیر قرار گیرد، همچنین مشاهده شده که اندازه کد برآیند وقتی که درجه متوسط تقریباً $\frac{|V|}{۲}$ می‌باشد، کوچکترین است و حدس می‌زنیم که این همیشه برقرار است. با اینحال، کارایی الگوریتم به درجه متوسط گراف در یک ناحیه بزرگ، حساسیت نشان نمی‌دهد. برای مثال در شکل (۴.۷) می‌بینیم که برای رنج درجه متوسط بین ۴۰ و ۹۰ میانگین اندازه کد همچنان کوچکتر از ۱۵ می‌باشد.



شکل ۴.۷: محور قائم اندازه کد برآیند و محور افقی میانگین درجه می‌باشد.

همچنین به تعمیم $ID - CODE$ برای گراف‌های با تعداد زیاد رأس علاقه‌مندیم. شکل (۵.۷) نتایج شبیه‌سازی را برای گراف‌های ۱۰ تا ۱۰۰ رأسی که هر کدام دارای درجه متوسط $\frac{|V|}{۲}$ می‌باشند، نشان می‌دهد. شکل به وضوح نشان می‌دهد که نسبت کلمات‌کد به رئوس گراف، وقتی تعداد رئوس افزایش می‌یابد، کاهش پیدا می‌کند. بنابراین گراف‌های بزرگ، نسبتاً به تعداد کمتری فرستنده برای مکان‌یابی احتیاج دارند. این نشان می‌دهد که الگوریتم به خوبی مقیاس‌پذیر و مخصوصاً برای

گراف‌های بزرگ، مناسب است.



شکل ۵.۷: محور قائم اندازه نرمال شده کد برآیند و محور افقی تعداد گره‌ها می‌باشد.

پیوست A

نتیجه گیری و پیشنهادات

ما در این پایان‌نامه پس از تعریف کدهای شناسایی و بررسی ویژگی‌های اساسی آن‌ها به تعمیم آن‌ها پرداخته و کدهای $l-$ شناسایی و کد پوششی به شعاع t را تعریف کردیم. برای روشن‌شدن مطلب، کدهای شناسایی را در برخی گراف‌های خاص بررسی کردیم. روابط بین این مسأله و ماکزیمم درجه گراف را مورد مطالعه قرار دادیم و بعد از آن کران‌های کدهای شناسایی را در برخی توپولوژی‌های خاص گراف نظیر مکعب‌های دودوئی، غیردودوئی، درخت‌ها و مشبکه‌ها پیدا کردیم. همچنین یک روش برای ساختن گراف‌های بهینه که به کمترین تعداد کلمه‌کد برای شناسایی مجموعه‌های رئوس نیاز دارد، ارائه دادیم. سپس گراف‌های تصادفی را تعریف کرده و حدود بالایی و پایینی برای کمترین اندازه یک کد $l-$ شناسایی در یک گراف تصادفی و توابع آستانه‌ای برای خاصیت دارابودن چنین کدی را ارائه داده و نیز مفهوم کد شناسایی را با کدهای افزوده مرتبط کردیم.

در این کار متوجه شدیم که پس از مدل کردن یک مجموعه به صورت گراف و پیداکردن کمترین تعداد کدهای شناسایی آن می‌توانیم بدون آن‌که تعداد کدهای شناسایی این سیستم تغییر کند، پردازش‌گرهای دیگری نیز به سیستم اضافه کنیم.

چشم انداز آینده

برخی از نتایجی که در بحث مورد بررسی ما آمده است ناشناخته‌اند. برای مثال در توابع آستانه‌ای برای خاصیت پذیرفتن یک کد $t-$ شناسایی نمی‌دانیم که برای p یی به صورت

$$\frac{\log n}{n} \leq p \leq l \; ۲^{l-۱} \; \frac{\log n}{n}$$

و

$$۱ - (\frac{\log n}{n})^{\frac{۱}{t}} \leq p \leq ۱ - \frac{\log n}{n}.$$

چه اتفاقی رخ می‌دهد. امید است در آینده بتوانیم برای مسائلی از این دست که به صورت مسأله باز مطرح هستند پاسخ‌هایی بیابیم.

پیوست B

نمادها

گوی ورودی به v ..... $B^+(v)$

گوی خروجی از v ..... $B^-(v)$

مسیر n رأسی ..... P_n

دور n رأسی ..... C_n

درخت کامل q تایی با h سطح ..... CT_h^q

ابرمکعب n بعدی ..... H_n

کد بهینه ..... C^*

اندازه کد بهینه C^* به طول n و شعاع پوششی q ..... $K(n,q)$

حجم گوی به شعاع t ..... $V(t)$

کمترین تعداد کلمه‌کد در ابرمکعب دودوئی n – بعدی به شعاع t ..... $M_t(H_n)$

فضای همینگ ..... Z_2^n

کمترین تعداد کلمه‌کد در ابرمکعب p – تایی n – بعدی به شعاع t ..... $M_t^{(p)}(H_n)$

بخشی از مجموعه‌های رئوس از اندازه دقیقاً l، که قابل شناسایی هستند. ..... $C(l)$

کران پایین روی حداقل تعداد سطرها ..... $r(N,l)$

اندازه یک کد شناسایی کمینه ..... $c = c(G)$

تفاضل متقارن بین دو مجموعه ..... $\oplus$

کمان بین دو رأس u و v در گراف جهت‌دار ..... $\overrightarrow{uv}$

مجموعه کمان‌های یک گراف جهت‌دار ..... $A(G)$

گراف پروانه‌ای n بعدی ..... BF_n

یال بین دو رأس u و v در یک گراف غیرجهت‌دار ..... uv

گراف مکعبی همبند دوری n بعدی ..... CCC_n

گراف غیرجهت‌دار ..... $G = (V, E)$

گراف جهت‌دار ..... $G = (V, A)$

مجموعه رئوس گراف G ..... $V(G)$

مجموعه یال گراف G ..... $E(G)$

یال بین دو رأس u و v در گراف غیرجهتدار ..... $\{u, v\}$

کمان بین دو رأس u و v در گراف جهتدار ..... (u, v)

ماکزیمم درجه گراف ..... $\Delta(G)$

می‌نیمم درجه گراف ..... $\delta(G)$

درجه رأس v ..... $(deg(v))deg_G(v)$

همسایگی بسته رأس v ..... $N[v]$

گوی به شعاع r و به مرکز v ..... $B_r(v)$

فاصله بین دو رأس u و v ..... $(d(u,v)$ یا $)d_G(u,v)$

تعداد رئوس ..... $|V(G)|$

زیرگراف ..... $H = (V_H, E_H)$

گراف کامل ..... K_n

مجموعه شناسایی رأس v ..... $I(v, C)$ (یا $I_C(v)$)

مجموعه شناسایی یک مجموعه، X، از رئوس ..... $I_C(X)$

می‌نیمم اندازه یک کد شناسایی از گراف G ..... $M_1(G)$

می‌نیمم اندازه یک کد شناسایی به شعاع t از گراف G ..... $M_t(G)$

گراف ستاره ..... $k_{1,n-1}$

تراکم کد شناسایی C از G ..... $d_C(G)$

کمترین تراکم کد شناسایی G ..... $d^*(G)$

مرتبه گراف ..... n

واژه نامه انگلیسی به فارسی

کمان ..... arc

به‌طور مجانبی ..... asymptotically

گوی ..... ball

دودویی ..... binary

دوبخشی ..... bipartite

اندازه ..... cardinality

همسایگی بسته ..... closed neighbourhood

کلمه کد ..... codeword

تئوری کد ..... coding theory

ستون ..... column

گراف کامل ..... complete graph

مؤلفه ..... component

مؤلفه به مؤلفه ..... component- wise

تحلیل ناسازگاری ..... conflict resolution

همبند ..... connected

مختصات ..... coordinate

متناظربودن ..... correspond

هزینه ..... cost

پوشاندن ..... cover

مکعبی ..... cubic

دور ..... cycle

نزول– تنزل‌کردن ..... decrease

درجه ..... degree

تراکم ..... density

بعد ..... dimension

گراف جهت‌دار ..... directed graph

مجزا ..... disjoint

فاصله ..... distinct

غلبه‌کردن ..... dominate

مجموعه‌غالب ..... dominating set

یال ..... edge

عنصر ..... element

درایه ..... entry

تساوی ..... equality

خطا ..... error

صفحه اقلیدسی ..... euclidian plane

ناحیه ..... face

تشخیص خطا ..... fault diagnosis

متناهی ..... finite

گراف ..... graph

تئوری گراف ..... graph theory

شش‌ضلعی ..... henagonal

ابرمکعب ..... hypercube

قابل‌شناسایی ..... identifiable

کدشناسایی ..... identifiable code

گوی‌ورودی ..... incoming ball

صعودکردن– نموکردن ..... increase

مستقل ..... independent

نامتناهی ..... infinite

عدد صحیح ..... integer

بازه ..... interval

برگ ..... leave

طول ..... length

سطح ..... level

مجموعه مکان‌یاب ..... locating dominating set

کران پایین ..... lower bound

ماتریس ..... matrix

مشبکه ..... mesh

مینیمم‌کردن ..... minimize

سیستم چندپردازنده ..... multiprocessor system

نقیض– قرینه‌بردار ..... negation

همسایه ..... neighbour

شبکه ..... network

گره ..... node

غیر دودویی ..... nonbinary

ناتهی ..... nonempty

بهینه ..... optimal

زوج مرتب ..... ordered pair

گراف جهت‌دار ..... oriented graph

گوی خروجی ..... outcoming ball

مسطح خارجی ..... outerplanar

موازی ..... parallel

ولد– جد ..... parent

هم‌نوع ..... parity

مسیر ..... path

مسطح ..... planar

پردازش‌گر ..... processor

تایی ..... q- ary

شعاع ..... radius

نسبت ..... ratio

مستطیلی ..... rectangular

منتظم ..... regular

ریشه ..... root

سطر ..... row

حسگر ..... sensor

تفکیک‌کردن ..... separate

دنباله ..... sequence

رأس تنها ..... single vertice

سخت‌افزار ..... software

اکیداً ..... stritly

زیرمکعبی ..... subcubic

زیرگراف ..... subgraph

زیرمجموعه ..... subset

کد افزوده ..... superimposed code

تفاضل متقارن ..... symmetric difference

در مبنای سه ..... sternary

دقیق ..... tight

درخت ..... tree

مثلث ..... triangle

دوقلو ..... twin

گراف غیرجهت‌دار ..... undirected graph

اجتماع ..... union

کران بالا ..... upper bound

بردار ..... vector

رأس ..... vertex

رأس ..... vertice

وزن ..... weight

پیوست D

متن برنامه الگوریتم $ID-CODE.m$

در این پیوست متن برنامه اصلی و کمکی از برنامه‌ی $ID_CODE.m$، نوشته شده است. این برنامه با دریافت گراف مربوطه(یک ساختار شامل رئوس و ماتریس مجاورت) و ترتیب دلخواه برای بررسی حضور رئوس در کد(ورودی دوم)، به ترتیب، قابل حذف بودن این رئوس از کد اولیه که مجموعه همه رئوس گراف است را بررسی می‌کند. این الگوریتم با برنامه متلب[1] نوشته شده است.

```
********************** main **********************
function Code = ID_ CODE(G,seq(
% the input arguments are:
 %G: the Graph as a structure, consisting of:
   %G.v: the set of Vertices, a COLUMN vector of the name
   %G.e: the set of Edges, an one- zero matrix
 %seq: a COLUMN vector specifying the order of the vertices for being
 %examined
V= G.v
if (size( V,2) > 1(
    V=V;'
end
```

[1] Matlab

```
n=size( V,1(

E=G.e
disp('In the Code Vector, 1 for being in the code- 0 for not being(':
C= ones(n,1)'   % 1 for being in the code - 0 for not being
C=C;'
 %we have to see wether C is an ID-Code or not,
 %if not, there is no need to continue to the rest of the program
 %because if there were be an ID-Code, V must be so
if(~( all_ rows_ different(E+eye(n((((
     disp(' This Grraph does not possess an ID-Code because
 its Adjacency Matrix ( after adding the loops) has at least
 2 identical rows('
    return
else
    disp( 'The rows of the Adjacency Matrix of this graph
 are all different, so it CAN possess an ID- CODE: we would
check this in the follwing(':
end

E=E+ eye(n;(

for i=1:size( seq,2(
    disp('---------------------------')
    the_ element_ under_ consideration= seq(i(
    j=seq(i;(
    E
    D=C;
    D(j) = 0;
    E(j,j) = 0;
```

```
    I_D= E(:,find(D;((
    D
    I_D
    sum(sum(I_D,2)==0(
    if (~(all_rows_ different( I_D)) | | sum(sum(I_D,2)==0)>0
(
        E(j,j)=1;
        disp(sprintf('%d, cannot got omitted from the
code',j((
        C
        continue           % to continue to the rest of
vertices
    else
        disp( sprintf(%d, accepted to got omitted from the
code', j((
         C = D
    end
end

disp('  ')
disp('  ')
disp('--------------------------------')

disp('  Pay attention: the given sequence, specifies the
order of DELETION from Code not ENTERING the Code('!
disp('  The resulting code is as follows(':

Code= V(find(C;'((
return
function yes_no = all_rows_different(A)
```

```
% the program returns 1 if all the rows of A are different
% it returns 0 otherwise

m = size (A,1);       % number of its rows

y_n=1;

for  h=1 : m
     for   f=h+1:m
           if  (sum( abs( A(h, :)- A(f,:)))== 0)
                y_n = 0;
                break;
           end
     end
end
yes_ no= y_n;
end
```

کتاب‌نامه

[1] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, and L.B. Levitin. *On a new class of codes for identifying vertices in graphs,* IEEE Transactions on Information Theory, 44: 599-611, 1998.

[2] N. Bertrnd, I. Charon, O. Hudry, and A. lobstein, *Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles,* European Journal of Combinatorics, 25(7): 969- 987, 2004.

[3] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein, *1-identifying codes on trees,* Australasian Journal of Combinatorics, 31: 21-35, 2005.

[4] C. Berge, *Theorie des graphes et ses applications,* Collection Universitaire des Mathematiques, Dunod, Paris, 1958.

[5] T. Y. Berger- Wolf, M. Laifenfeld, and A Trachtenberg, *Identifying codes and the set cover problem,* Proceedings of the 44th Annual Allerton Conference on

Communication, Control and Computing, Monticello, USA, September 2006.

[6] I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein, *Extermal cardinlities for identifying and locating dominating codes in graphs,* Discrete Mathematics, 307(3-5): 356-366,2007.

[7] G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn, and Lobstein, *Covering Codes,*Elsevier, Amsterdam, 1997.

[8] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, and G. Zemor, *On identifying codes,* volume 56 of Proceeding of DIMACS Workshop on Codes and Association Schemes '99, pages 97-109, 2001.

[9] C. J. Colbourn, P. J. Slater, and L. K. Stewart, *Loccating- dominating sets in series- parallel networks,* Congressus Numerantium, 56: 135- 162, 1987.

[10] J. de RUMEUR, *Communicatins dans les reseaux de processeurs,* Masson, Paris, 1994.

[11] S. Gravier and J. Moncel, *On graphs having a $V\backslash\{x\}$ set as an identifying code,* Discrete Mathematics, 307(3-5): 432- 434, 2007 Algebraic and Topological Methods in Graph Theory.

[12] T. W Haynes, T. W. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs,* Marcel Dekker, 1998.

[13] J. Hromkovic, R. Klasing, A. Pelc, P. Ruzicka, and W. Unger, *dissemination of Information in Communication Networks: Broadcasting, Gossiping, Leader Election, and Fault- Tolerance(Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series* Springer, 1 edition, April 2005.

[14] F. P. Preparata and J. Vuillemin, *The cube- connected cycles: a versatile network for parallel computation,* C0mmunications of the ACM, 24(5): 300-309, 1981.

[15] S. Ray, R. Ungrangsi, F. De Pellegrini, A. Trachtenberg, and D. Starobinski, *Robust location detection in emergency sensor networks ,* In Proceedings of the IEEE INFOCOM, April 2003.

[16] P. J. Slater, *Domination and location in acyclic graphs,* Networks, 17(1): 55-64, 1987.

[17] P. J. Slater, *On location- domination numbers for certain classes of graphs,* Congressus Numerantium, 45: 97- 106, 1984.

[18] K. Thulasiraman, M. Xu, Y, Xiao, and X.- D. Hu, *Vertex identifying codes for fault isolation in communication network,* Proceedings of the International Conference on Discrete Mathematics and Applications(ICDM 2006), Bangalore, 2006.

[19] J. Bentley and H. T. Kung, *A tree machine for searching problems,* in Proc. 1979 Int. Conf. Parallel Processing, 1979, pp. 257- 266.

[20] G. D. Cohen, M. G. Karpovsky, H. F. Mattson, Jr., and J. R. Shatz, *Covering radius survey and recent results,* IEEE Trans. Inform theory. vol. IT-31, pp. 328-344, May 1985.

[21] G. D. Cohen, A. C. Lobstein, and N. J. A. Sloane, *Further results on the covering radius of codes,* IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT- 32, pp. 680-694, Sept. 1986.

[22] F. Harary, , *Graph Theory,* Reading, MA: Addison- Wesley, 1969.

[23] I. S. Honkala. *Lower bounds for binary covering codes,* IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 34, pp. 326- 329, Mar. 1988.

[24] W. D. Hillis and L. W. Tucker, *THE CM-5 connection machine: A scalable supercomuter,* Commun. Assoc. Comput. Mach., vol. 36, pp. 31- 40, 1993.

[25] C. E. Leiserson, *Fat trees: Universal networks for hardware- efficient supercomputing,* IEEE Trans. Comput., vol. C-34, pp 892- 901, 1985.

[26] F. J. Mac Williams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error Correcting Codes,* New York: North- Holland, 1993.

[27] J. L. Massey, *Conflict- resolution algorithms and random access communications,* Multi- User Communication Systems. New York: Springer- Verlag, 1981.

[28] C. A. Mead and L. A. L. A. Conway, *Introduction to VLSI Systems,* Reading, MA: Addison Weslay, 1980.

[29] J. Savir, G. S. Ditlow, and P. H. Bardell, *Random pattern testability,* IEEE Trans. Comput., vol. C- 33, pp. 79-80, Jan. 1984.

[30] K. G. Shin, *HARTS: A distributed real- time architecture,* IEEE Computer, pp. 25-35, May 1991.

[31] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilistic Method, Wiley interscience,* New York, 2000.

[32] B. Bollobas, *Random Graphs,* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[33] P. Erd' os, A. Renyi, *On the evolution of random graphs,* Publ, Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. 5(1961) 17- 61.

[34] P. Erd' os, A. Renyi, *On the evolution of random graphs,* Bull. Inst. Internat. Statist. 38(4) (1961) 343- 347.

[35] S. Janson, T. Luczak, A. Ruci'nski, *random Graphs,* Wiley, New York, 2000.

[36] W. H. Kautz, R. R. Singleton, *Nonrandom binary superimposed codes,* IEEE Transform. Inform. Theory 10(4)(1964) 363- 377.

[37] R. Durrett, *Random Graph Dynamics,* Book by Rick Durrent, Cornell U., Published by Cambridge U. Press, October 2006.

[38] F. K. Hwang, V. Sos, *Non- adaptive hypergeometric group testing,* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaricae 22(1-4) (1987), 257- 263.

[39] M. Ruszink- o, *On the upper bound of the size of the r- cover- free families,* Journal of Combinatorial Theory Series A 66(2)(1994), 302-310.

[40] A. Frieze, R. Moncel, M. Ruszinko, C. Smyth, *Codes Identifying Sets of Vertices in Ranom Networks,* Discrete mathematics 307(2007), 1094- 1107.

[41] J. Moncel, *Electronic Notes in Discrete Mathematics,* 22(2005) 229- 232.

[42] S. Edward- Austin Hollar, *COTS dust,* M.S. these, University of California, Berkeley, 2000.

[43] D. Estrin, D. Culler, K. Pister, and G. Sukhatme, *Connecting the physical world with pervasive networks,* IEEE Pervasive Computing, vol. 1, no. 1, pp. 59- 69, January- March 2002.

[44] N. S. V, Rao, *Computational complexity issues in operative diagnosis of Graph-Based systems,* IEEE Transactions on Computers, vol. 42, no. 4, pp. 447- 457, April 1993.

[45] B. Hofmann- Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins, *Global Positioning System: Theory and Practice,* Springer- Verlag, 4 edition, 1997.

[46] R. Want, A. Hopper, V. Falcao, and J. Gibbons, *The active badge location system,* ACM Transactions on INformtion Systems, vol. 10, no. 1, pp. 91- 102, January 1992.

[47] S. Long, R. Kooper, G. D. Abowd, and C. G. Atkeson, *Rapid protyping of mobile contex- aware applications: The Cyberguide case study,* in 2th ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (MOBICOM '96). ACM, July 1996.

[48] R. Azuma, *Tracking requirements for augmented reality,* Communication of the ACM, vol. 36, no. 7, pp. 50- 51, July 1993.

[49] A. Harter, A. Hopper, P. Steggles, A. Ward, and P. Webster, *The anatomy of a context aware application,* in Mobicom' 99. ACM,8 1999.

[50] N. B. Priyantha, A. Chakraborty, and H. Balakrishnan, and S. Teller, *The cricket location- support system,* in 6th ACM International Conference on Mobile Computing and Networking(ACMMOBICOM) Boston, MA, 2000, ACM.

[51] N. B. Priyantha, A. Chakraborty, and H. Balakrishnan, and S. Teller, *The cricket compass for Contextaware mobile applications,* in 7th ACM Conference on Mobile Computing and Networking(MOBICOM), Rome, Italy, July 2001, ACM.

[52] P. Bahl and V¿N. Padmanabhan, *RADAR: An in-building RF- based user location and tracking system,* in IEEE INFOCOM 2000, Tel Aviv, Israel, 2000, IEEE.

[53] N. Bulusu, J. Heidemann, and D. Estrin, *GPS-less low cost outdoor localization for very small devices,* Tech. Rep. 00-729, University of Southern California/ Information Science Institue, April 2000.

[54] I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein, *Identifying codes with smsll radius in some infinite regular graphs,* The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 9, 2002.

[55] K. Chakrabarty, S. S. Iyenger, H. Qi, and E. Cho, *Grid coverage for surveillance and Target location in distributed sensor networks,* Accepted for publication in IEEE Transactions on Computers.

[56] K. Chakrabarty, H. Qi, S. S. Iyenger, and E. Cho, *Coding theory framework for target location in distributed sensor networks,* in International Symposium on Information Technology: Coding and Computing, 2001, pp. 130- 134.

[57] S. Gravier, J. Moncel *Construction of Codes Identifying Sets of Vertics,* the electronic journal of combinatorics 12(2005).

Identifying codes in graphs

Abstract

Keywords: *Coding theory, Covering radius, Graph theory, Multiprocessor systems, Random networks, Vertex- identifying codes.*

Identifying codes in graphs

by

A. Jalali

Submitted in Partial Fulfillment
of the Requirements
for the Degree of

Master of Science
in
Applied Mathematical

Under supervision of
Dr. A. Nezakati

2010

Mathematics Department

Tarbiat Moallem University of

Sabzevar