دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آمار ریاضی، گرایش احتمال

عنوان

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی همبسته منفی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

استاد مشاور

دکتر الهام دسترنج

پژوهشگر

مریم عباسی علی کمر

۲۸آبان۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: عباسی علی‌کمر نام: مریم

عنوان: قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی همبسته منفی

استاد راهنما: دکتر احمد نزاکتی
استاد مشاور: دکتر الهام دسترنج

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار ریاضی گرایش: احتمال

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۸آبان۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۵

واژگان کلیدی: همگرایی کامل- متغیرهای تصادفی پیوندی منفی- قانون قوی اعداد بزرگ- دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی- متغیرهای تصادفی m پیوندی منفی

چکیده

از قضایای مهم در نظریه احتمال، قضایای حدی می‌باشند. در میان آن‌ها قانون اعداد بزرگ از اهمیت خاصی برخوردار است. در این قانون تحت شرایطی خاص، میانگین متغیرهای تصادفی به امید ریاضی خود همگرا می‌شود. این قانون اولین بار درسال ۱۷۱۳ میلادی مطرح شد. سال‌ها بعد با معرفی مفهوم پیوند منفی برای متغیرهای تصادفی، دانشمندان بسیاری به بررسی همگرایی کامل برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداختند. هدفی که در این پایان‌نامه دنبال می‌کنیم بررسی قضایای حدی (قانون قوی اعداد بزرگ) و سرعت همگرایی برای مجموع‌های موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است. باتوجه به اهمیت قانون قوی اعداد بزرگ، با در نظر گرفتن شرایط مختلف برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، همگرایی کامل را برای مجموع‌های موزون بررسی خواهیم کرد.

تقدیم به خداوندی که

در دانایی بی‌مانند است...

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

خدای را بسی سپاس گزارم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آن ها شاخ و برگ گیرم و در سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند. دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز و نشیب به من آموختند. عزیزانی که برایم زندگی کردن و انسان بودن را معنا کردند. همچنین از محبت سرشار خواهران عزیزم که همواره گرمای وجودشان آرامش بخش لحظات زندگیم بوده سپاس گزارم. برایشان آرزوی بهترین ها را دارم...

حال این برگ سبزی است تحفه درویش، تقدیم به خانواده ام که تمام هستی من هستند...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نزاکتی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که به‌طور قطع بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از خانم دکتر دسترنج که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل نمودند، سپاس‌گزارم.
از تمامی اساتید گروه آمار که در دو سال گذشته علم سرشار خود را به من آموختیند قدردانی می‌کنم. امیدوارم توانسته باشم با این پایان‌نامه پاسخگوی زحمات آنان باشم.
همچنین از عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش دوستان و هم‌کلاسی‌های مهربانم که در سردترین روزگار همراهم بودند سپاس‌گزارم و آرزومندم روزگاری پر از موفقیت و خوشبختی و شادکامی درانتظارشان باشد.

مریم عباسی علی‌کمر
۲۸ آبان ۱۳۹۲

پیش‌گفتار:

از مهم‌ترین نتایج نظری در نظریه احتمال، قضایای حدی می‌باشند. در میان این قضایا، قانون اعداد بزرگ از اهمیت خاصی برخوردار است. در قانون اعداد بزرگ تحت شرایطی، میانگین یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع به امید ریاضی مشترکشان همگرا می‌شود. قانون قوی اعداد بزرگ برای انواع متغیرهای تصادفی وابسته توسط افراد بسیاری از جمله نزاکتی[1]، می هاو کو[2]و جونگ بییک و همکاران[3] مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه پس از معرفی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها، قانون قوی اعداد بزرگ و سرعت همگرایی را تحت شرایط مختلف برای این متغیرها مورد بررسی می‌دهیم. پایان‌نامه پیش رو در چهار فصل گردآوری شده است. مطالب هر یک از فصل‌ها به شرح زیر هستند:

- در فصل ۱، گذری بر تاریخچه موضوع مورد بحث داریم، سپس به معرفی قانون قوی اعداد بزرگ و متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، دیگر تعاریف مقدماتی و ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداخته‌ایم. همچنین لم‌ها و قضایای کاربردی که در اثبات برخی روابط مورد استفاده قرار می‌گیرند را بررسی می‌کنیم.

- در فصل ۲، نخست قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع موزون دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی آورده شده است. در این خصوص روابط بدست آمده توسط بای و چنگ[4]در سال ۲۰۰۰ را مورد بررسی قرار داده‌ایم و سپس به جزییات قضیه‌ای کلی که اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ بیان شد پرداختیم. در بخش دوم به قضیه‌ای از این مقاله می‌پردازیم که در آن قانون قوی اعداد بزرگ مارسینکوویچ و زیگموند به متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تعمیم داده شده است.

- در فصل ۳، در بخش اول روابطی از همگرایی کامل برای مجموع موزون آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداخته‌ایم و در بخش دوم برخی نتایج به‌دست آمده در زمینه سرعت همگرایی آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

- در فصل ۴، نوع دیگری از پیوند با عنوان m-پیوندی منفی را معرفی کرده‌ایم و به تحقیق و بررسی همگرایی کامل برای آرایه‌هایی از این متغیرهای تصادفی پرداخته‌ایم. قضیه اصلی در این فصل مربوط به مطالعات هو و همکاران [5]در سال ۲۰۰۹ است که نه تنها نتایج قبلی را گسترش دادند، بلکه اثباتی ساده‌تر برای آن ارایه دادند.

[1] Nezakati(2005)
[2] Mi-Hwa Ko(2011)
[3] Jong-Baek et al (2008)
[4] Bai & Cheng
[5] Hu et al(2009)

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ تاریخچه

علم نظریه احتمال در آغاز برای بررسی بازی‌های شانس ابداع شد، با گسترش آن، به تدریج به نظام گسترده‌ای تبدیل شد که با بسیاری از شاخه‌های ریاضی مرتبط بود. در خلال این گسترش، این علم نقش اساسی در قالب‌سازی ریاضی برای علوم کاربردی گوناگون، مانند آمار، تحقیق در عملیات، زیست‌شناسی، اقتصاد، روانشناسی و ... داشت. بازتاب این پیشرفت‌ها، تغییر متون بسیاری از کتب احتمال مربوط به بازی‌های تصادفی و نظریه خطاها بود، که به بخش‌های احتمالی مربوط می‌شد. این دوره با ظهور رساله کلاسیک فلر در سال ۱۹۵۰ میلادی به پایان رسید و این نظریه به نظام ریاضی مهمی برای مطالعه در بسیاری از زمینه‌های علمی تبدیل شد. قانون اعداد بزرگ اولین بار توسط ریاضیدان سوئیسی یاکوب برنولی[۱](۱۷۱۳) برای محاسبه احتمال در تئوری بازی‌ها ارائه شد و سال‌ها بعد یعنی در سال ۱۸۳۵ مورد توجه ریاضی‌دانان دیگر از جمله پاسکال [۲] و پواسن [۳] قرار گرفت. پس از آن‌ها نیز ریاضی‌دانان دیگری همچون چبیشف[۴] ، کانتلی [۵] ، مارکوف [۶]، بورل[۷]، کولموگروف[۸]و خین چین[۹]، تلاش‌های زیادی در جهت بهبود قانون اعداد بزرگ انجام دادند و سرانجام این مطالعات به تقسیم‌بندی قانون اعداد بزرگ به دو "قانون قوی " و " قانون

[۱] Bernoulli
[۲] Pascal
[۳] Poisson
[۴] Chebyshev
[۵] Cantelli
[۶] Markove
[۷] Borel
[۸] Kolmogoroff
[۹] Khinchin

ضعیف" منتهی شد.

مفهوم همبستگی (مثبت) متغیرهای تصادفی اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط ایساری[۱۰] و پروسچن[۱۱] و واکآپ[۱۲] معرفی شد. از آن پس بسیاری از دانشمندان موضوعات مربوط به آن را گسترش دادند.

مارسینکوویچ و زیگموند[۱۳]قانونی به نام خودشان در سال ۱۹۳۷ برای دنبالهای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع به‌دست آوردند. پس از آن همین نتیجه توسط فلر[۱۴](۱۹۴۶)به‌دست آمد. بعدها محققان زیادی از جمله چترجی[۱۵](۱۹۷۰) و رسالسکس[۱۶]و استویکا[۱۷](۲۰۱۰) قانون قوی را در حالتی که متغیرهای تصادفی هم‌توزیع هستند و بدون شرط استقلال، به‌دست آوردند.

سال‌ها بعد، یعنی در سال ۱۹۸۱ مفهوم همبستگی منفی برای اولین بار توسط آلام[۱۸] و سکسنا[۱۹] معرفی شد، پس از آن‌ها در سال ۱۹۸۳، جاج-دو[۲۰] و پروسچن[۲۱] در مقاله مشترکی به بررسی برخی ویژگی‌های مهم در همبستگی منفی برای متغیرهای تصادفی پرداختند و نشان دادند همبستگی منفی نوعی وابستگی منفی در میان متغیرهای تصادفی است، با این تفاوت که همبستگی منفی یک برتری نسبت به وابستگی منفی دارد که عبارتست از این " توابع صعودی از مجموعه‌های مجزا بر روی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، باز هم پیوندی منفی خواهند بود." که این ویژگی برای وابستگی منفی برقرار نیست.

ما در این پایان‌نامه به بررسی مفاهیم و قضایای پیرامون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی می‌پردازیم. برای آشنایی با انواع وابستگی منفی، آن‌ها را در این فصل معرفی می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. سیگما میدان[۲۲]

فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω باشد، اگر برای هر عضو$\mathcal{F}$ مانند A دو خاصیت زیر برقرار

[۱۰] Esary
[۱۱] Proschan
[۱۲] Walkup
[۱۳] Marcinkiewicz & Zygmund
[۱۴] Feller
[۱۵] Chatterji
[۱۶] Rosalsky
[۱۷] Stoica
[۱۸] Alam
[۱۹] Sexena
[۲۰] Joag-Dev
[۲۱] Proschan
[۲۲] Sigma Field

باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ یک سیگما جبر روی مجموعه Ω خواهد بود.

i: $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F},$

ii: $A_n \in \mathcal{F}, n \geq ۱ \Longrightarrow \cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$

تعریف ۲.۲.۱. فضای احتمال[۲۳]

فرض کنید Ω مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{F}$ سیگما میدانی شامل تمام زیر مجموعه‌های Ω باشد، اگر P تابعی با دامنه $\mathcal{F}$ و برد $[۰, ۱]$ باشد، سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال خواهد بود، وقتی سه اصل زیر برقرار باشد:

(i)

$$P(\Omega) = ۱,$$

(ii) برای هر عضو مانند A متعلق به سیگما میدان،

$$P(A) \geq ۰,$$

(iii) اگر دنباله $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ دو به دو مجزا و متعلق به سیگما میدان $\mathcal{F}$ باشند، به طوری که $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$ نیز عضو سیگما میدان باشد، آن‌گاه

$$P\Big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i).$$

دقت داشته باشید تمام متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده در قضایا و لم‌های این پایان‌نامه متعلق به فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌باشد و ما از تکرار این موضوع اجتناب می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. آزمایش تصادفی[۲۴]

یک مفهوم اساسی برای بررسی پدیده‌های تصادفی، آزمایش تصادفی است. از جنبه‌ی نظری، آزمایش تصادفی عملی است که اولا تحت شرایط یکسان قابل تکرار باشد، ثانیا قبل از انجام، نتیجه‌ی آن مشخص نبوده ولی مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن آن قابل تعیین باشد.

[۲۳] Probability Space
[۲۴] Random Experience

درعمل بسیاری از آزمایش‌ها را به‌صورت " آزمایش تصادفی" در نظر می‌گیریم، هر چند تکرار آن‌ها در شرایط واقعا یکسان امکان‌پذیر نباشد.

تعریف ۱.۲.۴. فضای نمونه[۲۵]

اولین قدم در بررسی یک آزمایش تصادفی، تعیین نتایج ممکن آزمایش است. از نظر ریاضی این عمل به معنی در نظر گرفتن یک مجموعه‌ی Ω است، به‌طوری‌که این مجموعه نمایان‌گر کلیه‌ی حالات و نتایج ممکن آزمایش باشد. این مجموعه را اصطلاحا فضای نمونه آزمایش و هر عضو آن را یک برآمد آزمایش می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۵. متغیر تصادفی[۲۶]

فرض کنید سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد، تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\{\omega : \omega \in \Omega \quad \& \quad X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۱.۲.۶. همگرایی کامل[۲۷]

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی همگرای کامل به ثابت θ است، اگر برای هر $\varepsilon > ۰$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P\{|X_n - \theta| > \varepsilon\} < \infty.$$

تعریف ۱.۲.۷. همگرایی قریب به یقین[۲۸]

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی، به‌طور قریب به یقین $(a.s.)$ به متغیر تصادفی X همگراست، اگر و تنها اگر

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \quad as \quad n \to \infty\}) = ۱.$$

دقت نمایید که این همگرایی را به این صورت نمایش می‌دهیم که $X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad as \quad n \to \infty$.

قضیه ۱.۲.۸. ***قانون قوی اعداد بزرگ***[۲۹]

اگر $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با امید ریاضی یکسان μ باشد

[۲۵] Sample Space
[۲۶] Random Variable
[۲۷] Complete Convergence
[۲۸] Almost Surely Convergence
[۲۹] Strong law of large numbers

و $E(|X_i|) < \infty$ و $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ، آن‌گاه

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu \quad n \longrightarrow \infty.$$

تعریف ۹.۲.۱. تابع نشانگر[۳۰]

تابعی از Ω به $\{0,1\}$، مشخص کننده‌ی زیرمجموعه‌ای مانند A از Ω است و با نماد $I_A : \Omega \to \{0,1\}$ نمایش داده می‌شود و به این صورت تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع O بزرگ[۳۱]

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه برای $x \to \infty$

$$f(x) = O\Big(g(x)\Big),$$

اگر و تنها اگر مقدار ثابتی مانند C و عدد حقیقی x_0 وجود داشته باشد، به طوری که برای همه $x > x_0$ داشته باشیم

$$f(x) \leq Cg(x).$$

تعریف ۱۱.۲.۱. تابع o کوچک

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه برای $x \to \infty$

$$f(x) = o\Big(g(x)\Big),$$

اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. متغیرهای تصادفی به طور تصادفی مغلوب[۳۲]

یک آرایه $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی را به طور تصادفی مغلوب با متغیر تصادفی X گویند، هرگاه ثابت مثبت D وجود داشته باشد و برای هر $x \geq 0$

$$P[|X_{ni}| > x] \leq DP[D|X| > x].$$

[۳۰] Indicator
[۳۱] Order Function
[۳۲] Stochastically dominated

تعریف ۱.۲.۱۳. آرایه تاپلیتس[۳۳]

آرایه دو بعدی $\{a_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ از اعداد حقیقی را آرایه‌ای تاپلیتس گوییم، هرگاه دوشرط زیر توام برقرار باشند

(i) برای هر $i \geq ۱$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} a_{ni} = ۰$.

(ii) برای هر $n \geq ۱$ و ثابت مثبت c داشته باشیم $\sum_{i=۱}^{\infty} |a_{ni}| \leq c$.

تعریف ۱.۲.۱۴. تابع محدب[۳۴]

تابع g با مقادیر حقیقی را محدب گوییم، اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$g(\alpha x + (۱-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (۱-\alpha)g(y).$$

۱.۳ انواع متغیرهای تصادفی وابسته منفی

تعریف ۱.۳.۱. متغیرهای تصادفی وابسته منفی[۳۵]

متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n, n \geq ۲$ وابسته منفی(ND) خواهند بود، اگر برای هر $x_۱, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n}\{X_i \leq x_i\}\Big) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i \leq x_i),$$

و

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n}\{X_i > x_i\}\Big) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i > x_i).$$

تعریف ۱.۳.۲. (لهمن.۱۹۶۶) **متغیرهای تصادفی وابسته ربعی منفی** [۳۶]

دو متغیر X, Y را وابسته ربعی منفی (NQD) گوییم هرگاه به ازای هر x, y

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x]P[Y \leq y]. \qquad (۱.۱)$$

[۳۳] Toeplitz
[۳۴] Convex Function
[۳۵] Negative Dependent
[۳۶] Negative Quadrant Dependent

به این نکته دقت نمایید که از تعریف ۲.۳.۱ می‌توان نتیجه گرفت که بازای هر x و y

$$P[X > x, Y > y] \leq P[X > x]P[Y > y]. \tag{۲.۱}$$

زیرا

$$\begin{aligned} P[X > x, Y > y] &= ۱ - P[X \leq x \quad \text{یا} \quad Y \leq y] \\ &= ۱ - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x, Y \leq y] \\ &\leq ۱ - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x]P[Y \leq y] \\ &= (۱ - P[X \leq x])(۱ - P[Y \leq y]) = P[X > x]P[Y > y]. \end{aligned}$$

به طور مشابه رابطه (۱.۱) را می‌توان (۲.۱) از به دست آورد. بنابراین این دو رابطه معادل هستند.

تعریف ۳.۳.۱. (جاج دو و پروسچن.۱۹۸۳) **متغیرهای تصادفی وابسته متعامد منفی** [۳۷]

متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ را از بالا وابسته متعامد منفی [۳۸] $(NUOD)$ گوییم، اگر برای اعداد حقیقی $x_۱, \ldots, x_n$ داشته باشیم

$$P(X_۱ > x_۱, \ldots, X_n > x_n) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i > x_i),$$

و از پایین وابسته متعامد منفی[۳۹] $(NLOD)$ خواهند بود، اگر

$$P(X_۱ \leq x_۱, \ldots, X_n \leq x_n) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i \leq x_i).$$

در نهایت متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ را وابسته متعامد منفی (NOD) گوییم، اگر هم $NLOD$ و هم $NUOD$ باشند.

برای آشنایی با انواع دیگری از متغیرهای تصادفی وابسته با عنوان متغیرهای تصادفی وابسته معکوس منظم از درجه دو [۴۰] $(RR۲)$ و متغیرهای تصادفی وابسته منفی در دنباله که شامل متغیرهای بطور شرطی

[۳۷] Negative Orthant Dependent
[۳۸] Negative Upper Orthant Dependent
[۳۹] Negative Lower Orthant Dependent
[۴۰] Reverse Regular Of Order Two

نزولی در دنباله[۴۱] (CDS) و متغیرهای وابسته منفی در دنباله[۴۲] (NDS) هستند، به مقاله جاج-دو و پرسچن (۱۹۸۱) مراجعه کنید. در پایان این بخش به تعریف متغیرهای تصادفی پیوندی منفیمی‌پردازیم و در بخش بعد ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. (آلام و سکسنا.۱۹۸۱) [۴۳]**متغیرهای تصادفی پیوندی منفی**

متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_k$ را پیوندی منفی(NA) گوییم، اگر برای هر جفت زیرمجموعه مجزای A_1, A_2 از $\{1, \cdots, k\}$ و توابع نانزولی f, g در هر بعدی

$$cov(f(X_i, i \in A_1), g(X_j, j \in A_2)) \leq 0.$$

در صورتی که کوواریانس برای متغیرهای تصادفی وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۳.۵. دنباله پیوندی منفی

دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی خواهد بود، اگر هر زیر دنباله متناهی آن پیوندی منفی باشد.

تعریف ۱.۳.۶. دو متغیر تصادفی پیوندی منفی[۴۴]

متغیرهای تصادفی X و Y پیوندی منفی هستند اگر و تنها اگر یکی از نامساوی‌های زیر برقرار باشد، وقتی $x, y \in \mathbb{R}$

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}, \quad P\{X \leq x, Y < y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y < y\},$$

و یا

$$P\{X < x, Y \leq y\} \leq P\{X < x\}P\{Y \leq y\}, \quad P\{X < x, Y < y\} \leq P\{X < x\}P\{Y < y\}.$$

۱.۴ ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

- **ویژگی اول**

برای هر دو متغیر تصادفی، خاصیت NQD با NA معادل است.

[۴۱] Conditionally Decreasing In Sequence
[۴۲] Negatively Dependeny In Sequence
[۴۳] Negatively Associated
[۴۴] M.Gerasimov & V.Kruglov & A.Volodin

امینی در سال ۱۹۹۹ ثابت کرد "دو متغیر تصادفی Xو Y، NQD هستند اگر و تنها اگر به ازای هر دو تابع نانزولی دلخواه fو g، $cov(f(X), g(Y)) \leq 0$ برقرار باشد." شرط این قضیه همان خاصیت پیوندی منفی برای دو متغیر تصادفی است. پس برای هر دو متغیر تصادفی، خاصیت NQD با NA معادل خواهد بود.

- **ویژگی دوم**

توابع نانزولی تعریف شده بر روی زیرمجموعه‌های مجزا از مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، پیوندی منفی خواهند بود.

برهان: فرض کنید $f_r(x_{r,1}, \ldots, x_{r,m_r})$ توابع حقیقی مقدار نانزولی در هر بعد باشد که $x_{r,1}, \ldots, x_{r,m_r}$ مقادیر حقیقی هستند و $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$، همچنین فرض کنید $X_{r,1}, \ldots, X_{r,m_r}$ برای $r = 1, \ldots, n$ زیرمجموعه‌های مجزا از یک مجموعه از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند. به علاوه fو g توابعی نانزولی باشند.

توابع مرکب f' و g' را درنظر بگیرید

$$f'(x_{1,1}, \ldots, x_{k,m_k}) = f\Big(f_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,r_1}), \ldots f_k(x_{k,1}, \ldots, x_{k,r_k})\Big)$$

و

$$g'(x_{k+1,1}, \ldots, x_{n,m_n}) = g\Big(f_{k+1}(x_{k+1,1}, \ldots, x_{k+1,m_{k+1}}), \ldots f_n(x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n})\Big)$$

که توابعی کراندار هستند. به علاوه می‌دانیم که ترکیب توابع صعودی، صعودی است. پس اگر

$$Y_r = f_r(X_{r,1}, \ldots, X_{r,m_r}), \quad r = 1, \ldots, n.$$

از آن‌جا که متغیرهای تصادفی $X_{1,1}, \ldots, X_{n,m_n}$ پیوندی منفی هستند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &cov\Big(f(Y_1, \ldots, Y_k), g(Y_{k+1}, \ldots, Y_n)\Big) \\ &= cov\Big(f'(X_{1,1}, \ldots, X_{k,m_k}), g'(X_{k+1}, \ldots, X_{n,m_n})\Big) \leq 0, \end{aligned}$$

به این معنا که $Y_1, \ldots, Y_n$ پیوندی منفی هستند.

- **ویژگی سوم**

برای زیر مجموعه‌های مجزای $A_۱$ و$A_۲$ از مجموعه $\{۱,\dots,k\}$ و مقادیر حقیقی $x_۱,\dots,x_k$ خواهیم داشت

$$P\big(X_i \le x_i, i=۱,\dots,k\big) \le P\big(X_i \le x_i, i\in A_۱\big)P\big(X_j \le x_j, j\in A_۲\big),$$

و

$$P\big(X_i > x_i, i=۱,\dots,k\big) \le P\big(X_i > x_i, i\in A_۱\big)P\big(X_j > x_j, j\in A_۲\big).$$

در نتیجه به طور خاص $X_۱,\dots,X_k$ دارای خاصیت NODخواهند بود. پس با توجه به این که $A_۱$ و $A_۲$ دو زیرمجموعه‌ی مجزا هستند و با توجه به تعریف NOD، این ویژگی به راحتی اثبات می‌گردد.

- **ویژگی چهارم**

اگر دنباله‌ای پیوندی منفی باشد، آن‌گاه هر زیردنباله آن نیز پیوندی منفی خواهد بود.

- **ویژگی پنجم**

یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل، پیوندی منفی خواهد بود.

جزییات اثبات ویژگی چهارم و پنجم را در مقاله‌ی مشترک جاج-دو و پروسچن (۱۹۸۳) ملاحظه نمایید.

- **ویژگی ششم**

فرض کنید $A_۱,\dots,A_m$ زیرمجموعه‌های مجزا از $\{۱,\dots,k\}$ هستند، $f_۱,\dots,f_m$ توابع صعودی مثبت و $X_۱,\dots,X_k$ پیوندی منفی باشند، داریم

$$E\prod_{i=۱}^{m} f_i(X_j, j\in A_i) \le \prod_{i=۱}^{m} Ef_i(X_j, j\in A_i)$$

برای بررسی این ویژگی می‌توان از استقرا استفاده کرد. درستی رابطه را برای $m=۲$ بررسی می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم برای $m=l$ حکم برقرار است و در نهایت نشان می‌دهیم برای $m=l+۱$ رابطه برقرار می‌شود. پس بنابر خاصیت پیوندی منفی داریم

$$cov(f_۱(X_۱), f_۲(X_۲)) \le ۰,$$

$$E(f_۱(X_۱).f_۲(X_۲)) - Ef_۱(X_۱)Ef_۲(X_۲) \leq ۰,$$

$$m = ۲ \quad : \quad E[f_۱(X_۱)f_۲(X_۲)] \leq Ef_۱(X_۱)Ef_۲(X_۲).$$

بنا بر ویژگی دوم، توابع نانزولی تعریف شده بر روی مجموعه‌های مجزا از متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ دارای خاصیت پیوندی منفی خواهند بود، پس برای $m = ۲$ درستی حکم برقرار است.

بنا به استقرا فرض کنید حکم برای $m = l$ برقرار است.

$$m = k \quad : \quad E\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i) \leq \prod_{i=۱}^{k} Ef_i(X_j, j \in A_i),$$

پس برای $m = l + ۱$

$$\begin{aligned} E\prod_{i=۱}^{l+۱} f_i(X_j, j \in A_i) &= E(\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i)f_{l+۱}) \leq E\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i)Ef_{l+۱} \\ &\leq \prod_{i=۱}^{l} Ef_i(X_j, j \in A_i)Ef_{l+۱} = \prod_{i=۱}^{l+۱} Ef_i(X_j, j \in A_i). \end{aligned}$$

- **ویژگی هفتم**(جاج-دو و پروسچن.۱۹۸۳) اجتماع مجموعه‌های مستقل از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، پیوندی منفی هستند.

برهان. فرض کنید X و Y بردارهایی مستقل می‌باشند که هر کدام دارای خاصیت NA هستند. برای اثبات این ویژگی باید نشان دهیم (X, Y) دارای خاصیت NA می‌باشد. فرض کنید $(X_۱, X_۲)$ و $(Y_۱, Y_۲)$ به ترتیب افرازهای دلخواهی از X و Y هستند و f و g توابع صعودی دلخواه باشند. اگر $E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱\}$ تابعی اندازه‌پذیر از $Y_۱$ باشد، خواهیم داشت

$$E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱, Y_۲\} = E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱\},$$

به همین ترتیب رابطه مشابهی برای $E\{g(X_۲, Y_۲)|Y_۲\}$ برقرار است. امیدهای ریاضی شرطی را به

ترتیب با $h_1(Y_1)$ و $h_2(Y_2)$ نشان می‌دهیم که صعودی هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} E\{f(X_1,Y_1)g(X_2,Y_2)\} &= E[E\{f(X_1,Y_1)g(X_2,Y_2)|Y_1,Y_2\}], \\ &\leq E\{h_1(Y_1),h_2(Y_2)\} \leq E\{h_1(Y_1)\}E\{h_2(Y_2)\}, \qquad (3.1) \\ &= E\{f(X_1,Y_1)\}E\{g(X_2,Y_2)\}, \\ &\Rightarrow cov(f(X_1,Y_1),g(X_2,Y_2)) \leq 0. \end{aligned}$$

نامساوی اول در رابطه (۳.۱) از آن‌جا برقرار است که (X_1,X_2) مستقل از (Y_1,Y_2) می‌باشند و نامساوی دوم به این دلیل برقرار است که (Y_1,Y_2) دارای خاصیت NA هستند. در نتیجه افزارهای دلخواهی از دنباله‌های X و Y دارای خاصیت پیوندی منفی هستند و در نهایت اجتماع آن‌ها نیز پیوندی منفی خواهند بود. □

توجه نمایید که ویژگی دوم و هفتم در گستره کابردهای پیوندی منفی هستند.[۴۵]

۵.۱ قضایای کاربردی

دقت داشته باشید در صورتی که متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را برش دهیم، ممکن است این ویژگی را از دست بدهند. به این دلیل در قضیه بعدی تکنیکی مهم برای برش یکنوا را بررسی می‌کنیم که ویژگی پیوندی منفی بودن متغیرهای تصادفی را حفظ می‌کند.

قضیه ۱.۵.۱. *(گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲) فرض کنید $X_n, n \geq \mathbb{N}$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند، آن‌گاه برای هر $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ و $a_n \leq b_n$ وقتی f_n به این صورت تعریف شود*

$$f_n(x) = a_n I_{(-\infty,a_n)}(x) + x I_{[a_n.b_n]}(x) + b_n I_{(b_n,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

متغیرهای تصادفی $Y_n = f_n(X_n)$ همبسته منفی خواهند بود.

برهان. تابع $f_n(x), x \in \mathbb{R}$ نانزولی است و بنا بر ویژگی دوم متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، متغیرهای تصادفی $Y_n = f_n(x_n), n \in \mathbb{N}$ پیوندی منفی خواهند بود. □

[۴۵] Joag-Dev & Frank-Proschan(1983)

قضیه بعدی یکی از قضایای مهم در مبحث متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است که با استفاده از آن می‌توان قوانینی همچون قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تعمیم داد.

قضیه ۲.۵.۱. (گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲) *فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند. برای هر مجموعه $A\subset\{1,\ldots,n\}$ و هر $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ نامساوی‌های زیر برقرار هستند.*

$$P\Big(\bigcap_{k\in A}\{X_k\le x_k\}\cap\bigcap_{k\notin A}\{X_k<x_k\}\Big)\le\prod_{k\in A}P\{X_k\le x_k\}\prod_{k\notin A}P\{X_k<x_k\},$$
$$P\Big(\bigcap_{k\in A}\{X_k\ge x_k\}\cap\bigcap_{k\notin A}\{X_k>x_k\}\Big)\le\prod_{k\in A}P\{X_k\ge x_k\}\prod_{k\notin A}P\{X_k>x_k\}.$$

قضیه‌ای که در ادامه بررسی می‌کنیم اثبات دیگری برای ویژگی دوم متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را ارایه می‌دهد.

قضیه ۳.۵.۱. (گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲) *برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی $X_1,\ldots,X_n$ و توابع نامنفی و نانزولی $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ نامساوی زیر برقرار خواهد بود.*

$$E\big(f_1(X_1)\ldots f_n(X_n)\big)\le Ef_1(X_1)\ldots Ef_n(X_n). \qquad (۴.۱)$$

به طور خاص اگر متغیرهای تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ نامنفی و $p_1,\ldots,p_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند آن‌گاه

$$E({X_1}^{p_1}\ldots {X_n}^{p_n})\le E{X_1}^{p_1}\ldots E{X_n}^{p_n}. \qquad (۵.۱)$$

برهان. برای اثبات فرض می‌کنیم امید ریاضی سمت راست در عبارات (۴.۱) و (۵.۱) متناهی هستند، زیرا در غیر این صورت اثبات نامساوی معنی‌دار نخواهد بود. برای هر $m\in\mathbb{N}$ توابع $g_{k,m}=f_k\wedge m$ وقتی $k=1,\ldots,n$، کران‌دار و نانزولی است. بنا بر تعریف متغیرهای پیوندی منفی، نامساوی زیر برقرار خواهد بود.

$$E\Big(g_{1,m}(X_1)\ldots g_{n,m}(X_n)\Big)\le E\Big(g_{1,m}(X_1)\ldots g_{n-1,m}(X_{n-1})\Big)Eg_{n,m}(X_n)$$
$$\le\ldots\le Eg_{1,m}(X_1)\ldots Eg_{n,m}(X_n).$$

حال نامساوی (۴.۱) بنا به قضیه همگرایی یکنوا، وقتی $m\longrightarrow\infty$ ، برقرار خواهد بود. برای به دست آوردن نامساوی (۵.۱) کافی است در نامساوی (۴.۱)، برای $k=1,\ldots,n$، $f_k(x)=I_{[0,\infty]}(x)|x|^{p_k}$ در نظر بگیریم و به راحتی نامساوی را به دست آوریم. □

در ادامه توابع به آرامی تغییرپذیر را معرفی خواهیم کرد. سپس دو لم کاربردی را برای این نوع از توابع بررسی می‌کنیم.

تعریف ۴.۵.۱. تابع به آرامی تغییرپذیر[۴۶]

تابع حقیقی مقدار مثبت و اندازه‌پذیر $L:(0,\infty)\to(0,\infty)$ را به آرامی تغییرپذیر گوییم، اگر برای هر $\lambda>0$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x\lambda)}{L(x)}=1.$$

لم ۵.۵.۱. *(زیدونگ و چان.۱۹۸۵) هرگاه $L(x)$ یک تابع به آرامی تغییرپذیر باشد، آن‌گاه*

(الف): $\lim_{x\to\infty}\dfrac{L(x+u)}{L(x)}=1.$

(ب): وقتی $2^k\le x\le 2^{k+1}$ *خواهیم داشت* $\limsup_{k\to\infty}\dfrac{L(x)}{L(2^k)}=1.$

(برهان قسمت الف): فرض می‌کنیم برای هر u، وجود داشته باشد λ، به طوری که $x+u=\lambda x$ برقرار باشد. وقتی $x\longrightarrow\infty$ خواهیم داشت $\lambda=\frac{x+u}{x}=1+\frac{u}{x}=1$

در نتیجه رابطه فرض شده برقرار خواهد بود، پس می‌توان بنا بر تعریف تابع به آرامی تغییرپذیر به جای عبارت λx عبارت $x+u$ را جایگذاری کرد.

(برهان قسمت ب): بنا بر فرض این قسمت داریم

$$\begin{cases}2^k\le x\le 2\times 2^k,\\ \exists\lambda>1, x=\lambda\times 2^k.\end{cases}$$

پس

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x\lambda)}{L(x)}=\frac{L(\lambda\times 2^k)}{L(2^k)}=1.$$

در نتیجه

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty}\frac{L(x)}{L(2^k)}=1.$$

لم ۶.۵.۱. *(زیدونگ وچان.۱۹۸۵) هرگاه $L(x)$ یک تابع به آرامی تغییرپذیر باشد،*

[۴۶] Varying Slowly Function

- *برای هر $r > 0$ و $\varepsilon > 0$ و برای برخی ثابت‌های c_1 و c_2 مثبت*

$$c_1.2^{kr}.L(\varepsilon 2^k) \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{jr} L(\varepsilon 2^j) \leq c_2.2^{kr}.L(\varepsilon 2^k).$$

- *برای هر $r < 0$ و $\varepsilon > 0$ و برای برخی ثابت‌های c_3 و c_4 مثبت*

$$c_3.2^{kr}.L(\varepsilon 2^k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{jr} L(\varepsilon 2^j) \leq c_4.2^{kr}.L(\varepsilon 2^k).$$

قضیه ۷.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) ***قضیه همگرایی یکنوا***[۴۷]

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد، اگر $X_n \nearrow X$ وقتی $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه

$$EX_n \nearrow EX, \quad n \longrightarrow \infty.$$

در صورت وجود امید ریاضی‌ها.

برای مشاهده اثبات قضیه همگرایی یکنوا می‌توانید به فصل دوم کتاب گات مراجعه کنید. در ادامه مروری بر نامساوی‌های مشهوری همچون نامساوی چبیشف، جنسن، هولدر و مارکوف خواهیم داشت، جزییات اثبات آن‌ها را می‌توانید در فصل سوم کتاب گات (۲۰۰۵) ملاحظه نمایید.

لم ۸.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) ***نامساوی چبیشوف***[۴۸]

- *فرض کنید X متغیری تصادفی باشد و $varX < \infty$، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ داریم*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{varX}{\varepsilon^2},$$

- *اگر $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس متناهی و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ باشند، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$*

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} varX_k}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

- *و در نهایت اگر متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ هم توزیع باشند، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$*

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n \;\; varX_1}{\varepsilon^2}.$$

لم ۹.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) ***نامساوی مارکوف***[۴۹]

---

[۴۷] Monotone convergence Theorem
[۴۸] Chebyshev's inequality
[۴۹] Markov's inequality

اگر X متغیری تصادفی باشد، برای هر $r > ۰$ که گشتاور rام موجود باشد و هر عدد ثابت مثبت $\varepsilon > ۰$ خواهیم داشت

$$P[|X| \geq \varepsilon] \leq \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$$

لم ۱۰.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) **نامساوی هولدر**[۵۰]

فرض کنید سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد، برای متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار X و Y در فضای نمونه Ω، وقتی $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ باشد و گشتاورهای $|X^p|$ و $|Y^q|$ موجود باشند، خواهیم داشت

$$|EXY| \leq E|XY| \leq \Big(E(|X|^p)\Big)^{\frac{۱}{p}}.E\Big(|Y|^q\Big)^{\frac{۱}{q}}.$$

لم ۱۱.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) **نامساوی ینسن**[۵۱]

اگر X متغیری تصادفی و f تابعی محدب باشد، آن‌گاه

$$E[f(X)] \geq f(E[X]).$$

لم ۱۲.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) **لم اول بورل-کانتلی**[۵۲]

فرض کنید $\{A_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دلخواه باشند. آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) < \infty \Longrightarrow P(A_n \quad infinitely \quad often) = ۰.$$

لم ۱۳.۵.۱. (گات.۲۰۰۵) **لم دوم بورل-کانتلی**[۵۳]

فرض کنید $\{A_n, n \geq ۱\}$ پیشامدهای مستقل باشند. آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) = \infty \Longrightarrow P(A_n \quad infinitely \quad often) = ۱.$$

لم ۱۴.۵.۱. **لم کرونه کر**[۵۴]

فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی و مجموع $\sum_{n=۱}^{\infty} X_n$ همگرا باشد. همچنین $b_n \uparrow \infty$ دنباله‌ای صعودی از مقادیر حقیقی باشد. آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{b_n} \sum_{k=۱}^{n} b_k X_k \to ۰. \qquad (۶.۱)$$

[۵۰] Holder's inequality
[۵۱] Jensen's inequality
[۵۲] The First Borel-Cantelli Lemma
[۵۳] The Second Borel-Cantelli Lemma
[۵۴] Kronecker

برهان. فرض کنید مجموع جزیی جملات، $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ باشد. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ همگراست پس $S_n \to S$ ، از طرفی $X_k = S_k - S_{k-1}$ و $S_0 = 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k X_k &= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k (S_k - S_{k-1}) \\
&\leq \frac{1}{b_n}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1}\Big) \\
&= \frac{1}{b_n}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k\Big) \quad (\text{چون } S_0 = 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b_n}\Big(b_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k\Big) \\
&= S_n + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k \to S - S = 0.
\end{aligned}$$

در واقع برای اثبات رابطه (۶.۱) باید نشان دهیم جمله $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k$ در عبارت فوق، همگرا به $-S$ است. پس

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k &= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})(S_k - S + S) \\
&= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})(S_k - S) + \frac{S}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}), \qquad (7.1)
\end{aligned}$$

در عبارت (۷.۱)

$$\frac{S}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) = \frac{S}{b_n}(b_1 - b_n) \to -S, \quad b_n \uparrow \infty,$$

و

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})(S_k - S) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})(S_k - S)\Big| \\
&= \frac{1}{b_n}\Big|\sum_{k=1}^{n_0}(b_k - b_{k+1})(S_k - S)\Big| + \frac{1}{b_n}\Big|\sum_{k=n_0+1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})(S_k - S)\Big| \\
&\leq \varepsilon + \frac{b_{n_0+1} - b_n}{b - n}\varepsilon \leq 2\varepsilon. \quad (\text{به ازای } n > n_0)
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})(S_k - S) \to 0.$$

□

فصل ۲

سرعت همگرایی برای مجموع موزون دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

۱.۲ مقدمه

مفهوم همبستگی منفی برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط آلام و سکسنا معرفی شد. یک سال بعد بلاک و همکارانش [۱] در این زمینه مطالعاتی انجام داده و نتایجی به دست آورده بودند. در سال ۱۹۸۳ نیز جاج-دو نشان داد که بسیاری از توزیع‌های چندمتغیره از جمله توزیع چندجمله‌ای[۲]، توزیع فوق هندسی چند متغیره[۳] و دریکله[۴] و بسیاری از توزیع‌ها دارای ویژگی پیوندی منفی هستند. ما نیز در این فصل به بررسی قانون قوی اعداد بزرگ برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی می‌پردازیم و قضایای اصلی مقاله بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ [۵] را مورد بررسی قرار می‌دهیم، وقتی $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ آرایه‌ای از مقادیر حقیقی باشند و مجموع موزون S_{k_n} به این صورت تعریف شده باشد

$$S_{k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_i.$$

در بخش بعدی به طور کامل درباره شرایط این مجموع موزون بحث خواهیم کرد. با اندکی توجه به ساختار مجموع‌های وزنی، می‌توان دریافت که بسیاری از آماره‌های خطی مفید به فرم S_{k_n} هستند. برای مثال

[۱] Block et al(1982)
[۲] Multinomial
[۳] Multivariate Hypergeometric
[۴] Dirichlet
[۵] Bing-Yi Jing ,Han-Ying Liang(2008)

برآوردگرهای کم‌ترین مربعات[۶]، برآوردگرهای تابع رگرسیون ناپارامتری [۷] و برآوردگرهای جک نایف[۸] به فرم خطی S_{k_n} هستند و نتیجه می‌گیریم که مطالعه درباره این ترکیبات خطی نه تنها در نظریه احتمال، بلکه در استباط آماری نیز مورد توجه است.

بسیاری از مقالات بر روی ویژگی‌های حدی مجموع‌های وزنی، وقتی $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند، بحث نموده‌اند. برای مثال تروووم [۹] و کوو[۱۰]قضایا و روابطی در این زمینه اثبات نمودند که در ادامه به آن‌ها اشاره‌ای خواهیم کرد.

قضیه ۲.۱.۱. *(تروووم.۱۹۸۷) اگر $\sum_{i=۱}^{n} a_{ni}^{۲} = ۱$ و $E|X|^p < \infty$ برای $p \geq ۲$ برقرار باشد، آن‌گاه*

$$S_{k_n} / n^{\frac{۱}{p}} \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

این قضیه چند سال بعد، توسط لی و همکارانش[۱۱]به صورت زیر بهبود یافت.

قضیه ۲.۱.۲. *(لی و همکاران.۱۹۹۵) اگر برای $p \geq ۲$، $E|X|^p < \infty$ و $\sup_{n,i} |a_{ni}| < \infty$، همچنین $\sum_{i=۱}^{k_n} a_{ni}^{۲} = O(n^{\delta})$ برای $۰ < \delta < \frac{۲}{p}$ باشد، آن‌گاه*

$$S_{k_n} / n^{\frac{۱}{p}} \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

برای مثالی دیگر از قضایای اثبات شده می‌توان به روابطی که بای و چنگ[۱۲]در سال ۲۰۰۰ به دست آوردند، اشاره کرد. این رابطه را در قالب قضیه‌ای در ادامه بیان خواهیم کرد.

قضیه ۲.۱.۳. *(بای و چنگ.۲۰۰۰) فرض کنید برای $۱ < \alpha < \beta < \infty$، رابطه $\frac{۱}{p} = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}$ برقرار باشد و $E|X|^{\beta} < \infty$. همچنین A_{α} به این صورت تعریف شود:*

$$A_{\alpha} =: \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ni}|^{\alpha} \right)^{\frac{۱}{\alpha}} < \infty, \tag{۲.۱}$$

آن‌گاه نتایج زیر برقرار خواهند بود

[۶] Least-Sqares Estimators
[۷] Nonparametric Regression Function Estimators
[۸] Jacknife Estimators
[۹] Thrum(1987)
[۱۰] Chow(1966)
[۱۱] Li et al(1995)
[۱۲] Bai & Cheng

- اگر $1 < p < 2$ ، آن‌گاه

$$S_n / n^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0, \quad a.s..$$

- اگر $p = 2$، آن‌گاه

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n|/(n\log n)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} A_2 (E|X|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a.s.$$

پس از آن‌ها، جاجت [۱۳] در سال ۲۰۰۳ بر روی قانون قوی اعداد بزرگ در کلاس بزرگی از گشتاورها برای متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل مطالعه نمود، قضیه زیر نتیجه این مطالعات است.

قضیه ۴.۱.۲. (جاجت.۲۰۰۳) *فرض کنید $g(.)$ تابعی صعودی و مثبت، $h(.)$ تابعی مثبت هستند به طوری که $\phi(y) \equiv g(y).h(y)$ و در شرایط زیر صدق کند:*

- *برای $d \geq 0$، $\phi(.)$ روی بازه $[d.\infty)$ صعودی اکید و دارای برد $[0, \infty)$ باشد.*

- *مقدار C و عدد صحیح مثبت k_0 وجود داشته باشد به طوری که برای $y \geq k_0$ و $\frac{\phi(y+1)}{\phi(y)} \leq C$ برقرار باشد.*

- *ثابت‌های a و bای وجود داشته باشد به طوری که*

$$\phi^2(s). \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx \leq as + b, \quad s > d.$$

آن‌گاه برای متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\{X_k, k \geq 1\}$ داریم

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - X_k I(|X_k| \leq \phi(k))}{h(k)} \xrightarrow{a.s.} 0.$$

اگر و تنها اگر

$$E[\phi^{-1}(|X|)] < \infty.$$

که در آن ϕ^{-1} معکوس تابع ϕ است.

در پایان این بخش به نامساوی مهمی که در سال ۲۰۰۰ توسط شائو [۱۴] به دست آمده می‌پردازیم. این نامساوی در اثبات بسیاری از قضایا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

---
[۱۳] Jajte
[۱۴] Shao

لم ۲.۱.۵. (شائو.۲۰۰۰) *فرض کنید $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ یک خانواده متناهی از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با میانگین صفر و گشتاور دوم متناهی باشد و $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ و $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$، آن‌گاه برای هر $0 < \varepsilon$ و $0 < a$ و $0 < \alpha < 1$*

$$P(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq 2P\Big(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| > a\Big) + \frac{2}{1-\alpha}\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\alpha}{2(a\varepsilon + B_n^2)}\Big). \qquad (2.2)$$

لم ۲.۱.۶. (گات.۲۰۰۵) *فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است و $a_0 = 0$ و $\{a_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت صعودی به $+\infty$، آن‌گاه*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{a_k} < \infty \quad a.s. \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0 \quad n \longrightarrow \infty.$$

۲.۲ همگرایی قوی برای مجموع موزون دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

در این بخش به بررسی همگرایی دنباله‌هایی از متغیرهای تصادفی دارای خاصیت پیوندی منفی می‌پردازیم و شرایط یک مجموع موزون را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\{X, X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی است، $\{b_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی که در آن $k_n \leq M.n$ (M عددی صحیح است که به مقدار n وابسته نیست) دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت است. با این فرضیات، مجموع موزون را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$T_{k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} X_i.$$

در ادامه به بررسی قضیه‌ای کلی که در سال ۲۰۰۸ توسط بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ اثبات شد می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۱. (بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ.۲۰۰۸) *فرض کنید برای برخی $p > 0$ گشتاور $E|X_1|^p < \infty$ و اگر $p > 1$، $EX_1 = 0$، همچنین $\{b_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی که در رابطه $max_{1\leq i\leq k_n}|b_{ni}| = O(n^{-\frac{1}{p}})$ صدق کند. آن‌گاه*

(*i*) اگر $p > ۲$ و $\sum_{i=۱}^{k_n} b_{ni}^۲ = o((\log n)^{-۱})$، *آن‌گاه* $T_{k_n} \overset{a.s.}{=} o(۱)$،

(*ii*) اگر $p > ۲$ و $\sum_{i=۱}^{k_n} b_{ni}^۲ = O((\log n)^{-۱})$، *آن‌گاه* $T_{k_n} \overset{a.s.}{=} O(۱)$،

(*iii*) اگر $۰ < p \leq ۲$ و $\delta > ۰$، *به طوری که* $\sum_{i=۱}^{k_n} |b_{ni}|^p = O(n^{-\delta})$ *آن‌گاه* $T_{k_n} \overset{a.s.}{=} o(۱)$.

برهان. فرض می‌کنیم برای هر $n \geq ۱$ ، $k_n = n$ و $b_{ni} = b_{ni}^+ - b_{ni}^- > ۰$ هستند. برای هر $\varepsilon > ۰$ ، برخی مقادیر کوچک $\eta > ۰$ و مقادیر بزرگ $N \geq ۱$، X_{ni}ها را به این صورت درنظر می‌گیریم

$$X_{ni}(۱) = -b_{ni}^{-۱} n^{-\eta} I(b_{ni}X_i < n^{-\eta}) + X_i I(|b_{ni}X_i| \leq n^{-\eta}) + b_{ni}^{-۱} n^{-\eta} I(b_{ni}X_i > n^{-\eta}),$$

$$X_{ni}(۲) = (X_i - b_{ni}^{-۱} n^{-\eta}) I(n^{-\eta} < b_{ni}X_i < \varepsilon/N),$$

$$X_{ni}(۳) = (X_i + b_{ni}^{-۱} n^{-\eta}) I(-n^{-\eta} > b_{ni}X_i > -\varepsilon/N),$$

$$X_{ni}(۴) = (X_i - b_{ni}^{-۱} n^{-\eta}) I(b_{ni}X_i \geq \varepsilon/N) + (X_i + b_{ni}^{-۱} n^{-\eta}) I(b_{ni}X_i \leq -\varepsilon/N).$$

$$S_n(l) = \sum_{i=۱}^{n} b_{ni} X_{ni}(l), \quad l = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

پس

$$T_n = \sum_{i=۱}^{n} b_{ni} X_i = S_n(۱) + S_n(۲) + S_n(۳) + S_n(۴).$$

واضح است که $\{b_{ni}X_{ni}, ۱ \leq i \leq n, n \geq ۱\}$، بنا به تعریف $X_{ni}(۱)$ و قضیه ۱.۵.۱ در فصل اول (گراسیموف وهمکاران-۲۰۱۲) همچنان یک دنباله پیوندی منفی است.

(اثبات قسمت اول) باید نشان دهیم $S_n(l) \overset{a.s.}{=} o(۱)$ برای $l = ۱, ۲, ۳, ۴$ برقرار است. در ابتدا برای $S_n(۱)$، کافی است نشان دهیم $ES_n(۱) \to ۰$ و $S_n(۱) - ES_n(۱) \xrightarrow{a.s.} ۰$. از آن‌جا که $EX_i = ۰$ برای

$1 \leq i \leq n$ است و فرضیات قضیه برقرار است، داریم

$$\begin{aligned}
|ES_n(1)| &\leq n^{-\eta}\sum_{i=1}^{n} P(|b_{ni}X_i| > n^{-\eta}) + \Big|\sum_{i=1}^{n} b_{ni}EX_iI(|b_{ni}X_i| \leq n^{-\eta})\Big| \\
&\leq n^{(p-1)\eta}\sum_{i=1}^{n} E|b_{ni}X_i|^p + \sum_{i=1}^{n} E|b_{ni}X_i|^p n^{(p-1)\eta} I(|b_{ni}X_i| \leq n^{-\eta}) (\text{بنا به نامساوی مارکوف}) \\
&\leq n^{(p-1)\eta}(\max|b_{ni}|)^{p-2}\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 \quad (E|X_1|^p < \infty \text{ چون}) \\
&\leq n^{(p-1)\eta-1+\frac{2}{p}}(\log n)^{-1} \to 0, (\sum_{i=1}^{k_n} b_{ni}^2 = o((\log n)^{-1}) \text{ چون})
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

استدلال بدست آمدن عبارت (۳.۲) به این صورت است که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n} b_{ni}^2}{(\log n)^{-1}} \to 0,$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max|b_{ni}|}{n^{-\frac{1}{p}}} \to c,$$

بنابراین

$$\frac{(\max|b_{ni}|)^{p-2}}{(n^{-\frac{1}{p}})^{p-2}} = \frac{\max|b_{ni}|^{p-2}}{n^{-1+\frac{2}{p}}} \to c^{p-2}$$

در نهایت اگر η به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به طوری که $(p-1)\eta \leq 1-\frac{2}{p}$ ، آن‌گاه $ES_n(1) \to 0$. در ادامه تنها کافی است نشان دهیم $S_n(1) - ES_n(1) \xrightarrow{a.s.} 0$. بدین منظور، بنا به تعریف همگرایی قریب به یقین باید برای هر $\varepsilon > 0$ نشان دهیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n(1) - ES_n(1)| > \varepsilon) < \infty, \tag{۴.۲}$$

دقت نمایید که بنا بر$X_{ni}(1)$ بریده شده داریم

$$\max_{1\leq i\leq n}|b_{ni}X_{ni}(1) - E(b_{ni}X_{ni}(1))| \leq 2n^{-\eta}$$

پس

$$P(\max_{1\leq i\leq n}|b_{ni}X_{ni}(1) - E(b_{ni}X_{ni}(1))| \geq 2n^{-\eta}) = 0 \tag{۵.۲}$$

و بنا بر فرض قسمت اول قضیه که $\sum_{i=1}^{k_n} b_{ni}^2 = o((\log n)^{-1})$ و فرض لم ۵.۱.۲ که $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$

داریم

$$\begin{aligned} B_n^{۲} &= \sum_{i=۱}^{n} E[b_{ni}X_{ni}(۱) - E(b_{ni}X_{ni}(۱))]^{۲} \\ &\leq \sum_{i=۱}^{n} E[b_{ni}X_{ni}(۱)]^{۲} \ll n^{-(۲-p)\eta-\delta} = o((\log n)^{-۱}), \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

حال اگر در لم ۵.۱.۲ فرض کنیم $\alpha = \frac{۱}{۲}$ و $a = ۲n^{-\eta}$، بنابر رابطه (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} P\Big(|S_n(۱) - ES_n(۱)| > \varepsilon\Big) &\leq ۲P(\max_{۱\leq i\leq n} |b_{ni}X_{ni}(۱) - E(b_{ni}X_{ni}(۱))| \geq ۲n^{-\eta}) \\ &\quad + ۴\exp\Big\{-\frac{\frac{\varepsilon^{۲}}{۲}}{۲(۲\varepsilon n^{-\eta} + o((\log n)^{-۱})}\Big\} \\ &= ۴\exp\Big\{-\frac{\frac{\varepsilon^{۲}}{۲}}{۲(۲\varepsilon n^{-\eta} + o((\log n)^{-۱})}\Big\} \ll \exp\{-۲\log n\} < \infty. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

پس نشان دادیم که رابطه (۴.۲) برقرار است. درنتیجه $S_n(۱) \overset{a.s.}{=} o(۱)$ برقرار خواهد بود.

برای $S_n(۲)$ بنا به تعریف $X_{ni}(۲)$ می‌توان گفت $S_n(۲) > ۰$ و با توجه به ویژگی‌های NA باید حداقل Nتا از iها در رابطه $b_{ni}X_{ni}(۲) > n^{-\eta}$ صدق کند، در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} P(|S_n(۲)| > \varepsilon) &\leq \sum_{۱\leq i_۱<i_۲<\ldots<i_N\leq n} P(|b_{ni_۱}X_{i_۱}| > n^{-\eta}, \ldots, |b_{niN}X_{iN}| > n^{-\eta}) \\ &\leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} P(|b_{ni}X_i| > n^{-\eta})\Big)^{N} \quad \text{(بنا بر هم توزیعی و پیوندی منفی بودن)} \\ &\ll n^{-(۱-\frac{۲}{p}-p\eta)N}(\log n)^{-N}. \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

رابطه (۸.۲) با استدلالی مشابه رابطه (۳.۲) برقرار می‌باشد. حال با انتخاب η ای کوچک و $N > ۱$ بزرگ، به طوری که $۱ - \frac{۲}{p} - p\eta > ۰$ و $(۱ - \frac{۲}{p} - p\eta)N \geq ۱$ خواهیم داشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(|S_n(۲)| > \varepsilon) < \infty,$$

پس در نهایت

$$S_n(۲) \overset{a.s.}{=} o(۱).$$

اثبات $S_n(۳) \overset{a.s.}{=} o(۱)$ نیز مشابه $S_n(۲)$ می‌باشد و از تکرار آن می‌پرهیزیم.

برای اثبات $S_n(4)$، بنا به فرض $E|X_1|^p < \infty$ و تعریف امید ریاضی $\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| > ci^{\frac{1}{p}}) < \infty$ برقرار است، بنابر لم بورل-کانتلی $\sum_{i=1}^{n} |X_{ni}(4)|$ کران‌دار خواهد بود و استنباط می‌شود که بنا بر فرض $max_{1\le i\le k_n}|b_{ni}| = O(n^{-\frac{1}{p}})$ داریم

$$|S_n(4)| \le \max_{1\le i\le n} |b_{ni}| \sum_{i=1}^{n} |X_{ni}(4)| = cn^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} |X_{ni}(4)| \to 0 \quad a.s. \tag{9.2}$$

(اثبات قسمت دوم) به دلیل شباهت اثبات این قسمت با قسمت اول از بررسی آن چشم پوشی می‌کنیم.

(اثبات قسمت سوم) در ابتدا باید نشان دهیم که $ES_n(1) = o(1)$.

اگر $p > 1$، با درنظر داشتن این‌که $EX_i = 0$ می‌توان مشابه با (۳.۲) نشان داد که $ES_n(l) = o(1)$.

اگر $0 < p \le 1$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
|ES_n(1)| &\le n^{-\eta} \sum_{i=1}^{n} P(|b_{ni}X_i| > n^{-\eta}) + \sum_{i=1}^{n} E|b_{ni}X_i|I(|b_{ni}X_i| \le n^{-\eta}) \\
&\le n^{-(1-p)\eta} \sum_{i=1}^{n} E|b_{ni}X_i|^p + n^{-(1-p)\eta} \sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p E|X_i|^p \quad \text{(بنا به نامساوی مارکوف)} \\
&\ll n^{-(1-p)\eta-\delta} \to 0.
\end{aligned} \tag{10.2}$$

رابطه (۱۰.۲) بنابر فرض $\sum_{i=1}^{k_n} |b_{ni}|^p = o(n^{-\delta})$ برای هر $\eta > 0$ برقرار خواهد بود و n طوری انتخاب می‌شود که $(1-p)\eta - \delta > 0$.

در ادامه باید نشان دهیم که $S_n(l) - ES_n(l) \overset{a.s.}{=} o(1)$. دقت کنید که باز هم بنابر رابطه (۱.۴) داریم

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} E[b_{ni}X_{ni}(1) - E(b_{ni}X_{ni}(1))]^2 = o((\log n)^{-1})$$

درنتیجه بنا بر لم ۳.۱.۴ در اثبات قسمت اول قضیه، رابطه (۷.۲) برقرار خواهد بود و $S_n(1) \overset{a.s.}{=} o(1)$.

اثبات‌هایی از $S_n(l) \overset{a.s.}{=} o(1)$ برای $l = 2, 3, 4$ را می‌توان مشابه آن‌چه برای $S_n(2)$ اثبات کردیم، به دست آورد.

□

دقت نمایید قضیه‌ای که بیان شد یک قضیه کلی است، مثلا اگر در قسمت (i)، $b_{ni} = a_{ni}/n^{\frac{1}{p}}$برقرار باشد، وقتی که $\{a_{ni}\}$ها در رابطه $\max_{1\le i\le k_n} |a_{ni}| = O(1)$ صدق کنند و $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 = o(n^{\frac{2}{p}}(\log n)^{-1})$

باشد، آن‌گاه $S_n/n^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{a.s.} 0$.

در ادامه قانون قوی اعداد بزرگ مارسینکوویچ-زیگموند (MZ)را برای مجموع موزون دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی بررسی خواهیم کرد. مارسینکوویچ و زیگموند این قانون را در سال ۱۹۳۷ برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع ارایه نمودند و توسط فلور در سال ۱۹۴۶ بهبود یافت. بعدها محققان زیادی از جمله سیور(۱۹۶۶)، چترجیدر(۱۹۷۰)، رسالسکس و استویکا(۲۰۱۰) قانون قوی را در حالتی که متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و بدون شرط استقلال هستند، به دست آوردند. در قضیه‌ی مورد نظر ما که از مقاله بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ انتخاب شده است، کار بایی و چنگ (که برای متغیرهای تصادفی مستقل بود)، به متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تعمیم داده شده است و به نوعی حدود α، β و p گسترش یافته است.

قضیه ۲.۲.۲. ***(تعمیم قانون قوی اعداد بزرگ (MZ) برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی):***
فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی، $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی، برای $0 < \alpha$ و $\beta < \infty$ رابطه $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ برقرار باشد و $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$ فرض شده باشد.

(۱) *فرض کنید برای $0 < p < 2$ رابطه (۱.۲) برقرار باشد و $E|X_1|^\beta < \infty$ و $EX_i = 0$ اگر $\beta > 1$، آن‌گاه*

$$S_n/n^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{a.s.} 0, \tag{۱۱.۲}$$

و برعکس، اگر رابطه (۱۱.۲) برای هر آرایه از وزن‌ها $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ برقرار باشد، آن‌گاه $E|X_1|^\beta$ متناهی خواهد بود و برای $\beta > 1$ رابطه $EX_1 = 0$ برقرار است.

(۲) *برای $p = 2$ باز هم A_α برابر با رابطه (۱.۲) است و $E|X_1|^\beta < \infty$ و $EX_i = 0$. آن‌گاه*

$$S_n/(n\log n)^{\frac{1}{2}} \overset{a.s.}{=} O(1).$$

برهان. (اثبات قسمت اول) بنا بر قضیه ۱.۲.۲ فرض کنیم $b_{ni} = a_{ni}/n^{\frac{1}{p}}$ و $A_{\alpha,n} = \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ بنا به رابطه (۱.۲) چون $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ فرض شده است، پس

$$\max_{1\leq i\leq n}|b_{ni}| = \max_{1\leq i\leq n}|a_{ni}n^{-\frac{1}{p}}| = n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leq i\leq n}|a_{ni}| \leq n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}}A_{\alpha,n} = n^{-\frac{1}{\beta}}A_{\alpha,n}.$$

در نتیجه

$$\max_{1\le i\le n}|a_{ni}| = \max_{1\le i\le n}|n^{\frac{1}{p}}b_{ni}| = n^{\frac{1}{p}}\max_{1\le i\le n}|b_{ni}| \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\beta}}A_{\alpha,n} = n^{\frac{1}{\alpha}}A_{\alpha,n}.$$

حال باید برقراری شرایط (i) و (iii) در قضیه ۱.۲.۲ بررسی شود. کافی است برای بعضی $\delta_1,\delta_2>0$ نشان دهیم

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 = O(n^{-\delta_1}), \tag{۱۲.۲}$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^{\beta} = O(n^{-\delta_2}). \tag{۱۳.۲}$$

ابتدا برقراری رابطه (۱۲.۲) را بررسی می‌کنیم. اگر $0<\alpha\le 2$، وقتی $s\ge 1$، از نامساوی $\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^s \le (\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|)^s$ استفاده می‌کنیم، پس

$$b_{ni} = n^{-\frac{1}{p}}a_{ni}, \quad \Rightarrow \quad b_{ni}^2 = n^{-\frac{2}{p}}a_{ni}^2, \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 = n^{-\frac{2}{p}}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2,$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 &= n^{-\frac{2}{p}}\sum_{i=1}^{n}\Big(|a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{2}{\alpha}} \le n^{-\frac{2}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{2}{\alpha}}\\ &= n^{-2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{2}{\alpha}} = n^{-\frac{2}{\beta}}n^{-\frac{2}{\alpha}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{2}{\alpha}} = n^{-\frac{2}{\beta}}A_{\alpha,n}^2.\end{aligned}$$

از سوی دیگر، اگر $\alpha>2$، با استفاده از نامساوی هولدر داریم

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 = n^{-\frac{2}{p}}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \le n^{-\frac{2}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{2}{\alpha}}n^{1-\frac{2}{\alpha}} = n^{1-\frac{2}{p}}A_{\alpha,n}^2.$$

بنا بر روابطی که برای $0<\alpha\le 2$ و $\alpha>2$ به دست آمد، نتیجه می‌گیریم که رابطه (۱۲.۲) برقرار است.

حال برای بررسی رابطه (۱۳.۲) اگر $\alpha\le\beta$ ، داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^{\beta} &= n^{-\frac{\beta}{p}}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}|a_{ni}|^{\beta-\alpha}\\ &\le n^{-\frac{\beta}{p}} \quad [n.A_{\alpha,n}^{\alpha}] \quad [n^{\frac{1}{\alpha}}A_{\alpha,n}]^{\beta-\alpha}\\ &\le n^{-1}.A_{\alpha,n}^{\beta},\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

توجه داشته باشید که در رابطه (۱۴.۲) داریم

$$n^{-\frac{\beta}{p}} \cdot n \cdot n^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} = n^{-\beta(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})} \cdot n \cdot n^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot n^{-1} = n^{-\frac{\beta}{\alpha}} \cdot n^{-1} \cdot n \cdot n^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot n^{-1} = n^{-1},$$

و اگر $\beta < \alpha$،

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^{\beta} &= n^{-\frac{\beta}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha}\Big)^{\frac{\beta}{\alpha}} n^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \\ &= n^{1-\frac{\beta}{p}} A_{\alpha,n}^{\beta} = n^{-\frac{\beta}{\alpha}} A_{\alpha,n}^{\beta},\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

دقت نمایید ضریب $n^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ در رابطه (۱۵.۲) به این صورت به دست می‌آید

$$n^{1-\frac{\beta}{p}} = n^{1-\beta(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})} = n^{1-\frac{\beta}{\alpha}-1} = n^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

پس در حالت $\beta \geq \alpha$ و $\beta < \alpha$ رابطه (۱۳.۲) برقرار خواهد بود.

برای اثبات عکس قسمت اول، فرض کنید رابطه (۱۱.۲) برای هر دنباله از وزن‌ها برقرار است. برای هر n، با انتخاب $a_{n,1} = a_{n,2} = \ldots = a_{n,n-1} = 0$ و $a_{n,n} = n^{\frac{1}{\alpha}}$

$$S_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} a_{n,n} X_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} n^{\frac{1}{\alpha}} X_n = n^{-\frac{1}{\beta}} X_n \longrightarrow 0, \quad a.s.$$

پس بنا بر تعریف همگرایی قریب به یقین نتیجه می‌شود که $E|X_1|^{\beta} < \infty$.

وقتی $\beta > 1$، بنا بر فرضیات عکس قسمت اول در این قضیه، خواهیم داشت

$$n^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(X_i - EX_1) \longrightarrow 0 \quad a.s.$$

در نتیجه برای هر دنباله از وزن‌ها چون رابطه (۱۱.۲)برقرار است پس $EX_1 = 0$ خواهد بود.

(اثبات قسمت دوم) از آن‌جا که $p = 2$ و $0 < \alpha, \beta < \infty$ فرض شده است، پس $\alpha, \beta > 2$ خواهد بود.

همچنین چون $b_{ni} = a_{ni}/(n\log n)^{\frac{1}{2}}$ است، پس

$$b_{ni}^{2} = \frac{a_{ni}^{2}}{n\log n} \leq \frac{n^{\frac{2}{\alpha}} A_{\alpha,n}^{2}}{n\log n} \leq \frac{A_{\alpha,n}^{2}}{\log n}$$

همچنین چون $p = 2$، داریم

$$\max_{1\leq i\leq n} |b_{ni}| = \frac{\max |a_{ni}|}{(n\log n)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{n^{\frac{1}{\alpha}} A_{\alpha,n}}{n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}} \leq n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{1}{2}} A_{\alpha,n} = n^{-\frac{1}{\beta}} (\log n)^{-\frac{1}{2}} A_{\alpha,n}.$$

برقرار خواهند بود. بنابراین نتیجه موردنظر از رابطه (۱.۲) و قسمت (ii) از قضیه ۱.۲.۲ به دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود. □

در ادامه قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که حالت استقلال در قضیه ۴.۱.۲ را به پیوندی منفی تغییر داده و همگرایی کامل را با در نظر گرفتن شرایطی، برای این متغیرهای تصادفی بررسی نموده است.

قضیه ۳.۲.۲. *فرض کنید $g(.)$ و $h(.)$ و $\phi(.)$ مشابه قضیه ۴.۱.۲ در نظر گرفته شوند، همچنین $\{X_i, i \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی با $EX_i = ۰$ باشد، آن‌گاه*

$$\frac{۱}{g(n)} \sum_{k=۱}^{n} \frac{X_k}{h(k)} \xrightarrow{a.s.} ۰,$$

اگر و تنها اگر

$$E[\phi^{-۱}(|X_۱|)] < \infty.$$

برهان. **(شرط لازم)** اگر $\frac{۱}{g(n)} \sum_{k=۱}^{n} \frac{X_k}{h(k)} \xrightarrow{a.s.} ۰$ آن‌گاه بنابر لم ۶.۱.۲،چون $\phi(n) \equiv g(n)h(n)$ پس $\frac{۱}{\phi(n)} \sum_{k=۱}^{n} X_n \xrightarrow{a.s.} ۰$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}(X_n/\phi(n)) = ۰ \quad a.s.$ و رابطه $E[\phi^{-۱}(|X_۱|)] < \infty$ برقرار است.

(شرط کافی) فرض کنید $E[\phi^{-۱}(|X_۱|)] < \infty$ باشد. برای اثبات شرط کافی، باید بنا به لم کرونه‌کر نشان دهیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{X_n}{\phi(n)}$ همگرایی قریب به یقین دارد.

بنا بر لم ۲ مقاله سو و وانگ[۱۵] که داریم: برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی$\{X_i, i \geq ۱\}$ اگر سری‌های

$$\sum_{i=۱}^{\infty} P(|X_i| > C) \quad , \quad \sum_{i=۱}^{\infty} E(X_i^C) \quad , \quad \sum_{i=۱}^{\infty} var(X_i^C).$$

همگرا باشند، با فرض$C > ۰$ و در نظرگرفتن $X_i^C = X_i I(|X_i| \leq C)$، سری $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ همگرایی قریب به یقین خواهد داشت.

حال برای اثبات همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{X_n}{\phi(n)}$ فرض کنید

$$Y_i = \frac{X_i}{\phi(i)} I(|X_i/\phi(i)| \leq ۱),$$

آن‌گاه با در نظر گرفتن $E[\phi^{-۱}(|X_۱|)] < \infty$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=۱}^{\infty} P(|X_i/\phi(i)| > ۱) = \sum_{i=۱}^{\infty} P[\phi^{-۱}(|X_۱| > i)] \leq CE[\phi^{-۱}(|X_۱|)] < \infty,$$

در نتیجه بنا بر لم بورل-کانتلی

$$P\Big(\{|X_i/\phi(i)| > ۱\}, i.o\Big) = ۰, \quad \sum_{i=۱}^{\infty} \Big|X_i/\phi(i)\Big| I\Big(\Big|X_i/\phi(i)\Big| > ۱\Big) < \infty \quad a.s.$$

[۱۵] Su & Wang(1998)

بنا بر فرض $EX_i = ۰$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=۱}^{\infty}|E(Y_i)| \leq \sum_{i=۱}^{\infty} E\Big|X_i/\phi(i)\Big| I(|X_i/\phi(i)| > ۱) < \infty.$$

توجه نمایید که $\phi(\phi^{-۱}(|X_۱|)) = |X_۱|$ است و بنابر شرایط (ii) و (iii) از قضیه ۱.۲.۲، همچنین بنا بر قضیه ۴.۱.۲ چون تابع ϕ در شرایط $\frac{\phi(i+۱)}{\phi(i)} \leq C$ و $i \geq K_۰$ صدق می‌کند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{\infty} var(Y_i) &\leq \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{EX_۱^۲}{\phi^۲(i)} I(|X_۱| \leq \phi(i)), \quad (\text{بنا به تعریف } Y_i)\\
&\leq E\Big\{\sum_{i=۱}^{K_۰} \frac{X_۱^۲}{\phi^۲(i)} I(|X_۱| \leq \phi(i)) + \sum_{i=K_۰+۱}^{\infty} \frac{X_۱^۲}{\phi^۲(i)} I(|X_۱| \leq \phi(i))\Big\},\\
&\leq E\Big\{\sum_{i=۱}^{K_۰} \frac{\phi^۲(i)}{\phi^۲(i)} I(|X_۱| \leq \phi(i)) + \sum_{i=K_۰+۱}^{\infty} \frac{X_۱^۲}{\phi^۲(i)} I(|X_۱| \leq \phi(i))\Big\},\\
&\leq E\Big\{K_۰ + C^۲ \sum_{i=k_۰+۱}^{\infty} \frac{X_۱^۲}{\phi^۲(i+۱)} I(|X_۱| \leq \phi(i))\Big\},\\
&\leq E\Big\{K_۰ + C^۲ X_۱^۲ \int_{\phi^{-۱}(|X_۱|)}^{\infty} \frac{۱}{\phi^۲(x)} dx\Big\}, \quad (\text{تبدیل سیگما به انتگرال})\\
&\leq k_۰ + C^۲ a E[\phi^{-۱}(|X_۱|)] + C^۲ b < \infty.
\end{aligned}$$

بنا برشرط سوم در قضیه ۴.۱.۲ داریم $X_۱^۲ = [\phi(\phi^{-۱}(X_۱))]^۲$ و $s = \phi^{-۱}(X_۱)$. پس متناهی بودن رابطه مورد نظر برقرار خواهد بود و حکم اثبات می‌شود. □

فصل ۳

سرعت همگرایی برای مجموع موزون آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

۱.۳ مقدمه

در ادامه‌ی تحقیقاتی که جاج-دو، بلاک و همکارانش روی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و مفاهیم آن انجام دادند، افراد بسیاری از جمله هوو و ولودین [۱]، روابطی برای مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی به دست آوردند. پس از آن‌ها خانم کوزماسزسکا [۲] در سال ۲۰۰۹ همگرایی کامل را برای مجموع موزون آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی بررسی نمود و قضیه‌ای اساسی در این زمینه به اثبات رساند. فرض کنید $\{a_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ آرایه‌ای از وزن‌ها است، $\{X_{ni}, n \geq ۱, i \geq ۱\}$ نیز آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و $\{b_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعدادصحیح مثبت و صعودی هستند. با شرایط ذکر شده، در این فصل به بررسی روابطی از همگرایی کامل برای مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی می‌پردازیم. در ابتدا برخی لم‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم و در بخش بعد برخی نتایج به دست آمده در زمینه سرعت همگرایی آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با جزییات اثبات، مورد بررسی قرار خواهیم داد.

لم ۱.۱.۳. (*شائو.۲۰۰۰*) *فرض کنید* $\{X_i, ۱ \leq i \leq n\}$ *دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با* $EX_i = ۰$ *و* $E|X_i|^p < \infty$ *آن‌گاه*

[۱] Hu & Volodin(2006)
[۲] Kuczmaszewska

- برای $۱ < p \leq ۲$

$$E\max_{۱\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=۱}^{k}X_i\Big|^{p}\leq ۲^{۳-p}\sum_{i=۱}^{n}E|X_i|^p$$

- برای $p > ۲$

$$E\max_{۱\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=۱}^{k}X_i\Big|^{p}\leq ۲\Big(\frac{۱۵p}{\ln p}\Big)^{p}\Big\{\sum_{i=۱}^{n}E|X_i|^p+\Big(\sum_{i=۱}^{n}EX_i{}^{۲}\Big)^{\frac{p}{۲}}\Big\}.$$

لم ۲.۱.۳. (*لیانگ و سو.۱۹۹۹*) *فرض کنید* $\{X_n, n\geq ۱\}$ *دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با میانگین صفر است، همچنین* $\{a_{ni}, ۱\leq i\leq n, n\geq ۱\}$ *آرایه‌ای از مقادیر حقیقی با شرایط :*

- *برای برخی* $\frac{۲}{p} > \delta > ۰$ *و* $p \leq ۲$

$$\sum_{i=۱}^{n}a_{ni}^{۲}=O(n^{\delta}),\quad n\longrightarrow\infty,$$

-

$$|a_{ni}|=O(۱),\quad ۱\leq i\leq n,\quad n\geq ۱.$$

-

$$\beta_p=\sup_{k\geq ۱}E|X_k|^p<\infty.$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > ۰$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}P\Big[\max_{۱\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=۱}^{k}a_{ni}X_i\Big|>\varepsilon n^{\frac{۱}{p}}\Big]<\infty.$$

لم ۳.۱.۳. *فرض کنید* X *متغیری تصادفی است، اگر* $۱ > \varepsilon > |X|$ *و* $q > p > ۰$*، آن‌گاه*

$$E|X|^p > E|X|^q.$$

لم ۴.۱.۳. *فرض کنید* X *متغیری تصادفی است، اگر* $۱ > \varepsilon > |X|$ *و* a *عددی حقیقی، آن‌گاه*

$$E|X|I(|X|\leq a)\leq E|X|.$$

برهان. چون مقدار امیدریاضی همواره مثبت است، پس

$$E|X|I(|X|\leq a)\leq E|X|I(|X|\leq a)+E|X|I(|X|>a)=E|X|.$$

$\square$

۲.۳ همگرایی کامل برای مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

در ادامه براساس شرایطی که در مقدمه ذکر شد، قضیه‌ای اساسی برای سرعت همگرایی مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی بیان می‌کنیم و با استفاده از لم‌هایی که پیش‌تر ذکر شد، به جزییات اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. (کوزماسزسکا.۲۰۰۹) *فرض کنید* $\{X_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ *آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی همبسته منفی، همچنین* $\{a_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ *آرایه‌ای از اعداد حقیقی،* $\{b_n, n \geq ۱\}$ *دنباله‌ای از اعداد حقیقی و* $\{c_n, n \geq ۱\}$ *دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت است.*

اگر برای برخی $q > ۲$ *و* $۰ < t < ۲$ *و هر* $\varepsilon > ۰$ *شرایط زیر برقرار باشند:*

(الف)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n \sum_{i=۱}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] < \infty,$$

(ب)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=۱}^{b_n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] < \infty,$$

(ج)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=۱}^{b_n} a_{ni}^۲ E X_{ni}^۲ I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \Big)^{\frac{q}{۲}} < \infty,$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n P\Big[\max_{۱ \leq i \leq b_n} \Big| \sum_{j=۱}^{i} \Big(a_{nj}X_{nj} - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \Big) \Big| > \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}} \Big] < \infty. \qquad (۱.۳)$$

برهان. اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، آن‌گاه رابطه (۱.۳) متناهی خواهد بود و حکم قضیه برقرار می‌شود. بنابراین حالتی را در نظر می‌گیریم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ واگرا باشد.

فرض کنید X'_{ni} و Y_{ni} و S'_{nk} به این صورت تعریف شود که

$$X'_{ni} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}}{a_{ni}}, & a_{ni}X_{ni} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}} \\ X_{ni}, & |a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}} \\ -\dfrac{\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}}{a_{ni}}, & a_{ni}X_{ni} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}} \end{cases}$$

$$Y_{ni} = X'_{ni} - EX'_{ni} \quad , \quad S'_{nk} = \sum_{i=۱}^{k} Y_{ni}.$$

به عبارت $P\Big[\Big|\sum_{j=۱}^{i}\Big(a_{nj}X_{nj} - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big]$ یک جمله $a_{nj}X'_{nj}$ اضافه و کم می‌کنیم. (دقت داشته باشید که به جای X' مقداری که در ابتدا تعریف شد قرار می‌گیرد.) پس

$$\begin{aligned}
&P\Big[|\sum_{j=۱}^{i}\Big(a_{nj}X_{nj} \pm a_{nj}\Big(X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] + \frac{\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}}{a_{nj}}I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \\
&\quad - \frac{\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}}{a_{nj}}I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big) - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big] \\
&= P\Big[\Big|\sum_{j=۱}^{i} a_{nj}X_{nj} + \sum_{j=۱}^{i} a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] + \sum_{j=۱}^{i}\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \\
&\quad - \sum_{j=۱}^{i}\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] - \sum_{j=۱}^{i} a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \\
&\quad - \sum_{j=۱}^{i}\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] + \sum_{j=۱}^{i}\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \\
&\quad - \sum_{j=۱}^{i} a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}x_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big] = I.
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
&E\Big(\max_{۱\leq i\leq b_n}|S'_{ni}|\Big) = E\max_{۱\leq i\leq b_n}\sum_{j=۱}^{i}(X'_{nj} - EX'_{nj}) \\
&= E\max_{۱\leq i\leq b_n}\sum_{j=۱}^{i}\Big[a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] - \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] \\
&\quad - E\Big\{a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] - \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big\}\Big] = II.
\end{aligned}$$

باتوجه به آن‌چه در عبارات Iو II به دست آمد، داریم

$$
\begin{aligned}
&P\Big[\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj} + \sum_{j=1}^{i}\Big\{a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] - a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}x_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big\}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] \\
&\leq P\Big[\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] \\
&\quad + P\Big[\Big|\sum_{j=1}^{i}\Big\{a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] - a_{nj}X_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} I[a_{nj}X_{nj} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\quad - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}x_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big\}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] \\
&\leq P\Big[\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] + \frac{E(II)^q}{\varepsilon^q b_n^{\frac{q}{t}}} \\
&\leq P\Big[\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] + \varepsilon^{-q} b_n^{-\frac{q}{t}} E\Big(\max_{1\leq i\leq b_n} |S'_{ni}|\Big)^q.
\end{aligned}
$$

در نهایت

$$
\begin{aligned}
&P\Big[\max_{1\leq i\leq b_n}\Big|\sum_{j=1}^{i}\Big(a_{nj}X_{nj} - a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{nj}X_{nj}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon^{-q} b_n^{-\frac{q}{t}} E\Big(\max_{1\leq i\leq b_n} |S'_{ni}|\Big)^q.
\end{aligned}
\tag{۲.۳}
$$

حال بنا بر تعریفی که در ابتدای برهان برای X'_{nj} بریده شده و Y_{ni} در نظر گرفتیم، داریم

$$
Y_{ni} \leq X_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} I[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}], \tag{۳.۳}
$$

بنا بر خواص امید ریاضی می‌توانیم از طرفین عبارت (۳.۳) امید ریاضی بگیریم، در نتیجه

$$\begin{aligned} EY_{ni} &\leq E\Big[X_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big] + E\Big[\frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} I[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big] \\ &= EX_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \varepsilon \frac{b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} EI[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\ &\leq EX_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} EI[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\ &= EX_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]. \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

حال طرفین رابطه (۴.۳) را به توان q می‌رسانیم، پس نامساوی زیر برقرار خواهد بود.

$$E|Y_{ni}|^q \leq C\Big(E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{b_n^{\frac{q}{t}}}{|a_{ni}|^q} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big). \tag{۵.۳}$$

از طرفی چون $q > ۲$، پس بنا بر نامساوی دوم در لم ۱.۱.۳ داریم

$$E \max_{۱\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=۱}^{k} Y_{ni}\Big|^q \leq ۲\big(\frac{۱۵q}{\ln q}\big)^q \Big\{\sum_{i=۱}^{k} E|Y_{ni}|^q + (\sum_{i=۱}^{k} EY_{ni}^۲)^{\frac{q}{۲}}\Big\}. \tag{۶.۳}$$

در ادامه مقدار $EY_{ni}^۲$ را بنا به تعریف X'_{ni} به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} EY_{ni}^۲ &= E(X'_{ni} - EX'_{ni})^۲ \\ &= E\Big[X_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} I[a_{ni}X_{ni} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] - \frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} I[a_{ni}X_{ni} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\ &\quad - E(X_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]) - \frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} EI[a_{ni}X_{ni} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \frac{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}{a_{ni}} EI[a_{ni}X_{ni} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big]^۲ \\ &= Var(X_{ni}I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]) + (\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}})^۲ Var(\frac{۱}{a_{ni}} I[a_{ni}X_{ni} \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]) \\ &\quad + (\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}})^۲ Var(\frac{۱}{a_{ni}} I[a_{ni}X_{ni} \leq -\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]) \quad (\text{بنابر خواص واریانس}) \\ &\leq E(X_{ni}^۲ I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]) + ۲(\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}})^۲ E(\frac{۱}{a_{ni}})^۲ P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] (\text{چون } varX = EX^۲ - E^۲X) \end{aligned}$$

حال در عبارت اخیر، مجموع جملات به ازای $i=۱$ تا k را بدست می‌آوریم و طرفین را به توان $\frac{q}{۲}$ می‌رسانیم.

$$\Big(\sum_{i=۱}^{k}EY_{ni}^{۲}\Big)^{\frac{q}{۲}}\leq\Big(\sum_{i=۱}^{k}E(X_{ni}^{۲}I[|a_{ni}X_{ni}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}])\Big)^{\frac{q}{۲}}$$
$$+۲(\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}})^q\Big(\sum_{i=۱}^{k}E(\frac{۱}{a_{ni}})^{۲}P[|a_{ni}X_{ni}|\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}}.$$

عبارات به دست آمده از $\Big(\sum_{i=۱}^{k}EY_{ni}^{۲}\Big)^{\frac{q}{۲}}$ و $E|Y_{ni}|^q$ را در رابطه (۶.۳) جایگذاری می‌کنیم، پس

$$E\max_{۱\leq k\leq n}\Big|\sum_{k=۱}^{i}Y_{nk}\Big|^q\leq۲\Big(\frac{۱۵q}{lnq}\Big)^q\Big\{\sum_{k=۱}^{n}E|X_{nk}|^qI[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]+\sum_{k=۱}^{n}\frac{b_n^{\frac{q}{t}}}{|a_{nk}|^q}P[|a_{nk}X_{nk}|>\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]$$
$$+\Big(\sum_{k=۱}^{i}E(X_{nk}^{۲}I[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}])\Big)^{\frac{q}{۲}}+۲(\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}})^q\Big(\sum_{k=۱}^{i}E(\frac{۱}{a_{nk}})^{۲}P[a_{nk}X_{nk}\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}}\Big\}.$$

عبارت $\varepsilon^{-q}b_n^{-\frac{q}{t}}E(\max_{۱\leq i\leq b_n}|S'_{ni}|)^q$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم و سپس در عبارت (۲.۳) قرار می‌دهیم.

$$\varepsilon^{-q}b_n^{-\frac{q}{t}}E(\max_{۱\leq i\leq b_n}\sum_{k=۱}^{i}|Y_{nk}|^q)$$
$$=\varepsilon^{-q}b_n^{-\frac{q}{t}}\Big\{\sum_{k=۱}^{i}E|X_{nk}|^qI[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]+\sum_{k=۱}^{i}(\frac{b_n^{\frac{q}{t}}}{|a_{nk}|^q})P[|a_{nk}X_{nk}|\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]$$
$$+\Big(\sum_{k=۱}^{i}EX_{nk}^{۲}I[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}}+۲\sum_{k=۱}^{i}(\frac{\varepsilon^q b_n^{\frac{q}{t}}}{|a_{nk}|^q})P\Big(|a_{nk}X_{nk}|>\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big)^{\frac{q}{۲}}\Big\}$$
$$\leq Cb_n^{-\frac{q}{t}}E|a_{nk}|^q|X_{nk}|^qI[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]+C\sum_{k=۱}^{b_n}P[|a_{nk}X_{nk}|\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]$$
$$+Cb_n^{-\frac{q}{t}}\sum_{k=۱}^{i}\Big(EX_{nk}^{۲}I[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}}\quad\text{(عبارات را در } |a_{nk}|^q \text{ ضرب می‌کنیم)}$$
$$\leq b_n^{-\frac{q}{t}}\sum_{k=۱}^{b_n}|a_{nk}|^qE|X_{nk}|^qI[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]+\sum_{k=۱}^{b_n}P[|a_{nk}X_{nk}|\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]$$
$$+\Big(\sum_{k=۱}^{b_n}a_{nk}^{۲}EX_{nk}^{۲}I[|a_{nk}X_{nk}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}}.$$

پس خواهیم داشت

$$P\Big[\max_{۱\leq i\leq b_n}\Big|\sum_{j=۱}^{i}\Big(a_{nj}X_{nj}-a_{nj}EX_{nj}I[|a_{nj}X_{nj}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\Big)\Big|>\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big]$$
$$\leq\sum_{i=۱}^{b_n}P[|a_{ni}X_{ni}|\geq\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]+b_n^{-\frac{q}{t}}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^qE|X_{ni}|^qI[|a_{ni}X_{ni}|<\varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}],$$

$$+\sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 EX_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}}$$

$$\leq C\Big\{\sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] + b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 EX_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}}\Big\} < \infty. \tag{۷.۳}$$

چون سه شرط (الف) تا (ج) در صورت قضیه برقرار است پس هر یک از عبارات در رابطه (۷.۳) متناهی خواهند بود، درنتیجه حکم برقرار است. □

۳.۳ نتایج همگرایی کامل برای مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

پس از قضیه اساسی که در بررسی سرعت همگرایی مجموع موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی گفته شد، در ادامه برخی روابطی که با توجه به این قضیه برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی بدست آمده، بررسی کنیم و در قالب قضیه و نتیجه به جزییات اثبات آن‌ها می‌پردازیم. به این منظور در ابتدا لم کاربردی زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۳. *(سونگ،۲۰۰۷) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که توسط متغیر X به طور تصادفی مغلوب شده. در این صورت برای هر $q > 0$ و هر $b > 0$*

(الف) $E|X_n|^q I(|X_n| \leq b) \leq C\Big\{E|X|^q I(|X| \leq b) + b^q P(|X| > b)\Big\}$

(ب) $E|X_n|^q I(|X_n| > b) \leq CE|X|^q I(|X| > b)$

قضیه ۲.۳.۳. *$\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و $\{a_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی، همچنین برای $1 \leq i \leq b_n$ ، $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح مثبت و برای هر $i \geq 1$ و $n \geq 1$، $EX_{ni} = 0$ باشد، اگر برای بعضی مقادیر دنباله $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ بافرض $0 < \lambda_n \leq 1$، گشتاور $E|X_{ni}|^{1+\lambda_n}$ متناهی باشد و برای دنباله $\{c_n, n \geq 1\}$ با مقادیر حقیقی مثبت و $0 < t < 2$ شرط زیر برقرار باشد*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(b_n^{\frac{1}{t}}\Big)^{-1-\lambda_n} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^{1+\lambda_n} E|X_{ni}|^{1+\lambda_n} < \infty, \tag{۸.۳}$$

آن‌گاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n P\Big[\max_{۱\le i\le b_n}\Big|\sum_{j=۱}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}\Big] < \infty. \tag{۹.۳}$$

برهان. حالتی را درنظر می‌گیریم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ نامتناهی است، زیرا در غیر این صورت حکم بدیهی خواهد بود. وقتی رابطه (۸.۳) برقرار است، جمله عمومی این سری به صفر میل می‌کند و رابطه زیر بدیهی خواهد بود.

$$\Big(b_n^{\frac{۱}{t}}\Big)^{-۱-\lambda_n}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^{۱+\lambda_n}E|X_{ni}|^{۱+\lambda_n} < ۱.$$

برای اثبات کافی است برقراری سه شرط (الف) تا (ج) موجود در قضیه ۱.۲.۳ را بررسی کنیم.

چون $۰ < \lambda_n \le ۱$ است پس $۱ < ۱+\lambda_n \le ۲$ ، درنتیجه اگر در نامساوی مارکوف $r = ۱+\lambda_n$ فرض شود، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{\infty} c_n\sum_{i=۱}^{b_n}P[|a_{ni}X_{ni}| \ge \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] &\le \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\sum_{i=۱}^{b_n}\frac{E|a_{ni}|^{۱+\lambda_n}|X_{ni}|^{۱+\lambda_n}}{(b_n^{\frac{۱}{t}})^{۱+\lambda_n}}\\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\Big(b_n^{\frac{۱}{t}}\Big)^{-۱-\lambda_n}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^{۱+\lambda_n}E|X_{ni}|^{۱+\lambda_n}\\ &< \infty. \quad (\text{بنا بر رابطه (۸.۳)})\end{aligned}$$

پس شرط (الف) برقرار است.

حال به بررسی شرط (ب) در قضیه ۱.۲.۳ می‌پردازیم، چون $q > ۱+\lambda_n$، همچنین بنا بر لم‌های (۳.۱.۳) و (۴.۱.۳) داریم

$$\begin{aligned}&\sum_{n=۱}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}]\\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\varepsilon^q\sum_{i=۱}^{b_n}E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{b_n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon}\Big|^q I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon} < ۱\Big)\\ &\le \varepsilon^q\sum_{n=۱}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{۱+\lambda_n}{t}}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^{۱+\lambda_n}E|X_{ni}|^{۱+\lambda_n}I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon} < ۱\Big)\\ &\le \varepsilon^q\sum_{n=۱}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{۱+\lambda_n}{t}}\sum_{i=۱}^{b_n}|a_{ni}|^{۱+\lambda_n}E|X_{ni}|^{۱+\lambda_n} < \infty.\end{aligned}$$

برای برقراری شرط (ج)، چون $1+\lambda_n < 2$ است، همچنین بنابر لم‌های (۳.۱.۳) و (۴.۱.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=1}^{b_n} E\Big(\frac{a_{ni}X_{ni}}{\varepsilon b_n^{\frac{2}{t}}}\Big)^2 I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1\Big)\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \varepsilon^{1+\lambda_n} E\frac{|a_{ni}X_{ni}|^{1+\lambda_n}}{\varepsilon^{1+\lambda_n}(b_n)^{\frac{1+\lambda_n}{t}}} I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1\Big)\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{(1+\lambda_n)q}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(b_n^{\frac{-1-\lambda_n}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} E(|a_{ni}X_{ni}|)^{1+\lambda_n} I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1\Big)\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{(1+\lambda_n)q}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(b_n^{\frac{1}{t}}\Big)^{(-1-\lambda_n)\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^{1+\lambda_n} E|X_{ni}|^{1+\lambda_n}\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(b_n^{\frac{1}{t}}\Big)^{(-1-\lambda_n)\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^{1+\lambda_n} E|X_{ni}|^{1+\lambda_n}\Big)^{\frac{q}{2}} < \infty.
\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

حال با بررسی شرایط قضیه، کافی است نشان دهیم

$$b_n^{-\frac{1}{t}} \max_{1\leq i\leq b_n} \Big| \sum_{j=1}^{i} a_{nj} E X_{nj} I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

پس در نهایت

$$\begin{aligned}
&b_n^{-\frac{1}{t}} \max_{1\leq i\leq b_n} \Big| \sum_{j=1}^{i} a_{nj} E X_{nj} I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big| \\
&\leq b_n^{-\frac{1}{t}} \max_{1\leq i\leq b_n} \sum_{j=1}^{i} \Big| a_{nj} E X_{nj} I[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big| \\
&\leq b_n^{-\frac{1}{t}} \max_{1\leq i\leq b_n} \sum_{j=1}^{i} \Big| a_{nj} E X_{nj} I[|a_{nj}X_{nj}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big| \\
&\leq b_n^{-\frac{1}{t}} \max_{1\leq i\leq b_n} \sum_{j=1}^{i} |a_{nj}| E|X_{nj}| I[|a_{nj}X_{nj}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big| \\
&\leq \Big(b_n^{-\frac{1}{t}}\Big)^{1+\lambda_n} \sum_{j=1}^{b_n} |a_{nj}|^{1+\lambda_n} E|X_{nj}|^{1+\lambda_n} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

□

دو نتیجه‌ای که در ادامه بررسی می‌کنیم مشابه قضیه ۱.۱ از مقاله لیانگ و سو (۱۹۹۹) است. با این تفاوت که در این‌جا نیازی به وجود گشتاور مرتبه $q > ۲$ برای متغیرهای تصادفی $\{X_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ نیست.

نتیجه ۳.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, n \geq ۱, i \geq ۱\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است، به طوری که $EX_{ni} = ۰$ و برای $۱ < p \leq ۲$، $E|X_{ni}|^p < \infty$. از طرفی $\{a_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی و شرط زیر برای $۰ < \delta \leq \frac{۲}{q}$ و $q > ۲$ برقرار است.*

$$\sum_{i=۱}^{n} |a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p = O(n^\delta), \quad n \longrightarrow \infty, \tag{۱۱.۳}$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و $\alpha p \geq ۱$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲} P\Big[\max_{۱\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=۱}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon n^\alpha\Big] < \infty. \tag{۱۲.۳}$$

برهان. در قضیه ۱.۲.۳ فرض می‌کنیم

$$c_n = n^{\alpha p-۲}, \quad b_n = n, \quad \frac{۱}{t} = \alpha.$$

برای اثبات، کافی است سه شرط قضیه ۱.۲.۳ با فرضیات بالا برقرار باشد، چون $۱ < p \leq ۲$ برای بررسی شرط (الف)

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{\infty} c_n \sum_{i=۱}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{۱}{t}}] &= \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲} \sum_{i=۱}^{b_n} P[|a_{ni}||X_{ni}| \geq \varepsilon n^\alpha] \\ &\leq \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲} \sum_{i=۱}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p}{n^{\alpha p}\varepsilon^p} \quad \text{(بنا به نامساوی مارکوف)} \\ &\leq C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۲+\delta} < \infty. \quad \text{((بنا بر عبارت (۱۱.۳))}\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

در ادامه برای برقراری شرط (ب) نیز به این صورت عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{-q\alpha} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\alpha}]\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^q \sum_{i=1}^{b_n} E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{n^{\alpha}\varepsilon}\Big|^q I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1\Big),\end{aligned}$$

چون $p < q$ است و بنا بر لم‌های (۳.۱.۳) و (۴.۱.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^q \sum_{i=1}^{b_n} E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{n^{\alpha}\varepsilon}\Big|^p I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1\Big)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^q \sum_{i=1}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p}{n^{\alpha p}\varepsilon^p} I[|a_{ni}X_{ni}| < n^{\alpha}\varepsilon]\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{-p\alpha} \varepsilon^{q-p} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p I[|a_{ni}X_{ni}| < n^{\alpha}\varepsilon]\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+\delta} \varepsilon^{q-p} \sum_{i=1}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p}{n^{\delta}} \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+\delta} < \infty. \quad (\text{بنابر عبارت}(۱۱.۳))\end{aligned}$$

برای بررسی شرط (ج)

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{-q\alpha} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\alpha}]\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \frac{(E a_{ni}X_{ni})^2}{n^{\alpha}\varepsilon} I[\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1]\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \frac{E|a_{ni}X_{ni}|^p}{n^{\alpha p}\varepsilon^p} I[\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1]\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}-\frac{pq}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \frac{E|a_{ni}|^p|X_{ni}|^p}{n^{\alpha p}}\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{\frac{-\alpha pq}{2}} n^{\frac{\delta q}{2}} \varepsilon^{\frac{q}{2}-\frac{pq}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \frac{E|a_{ni}|^p|X_{ni}|^p}{n^{\delta}}\Big)^{\frac{q}{2}}\\ &\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\frac{\alpha pq}{2}+\frac{\delta q}{2}} < \infty. \quad (\text{بنا بر شرط } (۱۱.۳))\end{aligned}$$

دقت نمایید هر سه شرط قضیه ۱.۲.۳ برقرار است و حکم اثبات می‌شود. □

نتیجه ۴.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است و $EX_{ni} = 0$، به طوری که هر سطر از متغیرهای تصادفی به طور تصادفی توسط متغیر X مغلوب شده است و برای $1 < p \leq 2$ گشتاور $E|X|^p$ متناهی است و همچنین فرض کنید $\{a_{ni}, i \geq, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی است که برای برخی $0 < \delta \leq \frac{2}{q}$ و $q > 2$*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^p = O(n^\delta), \quad n \longrightarrow \infty. \tag{۱۴.۳}$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\alpha p \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\Big[\max_{1\leq i\leq b_n}\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty.$$

برهان. فرض می‌کنیم در قضیه ۱.۲.۳ داشته باشیم

$$c_n = n^{\alpha p-2}, \quad b_n = n, \quad \frac{1}{t} = \alpha,$$

برای بررسی شرایط قضیه ۱.۲.۳، دقت نمایید که $1 < p \leq 2$. پس

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon n^\alpha] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \sum_{i=1}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^p E|X_{ni}|^p}{n^{\alpha p}} \qquad \text{(بنا به نامساوی مارکوف)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \sum_{i=1}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^p E|X|^p}{n^{\alpha p}} \qquad \text{(به طور تصادفی مغلوب شده)} \\
&< \infty. \quad \text{((بنا برشرط (۱۴.۳))}
\end{aligned}$$

در ادامه داریم

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{-q\alpha} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^\alpha] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \sum_{i=1}^{n} E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{n^\alpha}\Big|^q I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^\alpha \varepsilon} < 1\Big),
\end{aligned}$$

چون $p < q$، باتوجه به لم‌های ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\varepsilon^{q} \sum_{i=1}^{n} E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{\varepsilon n^{\alpha}}\Big|^{q} I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{\varepsilon n^{\alpha}} < 1\Big)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\varepsilon^{q} \sum_{i=1}^{n} E\Big|\frac{a_{ni}X_{ni}}{\varepsilon n^{\alpha}}\Big|^{p} I\Big(\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{\varepsilon n^{\alpha}} < 1\Big)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\varepsilon^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ni}|^{p}E|X_{ni}|^{p}}{\varepsilon^{p} n^{\alpha p}} I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\alpha}]\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha p}\varepsilon^{q-p} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{p}E|X|^{p} I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\alpha}] \quad \text{(به طور تصادفی مغلوب شده)}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+\delta}\varepsilon^{q-p} \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ni}|^{p}E|X|^{p}}{n^{\delta}} \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+\delta} < \infty. \quad \text{((بنابرشرط (۱۴.۳}
\end{aligned}$$

و در نهایت

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{2} E X_{ni}^{2} I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{-q\alpha} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{2} E X_{ni}^{2} I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\alpha}]\Big)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{E a_{ni}X_{ni}}{\varepsilon n^{\alpha}}\Big)^{2} I[\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1]\Big)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{E|a_{ni}X_{ni}|^{p}}{\varepsilon^{2p} n^{\alpha p}} I[\frac{|a_{ni}X_{ni}|}{n^{\alpha}\varepsilon} < 1]\Big)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \varepsilon^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{E|a_{ni}|^{p}|X|^{p}}{\varepsilon^{2p} n^{\alpha p}}\Big)^{\frac{q}{2}} \quad \text{(به طور تصادفی مغلوب شده)}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} n^{\frac{-\alpha pq}{2}} n^{\frac{\delta q}{2}} \varepsilon^{\frac{q}{2}-pq} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} \frac{|a_{ni}|^{p}E|X|^{p}}{n^{\delta}}\Big)^{\frac{q}{2}} \quad (\text{در عبارت } n^{\frac{\delta q}{2}} \text{ ضرب و تقسیم شد})\\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\frac{\alpha pq}{2}+\frac{\delta q}{2}} < \infty. \quad \text{((بنا برشرط (۱۴.۳}
\end{aligned}$$

در نتیجه شرایط قضیه ۱.۲.۳ برقرار است و حکم اثبات می‌شود. □

نتیجه ۵.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است، به طوری که $EX_{ni} = 0$ و هر سطر از متغیرهای تصادفی به طور تصادفی توسط متغیر X مغلوب شده است. همچنین $\{a_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ یک آرایه تاپلیتس (تعریف ۱۳.۲.۱ در فصل اول را ببینید) باشد. اگر برای*

بعضی $0 < t < 2$ و $\delta > \frac{1}{t}$

$$\sup_{i\geq 1}|a_{ni}| = O(n^{\frac{1}{t}-\delta}) \quad \text{و} \quad E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} < \infty, \tag{۱۵.۳}$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{i} a_{nj}X_{nj}\Big| > \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty. \tag{۱۶.۳}$$

برهان. فرض می‌کنیم در قضیه ۱.۲.۳، $c_n = 1$ و $b_n = n$ و $n \geq 1$ باشد. q را به صورتی انتخاب می‌کنیم که $q \geq \max(2, 1+\frac{1}{\delta})$. حال بنا بر خواص متغیرهایی که به طور تصادفی مغلوب شده‌اند، همچنین با توجه به تعریف آرایه تاپلیتس، برقراری شرط (الف) تا (ج) در قضیه ۱.۲.۳ را بررسی می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{b_n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}]$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\Big[|a_{ni}X| \geq \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{t}}}{D}\Big] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\Big[|X| \geq \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{t}}}{D|a_{ni}|}\Big].$$

بنا بر رابطه (۱۵.۳) چون $a_{ni} \approx Cn^{\frac{1}{t}-\delta}$ و $\delta > \frac{1}{t}$ پس $n^{\delta} > n^{\frac{1}{t}}$ ، پس داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\Big[|X| \geq \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{t}}}{D|a_{ni}|}\Big] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P[|X| \geq C\varepsilon n^{\delta}]$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} nP[|X| \geq C\varepsilon n^{\delta}] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[|\frac{X}{C\varepsilon}|^{\frac{1}{\delta}} \geq n]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP[|\frac{X}{C\varepsilon}| \geq n^{\delta}] \leq \frac{E|X|^{\frac{1}{\delta}}}{(n^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}} \quad \text{(بنابر نامساوی مارکوف)}$$
$$= Cn\frac{E|X|^{\frac{1}{\delta}}}{n} = CE|X|^{\frac{1}{\delta}} < \infty. \quad (E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} < \infty \text{ چون}) \tag{۱۷.۳}$$

دیدیم که شرط (الف) برقرار است. حال بررسی شرط (ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]$$
$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q (I|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}})$$
$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q \Big(E|X_{ni}|^q I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] + \frac{n^{\frac{q}{t}}}{|a_{ni}|^q} P[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big),$$

حال بنا به خاصیت به طور تصادفی مغلوب شدن متغیرهای X_i توسط X

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q \Big(E|X|^q I[|a_{ni}X| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] + \frac{n^{\frac{q}{t}}}{|a_{ni}|^q} P[|a_{ni}X| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}]\Big),$$

چون$q > \frac{1}{\delta} + 1$، پس $n^{-q} < n^{-(1+\frac{1}{\delta})}$. درنتیجه بنا بر لم‌های ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳ داریم

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{(1+\frac{1}{\delta})}{t}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{1+\frac{1}{\delta}} E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} P[|a_{ni}X| > \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{t}-1} E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}| + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} \quad \text{(بنابر(۱۷.۳) و نامساوی مارکوف)} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{t}-1} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} < \infty. \quad \text{(بنا به خاصیت تاپلیتس و متناهی بودن } E|X|^{1+\frac{1}{\delta}}\text{)}
\end{aligned}$$

توجه داشته باشید بر اساس شرط $\sup_{i\geq 1} |a_{ni}| = O(n^{\frac{1}{t}-\delta})$، چون توان $\frac{1}{t} - \delta$ منفی است پس $|a_{ni}|$ ها بشدت از یک کمتر خواهند بود، به همین دلیل

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{1+\frac{1}{\delta}} < \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|$$

برای برقراری شرط (ج)، دو حالت درنظر می‌گیریم. در ابتدا فرض می‌کنیم $\delta < 1$، بنا بر خاصیت آرایه‌های تاپلیتس و نامساوی مارکوف

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] \Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2t}(1+\frac{1}{\delta})} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{1+\frac{1}{\delta}} E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} \Big)^{\frac{q}{2}} + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} [P|a_{ni}X| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] \text{(بنا برلم۱.۳.۳)} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2t}-\frac{q}{2t\delta}} n^{\frac{1}{\delta}(\frac{1}{t}-\delta)\frac{q}{2}} \Big(E|X|^{1+\frac{1}{\delta}} \Big)^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}| \Big)^{\frac{q}{2}} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} \quad \text{(بنا بر رابطه (۱۷.۳))} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2t}-\frac{q}{2}} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} \quad \text{(بنا بر رابطه (۱۵.۳) و نامساوی مارکوف)} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2}(1+\frac{1}{t})} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} < \infty. \quad \text{(بنا به خاصیت تاپلیتس و متناهی بودن } E|X|^{1+\frac{1}{\delta}}\text{)}
\end{aligned}$$

در حالتی که $0 < \delta < 1$،

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} a_{ni}^2 EX_{ni}^2 I[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}]\Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{t}} n^{(\frac{1}{t}-\delta)\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ni}|^2}{n^{(\frac{1}{t}-\delta)}} EX^2\Big)^{\frac{q}{2}} + C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P[|a_{ni}X| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}] \quad (\text{بنابر لم } 1.3.3) \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2t}-\frac{q\delta}{2}} (EX^2)^{\frac{q}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|\Big)^{\frac{q}{2}} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} \quad (\text{بنا بر رابطه } (17.3)) \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{q}{2}(\frac{1}{t}+\delta)} + CE|X|^{\frac{1}{\delta}} < \infty. \quad (\text{بنا به خاصیت تاپلیتس و متناهی بودن } E|X|^{1+\frac{1}{\delta}})
\end{aligned}
$$

□

نتیجه ۶.۳.۳. *فرض کنید* $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ *و* $\{Y_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ *آرایه‌هایی از متغیرهای تصادفی هستند.* $\{b_n, n \geq 1\}$ *دنباله‌ای صعودی اکید از اعداد صحیح مثبت، همچنین* $\{Y_{ni}X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ *آرایه‌ای است که برای هر* $n \geq 1$ ، $Y_{ni}X_{ni}, i \geq 1$ *پیوندی منفی است.*

اگر برای بعضی از p *و* q *ها،که* $1 \leq p \leq 2$ *و* $q > 2$ *و برای هر* $n \geq 1$

$$\sup_{i\geq 1} E|Y_{ni}|^{\frac{pq}{q-1}} < \infty, \tag{۱۸.۳}$$

دنباله $\{c_n, n \geq 1\}$ *از اعداد حقیقی مثبت و* $0 < t < 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} (E|X_{ni}|^{pq})^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{۱۹.۳}$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\max_{1\leq i\leq b_n} \Big|\sum_{j=1}^{i} \Big(Y_{nj}X_{nj} - EY_{nj}X_{nj}I\Big[|Y_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big]\Big)\Big| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty.$$

برهان. برای اثبات به برقراری شرایط قضیه ۱.۲.۳، با استفاده از نامساوی هولدر و مارکوف و شرایط موجود، می‌پردازیم. در بررسی شرط (الف) بنا بر نامساوی مارکوف

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{b_n} P[|Y_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{b_n} b_n^{-\frac{p}{t}} E|Y_{ni}X_{ni}|^p,$$

چون $0 < t < 2$، آن‌گاه $\frac{1}{2} < \frac{1}{t} < 0$ و $1 \leq p \leq 2$ برقرار خواهد بود. درنتیجه $1 \leq \frac{p}{t}$ و چون شرط $\sup_{i\geq 1} E|Y_{ni}|^{\frac{pq}{(q-1)}} < \infty$ وجود دارد، بنا بر نامساوی هولدر

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{b_n} b_n^{-\frac{p}{t}} E|Y_{ni}X_{ni}|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} \left(E|Y_{ni}|^{\frac{pq}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(E|X_{ni}|^{pq}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} \left(E|X_{ni}|^{pq}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad \text{(بنابر روابط (۱۹.۳) و (۱۸.۳))}$$

در بررسی شرط (ب)، وقتی در شرط $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} (E|X_{ni}|^{pq})^{\frac{1}{q}} < \infty$ مقدار c_n برابر یک فرض شود، بنا بر لم‌های ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\frac{q}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} E|Y_{ni}X_{ni}|^q I[|Y_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{b_n} \varepsilon^q \Big(\frac{E|Y_{ni}X_{ni}|}{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}\Big)^q I\Big[\frac{|Y_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1\Big] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{b_n} \varepsilon^q \Big(\frac{E|Y_{ni}X_{ni}|}{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}}\Big)^p I\Big[\frac{|Y_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1\Big] \\
&\leq \varepsilon^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} E|Y_{ni}X_{ni}|^p I[|Y_{ni}X_{ni}| < b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon] \\
&\leq \varepsilon^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} E|Y_{ni}X_{ni}|^p \\
&\leq \varepsilon^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} \left(E|Y_{ni}|^{\frac{pq}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(E|X_{ni}|^{pq}\right)^{\frac{1}{q}} \text{(بنا بر نامساوی هولدر)} \\
&\leq \varepsilon^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} \left(E|X_{ni}|^{pq}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad \text{(بنا بر شرط (۱۸.۳) و (۱۹.۳))}
\end{aligned}$$

و در نهایت برای بررسی شرط (ج)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{q}{t}} \Big(\sum_{i=1}^{b_n} E|Y_{ni}X_{ni}|^2 I[|Y_{ni}X_{ni}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}] \Big)^{\frac{q}{2}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big[\sum_{i=1}^{b_n} \varepsilon^2 \Big(\frac{E|Y_{ni}X_{ni}|}{\varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}} \Big)^2 I\Big[\frac{|Y_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1 \Big] \Big]^{\frac{q}{2}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^{q-\frac{pq}{2}} \Big[\sum_{i=1}^{b_n} \Big(\frac{E|Y_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}} \Big)^p I\Big[\frac{|Y_{ni}X_{ni}|}{b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon} < 1 \Big] \Big]^{\frac{q}{2}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^{q-\frac{pq}{2}} \Big[b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} E|Y_{ni}X_{ni}|^p I[|Y_{ni}X_{ni}| < b_n^{\frac{1}{t}}\varepsilon] \Big]^{\frac{q}{2}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^{q-\frac{pq}{2}} \Big[b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} \Big(E|Y_{ni}|^{\frac{pq}{p-1}} \Big)^{\frac{q-1}{q}} \Big(E|X_{ni}|^{pq} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big]^{\frac{q}{2}} \quad \text{(بنا بر نامساوی هولدر)} \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big[b_n^{-\frac{p}{t}} \Big(E|X_{ni}|^{pq} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big]^{\frac{q}{2}} < \infty. \quad \text{((بنا برشرط(۱۸.۳)و (۱۹.۳))}
\end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه نمودید شرایط قضیه ۱.۲.۳ برقرار است، درنتیجه حکم برقرار خواهد بود. □

نتیجه ۷.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, n \ge 1, i \ge 1\}$ و $\{Y_{ni}, i \ge 1, n \ge 1\}$ آرایه‌هایی از متغیرهای تصادفی و $\{b_n, n \ge 1\}$ دنباله صعودی اکید از اعداد صحیح مثبت هستند. همچنین فرض کنید $\{Y_{ni}X_{ni}, n \ge 1, i \ge 1\}$ وجود دارد که در آن $Y_{ni}X_{ni}$ برای $n \ge 1$ پیوندی منفی است. اگر برای $1 \le p \le 2$ و $q > 2$*

$$\sup_{i \ge 1} E|X_{ni}|^{\frac{pq}{q-1}} < \infty,$$

وبرای هر $n \ge 1$ و برخی اعداد حقیقی مثبت دنباله $\{c_n, n \ge 1\}$ و $0 < t < 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n^{-\frac{p}{t}} \sum_{i=1}^{b_n} (E|Y_{ni}|^{pq})^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\max_{1 \le i \le b_n} \Big| \sum_{j=1}^{i} \Big(Y_{nj}X_{nj} - EY_{nj}X_{nj} I\Big[|Y_{nj}X_{nj}| < \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}}\Big] \Big) \Big| \ge \varepsilon b_n^{\frac{1}{t}} \Big] < \infty.$$

اثبات نتیجه ۷.۳.۳ مشابه اثبات نتیجه ۶.۳.۳ است، به این دلیل از تکرار آن پرهیز می‌کنیم.

نتیجه ۸.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, n \ge 1, i \ge 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است و $\{a_{ni}, i \ge 1, n \ge 1\}$ آرایه‌ای از مقادیر حقیقی در نظر گرفته شود، $l(x)$ تابع مثبت به آرامی تغییرپذیر و $\alpha > \frac{1}{2}$ و $\alpha r \ge 1$، اگر برای بعضی $q > 2$ و $0 < t < 2$ شرایط (الف) تا (ج) برقرار باشد*

(الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-2} l(n) \sum_{i=1}^{n} P\Big[|a_{ni}X_{ni}| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty,$$

(ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-2-\frac{q}{t}} l(n) \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q E|X_{ni}|^q I\Big[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty,$$

(ج)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-2-\frac{q}{t}} l(n) \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 E X_{ni}^2 \Big[|a_{ni}X_{ni}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big]\Big)^{\frac{q}{2}} < \infty.$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-2} l(n) P\Big[\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{i}\Big(a_{nj}X_{nj} - a_{nj}EX_{nj}I\Big[|a_{nj}X_{nj}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big]\Big| > \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty. \quad (۲۰.۳)$$

برای اثبات کافی است در قضیه ۱.۲.۳ فرض کنیم $c_n = n^{\alpha r-2} l(n)$ و $b_n = n$. آن‌گاه حکم برقرار خواهد بود.

نتیجه ۹.۳.۳. *فرض کنید $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و پیوندی منفی است، به طوری که $EX_{11} = 0$ و $l(x)$ تابعی به آرامی تغییرپذیر باشد. اگر برای $\alpha > \frac{1}{2}$، $\alpha r > 1$ و $0 < t < 2$ شرط زیر برقرار باشد*

$$E|X_{11}|^{\alpha r t} l(|X_{11}|^t) < \infty, \quad (۲۱.۳)$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-2} l(n) P\Big[\max_{i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{i} X_{nj}\Big| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big] < \infty.$$

برهان. برای اثبات، باید برقراری سه شرط در نتیجه ۸.۳.۳ بررسی شود. به این منظور فرض می‌کنیم $a_{ni} = 1$ است. با توجه به لم مربوط به توابع به آرامی تغییرپذیر که در فصل اول بررسی شد، وقتی $n = 2^k$ ، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-1} l(n) P(|X_{11}| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{\alpha r} l(2^k) P[|X_{11}| \geq \varepsilon (2^k)^{\frac{1}{t}}]$$
$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} P[\varepsilon (2^m)^{\frac{1}{t}} \leq |X_{11}| < \varepsilon (2^{m+1})]^{\frac{1}{t}} \sum_{j=1}^{m} (2^j)^{\alpha r} l(2^j),$$

توجه نمایید که $۱ \leq j \leq m < \infty$ و مقادیر احتمال روی mها شکسته شده و عبارت اصلی تبدیل به دو مجموع می‌شود. حال با در نظر گرفتن بیش‌ترین مقدار jها یعنی مقدار m

$$\leq C\sum_{m=۱}^{\infty}(۲^m)^{\alpha r}l(۲^m)P[\varepsilon(۲^m)^{\frac{۱}{t}} \leq |X_{۱۱}| < \varepsilon(۲^{m+۱})^{\frac{۱}{t}}]$$
$$\leq CE|X_{۱۱}|^{\alpha rt}l(|X_{۱۱}|^t) < \infty. \quad (\text{بنا بر عبارت}(۲۱.۳))$$

دقت نمایید بنا بر قسمت (ب) در لم ۶.۵.۱ (زیدونگ و چان-۱۹۸۵) از فصل اول رابطه بالا برقرار خواهد بود.

برای بررسی شرط (ب)

$$\sum_{n=۱}^{\infty}n^{\alpha r-۱-\frac{q}{t}}l(n)E|X_{۱۱}|^qI[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}] \quad (n = ۲^k \text{ با فرض})$$
$$\leq C\sum_{k=۱}^{\infty}(۲^k)^{\alpha r-\frac{q}{t}}l(۲^k)\int_{۰}^{(۲^k)^{\frac{۱}{t}}}|x|^qdF(x) \quad (\text{بنا بر تعریف امید ریاضی})$$
$$\leq C\sum_{k=۱}^{\infty}(۲^k)^{\alpha r-\frac{q}{t}}l(۲^k)\sum_{i=۱}^{k}\int_{(۲^{i-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^i)^{\frac{۱}{t}}}|x|^qdF(x) \quad (\text{انتگرال را روی بازه‌ها می‌شکنیم})$$
$$\leq C\sum_{m=۱}^{\infty}(۲^m)^{\alpha r-\frac{q}{t}}l(۲^m)\int_{(۲^{m-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^m)^{\frac{۱}{t}}}|x|^qdF(x) \quad (۱ \leq i \leq k < \infty \text{ چون})$$
$$= C\sum_{m=۱}^{\infty}(۲^m)^{\alpha r-\frac{q}{t}}\int_{(۲^{m-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^m)^{\frac{۱}{t}}}\frac{l(۲.۲^{m-۱})}{l(|x|^t)}l(|x|^t)|x|^qdF(x). (l(|x|^t) \text{ ضرب و تقسیم می‌کنیم}) \tag{۲۲.۳}$$

در رابطه (۲۲.۳) عبارت $\frac{l(۲.۲^{m-۱})}{l(|x|^t)}$ بنا بر لم (زیدونگ و چان-۱۹۸۵) در فصل اول متناهی خواهد بود، پس کافی است برای mهای بزرگ عبارت زیر متناهی باشد.

$$C\sum_{m=۱}^{\infty}(۲^m)^{\alpha r-\frac{q}{t}}\int_{(۲^{m-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^m)^{\frac{۱}{t}}}l(|x|^t)|x|^qdF(x).$$

بنابراین

$$\sum_{m=۱}^{\infty}(۲^m)^{\alpha r-\frac{q}{t}}\int_{(۲^{m-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^m)^{\frac{۱}{t}}}l(|x|^t)|x|^qdF(x) \leq \sum_{m=۱}^{\infty}\int_{(۲^{m-۱})^{\frac{۱}{t}}}^{(۲^m)^{\frac{۱}{t}}}(|x|^t)^{\alpha r}l(|x|^t)dF(x)$$
$$= E|X_{۱۱}|^{\alpha rt}l(|X_{۱۱}|^t) < \infty,$$

درنتیجه شرط (ب) برای هر $q > ۲$ برقرار است. شرط (ج) در دو گام اثبات می‌شود، گام اول $\alpha rt < ۲$ و گام دوم $\alpha rt \geq ۲$. اگر $\alpha rt < ۲$ ، آن‌گاه

$$\Big(EX_{۱۱}^{۲}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}} \leq \Big(n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon\frac{EX_{۱۱}^{۲}}{n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon}I(\frac{|X_{۱۱}|}{n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon} < ۱)\Big)^{\frac{q}{۲}} \leq Cn^{\frac{q}{t}-\frac{\alpha rq}{۲}}(E|X_{۱۱}|^{\alpha rt})^{\frac{q}{۲}},$$

پس

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha r-۲-q(\frac{۱}{t}-\frac{۱}{۲})}l(n)\Big(EX_{۱۱}^{۲}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}} \leq \sum_{n=۱}^{\infty} n^{(\alpha r-۱)(۱-\frac{q}{۲})-۱}l(n)(E|X_{۱۱}|^{\alpha rt})^{\frac{q}{۲}} < \infty.$$

حال اگر $\alpha rt \geq ۲$، آن‌گاه $\Big(EX_{۱۱}^{۲}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}} < \infty$ و با درنظر گرفتن q به اندازه کافی بزرگ تا جایی که $q > \max(۲, \frac{۲t(\alpha r-۱)}{۲t})$ ،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha r-۲-q(\frac{۱}{t}-\frac{۱}{۲})}l(n)\Big(EX_{۱۱}^{۲}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big)^{\frac{q}{۲}} < \infty.$$

اثبات کامل خواهد شد، اگر نشان دهیم برای هر $۱ \leq i \leq n$

$$n^{-\frac{۱}{t}}i\Big|EX_{۱۱}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big| \longrightarrow ۰, \quad n \longrightarrow \infty.$$

وقتی $\alpha rt < ۱$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} n^{-\frac{۱}{t}}i\Big|EX_{۱۱}I[|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}]\Big| &\leq \varepsilon i\Big|E\frac{X_{۱۱}}{\varepsilon n^{\frac{۱}{t}}}I[\frac{|X_{۱۱}|}{n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon} < ۱]\Big| \\ &\leq \varepsilon.n.E\frac{|X_{۱۱}|^{\alpha rt}}{(\varepsilon n^{(\frac{۱}{t})})^{\alpha rt}}I[\frac{|X_{۱۱}|}{n^{\frac{۱}{t}}\varepsilon} < ۱] \leq (\varepsilon)^{۱-\alpha rt}n^{۱-\alpha r}E|X_{۱۱}|^{\alpha rt} \longrightarrow ۰, \end{aligned}$$

و در حالتی که $\alpha rt \geq ۱$ ، چون $EX_{۱۱} = ۰$ فرض شده است، پس

$$EX_{۱۱}I(|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}) + EX_{۱۱}I(|X_{۱۱}| \geq \varepsilon n^{\frac{۱}{t}}) = ۰$$

$$|EX_{۱۱}I(|X_{۱۱}| < \varepsilon n^{\frac{۱}{t}})| = |-EX_{۱۱}I(|X_{۱۱}| \geq \varepsilon n^{\frac{۱}{t}})|$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
&n^{-\frac{1}{t}} i\Big|EX_{11}I[|X_{11}| < \varepsilon n^{\frac{1}{t}}]\Big| \leq (n^{1-\frac{1}{t}})\Big| - EX_{11}I\Big[|X_{11}| \geq \varepsilon n^{\frac{1}{t}}\Big]\Big| \\
&\leq \varepsilon.n.\Big|\frac{EX_{11}}{\varepsilon n^{\frac{1}{t}}} I(\frac{|X_{11}|}{\varepsilon n^{\frac{1}{t}}} \geq 1)\Big| \leq \varepsilon.n.\frac{E|X_{11}|^{\alpha rt}}{(\varepsilon n^{\frac{1}{t}})^{\alpha rt}} \\
&\leq (\varepsilon)^{1-\alpha rt} n^{1-\alpha r} E|X_{11}|^{\alpha rt} \longrightarrow 0 \quad , n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}
$$

□

می‌توان با استفاده از دو نتیجه اخیر، برای بسیاری از توابع به آرامی تغییرپذیر از جمله $l(x) = 1$ و $l(x) = \log x$ ، روابطی مشابه یافت.

فصل ۴

سرعت همگرایی برای مجموع موزون متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی

۱.۴ مقدمه

پس از روابطی که برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی بررسی شد، در این فصل نوع دیگری از همبستگی باعنوان m-پیوندی منفی[۱] را معرفی می‌کنیم و به تحقیق و بررسی همگرایی کامل برای آرایه‌هایی از این نوع متغیرهای تصادفی می‌پردازیم.

هو و همکاران[۲] و پس از آن‌ها کروگلوف و همکارانش [۳] به بررسی آرایه‌های مستقل سطری برای متغیرهای تصادفی پرداختند. در همان سال هو و ولودین[۴] مطالعاتی درباره آرایه‌هایی از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی انجام دادند.

قضیه اصلی در این فصل مربوط به مطالعات هوو و همکاران [۵] است که نه تنها نتایج قبلی که در سال ۲۰۰۶ ارایه شده بود را گسترش دادند، بلکه اثباتی ساده‌تر برای آن بیان کردند، به گونه‌ای که به جای اثباتی در چهار قسمت، تنها در دو قسمت قضیه اصلی را اثبات نموده‌اند.

حال به جا است که در ابتدای بحث متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی را معرفی کنیم و لم‌ها و قضایایی پیرامون آن بیان کنیم.

تعریف ۱.۱.۴. (چانگ هو و همکاران.۲۰۰۹) فرض کنید $m \geq ۱$ عدد صحیح مثبتی باشد، یک دنباله از

[۱] m-Negatively Associated
[۲] Hu et al(1998)
[۳] Kruglov et al(2006)
[۴] Hu & Volodin(2006)
[۵] Hu et al(2009)

متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ را m-همبسته منفی[۶] گویند، هرگاه زیردنباله $X_{i۱}, \dots, X_{in}$ پیوندی منفی باشد که در آن برای هر $n \geq ۲$ و $i_۱, \dots, i_n$ رابطه $۱ \leq k \neq j \leq n$ ، $|i_k - i_j| \geq m$ برقرار است.

"مفهوم m-پیوندی منفی بودن متغیرهای تصادفی حالت گسترش یافته از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است، به طوری که وقتی $m = ۱$ باشد، متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی با متغیرهای تصادفی پیوندی منفی معادل خواهند بود." [۷]

پیش از آن که به ادامه بحث بپردازیم، لازم است به نکته مهمی اشاره کنیم. در این فصل فرض بر این است که $\{Y_{ni}, ۱ \leq i \leq k_n, n \geq ۱\}$ بریده شده یکنواختی از $\{X_{ni}, ۱ \leq i \leq k_n, n \geq ۱\}$ است، به طوری که وقتی $\delta > ۰$، داریم

$$Y_{ni} = X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\} + \delta I\{X_{ni} > \delta\} - \delta I\{X_{ni} < -\delta\},$$

بنا بر ویژگی دوم متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، Y_{ni}ها آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی خواهد بود. در لم‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ نامساوی‌هایی را ثابت خواهیم کرد که در قضیه اصلی این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

لم ۲.۱.۴. *(شائو.۲۰۰۰) فرض کنید $\{X_i, ۱ \leq i \leq n\}$ یک خانواده متناهی از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با میانگین صفر و برای $۱ \leq i \leq n$ ، $EX_i^۲ < \infty$ و $B_n = \sum_{i=۱}^n EX_i^۲$ ، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و $a > ۰$ نامساوی زیر برقرار است*

$$P\Big\{\max_{۱\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=۱}^k X_i\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq ۲P\Big\{\max_{۱\leq i\leq n}|X_i| > a\Big\} + ۴\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^۲}{۴(a\varepsilon + B_n)}\Big(۱ + \frac{۲}{۳}\ln\Big(۱ + \frac{a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big)\Big\}.$$

لم ۳.۱.۴. *(شائو.۲۰۰۰) فرض کنید $\{X_i, ۱ \leq i \leq n\}$ یک خانواده متناهی از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی با میانگین صفر و گشتاور دوم متناهی است و $S_k = \sum_{i=۱}^k X_i$ و $B_n = \sum_{i=۱}^n EX_i^۲$. آن‌گاه برای*

[۶] m-Negatively Associated
[۷] Hu et al(2009)

هر $\varepsilon > 0$ و $a > 0$ و $0 < \alpha < 1$ خواهیم داشت

$$P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq \Big[P(\max_{1\leq k\leq n} X_k > a) + \frac{1}{1-\alpha}\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\alpha}{2(a\varepsilon+B_n)}.\Big\{1+\frac{2}{3}\ln\big(1+\frac{a\varepsilon}{B_n}\big)\Big\}\Big)\Big].$$

قضیه ۴.۱.۴. *(هو و همکاران.۱۹۹۸) فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل است، با فرض این که برای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ شرایط زیر برقرار است:*

(الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \varepsilon\} < \infty,$$

(ب) برای $j \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I\{|X_{ni}| \leq \delta\}\Big)^j < \infty,$$

(ج) وقتی $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\} \to 0.$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}\Big| > \varepsilon\Big\} < \infty.$$

قضیه ۵.۱.۴. *(کروگلوف و همکاران.۲۰۰۶) فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد، به طوری که شرایط (الف) و (ب) در قضیه ۴.۱.۴ برقرار باشند، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\Big\{\max_{1\leq m\leq k_n}\Big|\sum_{i=1}^{m}[X_{ni} - E(X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\})]\Big| > \varepsilon\Big\} < \infty.$$

قضیه ۶.۱.۴. *(هو و ولودین.۲۰۰۶) فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است، به طوری که شرایط (الف) و (ب) در قضیه ۴.۱.۴ برقرار باشند، آن‌گاه*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\Big\{\max_{1\leq m\leq k_n}\Big|\sum_{i=1}^{m}[X_{ni} - E(X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\})]\Big| > \varepsilon\Big\} < \infty.$$

برهان. واضح است که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ باشد حکم برقرار خواهد بود. بنا بر فرضی که در این فصل در نظر گرفته‌ایم $\{Y_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ بریده شده یکنوایی از $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ است. حال برای $n \geq 1$ و $1 \leq m \leq k_n$ فرض می‌کنیم

$$T_m = \sum_{i=1}^{m} Y_{ni} \quad , \quad S_m = \sum_{i=1}^{m} X_{ni} \quad , \quad S'_m = \sum_{i=1}^{m} X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\},$$

$$A = \bigcap_{i=1}^{k_n} \{X_{ni} = X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\}\} \quad , \quad A^c = \bigcup_{i=1}^{k_n} \{X_{ni} \neq X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\}\}.$$

توجه داشته باشید که برای هر $n \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned}
& P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |S_m - ES'_m| > \varepsilon\} \\
&= P\Big\{\{\max_{1\leq m\leq k_n} |S_m - ES'_m| > \varepsilon\} \cap A^c\Big\} + P\Big\{\{\max_{1\leq m\leq k_n} |S'_m - ES'_m| > \varepsilon\} \cap A\Big\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |S'_m - ES'_m| > \varepsilon\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\quad + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |(S'_m - T_m) - E(S'_m - T_m)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} \quad (\text{با جایگذاری } T_m \text{ و } S'_m) \\
&\quad + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} \delta|\sum_{i=1}^{m}[I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\} - E(I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\})]| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} \quad (\text{بنا بر نامساوی مارکوف}) \\
&\quad + CE\max_{1\leq m\leq k_n} |\sum_{i=1}^{m}[I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\} - E(I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\})]| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\quad + CE\max_{1\leq m\leq k_n} \sum_{i=1}^{m}[I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\} + P\{X_{ni} > \delta\} + P\{X_{ni} < -\delta\}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\{\max_{1\leq m\leq k_n} |T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\quad + CE\sum_{i=1}^{k_n}[I\{X_{ni} > \delta\} - I\{X_{ni} < -\delta\} + P\{|X_{ni}| > \delta\}],
\end{aligned}$$

$$\le P\{\max_{1\le m\le k_n}|T_m - ET_m| > \frac{\varepsilon}{2}\} + (1+2C)\sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}|>\delta\}.$$

بنا بر شرط (الف) در قضیه ۳.۱.۳، کافی است نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\{\max_{1\le m\le k_n}|T_m - ET_m| > \varepsilon\} < \infty.$$

فرض کنید $B_n = \sum_{i=1}^{k_n} Var(Y_{ni})$. برای هر $\varepsilon > 0$ ، $a > 0$ در نظر بگیرید

$$N_1 = \{n : B_n > a\varepsilon\},$$

$$N_2 = \Big\{n : \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}|>\delta\} > \min\{1, a\varepsilon/(2\delta^2), a/(4\delta)\}\Big\},$$

$$N_3 = \Big\{n : \sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I\{|X_{ni}|\le\delta\} > \min\{a\varepsilon/2, a^2/16\}\Big\},$$

$$N_4 = N - (N_2 \cup N_3).$$

و از آن‌جا که

$$B_n = \sum_{i=1}^{k_n}(EY_{ni}^2 - (EY_{ni})^2) \le \sum_{i=1}^{k_n} EY_{ni}^2$$
$$= \delta^2 \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}|>\delta\} + \sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I\{|X_{ni}|\le\delta\}, \qquad (1.4)$$

می‌دانیم که $N_1 \subseteq N_2 \cup N_3$. در نتیجه بنا بر شرط (الف) و (ب) در قضیه ۳.۱.۳

$$\sum_{n\in N_2\cup N_3} c_n P\{\max_{1\le m\le k_n}|T_m - ET_m| > \varepsilon\}$$
$$\le (\min\{1/2, a\varepsilon/(4\delta^2), a/(8\delta)\})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}|>\delta\}$$
$$+ (\min\{a\varepsilon/4, a^2/32\})^{-j}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I\{|X_{ni}|\le\delta\}\Big)^j < \infty,$$

پس کافی است نشان دهیم

$$\sum_{n\in N_4} c_n P\Big\{\max_{1\le m\le k_n}|\sum_{i=1}^{m}(Y_{ni} - EY_{ni})| > \varepsilon\Big\} < \infty.$$

بنا بر لم ۲.۱.۴ داریم

$$\sum_{n\in N_۴} c_n P\Big\{\max_{۱\leq m\leq k_n}|\sum_{i=۱}^{m}(Y_{ni}-EY_{ni})|>\varepsilon\Big\}\leq \sum_{n\in N_۴} c_n\Big[۲P\Big\{\max_{۱\leq m\leq k_n}|Y_{ni}-EY_{ni}|>a\Big\}$$
$$+۴\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^۲}{۴(a\varepsilon+B_n)}\Big[۱+\frac{۲}{۳}\ln\Big(۱+\frac{a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big]\Big\}\Big],$$

توجه کنید که برای هر $n\in N_۴$ چون $n\notin N_۲$ و $n\notin N_۳$ است، پس

$$\begin{aligned}&\max_{۱\leq i\leq k_n}|EY_{ni}|\leq \max_{۱\leq i\leq k_n}E|Y_{ni}|\\&\leq \max_{۱\leq i\leq k_n}(\delta P\{|X_{ni}|>\delta\}+E|X_{ni}|I\{|X_{ni}|\leq\delta\})\\&\leq \delta\sum_{i=۱}^{k_n}P\{|X_{ni}|>\delta\}+\Big(\sum_{i=۱}^{k_n}EX_{ni}^۲I\{|X_{ni}|\leq\delta\}\Big)^{\frac{۱}{۲}}\\&\leq \delta\min\{۱,a\varepsilon/(۲\delta^۲),a/(۴\delta)\}+(\min\{a\varepsilon/۲,a^۲/۱۶\})^{\frac{۱}{۲}}\\&\leq a/۴+a/۴=a/۲.\end{aligned}$$

با دلالت بر این که برای هر $n\in N_۴$، $\max_{۱\leq i\leq k_n}|EY_{ni}|\leq a/۲$ و

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in N_۴}c_n\Big\{\max_{۱\leq i\leq k_n}|Y_{ni}-EY_{ni}|>a\Big\}\\&\leq\sum_{n=۱}^{\infty}c_nP\Big\{\max_{۱\leq i\leq k_n}|Y_{ni}|>a/۲\Big\}\\&\leq\sum_{n=۱}^{\infty}c_n\sum_{i=۱}^{k_n}P\{|X_{ni}|>\min\{\delta,a/۲\}\}<\infty.\quad(\text{بنا بر شرط (الف) قضیه ۳.۱.۳})\end{aligned}$$

درنتیجه باید نشان دهیم

$$\sum_{n\in N_۴}c_n\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^۲}{۴(a\varepsilon+B_n)}\Big[۱+\frac{۲}{۳}\ln\Big(۱+\frac{a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big]\Big\}<\infty.$$

وقتی $n\in N_۴$ و $B_n\leq a\varepsilon$ و $\sum_{i=۱}^{k_n}P\{|X_{ni}|>\delta\}\leq ۱$ باشد، با فرض $a=\varepsilon/(۱۲j)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in N_۴}c_n\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^۲}{۴(a\varepsilon+B_n)}\Big[۱+\frac{۲}{۳}\ln\Big(۱+\frac{a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big]\Big\}\\&\leq\sum_{n\in N_۴}c_n\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^۲}{۸a\varepsilon}\Big[۱+\frac{۲}{۳}\ln\Big(۱+\frac{a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big]\Big\}\quad(\text{چون } B_n\leq a\varepsilon)\\&\leq\exp\{-\frac{۳}{۲}j\}\sum_{n\in N_۴}c_n\exp\Big\{-j\ln\Big(\frac{B_n+a\varepsilon}{B_n}\Big)\Big\}\quad(\text{چون } a=\varepsilon/(۱۲j)),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C \sum_{n\in N_۴} c_n \Big(\frac{B_n + a\varepsilon}{B_n}\Big)^j \le C \sum_{n\in N_۴} c_n \Big(\frac{B_n}{a\varepsilon}\Big)^j = C \sum_{n\in N_۴} c_n (B_n)^j \\
&\le C \sum_{n\in N_۴} c_n \Big[\delta^۲ \sum_{i=۱}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + \sum_{i=۱}^{k_n} EX_{ni}^۲ I\{|X_{ni}| \le \delta\}\Big]^j \\
&\le C \sum_{n\in N_۴} c_n \Big\{\delta^{۲j} \Big[\sum_{i=۱}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\}\Big]^j + \Big[\sum_{i=۱}^{k_n} EX_{ni}^۲ I\{|X_{ni}| \le \delta\}\Big]^j\Big\} \\
&\le C \sum_{n\in N_۴} c_n \Big\{\delta^{۲j} \sum_{i=۱}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + \Big[\sum_{i=۱}^{k_n} EX_{ni}^۲ I\{|X_{ni}| \le \delta\}\Big]^j\Big\} \\
&\le \sum_{n=۱}^{\infty} c_n \Big\{\delta^{۲j} \sum_{i=۱}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + \Big[\sum_{i=۱}^{k_n} EX_{ni}^۲ I\{|X_{ni}| \le \delta\}\Big]^j\Big\} < \infty.
\end{aligned}
$$

درنتیجه بنا بر فرضیات، اثبات قضیه کامل می‌شود. □

۲.۴ همگرایی کامل برای متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی

لم ۱.۲.۴. (هو و همکاران.(۲۰۰۹)) *فرض کنید $\{X_i, i \ge ۱\}$ خانواده‌ای متناهی از متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی با میانگین صفر و گشتاور دوم متناهی باشد، وقتی $S_k = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ و $B_n = \sum_{i=۱}^{n} EX_i{}^۲$، آن‌گاه برای هر $n \ge m$ و $x > ۰$ و $a > ۰$ و $۰ < \alpha < ۱$ خواهیم داشت*

•

$$
\begin{aligned}
P(\max_{۱\le k\le n} S_k \ge x) \le m\Big[&P(\max_{۱\le k\le n} X_k > a) \\
&+ \frac{۱}{۱-\alpha} \exp\Big(-\frac{x^۲\alpha}{۲m(ax + mB_n)}.\Big\{۱ + \frac{۲}{۳}\ln\big(۱ + \frac{ax}{mB_n}\big)\Big\}\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

• *و در حالت کلی*

$$
\begin{aligned}
P(\max_{۱\le k\le n} |S_k| \ge x) \le ۲m\Big[&P(\max_{۱\le k\le n} |X_k| > a) \\
&+ \frac{۱}{۱-\alpha} \exp\Big(-\frac{x^۲\alpha}{۲m(ax + mB_n)}.\Big\{۱ + \frac{۲}{۳}\ln\big(۱ + \frac{ax}{mB_n}\big)\Big\}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

برهان. فرض کنید $۱ \le k \le n$ و $r = [\frac{n}{m}]$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$
Y_i = \begin{cases} X_i, & ۱ \le i \le n, \\ ۰, & i > n. \end{cases}
$$

و برای $1 \leq j \leq m$

$$S'_{mk+j} = \sum_{i=0}^{k} Y_{mi+j}.$$

می‌دانیم

$$\Big\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x\Big\} \subset \Big\{\max_{0\leq k\leq r} S'_{mk+1} \geq \frac{x}{m}\Big\} \cup \ldots \cup \Big\{\max_{0\leq k\leq r} S'_{mk+m} \geq \frac{x}{m}\Big\}, \qquad (۲.۴)$$

برای بررسی درستی عبارت (۲.۴) در نظر بگیرید که برای متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم

$$\{\max(X+Y) \geq K\} \subset \{\max X > \frac{K}{2}\} \cup \{\max Y > \frac{K}{2}\}, \qquad (۳.۴)$$

عبارت سمت چپ رابطه (۳.۴) مجموع ω هایی است که $X+Y > K$ است، یکی از حالات این است که در ω های متعلق به X و Y یا $X > \frac{K}{2}$ یا $Y > \frac{K}{2}$ باشد. با این استدلال درستی رابطه (۲.۴) را می‌توان نتیجه گرفت.

چون Y_{mi+j} ها پیوندی منفی هستند با استفاده از لم ۳.۱.۴ و با فرض $\varepsilon = \frac{x}{m}$ داریم

$$\begin{aligned}
P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x) &\leq \sum_{j=1}^{m} P\Big(\max_{0\leq k\leq r} S'_{mk+j} \geq \frac{x}{m}\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} P\Big(\max_{0\leq i\leq r} Y_{mi+j} > a\Big) \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha}\exp\Big\{-\frac{\frac{x^2\alpha}{m^2}}{2(\frac{ax}{m} + \sum_{i=0}^{r} EY_{mi+j}^2)}.\Big[1 + \frac{2}{3}\ln\Big(1 + \frac{\frac{ax}{m}}{\sum_{i=0}^{r} EY_{mi+j}^2}\Big)\Big]\Big\} \\
&= \sum_{j=1}^{m} P\Big(\max_{0\leq i\leq r} Y_{mi+j} > a\Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\alpha}\exp\Big\{-\frac{\frac{x^2\alpha}{m^2}}{2(\frac{ax}{m} + \sum_{i=0}^{r} EY_{mi+j}^2)}.\Big[1 + \frac{2}{3}\ln\Big(1 + \frac{\frac{ax}{m}}{\sum_{i=0}^{r} EY_{mi+j}^2}\Big)\Big]\Big\} \\
&\leq mP\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k > a\Big) + \frac{m}{1-\alpha}\exp\Big\{-\frac{\frac{x^2\alpha}{m^2}}{2(\frac{ax}{m} + \sum_{i=1}^{n} EX_i^2)}\Big[1 + \frac{2}{3}\ln\Big(1 + \frac{\frac{ax}{m}}{\sum_{i=1}^{n} EX_i^2}\Big)\Big]\Big\} \\
&= mP\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k > a\Big) + \frac{m}{1-\alpha}\exp\Big\{-\frac{x^2\alpha}{2m(ax + mB_n)}\Big[1 + \frac{2}{3}\ln\Big(1 + \frac{ax}{mB_n}\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

□

لم ۲.۲.۴. (هو و همکاران.(۲۰۰۹)) *فرض کنید* $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ *آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی* m- *همبسته منفی است، اگر* $\delta > 0$*، آن‌گاه*

$$\max_{1\leq i\leq k_n} |EY_{ni}| \leq \Big[\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \leq \delta)\Big]^{\frac{1}{2}} + \delta \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta). \qquad (۴.۴)$$

برهان.

$$\max_{1\leq i\leq k_n} |EY_{ni}| \leq \max_{1\leq i\leq k_n} E|Y_{ni}| = \max_{1\leq i\leq k_n} E|X_{ni}I\{|X_{ni}| \leq \delta\} + \delta I\{X_{ni} > \delta\} - \delta I\{X_{ni} < -\delta\}|$$

(امید ریاضی روی قسمت قدرمطلق اثر می‌کند)

$$\leq \max_{1\leq i\leq k_n} \{E|X_{ni}|I(|X_{ni}| \leq \delta) + \delta P(|X_{ni}| > \delta)\}$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq k_n} [EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \leq \delta)]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k_n} \delta P(|X_{ni}| > \delta)$$

$$\leq \Big[\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \leq \delta)\Big]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k_n} \delta P(|X_{ni}| > \delta).$$

□

لم ۳.۲.۴. (هو و همکاران.(۲۰۰۹)) *فرض کنید* $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ *آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی* m- *پیوندی منفی است، با در نظر گرفتن* $a = \frac{\varepsilon}{12mj}$*،خواهیم داشت*

$$\Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(6m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})])} \leq (\frac{m}{a\varepsilon})^j \Big(\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})\Big)^j.$$

برهان. برای اثبات دو حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

(حالت اول) اگر $m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni}) < a\varepsilon$ ، آن‌گاه

$$6ma\varepsilon + 6ma\varepsilon > 6ma\varepsilon + 6m(m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})),$$

$$12ma\varepsilon > 6m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})],$$

$$\frac{1}{12ma\varepsilon} < \frac{1}{6m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]},$$

بنابراین

$$\Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(6m[a\varepsilon+m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})])} \leq \Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(12ma\varepsilon)}$$
$$= \Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{j}.$$

(حالت دوم) اگر $m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni}) \geq a\varepsilon$ ، آن‌گاه

$$6ma\varepsilon + 6ma\varepsilon \leq 6ma\varepsilon + 6m(m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})),$$

$$12ma\varepsilon \leq 6m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})],$$

$$\frac{1}{12ma\varepsilon} \geq \frac{1}{6m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]},$$

بنابراین

$$\Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(6m[a\varepsilon+m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})])} \leq \Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(12ma\varepsilon)}$$
$$= \Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{j}.$$

بر اساس روابطی که در دو حالت به دست آمد، خواهیم داشت

$$\Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/(6m[a\varepsilon+m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})])} \leq (\frac{m}{a\varepsilon})^j\Big(\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})\Big)^{j}.$$

□

قضیه ۴.۲.۴. (هو و همکاران.(۲۰۰۹)) *فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی است، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:*

(الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \varepsilon\} < \infty,$$

(ب) *برای* $j \geq ۲$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=۱}^{k_n} EX_{ni}^{۲} I\{|X_{ni}| \leq \delta\} \Big)^j < \infty,$$

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > ۰$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n P\Big\{ \max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [X_{ni} - EX_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\}] \Big| > \varepsilon \Big\} < \infty.$$

برهان. فرض کنید Y_{ni} برای $\delta > ۰$ به این صورت بریده شده هستند

$$Y_{ni} = \begin{cases} X_{ni}, & |X_{ni}| \leq \delta, \\ +\delta, & X_{ni} > \delta, \\ -\delta, & X_{ni} < -\delta. \end{cases}$$

دقت کنید Y_{ni} همچنان آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی m-پیوندی منفی خواهد بود. پس

$$\begin{aligned}
& P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [X_{ni} - EX_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\}] \Big| > \varepsilon \Big), \\
& \leq P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} \Big[X_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\} - EX_{ni} I\{|X_{ni}| \leq \delta\} \Big] \Big| > \varepsilon \Big) \\
& \quad + P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} X_{ni} I\{|X_{ni}| > \delta\} \Big| > ۰ \Big) \quad (\text{بنا بر } X_{ni}\text{های بریده شده}), \\
& \leq P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [Y_{ni} - EY_{ni}] > \frac{\varepsilon}{۲} \Big) + P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [\delta I\{X_{ni} > \delta\} - \delta I\{X_{ni} < -\delta\} \\
& \quad - E\delta I\{X_{ni} > \delta\} + E\delta I\{X_{ni} < -\delta\}] \Big| > \frac{\varepsilon}{۲} \Big) + \sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \\
& \leq P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [Y_{ni} - EY_{ni}] > \frac{\varepsilon}{۲} \Big) + \sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \\
& \quad + (\frac{۲\delta}{\varepsilon}) E\Big\{ \max_{۱\leq l\leq k_n} \Big(\sum_{i=۱}^{l} [I\{|X_{ni}| > \delta\} + P(|X_{ni}| > \delta)] \Big) \Big\} \quad (\text{بنابر نامساوی مارکوف}), \\
& \leq P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [Y_{ni} - EY_{ni}] \Big| > \frac{\varepsilon}{۲} \Big) + \sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \\
& \quad + (\frac{۲\delta}{\varepsilon}) \Big(\sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) + \sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \Big), \\
& \leq P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n} \Big| \sum_{i=۱}^{l} [Y_{ni} - EY_{ni}] \Big| > \frac{\varepsilon}{۲} \Big) + \Big(۱ + \frac{۴\delta}{\varepsilon} \Big) \sum_{i=۱}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta).
\end{aligned} \tag{۵.۴}$$

بنا بر شرط (الف) متناهی بودن $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \varepsilon\}$ برقرار است، پس عبارت سمت راست در رابطه (۵.۴) متناهی است. تنها کافی است نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\Big(\max_{1\le l\le k_n} |\sum_{i=1}^{l}[Y_{ni} - EY_{ni}]| > \varepsilon\Big) < \infty,$$

به این منظور فرض می‌کنیم $a = \frac{\varepsilon}{12mj}$ و دو زیر مجموعه A و B از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که

$$A = \Big\{n\Big|\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \le \delta) < \Big(\frac{a}{3}\Big)^2, \quad \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) < \frac{a}{3\delta}\Big\},$$

و

$$B = \mathbb{N} \setminus A.$$

وقتی $n \in B$، بنا بر نامساوی مارکوف

$$\sum_{n\in B} c_n P\Big(\max_{1\le l\le k_n} \Big|\sum_{i=1}^{l}[Y_{ni} - EY_{ni}]\Big| > \varepsilon\Big) \le \sum_{n\in B} c_n \Big[\frac{\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \le \delta)}{(\frac{a}{3})^2}\Big]^j + \sum_{n\in B} c_n \Big[\frac{\delta \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta)}{\frac{a}{3}}\Big].$$

که حاصل این سری متناهی خواهد بود، زیرا دو شرط (الف) و (ب) طبق فرض قضیه برقرار هستند.

وقتی $n \in A$ و بنا بر لم ۱.۲.۴ اگر $\alpha = \frac{1}{2}$ و $x = \varepsilon$ و $B_n = \sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})$ فرض شود، داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A} c_n P\Big(\max_{1\le l\le k_n} \Big|\sum_{i=1}^{l}[Y_{ni} - EY_{ni}]\Big| > \varepsilon\Big) &\le \sum_{n\in A} c_n \Big\{2mP\big(\max_{1\le l\le k_n} |Y_{ni} - EY_{ni}| > a\big) \\
&\quad + 4m \exp\Big[-\frac{\varepsilon^2}{4m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]}\Big(1 + \frac{2}{3} ln\Big(1 + \frac{a\varepsilon}{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}\Big)\Big)\Big]\Big\}, \\
&\le 2m \sum_{n\in A} c_n P\Big(\max_{1\le l\le k_n} |Y_{ni}| > \frac{a}{3}\Big) \quad \text{(ضرب داخل کروشه را انجام می‌دهیم)} \\
&\quad + \sum_{n\in A} c_n \Big\{4m \exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{4m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]} \\
&\quad + \frac{2}{3}\Big(-\frac{\varepsilon^2}{4m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]}\Big) ln\Big(\frac{a\varepsilon}{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}\Big)\Big\}\Big\} \\
&= 2m \sum_{n\in A} c_n P\Big(\max_{1\le l\le k_n} |Y_{ni}| > \frac{a}{3}\Big) + \sum_{n\in A} c_n 4m \exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{4m[a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})]}\Big\} \\
&\quad + 4m \sum_{n\in A} c_n \Big(\frac{m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^2/6m(a\varepsilon + m\sum_{i=1}^{k_n} var(Y_{ni}))} \quad \text{(بنا بر خواص تابع } \exp \text{ و } \ln\text{)},
\end{aligned}$$

$$\leq ۲m\sum_{n\in A}c_nP\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n}|Y_{ni}|>\frac{a}{۳}\Big)+۴m\sum_{n\in A}c_n\Big(\frac{m\sum_{i=۱}^{k_n}var(Y_{ni})}{a\varepsilon}\Big)^{\varepsilon^۲/۶m(a\varepsilon+m\sum_{i=۱}^{k_n}var(Y_{ni}))},$$

$$\leq ۲m\sum_{n\in A}c_n\sum_{i=۱}^{k_n}P(|X_{ni}|>\min\{\delta,\frac{a}{۳}\})+۴m\Big(\frac{m}{a\varepsilon}\Big)^j\sum_{n\in A}c_n\Big(\sum_{i=۱}^{k_n}var(Y_{ni})\Big)^j (\text{بنا بر تعریف } Y_{ni} \text{ و لم } ۳.۲.۴),$$

$$\leq ۲m\sum_{n\in A}c_n\sum_{i=۱}^{k_n}P(|X_{ni}|>\min\{\delta,\frac{a}{۳}\})+۲^۲\Big(\frac{m^{j+۱}}{(a\varepsilon)^j}\Big)\sum_{n\in A}c_n\Big(\sum_{i=۱}^{k_n}EX_{ni}^۲I(|X_{ni}|\leq\delta)\Big)^j$$

$$+۲^۲(\delta^{j+۱})\Big(\frac{m^{j+۱}}{(a\varepsilon)^j}\Big)\sum_{n\in A}P(|X_{ni}|>\delta)\Big)<\infty. \quad (\text{بنا به تعریف مجموعه} A).$$

باز هم حاصل این سری برای $n\in A$ متناهی خواهد بود، زیرا دو شرط (الف) و (ب) بنا بر فرض قضیه برقرار هستند، پس بنا بر روابطی که به دست آمد

$$P\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n}\Big|\sum_{i=۱}^{l}[X_{ni}-EX_{ni}I\{|X_{ni}|\leq\delta\}]\Big|>\frac{\varepsilon}{۲}\Big)\leq\sum_{n=۱}^{\infty}c_nP\Big(\max_{۱\leq l\leq k_n}\Big|\sum_{i=۱}^{l}[Y_{ni}-EY_{ni}]\Big|>\varepsilon\Big)$$
$$+\Big(۱+\frac{۴\delta}{\varepsilon}\Big)\sum_{i=۱}^{k_n}P(|X_{ni}|>\delta)<\infty.$$

و بنا بر شرط (الف) متناهی بودن عبارت $\sum_{i=۱}^{k_n}P(|X_{ni}|>\delta)$ برقرار است. در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}c_nP\Big\{\max_{۱\leq l\leq k_n}\Big|\sum_{i=۱}^{l}[X_{ni}-EX_{ni}I\{|X_{ni}|\leq\delta\}]\Big|>\varepsilon\Big\}<\infty.$$

□

مراجع

[1] Alam K. and Saxena K. M. L. (1981), "*Positive dependence in multivariate distributions*" Communication in Statistics. Theory and Methods., vol 10, pp 1183–1196.

[2] Bai Z. D. and Cheng P. E. (2000), "*Marcinkiewicz strong laws for linear statistics*" Stat. Probab. Lett., Vol 46, pp 105–112.

[3] Bai Z. D., Cheng P. E. and C.H. Zhang (1997), "*An extension of the Hardy-Littlewood strong law*" Stat. Sinica., Vol 7, pp 923–928.

[4] Block H. W., Savits T. H. and Sharked M. (1982), "*Some concepts of negative dependence*" Ann. Probab., Vol 10, pp 765-772.

[5] Chatterji S.D., (1970), "*A general strong law*" Iinvent. Math., Vol 9, pp 235-245.

[6] Chung Hu T., Yu Chiang C. and Taylor R. (2009), "*On complete convergence for arrays of rowwise m-negatively associated random variables*" Non. Anal., Vol 71, pp e1075-e1081.

[7] Feller W. (1946), "*A limit theorem for random variables with infinite moments*" Amer. J. Math., Vol 68, pp 257-262.

[8] Gerasimov M., Kruglov V. and Volodin A. (2012), "*On Negatively Associated Random Variables*" Lobachevskii. J. Math., Vol 33, pp 47-55.

[9] Gut A. (2005), "Probability: A Graduate Course", Springer, New York.

[10] Hu T. C., Szynal D. and Volodin A. I. (1998), "*A note on complete convergence for arrays*" Statist. Probab. Lett., Vol 38, pp 27-31.

[11] Hu T.C. and Volodin A. (2006), "*A remark on complete convergence for arrays of rowwise negatively associated variables*" in: Proceedings of the 3rd Sino-International Symposium on Probability, Statistics and Quantitative Management., pp 9-18.

[12] Jajte R. (2003), "*On the strong law of large numbers*" Ann. Probab. Vol 31(1), pp 409–412.

[13] Jing B. Yi. and Ying Liang H. (2008), "*Strong Limit Theorems forWeighted Sums of Negatively Associated Random Variables*" J. Theor. Probab., Vol 21, pp 890–909.

[14] Joag-Dev K. and Proschan F. (1983), "*Negative association of random variables with applications*" Ann. Statistics., Vol 11, pp 286-295.

[15] Kruglov V. M., Volodin A. I. and Hu T. C. (2006), "*On complete convergence for arrays*" Statist. Probab. Lett., Vol 76, pp 1631-1640.

[16] Kuczmaszewska A. (2009), "*On complete convergence for arrays of rowwise negatively associated random variables*" Stat. Probab. Lett., Vol 79, pp 116-124.

[17] Lehmann E. (1966), "*Some concept of dependence*" Ann. Math. Statist., Vol 37, pp 1137-1153.

[18] Li, D.L, Rao, M.B., Jiang, T.F., et al. (1995), "*Complete convergance and almost sure convergence of weighted sums of random variables*" J. Theor. Probab., Vol 8, pp 49-76.

[19] Liang H. and Su C. (1999), "*Complete convergance for weighted sums of NA sequances*" Statist. Probab. Lett., Vol 45, pp 85-95.

[20] Rosalsky, A. and Stoica, G. (2010), "*On the strong law of large numbers for identically distributed random variables*" Stat. Probab. Lett., Vol 80, pp 1265-1270.

[21] Saywer S. (1966), "*Maximal inequalities of weak type*" Ann. Of Math., Vol 84, pp 157-174.

[22] Shao Q. M. (2000), "*A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables*" J. Theor. Probab., Vol 13, pp 343–356.

[23] Su C. and Wang Y. B. (1998), "*Strong convergence for IDNA sequences*" Chin. J. Appl. Probab. Stat., Vol 14(2), pp 131–140.

[24] Sung S. H. (2007), "*Complete convergence for weighted sums of random variable*" Statist. Probab. Lett., Vol 77, pp 303-311.

[25] Thrum R. (1987), "*A remark on almost sure convergence of weighted sums. Probab*" Theory Relat. Fields 75, pp 425–430.

[26] Zhidong B. and Chun S. (1985), "*The complete convergence for partial sums of i.i.d. random variables*" Sci. Sinica Ser., Vol A28, pp 1261-1277.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی .... Array of random variables

آرایه تاپلیتس .... Toeplitz

آزمایش تصادفی .... Random Test

امید ریاضی .... Expectation

بورل- کانتلی .... Borel-Catelli

تابع به آرامی تغییر پذیر .... Varying Slowly Function

تابع ترتیبی .... Order Function

تابع محدب .... Convex Function

تابع نشانگر .... Indicator Function

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی .... Sequance of random variables

سیگما میدان .... Sigma Field

فضای نمونه .... Sample Space

فضای احتمال .... Probability Space

قانون قوی اعداد بزرگ .... Strong Law of Large Numbers

قانون قوی اعداد بزرگ مارسیکوویچ-زیگموند .... Marcinkiewics-Zygmund's Strong Law of Large Numbers

کرونه کر .... Kronecker

متغیرتصادفی .... Random variable

متغیرهای تصادفی به طور شرطی نزولی در دنباله .... Conditionally Decreasing In Sequance Random Varibles

متغیر تصادفی به طور تصادفی مغلوب شده .... Stochastically Dominated Random Variable

متغیرهای تصادفی وابسته منفی .... Negative Dependent Random Variables

متغیرهای تصادفی وابسته منفی در دنباله .... Negative Dependent in Sequance Random Variables

متغیر تصادفی وابسته منفی ربعی .... Negtive Quadrant Dependent Random Variable

متغیرهای تصادفی وابسته متعامد منفی .... Negative Orthant Dependent Random Variable

متغیر تصادفی پیوندی منفی .... Negative Associated Random Variable

متغیرهای تصادفی mپیوندی منفی .... m-Negaive Associated Random Varibles

نامساوی ینسن .... Jensen's Inequality

نامساوی چبیشوف .... Chebyshev's Inequality

نامساوی مارکوف .... Markov's Inequality

نامساوی هولدر .... Holder's Inequality

همگرایی قریب به یقین .... Almost Surely Convergence

همگرایی کامل .... Compelet Convergence

همگرایی یکنوا .... Monotone Convergence

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

همگرایی قریب به یقین .... Almost Surely Convergence

آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی .... Array of random variables

بورل- کانتلی .... Borel-Catelli

تابع محدب .... Convex Function

نامساوی چبیشوف .... Chebyshev's Inequality

همگرایی کامل .... Compelet Convergence

متغیرهای تصادفی به طور شرطی نزولی در دنباله. Conditionally Decreasing In Sequance Random Varibles

امید ریاضی .... Expectation

نامساوی هولدر .... Holder's Inequality

تابع نشانگر .... Indicator Function

نامساوی ینسن .... Jensen's Inequality

کرونه کر .... Kronecker

قانون قوی اعداد بزرگ مارسیکوویچ-زیگموند.. Marcinkiewics-Zygmund's Strong Law of Large Numbers

نامساوی مارکوف .... Markov's Inequality

همگرایی یکنوا .... Monotone Convergence

متغیرهای تصادفی mپیوندی منفی .... m-Negaive Associated Random Varibles

متغیر تصادفی پیوندی منفی .... Negative Associated Random Variable

متغیرهای تصادفی وابسته منفی در دنباله .... Negative Dependent in Sequance Random Variables

متغیرهای تصادفی وابسته منفی .... Negative Dependent Random Variables

متغیرهای تصادفی وابسته متعامد منفی .... Negative Orthant Dependent Random Variable

متغیر تصادفی وابسته منفی ربعی .... Negtive Quadrant Dependent Random Variable

تابع ترتیبی .... Order Function

فضای احتمال .... Probability Space

آزمایش تصادفی .... Random Experience

متغیرتصادفی .... Random variable

فضای نمونه .... Sample Space

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی .... Sequance of random variables

سیگما میدان .... Sigma Field

متغیر تصادفی به طور تصادفی مغلوب شده .... Stochastically Dominated Random Variable

قانون قوی اعداد بزرگ .... Strong Law of Large Numbers

آرایه تاپلیتس .... Toeplitz

تابع به آرامی تغییر پذیر .... Varying Slowly Function

Surname: Abbasi Ali Kamar Name: Maryam

Title: The strong law of large numbers for weighted sums of negative associated random variables

---

Supervisor: Dr.Ahmad Nezakati
Advisor: Dr.Elham Dastranj

Degree: Master of Science Subject: Mathematical Statistic
Field: Probability

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: November 2013 Number of pages: 75

Keywords: Complete convergance, Negatively associated random variables, The strong law of large numbers, Sequence of identically distributed NA random variables, m-Negatively associted random variables.

Abstract

One of important theorems in probability theory are limit theorems. Among them large numbers law specific importance. In this law under certain conditions, mean of random variables convergent to it's expected value. This law has been introduced in 1713. After years, with introduction of negatively associated concept for random variables, many scientists studeied complete convergence for negatively associated random variables. The aim of this thesis is consideration of limit theorems (Strong law of large nimbers) and convergence rate for weight sums of negatively associted random variables. According to importance of strong law of large numbers, we examine complete convergence for weighted sums with considering under different conditions for negatively assicated random variables.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Mathematical Statistic

The strong law of large numbers for weighted sums of negative associated random variables

Supervisor

Dr.Ahmad Nezakati

Advisor

Dr.Elham Dastranj

by

Maryam Abbasi Ali Kamar

November 2013