دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

اصل برهم‌نهی غیرخطی و روش وی - نورمن

استاد راهنما

دکتر سیدرضا حجازی

پژوهشگر

محمود سعیدی فر

۹۲/۰۶/۲۵

نام خانوادگی دانشجو: سعیدی فر نام: محمود

عنوان: اصل برهم‌نهی غیرخطی و روش وی - نورمن

استاد راهنما: دکتر سیدرضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۹۲/۰۶/۲۵ تعداد صفحات: ۶۵

واژگان کلیدی: اصل برهم‌نهی غیرخطی - معادلات دیفرانسیل ریکاتی - معادلات دیفرانسیل - تقارن‌های معادلات دیفرانسیل - روش وی - نورمن

چکیده

در این پایان نامه سعی می‌کنیم تا روشی عمومی برای یافتن جواب عمومی معادلات دیفرانسیل با استفاده از اصل برهم‌نهی غیرخطی و روش وی - نورمن و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل، بیان کنیم. در فصل یک مفاهیم و تعاریف پایه که مورد نیاز هستند را توضیح می‌دهیم. در فصل دوم ابتدا تعریف امتداد را بیان می‌کنیم و سپس امتداد میدان‌های برداری و عمل گروه با مثال‌هایی از آنها شرح داده شده است. بخش‌های بعدی از این فصل شامل تعریف ناورداهای دیفرانسیلی و برخی روش‌ها برای محاسبه آنها می‌باشد. در فصل سوم، مسئله‌ی کاهش یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به معادله دیفرانسیل ریکاتی مرتبه اول را بازبینی می‌کنیم، در بخش‌های دیگر این فصل روشی را که توسط وی - نورمن برای تعیین جواب‌های معادلات دیفرانسیلی توسعه داده شده بود را توضیح می‌دهیم و این روش را برای بررسی معادله دیفرانسیل ریکاتی به کار می‌بریم. اصل برهم‌نهی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در فصل چهارم مورد بررسی قرار گرفته است.

تقدیم به:

مادر مهربانم

به پاس زحماتش

همسر خوب و عزیزم

به پاس صبوریش

به دختر گلم

که خستگی کار و تحصیل را از وجودم می‌زدودند.

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران به درگاه ایزدمنان که به انسان عقل و شعور عطا فرمود، تا خوب را از بد تمیز دهد و در جهت خوبی‌ها گام بردارد و جامعه را در همین جهت هدایت و راهنمایی نهد.

بدین وسیله مراتب تشکر و قدردانی خویش را از استاد بزرگوار و معزز جناب آقای دکتر سیدرضا حجازی، که به این بنده حقیر منت نهاد و بنده را در تهیه و تنظیم این پایان نامه یاری نمود. و از ایزدمنان خواستارم که این بزرگوار در سنگرهای مقدس علوم و دانش و زندگیشان بهروز و منصور فرماید.

از جناب آقای دکتر هادی پسندیده و سرکار خانم دکتر الهام دسترنج که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم. و در خاتمه از همسر عزیز و مهربانم که در طی دوران تحصیل رنج و مشقت و مشکلات زندگی را تحمل نموده، و با این تحمل ما را در ادامه تحصیل یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

فی ا... التوفیق

محمود سعیدی فر

۹۲/۰۶/۲۵

فهرست مطالب

مقدمه

شاید به جدیت می‌توان معادلات دیفرانسیل را زبان اصلی علوم کاربردی امروزی مثل مهندسی، اقتصاد، فیزیک و... نامید. همیشه با دیدن یک دستگاه معادله دیفرانسیل اولین مساله‌ای که به ذهن خطور می‌کند، یافتن جواب یا جواب‌های آن سیستم است. به همین دلیل روش‌های گوناگونی برای معادلات مختلف بیان شده است. نظریه گروه‌های لی در اواخر قرن نوزدهم میلادی بوجود آمد. ریشه‌های آن در مطالعه تقارن‌های برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و روش پیداکردن حلی برای آنها است. مفهوم گروه‌های لی اولین دفعه توسط سوفوس لی[۱] مطرح شد و در آن زمان آنها را "گروه‌های پیوسته" نامید[۴] و هدف اصلی وی توسعه نظریه گالوا در مورد معادلات دیفرانسیل بود. این معادلات دیفرانسیل امروزه معادلات از نوع لی نامیده می‌شوند و یک نمونه مشهور آن معادلات ریکاتی است. در این پایان نامه سعی بر آن است با استفاده از اصل برهم‌نهی غیرخطی و روش وی - نورمن [۲][۱] و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل، از دیدگاه هندسی روشی عمومی برای یافتن جواب عمومی معادلات دیفرانسیل بیان شود.

در این پایان نامه ابتدا مفاهیم اساسی از هندسه را بیان می‌کنیم، در ادامه گروه‌های لی و نحوه‌ی عمل آنها توصیف شده است. در فصل دوم، تعاریف فضای جت و امتداد و ناورداهای دیفرانسیلی را آورده و در ادامه‌ی فصل چگونگی محاسبه‌ی ناورداها در مورد گروه‌های ۱-پارامتری و روش محاسبه‌ی گروه تقارن را بیان می‌کنیم. در فصل سوم، مسئله‌ی کاهش یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به معادله دیفرانسیل ریکاتی مرتبه اول را بازبینی می‌کنیم، در بخش‌های دیگر این فصل روشی را که توسط وی - نورمن برای تعیین جواب‌های معادلات دیفرانسیل توسعه داده شده بود را توضیح می‌دهیم و این روش را برای بررسی معادله دیفرانسیل ریکاتی به کار می‌بریم. اصل برهم‌نهی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در فصل چهارم مورد بررسی قرار گرفته است.

[۱] *Sophus Lie*
[۲] *Wei − Norman*

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این فصل مفاهیم بنیادی و اولیه مورد نیاز، در ادامه گروه‌های لی و عمل گروه تبدیلات بیان شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد آن را یک **منیفلد توپولوژیکی** n**-بعدی** گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی برای هر دو نقطه‌ی $p,q \in M$ زیر مجموعه‌های باز جدا از همی مانند $U,V \subset M$ از M وجود داشته باشد به طوری‌که $p \in U$ و $q \in V$.
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز منیفلد M و V_α زیرمجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $M = \cup_{\alpha\in I}U_\alpha$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ همئومورفیسم باشد آنگاه $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ را **کارت مختصاتی** روی منیفلد M می‌نامیم. حال اگر (U,φ) و (V,ψ) دو کارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو کارت را به طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه نگاشت گذر بین آنها دیفئومورفیسم باشد.

گردایه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک **اطلس** روی M می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند، و U_αها یک پوشش باز برای M باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک **منیفلد هموار** نامیده و با $(M,\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با کارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n,\mathbb{I})$ می‌باشد .

تعریف ۳.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را **نگاشتی هموار** گوییم هرگاه برای هر کارت مختصاتی $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر کارت $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، به طوری‌که نگاشت $\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-۱} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۴.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم عملگر خطی $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(p) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

قرار می‌دهیم:

$$T_pM = \{X : \text{است } p \in M \text{ یک عملگر مشتق در نقطه } X\},$$

و آن را **فضای مماسی** منیفلد M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم. همچنین $\bigsqcup_{p\in M} T_pM = TM$ را **کلاف مماسی** منیفلد M می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M بردار مماس $\mathbf{v}\mid_x \in TM\mid_x$ در هر نقطه‌ی $x \in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_x$ به طور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها باشد. به ازای هر $x \in M$ نگاشت $dF\mid_x : TM\mid_x \to TN\mid_x$ را **نگاشت دیفرانسیل** F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ با ضابطه

$$dF(\mathbf{v}|_x)f(y) = \mathbf{v}(f \circ F)(x), \qquad y = F(x),$$

تعریف می‌شود. نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آن را نگاشت **پیش‌برنده** می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، **کروشه‌ی لی** آنها، $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۱.۱}$$

همچنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

سپس داریم:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۲.۱}$$

گزاره ۸.۱.۱. *میدان‌های برداری* $\mathbf{v}$ *،* $\mathbf{w}$ *و* $\mathbf{u}$ *روی* M *و ثابت‌های* c *و* c' *را در نظر می‌گیریم، سپس کروشه‌ی لی آنها در خواص زیر صدق می‌کند:*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = \circ.$$

برهان. با استفاده از (۱.۱) و (۲.۱) به آسانی اثبات می‌شود. □

تعریف ۹.۱.۱. اگر $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد، دیفرانسیل آن dF بردارهای مماس روی M را به بردارهای مماس روی N نگاشت می‌کند. به همین ترتیب نگاشت خطی القایی F^* وجود دارد که **هم‌دیفرانسیل** F نامیده می‌شود و k-فرم‌های دیفرانسیلی روی N را به k-فرم‌های دیفرانسیلی روی M می‌برد،

$$F^* : \Lambda_k T^*N \mid_{F(x)} \to \Lambda_k T^*M \mid_x .$$

اگر $x = (x^۱, \ldots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $y = (y^۱, \ldots, y^n)$ مختصات موضعی روی N باشد، سپس

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=۱}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot dx^j,$$

که $y = F(x)$، عملی را از F^* روی یک-فرم‌های پایه می‌برد. در حالت کلی نتیجه می‌گیریم:

$$F^*\left(\sum_I \alpha_I(y) dy^I\right) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J} dx^J,$$

که $\partial y^I/\partial x^J = \det(\partial y^{i_k}/\partial x^{j_\nu})$، $I = (i_۱, \ldots, i_k)$ و $J = (j_۱, \ldots, j_k)$ می‌باشد. نگاشت هم‌دیفرانسیل را نگاشت پس‌کشنده نیز می‌نامند.

۲.۱ گروه‌های لی

تعریف ۱.۲.۱. یک **گروه لی** r-پارامتری، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است به طوری‌که عمل گروهی

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g \cdot h, \qquad g,h \in G,$$

و وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

مثال ۲.۲.۱. $G = \mathbb{R}^r$ که دارای ساختار منیفلدی معلومی است را در نظر می‌گیریم، عمل‌گروه آن را جمع برداری $(x,y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون آن را، وارون معمولی یک میدان برداری نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می‌گیریم. این دو عمل‌گروه به وضوح هموارند بنابراین $\mathbb{R}^r$ گروه لی آبلی r-پارامتری می‌باشد. (عمل جمع بردارها جابجایی‌پذیر می‌باشد.)

تعریف ۳.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$، ضرب از راست $R_g : G \to G$ که به وسیله‌ی $R_g(h) = h \cdot g$ با معکوس $R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$ تعریف می‌شود، دیفئومورفیسم است. یک میدان برداری $\mathbf{v}$ روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم:

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}.$$

تعریف ۴.۲.۱. **جبر لی راست** $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد. به طور عمومی‌تر، جبر لی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G},$$

است که کروشه لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه لی صدق می‌کند.

برای تعریف میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبر لی چپ نیز به همین شکل عمل می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک **گروه موضعی از تبدیلات** که به وسیله‌ی یک گروه لی G روی M عمل می‌کنند، زیرمجموعه باز $\mathcal{U}$ که حوزه تعریف عمل‌گروه است به طوری‌که $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$، و نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود که دارای خاصیت‌های زیر است:

- اگر $(h,x) \in \mathcal{U}$، $(g, \Psi(h,x)) \in \mathcal{U}$ و هم‌چنین $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$ آنگاه $\Psi(g, \Psi(h,x)) = \Psi(g \cdot h, x)$.
- برای هر $x \in M$، $\Psi(e,x) = x$.
- اگر $(g,x) \in \mathcal{U}$ آنگاه $(g^{-1}, \Psi(g,x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-1}, \Psi(g,x)) = x$.

۱.۲.۱ عمل گروه تبدیلات

در اینجا نحوه‌ی تبدیل تابع $u=f(x)$ تحت عنصر گروهی $g\in G$ بیان شده است. تابع $u=f(x)$ را با گراف آن $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in\Omega\}\subset X\times U\simeq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ در نظر می‌گیریم، Ω حوزه تعریف تابع $u=f(x)$ است. توجه کنید که Γ_f یک زیرمنیفلد p-بعدی معین از $X\times U$ می‌باشد. اگر گراف تابع f زیرمجموعه‌ای از حوزه تعریف گروه تبدیلات g باشد، تبدیل Γ_f به وسیله‌ی g به صورت زیر است:

$$g\cdot\Gamma_f=\{(\tilde{x},\tilde{u})=g\cdot(x,u)\ ;\ (x,u)\in\Gamma_f\}.$$

مجموعه‌ی $g\cdot\Gamma_f$ لزوما گراف تابع دیگری مثل $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$ نیست. با این وجود، چون G به طور هموار عمل می‌کند و عناصر همانی G، Γ_f را بدون تغییر می‌گذارد، با تعریف مناسب و محدود کردن حوزه‌ی تعریف f (Ω) و برای عنصر g در همسایگی عنصر همانی، مطمئن می‌شویم $g\cdot\Gamma_f=\Gamma_{\tilde{f}}$ گراف تابع دیگری مانند $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$ است و می‌نویسیم $\tilde{f}=g\cdot f$ و تابع $\tilde{f}$ را تبدیل تابع f به وسیله‌ی g می‌نامیم.

در حالت کلی فرض می‌کنیم:

$$(\tilde{x},\tilde{u})=g\cdot(x,u)=(\Xi_g(x,u),\phi_g(x,u)),$$

که ϕ_g و Ξ_g توابعی هموار باشند. گراف $\Gamma_{\tilde{f}}=g\cdot\Gamma_f$ از $g\cdot f$ به وسیله‌ی معادلات زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\Xi_g(x,f(x))=\Xi_g\circ(\mathbb{I}\times f)(x),\\ \tilde{u}&=\phi_g(x,f(x))=\phi_g\circ(\mathbb{I}\times f)(x),\qquad x\in\Omega.\end{aligned}$$

در اینجا $x\in\Omega$ و $\mathbb{I}$ تابع همانی روی X است. باید x را از دستگاه معادلات بالا حذف کنیم. چون برای $g=e$ داریم $\Xi_g\circ(\mathbb{I}\times f)=\mathbb{I}$ و می‌دانیم در صورتی‌که g به اندازه کافی به عنصر همانی نزدیک شود ماتریس ژاکوبین $\Xi_g\circ(\mathbb{I}\times f)$ غیرتکین است، از این‌رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تابع معکوس به طور موضعی برای x داریم:

$$x=[\Xi_g\circ(\mathbb{I}\times f)]^{-۱}(\tilde{x}).$$

لذا هرگاه عامل دوم وارون پذیر باشد $\tilde{u}$ قابل محاسبه است.

$$\tilde{u}=g\cdot f(x)=[\phi_g\circ(\mathbb{I}\times f)]\circ[\Xi_g\circ(\mathbb{I}\times f)]^{-۱}(\tilde{x}).$$

در بعضی موارد ممکن است فقط متغیر مستقل تبدیل شود:

$$(\tilde{x},\tilde{u})=g\cdot(x,u)=(\Xi_g(x),u),$$

Ξ_g یک دیفئومورفیسم از X است و با $\Xi_g^{-۱}=\Xi_{g^{-۱}}$ تعریف می‌شود. به آسانی می‌توانیم x را حذف کنیم :

$$\begin{aligned}&\tilde{x}=\Xi_g(x),\\ &\Rightarrow x=\Xi_g^{-۱}(\tilde{x})=\Xi_{g^{-۱}}(\tilde{x}).\end{aligned}$$

بنابراین
$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{u} = u = f(x) = f(\Xi_{g^{-1}}(\tilde{x})).$$

حال مطالب گفته شده را در مثال زیر به کار می‌بریم.

مثال ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $G = \mathrm{SO}(2)$ عمل گروه دوران‌ها روی $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ باشد. تبدیلات G به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta).$$

فرض کنید $u = f(x)$ یک تابع باشد، که گراف آن $\Gamma_f \subset X \times U$ است. گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی f به وسیله‌ی دوران گراف آن عمل می‌کند. اگر θ بزرگ باشد آنگاه $\theta \cdot \Gamma_f$ گراف تابع دیگری نخواهد بود. اما اگر $f(x)$ روی بازه‌ی متناهی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد سپس $\theta \cdot \Gamma_f$ گراف تابع خوش‌تعریف $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ خواهد بود که $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta \cdot \Gamma_f$ می‌باشد.
تابع خطی $u = f(x) = ax + b$ را در نظر می‌گیریم. گراف f یک خط مستقیم است. بنابراین دوران آن با زاویه θ یک خط مستقیم دیگر خواهد بود. حال تبدیل f تحت θ (یعنی $\tilde{f}$) را می‌یابیم.
$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, ax + b) = (x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax + b)\cos\theta).$$

برای پیدا کردن $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ باید x را از جفت معادلات بالا حذف کنیم:

$$\begin{aligned}\tilde{x} =& x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta \\ \Rightarrow x =& \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}.\end{aligned}$$

با فرض $\cot\theta \neq a$ داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) &= x\sin\theta + (ax + b)\cos\theta \\ &= \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\sin\theta + \left(a\frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + b\right)\cos\theta \\ &\vdots \\ &= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\cos\theta}.\end{aligned}$$

می‌بینیم که تبدیل f تحت θ دوباره تابعی خطی شد.

تعریف ۷.۲.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به طوری‌که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد، یعنی:
$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، باید $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \ldots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.1}$$

باشد که $\xi^i(x)$ها ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

تعریف ۸.۲.۱. اگر $\mathbf{v}$ میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده به وسیله‌ی $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل 0، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\begin{aligned} \Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) &= \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \\ \Psi(0, x) &= x, \\ \frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) &= \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

با مقایسه‌ی دو خاصیت اول از (۴.۱) با خاصیت گروه تبدیلات موضعی می‌بینیم که شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است اغلب گروه ۱-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری $\mathbf{v}$، **مولد بی‌نهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود از این‌رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

که $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند سپس مولد بی‌نهایت کوچک آن به وسیله‌ی (۴.۱) با قرار دادن $\varepsilon = 0$ به دست می‌آید.

$$\mathbf{v}|_x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{5.1}$$

تناظری یک‌به‌یک بین گروه‌های ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچکشان وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه ۱-پارامتری تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ به عنوان نگاشت نمایی آنها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه ۱-پارامتری یا شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ به کار می‌بریم.

مثال ۹.۲.۱. مثال‌هایی از میدان‌های برداری و شارها.

- $M = \mathbb{R}$ را با مختصات x و میدان برداری $\mathbf{v} = \partial/\partial x \equiv \partial_x$ در نظر می‌گیریم. چون باید شار (عمل گروه ۱-پارامتری) تولید شده به وسیله‌ی $\mathbf{v}$ جوابی از $\dot{x} = 1$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = 0$ باشد، لذا :

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = \exp(\varepsilon\partial_x)x = x + \varepsilon.$$

که عمل گروه انتقالات نامیده می‌شود. همچنین تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v} = x\partial_x$ باید جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = x$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = 0$ باشد، بنابراین:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = \exp(\varepsilon x\partial_x)x = e^{\varepsilon}x.$$

که گروه تبدیلات مقیاسی نام دارد.

- گروه دوران‌ها را در صفحه در نظر می‌گیریم،

$$\Psi(\varepsilon,(x,y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن میدان برداری $\mathbf{v} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$ می‌باشد که طبق (۵.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\xi(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon) = -y,\\ \eta(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) = x.\end{aligned}$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک آن، $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ است. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$dx/d\varepsilon = -y, \qquad dy/d\varepsilon = x,$$

مطابقت دارد.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

یک میدان برداری روی M باشد، به طوری‌که اگر $p \in M$ و $X_p \neq 0$ آنگاه کارتی مانند y^i حول نقطه p موجود است که $X = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

برهان. [۶] □

تعریف ۱.۲.۱۱. نگاشت نمایی $\exp : \mathcal{G} \to G$ با قرار دادن $\varepsilon = ۱$ در زیرگروه ۱-پارامتری تولید شده به وسیله‌ی $\mathbf{v}$ به دست می‌آید:

$$\exp(\mathbf{v}) \equiv \exp(\mathbf{v})e.$$

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که با $g \cdot x = \Psi(g,x)$ برای هر $(g,x) \in \mathcal{U} \subset G \times M$ روی منیفلد M عمل می‌کند. عملی بی‌نهایت کوچک متناظر با جبر لی $\mathcal{G}$ از G روی M وجود دارد. به این معنی که اگر $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ باشد $\psi(\mathbf{v})$ یک میدان برداری روی M است و شار آن با عمل زیرگروه ۱-پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ از G روی M منطبق است. برای هر $x \in M$ و با فرض $\Psi_x(g) = \Psi(g,x)$ داریم:

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\circ} \Psi(\exp(\varepsilon\mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_e).$$

به علاوه برای $g \in G_x$ که $G_x = \{g \in G;\ (g,x) \in \mathcal{U}\}$ چون $\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi_{g\cdot x}(h)$ داریم:

$$d\Psi_x(\mathbf{v}|_g) = d\Psi_{g\cdot x}(\mathbf{v}|_e) = \psi(\mathbf{v})|_{g\cdot x}.$$

میدان برداری $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ مولد بی‌نهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود و داریم:

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\circ} \exp(\varepsilon\mathbf{v})x, \qquad \mathbf{v} \in g.$$

مثال ۱.۲.۱۳. دقیقا سه جبر لی متناهی بعد دیفئومورفیسم از میدان‌های برداری روی خط حقیقی $M = \mathbb{R}$ وجود دارند:

- جبر تولید شده به وسیله‌ی ∂_x، عملی از $\mathbb{R}$ روی M به عنوان گروه ۱-پارامتری از انتقالات $x \mapsto x+\varepsilon$ را تولید می‌کند.
- جبر لی دو بعدی تولید شده به وسیله‌ی ∂_x و $x\partial_x$، میدان برداری دوم گروه تجانس $x \mapsto \lambda x$ را تولید می‌کند. توجه کنید که

  $$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x.$$

  این جبر لی با جبر لی ماتریسی ۲ × ۲ تولید شده به وسیله‌ی

  $$\begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \tag{۱.۶}$$

  ایزومورف است. این میدان‌های برداری، یک گروه لی از تمام ماتریس‌های بالامثلثی از فرم

  $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \circ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad \alpha > \circ,$$

  تولید می‌کنند. عمل متناظر روی $\mathbb{R}$، $x \mapsto \alpha x + \beta$ می‌باشد.

- جبر سه بعدی تولیدشده به وسیله‌ی

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = x\partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2\partial_x,$$

که میدان برداری سوم گروه موضعی وارونه‌سازی

$$x \mapsto \frac{x}{1-\varepsilon x}, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{x},$$

را تولید می‌کند. که کروشه‌ی لی هر دو میدان برداری دوباره مضربی از همین میدان‌های برداری است. اگر $\mathbf{v}_3$ را با $-\mathbf{v}_3 = -x^2\partial_x$ جایگزین کنیم، سپس جبر لی $\mathrm{SL}(2)$ را با پایه‌های

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

می‌یابیم. بنابراین عملی موضعی از گروه خطی ویژه‌ی $\mathrm{SL}(2)$ روی خط حقیقی با مولدهای بی‌نهایت کوچک ∂_x، $x\partial_x$ و $-x^2\partial_x$ وجود دارد. این عمل‌گروه، گروه تصویری

$$x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

می‌باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. دستگاه از میدان‌های برداری $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ روی منیفلد M پیچشی است، هرگاه تابع حقیقی مقدار و هموار $c_{ij}^k(x), x \in M, i,j,k = 1,\ldots,r$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $i,j,k = 1,\ldots,r$

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{v}_k,$$

قضیه ۱۵.۲.۱. (*فروبنیوس*[1])

فرض کنید $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ میدان‌های برداری هموار روی منیفلد M باشند، بنابراین دستگاه $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر پیچشی باشد.

برهان. [۶] □

[1] Frobenius

فصل ۲

ناوردا و تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

در این فصل مفهوم امتداد، ناورداها و ناورداهای دیفرانسیلی و روش محاسبه‌ی آنها را ارائه می‌دهیم. و هم‌چنین از روش‌های بی‌نهایت کوچک که برای محاسبه‌ی گروه تقارن و مشخص کردن گروه تقارن معادلات دیفرانسیل ارائه شده است، استفاده می‌شود.

۱.۲ امتداد

تعریف ۱.۱.۲. تابع حقیقی مقدار و هموار $f : X \simeq \mathbb{R}^p \longrightarrow U \simeq \mathbb{R}^q$ از p-متغیر مستقل و q-متغیر وابسته را در نظر می‌گیریم، تعداد$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$ امکان مختلف برای مشتقات جزئی متمایز مرتبه k-ام از تابع f وجود دارد. قرار می‌دهیم $U_k \simeq \mathbb{R}^{qp_k}$ با مختصات $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ که $J = (j_1, \cdots, j_k)$، $1 \le j_k \le p$ و $\alpha = 1, \ldots, q$ می‌باشد. هم‌چنین قرار می‌دهیم $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ که شامل تمام مشتقات تابع از مرتبه ۰ تا n و یک فضای اقلیدسی از بعد $q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} = qp^{(n)}$ می‌باشد. حال هر عضو $U^{(n)}$ را با $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$ نشان می‌دهیم و آن را امتداد مرتبه n-ام f می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۲. فضای $X \times U^{(n)}$ که شامل همه‌ی متغیرهای مستقل ، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه n-ام می‌باشد را فضای جت مرتبه n-ام فضای کامل $X \times U$ می‌گوییم.
اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد که گراف آن در $M \subset X \times U$ قرار می‌گیرد آنگاه امتداد مرتبه‌ی n-ام آن، $pr^{(n)}f(x)$، یک تابع است که گراف آن در فضای جت مرتبه n-ام $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$ قرار می‌گیرد.

مثال ۳.۱.۲. فرض می‌کنیم $f : X \simeq \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \simeq \mathbb{R}^1$ تابعی هموار از ۲ متغیر مستقل و ۱ متغیر وابسته باشد، قرا می‌دهیم $u = f(x, y)$. هر عضو $U^{(2)}$ را با $u^{(2)} = pr^{(2)}f(x, y)$ نشان می‌دهیم و آن را امتداد مرتبه‌ی دوم تابع f می‌نامیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} pr^{(2)}f(x,y) &= (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \\ &= \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \end{aligned}$$

هم‌چنین فضای $(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \simeq \mathbb{R}^8$ را فضای جت مرتبه‌ی دوم فضای کامل $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ می‌گوییم.

۱.۱.۲ امتداد عمل گروه

فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه باز $M \subset X \times U$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کند. عمل موضعی القایی از G روی فضای جت مرتبه‌ی n-ام $M^{(n)}$ وجود دارد که امتداد مرتبه n-ام G (یا به طور صحیح‌تر امتداد مرتبه‌ی n-ام G روی M) نامیده می‌شود

و به صورت $pr^{(n)}G$ نمایش داده می‌شود. این امتداد مشتقات تابع $u = f(x)$ را به مشتقات متناظر تابع تبدیلی $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ تبدیل می‌کند.

مثال ۴.۱.۲. فرض می‌کنیم $p = q = ۱$ به طوری‌که $X \times U \simeq \mathbb{R}^۲$ و عمل گروه دوران‌های $\mathrm{SO}(۲)$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم امتداد اول $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم که $X \times U^{(۱)} \simeq \mathbb{R}^۳$ با مختصات (x, u, u_x) می‌باشد. با توجه به (۳.۱) برای محاسبه‌ی $\tilde{u}_{\tilde{x}}$ به طریق زیر می‌توانیم عمل کنیم:

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{x}_x} = \frac{(x\sin\theta + u\cos\theta)_x}{(x\cos\theta - u\sin\theta)_x} = \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}.$$

بنابراین عمل امتداد داده شده‌ی $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ در $X \times U^{(۱)}$ عبارتست از:

$$pr^{(۱)}\theta.(x, u, u_x) = \left(x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta, \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}\right),$$

که $|\theta| < |\mathrm{arccot} u_x|$.

۲.۱.۲ امتداد میدان‌های برداری

در اینجا فرمول صریحی برای محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری ارائه می‌شود، که به راحتی قابل استفاده است. و به طور مثال برای محاسبه‌ی گروه تقارن در فصل‌های بعدی به کار می‌رود.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض می‌کنیم*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=۱}^{q} \phi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۱.۲}$$

میدانی برداری روی زیر مجموعه باز $M \subset X \times U$ باشد. امتداد مرتبه n-ام $\mathbf{v}$ میدان برداری

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=۱}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x, u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۲.۲}$$

روی فضای جت متناظر $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ می‌باشد. که در آن $J = (j_۱, \ldots, j_k)$، $۱ \leq j_k \leq p$ و $۰ \leq k \leq n$ می‌باشد. هم‌چنین داریم:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J\Big(\phi_\alpha - \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_i^\alpha\Big) + \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i},$$

$$D_J = D_{j_۱}D_{j_۲}\cdots D_{j_k},$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=۱}^{q}\sum_{J} u_{J,i}^\alpha\,\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

به علاوه D_i مشتق کامل نسبت به مولفه‌ی i-ام می‌باشد.

برهان. ابتدا فرمول را برای مشتقات مرتبه‌ی اول محاسبه می‌کنیم از این‌رو قرار می‌دهیم $n = ۱$. فرض می‌کنیم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ گروه ۱-پارامتری متناظر و فرمول تبدیلات آن به صورت زیر باشد:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)).$$

توجه کنید

$$\xi^i(x, u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=۰} \Xi^i_\varepsilon(x, u), \qquad i = ۱, \cdots, p, \tag{۴.۲}$$

$$\phi_\alpha(x, u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=۰} \Phi^\alpha_\varepsilon(x, u), \qquad \alpha = ۱, \cdots, q, \tag{۵.۲}$$

که Ξ^i_ε و Φ^α_ε مولفه‌های Ξ_ε و Φ_ε می‌باشند. فرض می‌کنیم $(x, u^{(۱)}) \in \mathbf{M}^{(۱)}$ و $u = f(x)$ یک تابع باشد به طوری‌که $u^{(۱)} = pr^{(۱)} f(x)$ یا به طور صریح داشته باشیم:

$$u^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x), \qquad u^{(\alpha)}_i = \partial f^{(\alpha)}(x)/\partial x^i.$$

برای ε های به اندازه‌ی کافی کوچک، تبدیل f به وسیله‌ی عنصر گروهی g_ε خوش‌تعریف است (حداقل اگر حوزه‌ی تعریف f همسایگی مناسب کوچکی از x باشد) و به وسیله‌ی

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}(\tilde{x}),$$

داده می‌شود. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، ماتریس ژاکوبین، $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (\partial \tilde{f}^\alpha_\varepsilon / \partial \tilde{x}^i)$ می‌باشد سپس

$$\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) \cdot \{\mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x)\}^{-۱}, \tag{۶.۲}$$

(درصورتی‌که معکوس آن تعریف شده باشد) چون

$$x = [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}(\tilde{x}),$$

ورودی‌های ماتریس $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$ می‌باشد، بنابراین فرمول واضحی برای امتداد اول $pr^{(۱)} g_\varepsilon$ فراهم می‌شود. برای پیدا کردن مولد بی‌نهایت کوچک $pr^{(۱)}\mathbf{v}$ بایستی از (۶.۲) نسبت به ε با در نظر گرفتن $\varepsilon = ۰$ مشتق بگیریم. ابتدا به یاد بیاورید که اگر $\mathbf{M}(\varepsilon)$ ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع ε باشد سپس

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\mathbf{M}(\varepsilon)^{-۱}] = -\mathbf{M}(\varepsilon)^{-۱} \frac{d\mathbf{M}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \mathbf{M}(\varepsilon)^{-۱}.$$

هم‌چنین توجه کنید که چون $\varepsilon = ۰$ متناظر با تبدیلات همانی است،

$$\Xi_۰(x, f(x)) = x, \qquad \Phi_۰(x, f(x)) = f(x), \tag{۷.۲}$$

به طوری‌که اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد

$$\mathcal{J}[\Xi_۰ \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = I, \qquad \mathcal{J}(\Phi_۰ \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = \mathcal{J}f(x).$$

حال از (۶.۲) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\varepsilon = \circ$، با استفاده از قاعده‌ی لیب‌نیز داریم

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I}\times f)](x) - \mathcal{J}f(x)\cdot \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\circ} \mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I}\times f)](x) \\ &= \mathcal{J}[\phi \circ (\mathbb{I}\times f)](x) - \mathcal{J}f(x)\cdot[\xi\circ(\mathbb{I}\times f)](x). \end{aligned}$$

در تساوی دوم $\xi = (\xi^۱,\dots,\xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_۱,\dots,\phi_q)^T$ بردارهای ستونی‌اند و از (۴.۲) استفاده کرده‌ایم. ورودی‌های ماتریس فرمول آخر مضرب‌های تابعی ϕ_α^k از $\partial/\partial u_k^\alpha$ در $pr^{(۱)}\mathbf{v}$ را می‌دهد. یعنی ورودی (α,k)-ام،

$$\phi_\alpha^k(x, pr^{(۱)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x,f(x))] - \sum_{i=۱}^{p}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x,f(x))],$$

می‌باشد. بنابراین به وسیله‌ی تعریف مشتق کامل

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^k(x,u^{(۱)}) &= D_k[\phi_\alpha(x,u)] - \sum_{i=۱}^{p} D_k[\xi^i(x,u)]u_i^\alpha \\ &= D_k\left[\phi_\alpha - \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right] + \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_{ki}^\alpha, \end{aligned} \qquad (۸.۲)$$

می‌باشد که $u_{ki}^\alpha = \partial^۲ u^\alpha/\partial x^k\partial x^i$. این حالت (۳.۲) را در $n = ۱$ اثبات می‌کند. برای این‌که قضیه را در حالت کلی اثبات کنیم از استقرا استفاده می‌کنیم. موضوع مورد توجه این است که فضای جت $(n+۱)$-ام، $\mathbf{M}^{(n+۱)}$ می‌تواند به عنوان زیرفضای فضای جت اول $(\mathbf{M}^{(n)})^{(۱)}$ از فضای جت (n)-ام مشاهده شود. به این دلیل که مشتقات مرتبه‌ی $(n+۱)$-ام u_J^α می‌تواند به عنوان مشتقات مرتبه‌ی اول از مشتقات مرتبه‌ی n-ام در نظر گرفته شود.(به چندین روش می‌تواند اثبات شود) مثالی را در این مورد بررسی می‌کنیم. برای $p = ۲$ و $q = ۱$ فضای جت اول $\mathbf{M}^{(۱)}$ مختصات $(x,y;u;u_x,u_y)$ را دارد. (u_x,u_y) را به عنوان متغیرهای وابسته‌ی جدید در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $u_x = v$ و $u_y = w$، سپس $\mathbf{M}^{(۱)}$ تنها زیرمجموعه‌ی بازی از $X\times\tilde{U}$ می‌باشد، هنوز X، ۲-بعدی است اما $\tilde{U}$ سه متغیر وابسته‌ی u، v و w را دارد. بنابراین فضای جت اول $\mathbf{M}^{(۱)}$، یعنی $(\mathbf{M}^{(۱)})^{(۱)}$، زیرمجموعه‌ی بازی از $X\times\tilde{U}^{(۱)}$ با مختصات $(x,y;u;v,w;u_x,u_y,v_x,v_y,w_x,w_y)$ می‌باشد.

حال چون $v = u_x$ و $w = u_y$، بنابراین $\mathbf{M}^{(۲)} \subset (\mathbf{M}^{(۱)})^{(۱)}$ زیرفضایی است که به وسیله‌ی روابط

$$v = u_x, \qquad w = u_y, \qquad v_y = w_x,$$

در $X\times\tilde{U}^{(۱)}$ تعریف می‌شود و به وسیله‌ی متغیرهای غیرضروری u_x و u_y در $(\mathbf{M}^{(۱)})^{(۱)}$ و برابری مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم مختلط از u مشخص می‌شود. مراحل استقرا برای تعیین $pr^{(n)}\mathbf{v}$ از $pr^{(n-۱)}\mathbf{v}$ در ادامه می‌آید؛ ما $pr^{(n-۱)}\mathbf{v}$ را به عنوان میدان برداری روی $\mathbf{M}^{(n-۱)}$ در نظر می‌گیریم و بنابراین به وسیله‌ی فرمول امتداد مرتبه‌ی اول می‌توانیم آن را به $(\mathbf{M}^{(n-۱)})^{(۱)}$ امتداد دهیم، سپس میدان‌های برداری نتیجه را به زیرفضای

$\mathbf{M}^{(n)}$ محدود می‌کنیم در نتیجه امتداد $pr^{(n)}\mathbf{v}$ مشخص خواهد شد. (بایستی بررسی کنیم که امکان این محدود کردن وجود داشته باشد، البته، با توجه به فرمول مشخص است.) حال مختصات مرتبه‌ی n-ام جدید در $(\mathbf{M}^{(n-1)})^{(1)}$ به وسیله‌ی $u^\alpha_{J,k} = \partial u^\alpha_J/\partial x^k$ که $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$، $1 \leq k \leq p$ و $1 \leq \alpha \leq q$ است، داده می‌شود. مطابق (۸.۲)، ضرایب $\partial/\partial u^\alpha_{J,k}$ در امتداد اول $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$، به صورت

$$\phi^{J,k}_\alpha = D_k\phi^J_\alpha - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i}, \tag{۹.۲}$$

می‌باشد. (همان طور که خواهیم دید، (۹.۲) رابطه‌ی بازگشتی مفیدی برای ضرایب تابعی $pr^{(n)}\mathbf{v}$ فراهم می‌کند.) حال کافی است بررسی کنیم که فرمول (۳.۲) رابطه‌ی بازگشتی (۹.۲) را حل می‌کند. به وسیله‌ی استقرا داریم،

$$\begin{aligned}
\phi^{J,k}_\alpha &= D_k\left\{D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_{J,i}\right\} - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p (D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} + \xi^i u^\alpha_{J,ik}) - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_{J,ik},
\end{aligned}$$

که $u^\alpha_{J,ik} = \partial^2 u^\alpha_J/\partial x^i \partial x^k$. بنابراین $\phi^{J,k}_\alpha$ دارای شکل (۳.۲) می‌باشد و مراحل استقرا تکمیل می‌شود. □

مثال ۶.۱.۲. گروه دوران $\mathrm{SO}(2)$ را که روی $X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

عمل می‌کند را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\phi = x$، $\xi = -u$ و امتداد مرتبه اول

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

به وسیله‌ی

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2,$$

داده می‌شود. همچنین مضرب تابعی ϕ^{xx} از $\dfrac{\partial}{\partial u_{xx}}$ در $pr^{(2)}\mathbf{v}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + uu_x) - uu_{xxx} = 3u_xu_{xx}.$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک امتداد دوم $pr^{(2)}\mathrm{SO}(2)$ که روی $X \times U^{(2)}$ عمل می‌کند به صورت زیر داده می‌شود:

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_xu_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

روش زیر نیز برای محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری وجود دارد. میدان برداری $\mathbf{v}$ را مشابه (۱.۲) در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi_\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) u_i^\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, q; \tag{۱۰.۲}$$

q-تایی $Q(x, u^{(1)}) = (Q_1, \ldots, Q_q)$ را به عنوان مشخصه‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ در نظر می‌گیریم. با این تعریف، (۳.۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{۱۱.۲}$$

با جایگزین کردن آن در (۲.۲) و مرتب کردن آن داریم:

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \xi^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right\},$$

عبارت داخل کروشه، مشتق کامل می‌باشد، از این‌رو

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = pr^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i, \tag{۱۲.۲}$$

که

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad pr^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۱۳.۲}$$

و $0 \leq \sharp J \leq n$.

۲.۲ ناورداها

در اینجا ناوردایی و گروه تقارن زیر مجموعه‌های دلخواه از منیفلد داده شده M را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه $\varphi \subset M$، G-**ناوردا** و G را یک **گروه تقارن** از φ می‌نامیم هرگاه اگر $x \in \varphi$ و $g \in G$ به طوری‌که $g \cdot x$ تعریف شده باشد، سپس $g \cdot x \in \varphi$.

مثال ۲.۲.۲. اگر G_c یک گروه ۱-پارامتری از انتقالات

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

برای ثابت c باشد، سپس خط‌های $x = cy + d$ ، G_c-ناوردا و G_c یک گروه تقارن برای چنین خط‌هایی می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کنند. تابع $F: M \to N$ که N نیز منیفلد می‌باشد را G**–ناوردا** می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in M$ و هر $g \in G$ به طوری‌که $g \cdot x$ تعریف شده باشد داشته باشیم $F(g \cdot x) = F(x)$.

مثال ۴.۲.۲. گروه انتقالات در صفحه مثال (۲.۲.۲) را در نظر می‌گیریم، تابع $F(x,y) = x - cy$ یک G_c–ناورداست.

گزاره ۵.۲.۲. *فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کنند. تابع حقیقی مقدار و هموار $F: M \to \mathbb{R}$ را G – ناوردا می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:*

$$\mathbf{v}(F) = \circ, \qquad \forall x \in M. \tag{۱۴.۲}$$

برهان. اگر $x \in M$،

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x) = \mathbf{v}(F)[\exp(\varepsilon \mathbf{v})x],$$

هرگاه $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$ تعریف شده باشد. با قرار دادن $\varepsilon = \circ$ ضرورت (۱۴.۲) اثبات می‌شود. برعکس اگر (۱۴.۲) همه جا برقرار باشد، سپس

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x) = \circ,$$

چون $F(\exp(\varepsilon \mathbf{v})x)$ ثابتی برای همبندی است، زیرگروه ۱–پارامتری موضعی $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$ از

$$G_x = \{g \in G : \text{تعریف شده باشد } g.x\}$$

را تعریف می‌کند. اما هر عنصر G_x می‌تواند به عنوان ضرب متناهی از توابع نمایی مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_i$ از G نوشته شود، از این‌رو برای هر $g \in G_x$، $F(g.x) = F(x)$ می‌باشد. □

لازم است مفهوم توابع یا زیرمجموعه‌های موضعا–ناوردا تحت گروه تبدیلات را تعریف کنیم. در اینجا، تنها ناوردایی تحت آن دسته از گروه تبدیلاتی که به اندازه‌ی کافی به عنصر همانی نزدیک هستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۶.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیر مجموعه $\varphi \subset M$، G**–ناوردای موضعی** نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in \varphi$ همسایگی $\tilde{G}_x \subset G_x$ از عنصر همانی G وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $g \in \tilde{G}_x$ داشته باشیم: $g.x \in \varphi$.
تابع هموار $F: U \to N$ که U زیرمجموعه بازی از M می‌باشد، G**–ناوردای موضعی** نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in U$ همسایگی $\tilde{G}_x \subset G_x$ از عنصر همانی e در G وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $g \in \tilde{G}_x$ داشته باشیم: $F(g.x) = F(g)$.
F، G–ناوردای سراسری نامیده می‌شود (حتی اگر فقط روی یک زیرمجموعه باز از M تعریف شده باشد) اگر برای هر $x \in U$ و $g \in G$ به طوری‌که $g.x \in U$، داشته باشیم: $F(g.x) = F(g)$.

مثال ۷.۲.۲. فرض می‌کنیم G گروه انتقالات افقی $(x,y) \mapsto (x+\varepsilon, y)$ در $\mathbb{R}^۲$ باشد. قطعه خط
$$\{(x,y) : y = ۰, -۱ < x < ۱\}.$$
G-ناوردای موضعی است اما G- ناوردا نیست. به طور مشابه تابع دو ضابطه‌ای
$$F(x,y) = \begin{cases} ۰, & y \leq ۰ \ \vee \ y > ۰ \ \wedge \ x > ۰, \\ e^{-۱/y}, & y > ۰ \ \wedge \ x < ۰. \end{cases}$$
هموار و موضعا G-ناوردا روی $U = \mathbb{R}^۲ \setminus \{(۰,y) : y \geqslant ۰\}$ می‌باشد، چون برای هر $|x| < |\varepsilon|$ داریم: $F(x+\varepsilon, y) = F(x,y)$. واضح است که F، G -ناوردای سراسری نیست.

قضیه ۸.۲.۲. *فرض می‌کنیم G به طور **نیم-منظم** روی منیفلد m- بعدی M با مدارهای s- بعدی عمل کند. اگر $x_۰ \in M$، سپس **دقیقا** $(m-s)$ ناوردای موضعی مستقل تابعی $\zeta^۱(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)$ در همسایگی‌ای از $x_۰$ وجود دارند. به علاوه هر ناوردای دیگر از عمل گروه که در همسایگی‌ای از $x_۰$ تعریف شده باشد برای تابع هموار F فرم زیر را دارد:*
$$\zeta(x) = F(\zeta^۱(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)).$$
اگر عمل G منظم باشد سپس ناورداهای $\zeta^۱, \ldots, \zeta^{m-s}$ به طور سراسری در همسایگی‌ای از $x_۰$ ناوردا هستند.

برهان. [۱۲] □

۱.۲.۲ روش‌هایی برای ساختن ناورداها

فرض می‌کنیم G یک گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که با مولد بی‌نهایت کوچک
$$\mathbf{v} = \xi^۱(x)\frac{\partial}{\partial x^۱} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}.$$
در مختصات موضعی داده شده روی M عمل می‌کند، یک ناوردای موضعی $\zeta(x)$ از G جوابی از معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، همگن و خطی زیر است:
$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi^۱(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^۱} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = ۰. \tag{۱۵.۲}$$
بنا به قضیه (۸.۲.۲) اگر $\mathbf{v}|_{x_۰} \neq ۰$، سپس $m-۱$ ناوردای مستقل تابعی وجود دارد. از این‌رو $m-۱$ جواب مستقل تابعی برای معادله دیفرانسیل جزئی (۱۵.۲) در همسایگی ای از $x_۰$ وجود دارد. قضیه‌ای کلاسیک از چنین معادلاتی نشان می‌دهد که حل عمومی آنها می‌تواند با انتگرال گرفتن از سیستم مشخصه متناظر زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا شود:
$$\frac{dx^۱}{\xi^۱(x)} = \frac{dx^۲}{\xi^۲(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}.$$

که جواب‌های آن فرم زیر را دارند:

$$\zeta^1(x^1, x^2, \ldots, x^m) = c_1 \ , \ \ \ldots \ \ , \ \zeta^{m-1}(x^1, x^2, \ldots, x^m) = c_{m-1}.$$

$c_1, \ldots, c_{m-1}$ ثابت‌های حاصل از انتگرال‌گیری‌اند، در واقع $\zeta^1, \ldots, \zeta^{m-1}$ جواب‌های مستقل تابعی برای (۱۵.۲) می‌باشند. محاسبه‌ی ناورداهای مستقل از گروه r-پارامتری از تبدیلات که $r > 1$ کمی پیچیده‌تر است. اگر $\mathbf{v}_k = \sum \xi_k^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ و $k = 1, \ldots, r$ پایه‌ای از مولدهای بی‌نهایت کوچک برای G تشکیل دهند سپس ناورداها به وسیله‌ی حل سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، خطی و همگن زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0, \qquad k = 1, \ldots, r.$$

به عبارت دیگر هر ناوردای ζ بایستی ناوردای مشترکی از همه‌ی میدان‌های برداری $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ باشد. لذا ابتدا ناوردای یک میدان برداری را محاسبه می‌کنیم، مثلا $\mathbf{v}_1$. در مرحله‌ی بعد میدان‌های برداری $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ را با استفاده از ناوردای $\mathbf{v}_1$ به عنوان مختصات بازنویسی می‌کنیم و سپس ناوردای مشترک این $r - 1$ میدان برداری جدید را می‌یابیم. حال با یک مثال مطلب را واضح‌تر بیان می‌کنیم.

مثال ۹.۲.۲. میدان‌های برداری

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{w} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم که یک گروه آبلی ۲-پارامتری از تبدیلات روی $\mathbb{R}^3$ تولید می‌کنند و روی $M = \mathbb{R}^3 \backslash (\{x = y = 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, \ z = 0\})$ به طور منظم عمل می‌کنند. ناوردای $\zeta(x, y, z)$ جوابی از دو معادله $\mathbf{v}(\zeta) = 0 = \mathbf{w}(\zeta)$ می‌باشد. ابتدا ناوردای مستقل $\mathbf{v}$ را می‌یابیم. سیستم مشخصه‌ی متناظر $\mathbf{v}$، $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{0}$ می‌باشد. با انتگرال گرفتن از تساوی‌ها $x^2 + y^2 = c$ و $z = c'$، برای ثابت‌های دلخواه c, c' که حاصل از انتگرال‌گیری‌اند، ناورداهای مستقل از $\mathbf{v}$ می‌باشند. قرار می‌دهیم $x^2 + y^2 = r^2$. حال $\mathbf{w}$ را با استفاده از r و z دوباره بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \quad &\Rightarrow \quad 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} = 2r\frac{\partial}{\partial r} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{w} = 2rz\frac{\partial}{\partial r} + (z^2 + 1 - r^2)\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

چون ζ بایستی تابعی از ناورداهای r و z از $\mathbf{v}$ باشد بنابراین باید جوابی از معادله دیفرانسیل

$$\mathbf{w}(\zeta) = 2rz\frac{\partial \zeta}{\partial r} + (z^2 + 1 - r^2)\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

باشد. سیستم مشخصه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dr}{2rz} = \frac{dz}{z^2 + 1 - r^2}.$$

با حل این معادله دیفرانسیل معمولی،

$$\zeta = \frac{z^۲ + r^۲ + ۱}{r} = \frac{x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}.$$

تنها ناوردای مستقل این گروه می‌باشد.

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه باز $M \subset X \times U$ عمل می‌کند. یک **ناوردای دیفرانسیلی** مرتبه n-ام از G تابع هموار $\eta : M^{(n)} \to \mathbb{R}$ وابسته به x، u و مشتقات u می‌باشد به طوری‌که برای هر $g \in G$ که $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})$ تعریف شده باشد η یک ناوردا از عمل گروه امتداد داده شده $pr^{(n)}G$ است:

$$\eta(pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})) = \eta(x, u^{(n)}), \qquad (x, u^{(n)}) \in M^{(n)}.$$

مثال ۱۱.۲.۲. گروه دوران‌های $G = \mathrm{SO}(۲)$ که روی $X \times U = \mathbb{R}^۲$ با مولد $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم. ناوردای دیفرانسیلی مرتبه اول در واقع ناوردای معمولی از امتداد اول $pr^{(۱)}\mathrm{SO}(۲)$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$pr^{(۱)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (۱ + u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

می‌باشد. اگر متغیرهای (x, u, u_x) را با (x, y, z) نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{w} = pr^{(۱)}\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (۱ + z^۲)\frac{\partial}{\partial z}.$$

توجه کنید که میدان برداری $\mathbf{w}$ روی $\mathbb{R}^۳$ هرگز صفر نمی‌شود بنابراین در همسایگی‌ای از هر نقطه در $\mathbb{R}^۳$ دو ناوردای مستقل تابعی از گروه ۱-پارامتری تولید شده به وسیله‌ی $\mathbf{w}$ وجود دارد. سیستم مشخصه در این مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{۱ + z^۲}.$$

که تساوی اول در مثال (۹.۲.۲) محاسبه شد، بنابراین یکی از ناورداها شعاع $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ می‌باشد. برای پیدا کردن ناوردای دیگر x را با $\sqrt{r^۲ - y^۲}$ جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$\frac{dy}{\sqrt{r^۲ - y^۲}} = \frac{dz}{۱ + z^۲}.$$

جواب آن $\arcsin\frac{y}{r} = \arctan z + k$ برای ثابت دلخواه k می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z - \arcsin\frac{y}{r} = \arctan z - \arctan\frac{y}{x}.$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای $\mathbf{w}$ می‌باشد. بیان ساده‌تری از این ناوردا با گرفتن تانژانت آن به دست می‌آید: $\frac{xz - y}{yz + x}$، بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه

$$\sqrt{x^۲ + u^۲} \quad \text{و} \quad \frac{xu_x - u}{x + uu_x}$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه اول برای $\mathrm{SO}(۲)$ تشکیل می‌دهند.

گزاره ۱۲.۲.۲. *فرض می‌کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی منیفلد $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند. تصور کنید که $y = \eta(x, u^{(n)})$ و $w = \zeta(x, u^{(n)})$ ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه n-ام از G باشند. سپس مشتق*

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw/dx}{dy/dx} \equiv \frac{D_x\zeta}{D_x\eta}, \tag{۱۶.۲}$$

یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه $(n+1)$-ام برای G می‌باشد.

برهان. برای اثبات به فرمول زیر نیاز داریم. فرض می‌کنیم $\zeta(x, u^{(n)})$ تابعی هموار و $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \phi\partial_u$ میدان برداری باشد. سپس

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta) = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)] - D_x\xi \cdot D_x\zeta. \tag{۱۷.۲}$$

با استفاده از فرمول (۱۲.۲) برای امتداد می‌بینیم که

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta) = pr^{(n+1)}\mathbf{v}_Q(D_x\zeta) + \xi D_x^2\zeta,$$

در حالی‌که

$$D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)] = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(\zeta)] + D_x(\xi D_x\zeta).$$

بنابراین (۱۷.۲) به فرمول ساده‌تر زیر کاهش می‌یابد،

$$pr^{(n+1)}\mathbf{v}_Q(D_x\zeta) = D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(\zeta)].$$

این فرمول، موردی ویژه از قاعده‌ی تبدیل عمومی میدان‌های برداری و مشتقات کامل می‌باشد. اثبات (۱۶.۲) را ادامه می‌دهیم، فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ مولدی بی‌نهایت کوچک از G باشد. با استفاده از (۱۷.۲)

$$\begin{aligned}
pr^{(n+1)}\mathbf{v}\left[\frac{dw}{dy}\right] &= \frac{1}{(D_x\eta)^2}\{pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta)\cdot D_x\eta - D_x\zeta \cdot pr^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\eta)\} \\
&= \frac{1}{(D_x\eta)^2}\{D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)]\cdot D_x\eta - D_x\xi\cdot D_x\zeta\cdot D_x\eta\} \\
&\quad -\frac{1}{(D_x\eta)^2}\{D_x\zeta\cdot D_x[pr^{(n)}\mathbf{v}(\eta)] + D_x\zeta\cdot D_x\xi\cdot D_x\eta\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

چون با توجه به فرض $pr^{(n)}\mathbf{v}(\zeta) = 0 = pr^{(n)}\mathbf{v}(\eta)$ بنابراین dw/dy ناوردای بی‌نهایت کوچک تحت عمل $pr^{(n+1)}G$ می‌باشد لذا با توجه به گزاره‌ی (۵.۲.۲) ناورداست. □

گزاره ۱۳.۲.۲. *فرض می‌کنیم G گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^{2}$ عمل می‌کند. فرض می‌کنیم $y = \eta(x,u)$ و $w = \zeta(x,u,u_x)$ مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای مستقل تابعی از امتداد اول $pr^{(1)}G$ باشند. سپس مشتقات*

$$y, w, dw/dy, \dots, d^{n-1}w/dy^{n-1} \tag{۱۸.۲}$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای مستقل تابعی برای امتداد مرتبه‌ی n-ام $pr^{(n)}G$ برای $n \geq 1$ فراهم می‌کنند.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۱۲.۲.۲) کافیست استقلال (۱۸.۲) را ثابت کنیم. از طرفی چون مشتقات k-ام $d^k w/dy^k$ تنها به $u_{k+1} = d^{k+1}u/dx^{k+1}$ وابسته هستند، لذا از $y, w, \cdots, d^{k-1}/dy^{k-1}$ که تنها به توابع $x, u, \dots, u_k$ وابسته‌اند، مستقل‌اند. □

۳.۲ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۳.۲. یک سیستم Δ از معادلات دیفرانسیل مرتبه n-ام با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته با سیستم معادلاتی $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0, \ \nu = 1,\dots,\ell$ شامل $x = (x^1,\dots,x^p)$، $u = (u^1,\dots,u^q)$ و مشتقات u نسبت به x تا مرتبه n داده می‌شود. توابع $\Delta(x,u^{(n)}) = (\Delta_1(x,u^{(n)}),\dots,\Delta_\ell(x,u^{(n)}))$ در اندیس‌هایشان هموار فرض می‌شوند به طوری‌که Δ می‌تواند به عنوان نگاشتی هموار از فضای جت $X\times U^{(n)}$ به فضای اقلیدسی ℓ-بعدی دیده شود، $\Delta : X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^\ell$.
مجموعه جواب سیستم را با

$$\mathcal{S}_\Delta = \{(x,u^{(n)}) | \Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1,\cdots,m\}, \tag{۱۹.۲}$$

نشان می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از فضای جت مرتبه‌ی n-ام، و شامل تمام نقاط $(x,u^{(n)}) \in J^n$ است که در سیستم صدق می‌کند.

تعریف ۲.۳.۲. فرض می‌کنیم $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0, \ \nu = 0,\dots,\ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. آن را دارای **رتبه ماکسیمال** گوییم اگر ماتریس ژاکوبین $\ell \times (p + qp^{(n)})$

$$\mathbb{J}_\Delta(x,u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^\alpha_J}\right),$$

از Δ نسبت به همه‌ی متغیرهای $(x,u^{(n)})$ از رتبه ℓ باشد هرگاه داشته باشیم: $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0$.

۴.۲ تقارن‌ها

تعریف ۱.۴.۲. فرض می‌کنیم Δ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. یک **گروه تقارن** برای Δ یک گروه موضعی از تبدیلات G است که روی زیر مجموعه باز M از فضای متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل

می‌کند با این خاصیت که هرگاه $u = f(x)$ یک جواب از Δ باشد و برای هر $g \in G$، $g \cdot f$ تعریف شده باشد، آنگاه $u = g \cdot f(x)$ نیز یک جواب از دستگاه باشد.

قضیه ۲.۴.۲. *تصور کنید G گروه لی موضعی همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد m-بعدی M عمل می‌کند. فرض کنید $F : M \to \mathbb{R}^\ell,\ \ \ell \leq m$ یک سیستم از معادلات جبری*

$$F_\nu(x) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, \ell,$$

با رتبه‌ی ماکسیمال باشد، به این معنی که ماتریس ژاکوبین $(\partial F_\nu / \partial x^k)$ در نقطه‌ی x از جواب سیستم دارای رتبه‌ی ℓ باشد. سپس G گروه تقارن سیستم است اگر و تنها اگر برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)] = 0, \qquad \nu = 1, \dots, \ell, \tag{۲۰.۲}$$

هرگاه $F(x) = 0$.

برهان. [۱۲]. □

قضیه ۳.۴.۲. *فرض کنیم M زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times U$ و $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ سیستم مرتبه‌ی n-ام از معادلات دیفرانسیل باشد که روی M با مجموعه‌ی جواب متناظر $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$ تعریف شده است. تصور کنید G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و امتداد آن $\mathcal{S}_\Delta$ را ناوردا می‌گذارد به این معنی که هرگاه $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ برای هر $g \in G$ در صورت تعریف داشته باشیم: $pr^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$. سپس G یک گروه تقارن از دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد.*

برهان. [۱۲]. □

با ترکیب دو قضیه‌ی (۲.۴.۲) و (۳.۴.۲) بلافاصله شرایط بی‌نهایت کوچک و مهمی را برای گروه G می‌یابیم که به وسیله‌ی آن، G گروه تقارن سیستم معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

قضیه ۴.۴.۲. *فرض کنید $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0,\ \ \nu = 0, \dots, \ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با رتبه ماکسیمال روی $M \subset X \times U$ باشد. اگر G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و برای هر مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:*

$$pr^{(n)} \mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0,\ \ \nu = 1, \dots, \ell,$$

هرگاه $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. آنگاه G یک گروه تقارن برای این دستگاه می‌باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۲.۴.۲) و (۳.۴.۲) اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۴.۲. *فرض می‌کنیم G گروه تبدیلی باشد، و فرض می‌کنیم $I_1,\ldots,I_\kappa$ با $\kappa = i_n$، مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام مستقل تابعی روی زیرمجموعه‌ی باز $V^{(n)} \subset J^{(n)}$ باشند. یک سیستم از معادلات دیفرانسیل، G را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر، هرگاه به زیرمجموعه‌ی $V^{(n)}$ تحدید شود، به توانیم آن را برحسب ناورداهای دیفرانسیلی نوشت:*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = F_\nu(I_1(x, u^{(n)}), \ldots, I_\kappa(x, u^{(n)})) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \ell.$$

تنها سیستم‌های ناوردا از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی n که به وسیله‌ی ناورداهای دیفرانسیلی توصیف نمی‌شوند در زیرنمایش تکین زیر قرار می‌گیرند:

$$S^n = J^n/V^n = \{z \in J^n |\ \dim \mathcal{G}^{(n)}|_z < s_n\},$$

که مدارهای عمل امتداد داده شده ماکسیمال نیستند. به ویژه، اگر G به طور موضعا موثر عمل کند و n حداقل مرتبه‌ی پایایی G باشد، سپس S^n تنها زیرمجموعه‌ای از J^n می‌باشد که روی آن مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده‌ی G وابسته‌ی خطی هستند. هر سیستم G-ناوردا از معادلات دیفرانسیل می‌تواند به اجتماعی از الف) یک مولفه‌ی منظم، که زیرمجموعه‌ای از V^n است و می‌تواند (موضعا) به وسیله‌ی صفر قراردادن سیستم ناورداهای دیفرانسیلی مشخص شود، مشابه قضیه‌ی (۵.۴.۲)، و ب) یک مولفه‌ی تکین، که زیرمجموعه‌ای از S^n است و از این‌رو به وسیله‌ی وابستگی خطی مولدهای بی‌نهایت کوچک مشخص می‌شود، با شرایط ممکن دیگر تجزیه شود.

مثال ۶.۴.۲. معادله‌ی گرمای

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u,$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد. امتداد دوم آن به‌صورت

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}},$$

می‌باشد. طبق ضابطه‌ی بی‌نهایت کوچک ناوردایی بایستی

$$0 = pr^{(2)}\mathbf{v}(u_t - u_{xx})|_{u_t - u_{xx}=0} = (\phi^t - \phi^{xx})|_{u_t-u_{xx}=0}, \tag{۲۱.۲}$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \phi^t &= D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\ &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\
&= \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{xx} &= D_x\phi^x - u_{xx}D_x\xi - u_{xt}D_x\tau \\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t \\
&\quad -\xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} \\
&\quad -\tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

طبق (۲۱.۲)، و رابطه‌ی محاسبه شده برای ϕ^t و ϕ^{xx} بایستی

$$\begin{aligned}
0 = \;& \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 - \phi_{xx} - (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\
& +\tau_{xx}u_t - (\phi_{uu} + 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_t + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_t \\
& -(\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

که در آن با جایگزین کردن u_t با u_{xx} (چون $u_t = u_{xx}$) داریم:

$$\begin{aligned}
0 = \;& \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \phi_{xx} - (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\
& +\tau_{xx}u_{xx} - (\phi_{uu} + 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_{xx} + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} \\
& -(\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

در آن ضرایب یک‌جمله‌ای‌های متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم،

$$\begin{array}{rl}
u_x u_{xt} & 0 = 2\tau_u \\
u_{xt} & 0 = 2\tau_x \\
u_{xx}^2 & 0 = \tau - \tau \\
u_x^2 u_{xx} & 0 = \tau_{uu} \\
u_x u_{xx} & 0 = -\xi_u + 2\tau_{xu} + 3\xi_u \\
u_{xx} & 0 = -\tau_t + \tau_{xx} + 2\xi_x \\
u_x^3 & 0 = \xi_{uu} \\
u_x^2 & 0 = 2\xi_{xu} - \phi_{uu} \\
u_x & 0 = \xi_{xx} - \xi_t - 2\phi_{xu} \\
1 & 0 = \phi_t - \phi_{xx}
\end{array}$$

با حل سیستم خطی معادلات دیفرانسیل جزئی قبلی داریم:

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$
$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$
$$\phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t),$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx}$. جبرلی تقارن‌های بی‌نهایت کوچک به وسیله‌ی میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود:

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x,$$
$$\mathbf{v}_2 = \partial_t,$$
$$\mathbf{v}_3 = u\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$
$$\mathbf{v}_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_6 = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,u)\partial_u.$$

هر مولد بی‌نهایت کوچک گروه ۱-پارامتری از تبدیلات تولید می‌کند،

$$G_1 : (x+\varepsilon, t, u),$$
$$G_2 : (x, t+\varepsilon, u),$$
$$G_3 : (x, t, e^\varepsilon, u),$$
$$G_4 : (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u),$$
$$G_5 : (x + 2\varepsilon t, t, u \cdot \exp(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)),$$
$$G_6 : \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t} \right] \right),$$
$$G_\alpha : (x, t, u + \varepsilon\alpha(x,t)).$$

حال فرض می‌کنیم $u(x,t)$ جوابی از معادله‌ی گرما باشد، سپس $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ جواب جدیدی از آن می‌باشد.
گروه ۱-پارامتری

$$G_6 : (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t} \right] \right),$$

را در نظر می‌گیریم. سپس

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) &= u(x,t)\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\\ &= u\left(\frac{\tilde{x}}{1+4\varepsilon\tilde{t}},\frac{\tilde{t}}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right)\frac{\exp\left[\dfrac{-\varepsilon\tilde{x}^2}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{1+4\varepsilon\tilde{t}}},\end{aligned}$$

نیز جوابی از معادله‌ی گرما می‌باشد. قرار می‌دهیم $u=\sqrt{\varepsilon/\pi}$، داریم:

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left[\dfrac{-\varepsilon\tilde{x}^2}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+4\varepsilon\tilde{t}}}.$$

$\tilde{t}$ را با $-1/4\varepsilon$ (با استفاده از G_2) جایگزین می‌کنیم، بنابراین

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{t}}}\exp\left[\frac{-\tilde{x}^2}{4\tilde{t}}\right],\qquad t\geq 0,$$

که جواب اساسی معادله‌ی گرما می‌باشد.

فصل ۳

اصل برهم‌نهی غیرخطی و روش وی - نورمن

۱.۳ اصل برهم‌نهی غیرخطی

در این فصل مسئله‌ی کاهش یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به معادله دیفرانسیل ریکاتی مرتبه اول، در ادامه روشی را که توسط وی - نورمن برای تعیین جواب‌های یک معادله دیفرانسیلی در یک گروه لی توسعه داده شده بود،بیان شده است.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{d^{۲}u}{dt^{۲}} + b(t)\frac{du}{dt} + c(t)u = ۰ \tag{۱.۳}$$

خاصیت خطی بودن باعث می‌شود که میدان برداری

$$X = u\frac{\partial}{\partial u}$$

یک گروه لی ۱-پارامتری از تقارن‌های نقطه‌ای معادله (۱.۳) به صورت زیر تولید می‌کند

$$\exp(\varepsilon X)(t,u) = (\tilde{t},\tilde{u}) \Longrightarrow G : (t, e^{\epsilon}u)$$

که G گروه تقارن نقطه‌ای می‌باشد. بنابراین

$$\bar{t}(\epsilon) = t, \qquad \bar{u}(\epsilon) = e^{\epsilon}u.$$

با تغییر مختصات u به $v = \phi(u)$ میدان برداری

$$X = u\frac{\partial}{\partial u}$$

طبق قضیه (۱۰.۲.۱) به

$$X = \frac{\partial}{\partial v}$$

تبدیل می‌شود. بنابراین معادله $Xv = ۱$ به معادله $v = \log u$ منجر می‌شود، در نتیجه $u = e^{v}$ پس

$$\frac{du}{dt} = e^{v}\frac{dv}{dt} = u\frac{dv}{dt}. \tag{۲.۳}$$

حال اگر مختصات جدید را در معادله (۱.۳) بنویسیم، آنگاه

$$(\frac{dv}{dt})^{۲}e^{v} + \frac{d^{۲}v}{dt^{۲}}e^{v} + b(t)\frac{dv}{dt}e^{v} + c(t)e^{v} = ۰$$
$$\frac{d^{۲}v}{dt^{۲}} + b(t)\frac{dv}{dt} + (\frac{dv}{dt})^{۲} + c(t) = ۰$$

تابع مجهول v در معادله قبلی ظاهر نشده بنابراین اگر با تغییر متغیر $x = \frac{dv}{dt}$ مرتبه معادله را کاهش دهیم، آنگاه معادله ریکاتی زیر را به دست می‌آوریم.

$$\frac{dx}{dt} = -c - bx - x^{۲} \tag{۳.۳}$$

که در[۱۴] اشاره شده است. بنابراین با توجه به رابطه (۲.۳) داریم :

$$\frac{du}{dt}=u\frac{dv}{dt}$$

$$x=\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \tag{۴.۳}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل (۱.۳) با معادله دیفرانسیل (۳.۳) و (۴.۳) برابر است.

برهان. اگر از رابطه (۴.۳) نسبت به t مشتق بگیریم

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{-du}{dt}}{u^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}$$

و در معادله (۳.۳) جایگذاری شود، آنگاه داریم:

$$\frac{\frac{-du}{dt}}{u^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{b}{u}\frac{du}{dt}+\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{dt^2}+c=0$$

در نتیجه:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+b(t)\frac{du}{dt}+c(t)u=0.$$

□

از دیدگاه هندسی معادله ریکاتی را می‌توان به عنوان یک خم انتگرال از چند میدان برداری وابسته تعیین کرد.

$$\Gamma=\left(a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

که این میدان برداری را به صورت ترکیب خطی از چند ضرایب وابسته از میدان‌های برداری زیر نوشت.

$$L_0=\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_1=x\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_2=x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

که با رابطه‌های تعریف شده زیر

$$\begin{aligned}[L_0,L_1]=&[\partial x,x\partial x]=(\partial x)(x\partial x)-(x\partial x)(\partial x)=\partial x=L_0\\ [L_0,L_2]=&[\partial x,x^2\partial x]=(\partial x)(x^2\partial x)-(x^2\partial x)(\partial x)=2x\partial x=2L_1\\ [L_1,L_2]=&[x\partial x,x^2\partial x]=(x\partial x)(x^2\partial x)-(x^2\partial x)(x\partial x)=2x^2\partial x-x^2\partial x=x^2\partial x=L_2\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

جبر لی سه بعدی تولید می‌کند. بنابراین با $\mathrm{sl}(2,\mathrm{R})$ ایزومورفیسم است.

مثال ۱.۱.۳. گروه‌های لی ثابت شده در بالا به طور دقیق جبرهای لی با بعد متناهی از میدان‌های برداری روی خط حقیقی $M=\mathbb{R}$ هستند.که اینها عبارتند از:

(۱) جبر تولید شده توسط ∂_x: که این یک عمل از $\mathbb{R}$ روی M به عنوان گروه ۱-پارامتری از انتقال تولید می‌کند: $x\mapsto x+\epsilon$

(۲) جبر لی دو بعدی تولید شده توسط ∂_x و $x\partial_x$ که دو میدان برداری گروه انبساط $x \mapsto \lambda x$ را تولید می‌کند، توجه کنید که:

$$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x$$

بنابراین این جبر لی با جبر لی ماتریس های ۲×۲ تولید شده توسط

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

ایزومورفیسم است. و این گروه لی همه ماتریس‌های بالا مثلثی به فرم

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad \alpha > ۰$$

را که عمل متشابه روی $\mathbb{R}$ به صورت $x \mapsto \alpha x + \beta$ است را تولید می‌کند.

(۳) جبرهای سه بعدی تولید شده توسط

$$v_۱ = \partial_x, \qquad v_۲ = x\partial_x, \qquad v_۳ = x^۲\partial_x,$$

سومین میدان برداری گروه موضعی از وارونه‌سازی تولید می‌شود.

$$x \mapsto \frac{x}{۱ - \epsilon x}, \qquad |\epsilon| < \frac{۱}{x}.$$

جدول جابجاگر برای این جبر لی به صورت زیر می‌باشد:

	$v_۱$	$v_۲$	$v_۳$
$v_۱$	۰	$v_۱$	$۲v_۲$
$v_۲$	$-v_۱$	۰	$v_۳$
$v_۳$	$-۲v_۲$	$-v_۳$	۰

اگر ما $v_۳$ با $-v_۳ = -x^۲\partial_x$ جایگزین کنیم آنگاه جدول جابجاگر یکسان مانند $\mathrm{SL}(۲)$ با پایه‌ها

$$A_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad A_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \qquad A_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

به دست می‌آید. بنابراین یک عمل موضعی از گروه خطی ویژه $\mathrm{SL}(۲)$ روی خط حقیقی با

$$\partial_x, \qquad x\partial_x, \qquad -x^۲\partial_x$$

وجود دارد که مانند مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل می‌کنند. این عمل گروه مانند عمل گروه تصویری

$$x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(۲),$$

از تبدیلات خطی است.

مثال ۲.۱.۳.

$$\psi : SL(۲) \times R \longrightarrow R$$

$$\Psi_x : SL(۲) \longrightarrow R$$

با ضابطه

$$\psi_x \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

$$\begin{aligned} d\Psi_x(A_۱ \mid_{I_۲}) &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x(I_۲ + A_۱ t) \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & t \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x \begin{pmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \frac{x+t}{۰+۱} = ۱ \equiv \partial_x \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} d\Psi_x(A_۲ \mid_{I_۲}) &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x(I_۲ + A_۲ t) \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & ۰ \\ ۰ & -t \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \Psi_x \begin{pmatrix} ۱+t & ۰ \\ ۰ & ۱-t \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \mid_{t=۰} \frac{tx+x}{-t+۱} = ۲x \equiv x\partial_x \end{aligned}$$

روش به دست آوردن $-x^۲\partial_x$ به همین صورت می‌باشد.

۲.۳ روش وی - نورمن

تعریف ۱.۲.۳. دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = X^i(x,t), \qquad i = ۱, \ldots, n, \tag{۶.۳}$$

در نظر بگیرید که جواب‌های آن به صورت خم‌های انتگرال از میدان برداری به صورت زیر می‌باشد.

$$X = X^i(x,t)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۷.۳}$$

طبق وجود و یکتایی جواب‌های معادله دیفرانسیل برای مقدار کوچک t یک نگاشت Φ_t با شرایط اولیه $x(۰) = (x^i(۰))$ وجود دارد. و توابع f در همسایگی $x(۰)$ تعریف شده است که :

$$[U(t)f](x) = f\left(\Phi_t^{-۱}(x)\right)$$

وقتی نسبت به t مشتق بگیریم :

$$\begin{aligned}\left[\frac{dU(t)}{dt}f\right](x) =& \frac{d}{dt}\left((fo\Phi_t^{-1})(x)\right) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi_t^{-1}(x))\\ =& X(f)\left(\Phi_t^{-1}(x)\right) = [U(t)(Xf)](x).\end{aligned}$$

این رابطه برای هر تابع مشتق پذیر f قابل قبول است، بنابراین

$$\frac{dU(t)}{dt} = U(t)X.$$

با توجه به [۱۸] یک معادله دیفرانسیل برای عملگرهای X که به صورت ترکیب خطی از میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد،

$$X = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)L_k,$$

مثال ۲.۲.۳.

$$\frac{dU(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)U(t)L_k, \tag{۸.۳}$$

که L_k یک جبر لی حقیقی با بعد متناهی تولید می‌کند، پس جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد.

$$U(t) = \Pi_{i=1}^{m}\exp(g_i(t)L_i), \tag{۹.۳}$$

که توابع $g_i(t)$ جواب دستگاه به فرم

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(t)L_i = \sum_{i=1}^{m}\dot{g}_i(t)\left[\Pi_{j=i+1}^{m}\exp(-g_i(t)adL_j)\right]L_i, \tag{۱۰.۳}$$

با شرایط اولیه $g_i(0) = 0, \qquad i = 1,\dots,m.$ هستند.

این روش پیشنهاد شده توسط وی - نورمن را می‌توان برای معادله ریکارتی استفاده کرد و هم‌چنین دستگاه معادلات دیفرانسیل با درجه بالاتر را نیز حل کنیم، در حقیقت معادله دیفرانسیل ریکارتی در اینجا می‌تواند یک عملگر $U(t)$ باشد که مقداری در $\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ می‌گیرد و معادله دیفرانسیل

$$\frac{dU(t)}{dt} = U(t)[a_0(t)L_0 + a_1(t)L_1 + a_2(t)L_2], \tag{۱۱.۳}$$

با شرایط اولیه $U(0) = I$ می‌پذیرد، که میدان‌های برداری L_k برای $k = 0, 1, 2$ میدان‌های برداری وابسته به عمل چپ از $\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ هستند که روی خط حقیقی R توسعه یافتند و جبر لی ایزومورفیسم با $\mathrm{sl}(2,\mathrm{R})$ تولید می‌کند.

مثال ۳.۲.۳. برطبق روش وی - نورمن [۱۸] توابع $u_0(t), u_1(t), u_2(t)$ وجود دارد به طوری‌که
$$u_0(0) = u_1(0) = u_2(0) = 0$$
و
$$U(t) = \exp(u_1 L_1)\exp(u_2 L_2)\exp(u_0 L_0) \tag{۱۲.۳}$$
بنابراین با استفاده از رابطه (۱۰.۳) داریم :
$$\begin{aligned}
a_0(t)L_0 + a_1(t)L_1 + a_2(t)L_2 =& \dot{u}_1(t)\exp(-u_0(t)adL_0)\exp(-u_2(t)adL_2)L_1\\
&+\dot{u}_2(t)\exp(-u_0(t)adL_0)L_2 + \dot{u}_0(t)L_0\\
=&\dot{u}_1(L_1 - u_0L_0 + u_2L_2 - 2u_0u_2L_1 + u_0^2u_2L_0)\\
&+\dot{u}_2(L_2 - 2u_0L_1 + u_0^2L_0) + \dot{u}_0L_0\\
=&(-u_0\dot{u}_1 + u_0^2u_2\dot{u}_1 + u_0^2\dot{u}_2 + \dot{u}_0)L_0\\
&+(\dot{u}_1 - 2u_0u_2\dot{u}_1 - 2u_0\dot{u}_2)L_1 + (u_2\dot{u}_1 + \dot{u}_2)L_2
\end{aligned}$$
بنابراین دستگاهی از معادلات دیفرانسیل برای توابع u_i به صورت زیر به دست می‌آید.
$$a_0(t) = - u_0\dot{u}_1 + u_0^2u_2\dot{u}_1 + u_0^2\dot{u}_2 + \dot{u}_0 \tag{۱۳.۳}$$
$$a_1(t) = \dot{u}_1 - 2u_0u_2\dot{u}_1 - 2u_0\dot{u}_2 \tag{۱۴.۳}$$
$$a_2(t) = u_2\dot{u}_1 + \dot{u}_2 \tag{۱۵.۳}$$
که آن را می‌توان به فرم نرمال زیر نوشت:
$$\begin{aligned}
\dot{u}_0 =& a_0(t) + u_0\dot{u}_1 - u_0^2u_2\dot{u}_1 - u_0^2\dot{u}_2\\
=& a_0(t) + u_0(\dot{u}_1 - 2u_0u_2\dot{u}_1 + u_0u_2\dot{u}_1 - 2u_0\dot{u}_2 + u_0\dot{u}_2)\\
=& a_0(t) + u_0(\dot{u}_1 - 2u_0u_2\dot{u}_1 - 2u_0\dot{u}_2) + u_0^2(u_2\dot{u}_1 + \dot{u}_2)\\
=& a_0(t) + a_1(t)u_0(t) + a_2(t)u_0^2(t)\\
\dot{u}_1 =& a_1(t) + 2u_0u_2\dot{u}_1 + 2u_0\dot{u}_2\\
=& a_1(t) + 2u_0(u_2\dot{u}_1 + \dot{u}_2)\\
=& a_1(t) + 2a_2(t)u_0(t)\\
\dot{u}_2 =& a_2(t) - u_2\dot{u}_1 + 2u_0u_2^2\dot{u}_1 + 2u_0u_2\dot{u}_2 - 2u_0u_2^2\dot{u}_1 - 2u_0u_2\dot{u}_2\\
=& a_2(t) - a_1(t)u_2 - 2u_0u_2(u_2\dot{u}_1 + \dot{u}_2)\\
=& a_2(t) - a_1(t)u_2(t) - 2a_2(t)u_0(t)u_2(t)
\end{aligned}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(t) &= a_0(t) + a_1(t)u_0(t) + a_2(t)u_0^2(t) \\ \dot{u}_1(t) &= a_1(t) + 2a_2(t)u_0(t) \\ \dot{u}_2(t) &= a_2(t) - a_1(t)u_2(t) - 2a_2(t)u_0(t)u_2(t) \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

یکی از جواب‌های معادله (۱۶.۳) را می‌توان با شرط $u_0(0) = u_1(0) = u_2(0) = 0$ پیدا کرد و جواب عمومی از معادله دیفرانسیل را به شکل

$$x(t) = (U(t)x)(0) = [\exp(u_1L_1)\exp(u_2L_2)\exp(u_0L_0)x]\mid_{t=0}, \tag{۱۷.۳}$$

نوشت. بنابراین

$$x(t) = \frac{e^{u_1}x_0}{1 - u_2e^{u_1}x_0} + u_0 \tag{۱۸.۳}$$

که $x_0 = x(0)$. اگر شرایط اولیه را مستقل استفاده کنیم، آنگاه $(x_1(0) \to \infty, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1)$. بنابراین با توجه به (۱۸.۳) و شرایط اولیه نامبرده در بالا x_1 و x_2 وx_3 را تعیین کرد.

$$x_1(t) = \frac{e^{u_1}x_1}{1 - u_2e^{u_1}x_1} + u_0 = \frac{e^{u_1}}{1 - u_2e^{u_1}} + u_0 = \frac{1}{-u_2(t)} + u_0(t) \tag{۱۹.۳}$$

$$x_2(t) = \frac{e^{u_1}x_2}{1 - u_2e^{u_1}x_2} + u_0 = u_0(t) \tag{۲۰.۳}$$

$$x_3(t) = \frac{e^{u_1}x_3}{1 - u_2e^{u_1}x_3} + u_0 = \frac{e^{u_1}}{1 - u_2e^{u_1}} + u_0 \tag{۲۱.۳}$$

در نتیجه توابع u_0, u_1, u_2 به راحتی از روابط بالا قابل محاسبه است.

$$u_0(t) = x_2(t) \tag{۲۲.۳}$$

با توجه به روابط (۱۹.۳) و (۲۲.۳) داریم :

$$x_1 - x_2 = \frac{-1}{u_2(t)} \Longrightarrow u_2(t) = \frac{-1}{x_1 - x_2} \tag{۲۳.۳}$$

همچنین با توجه به روابط (۲۱.۳) و (۲۲.۳) و (۲۳.۳) خواهیم داشت :

$$x_3(t) - x_2(t) = \frac{e^{u_1(t)}}{1 - \frac{1}{x_2(t) - x_1(t)}e^{u_1(t)}} \Longrightarrow e^{u_1(t)} = \frac{(x_3(t) - x_2(t))(x_2(t) - x_1(t))}{(x_3(t) - x_1(t))}$$

در نتیجه

$$u_1(t) = \log\left[\frac{(x_3(t) - x_2(t))(x_2(t) - x_1(t))}{(x_3(t) - x_1(t))}\right] \tag{۲۴.۳}$$

حالا اگر مقادیر توابع u_0, u_1, u_2 در رابطه (۱۸.۳) جایگذاری کنیم، آنگاه اصل برهم‌نهی

$$x(t) = \frac{x_0 x_1(x_3(t) - x_2(t)) + x_2(t)(x_1(t) - x_3(t))}{x_0(x_3(t) - x_2(t)) + x_1(t) - x_3(t))} \tag{۲۵.۳}$$

برای معادله ریکاتی به دست می‌آید، که به صورت زیر هم نوشته می‌شود.

$$\frac{(x - x_2)(x_3 - x_1)}{(x - x_1)(x_3 - x_2)} = x_0 \tag{۲۶.۳}$$

برای عملگر $U(t)$ فقط فاکتورگیری (۱۲.۳) اتفاق نمی‌افتد بلکه پنج حالت متناوب دیگر نیز وجود دارد که آنها را بیان می‌کنیم.

حالت دوم

$$U(t) = \exp(g_0 L_0)\exp(g_1 L_1)\exp(g_2 L_2)$$

که طبق حالت قبل دستگاه

$$\begin{aligned} \dot{g}_0 &= a_0 e^{-g_1} \\ \dot{g}_1 &= a_1 - 2a_0 g_2 \\ \dot{g}_2 &= a_2 - a_1 g_2 + a_0 g_2^2, \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

با شرایط $g_0(0) = g_1(0) = g_2(0) = 0$ به وجود می‌آید، بنابراین جواب عمومی آن به صورت

$$x(t) = \frac{e^{g_1}(x_0 + g_0)}{1 - g_2 e^{g_1}(x_0 + g_0)} \tag{۲۸.۳}$$

می‌باشد، که با توجه به شرایط اولیه($x_1(0) \to \infty, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1$) و (۲۸.۳)مقادیر x_1, x_2, x_3 به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{e^{g_1}}{-g_2 e^{g_1}} = \frac{-1}{g_2} \\ x_2(t) &= \frac{g_0 e^{g_1}}{1 - g_0 g_2 e^{g_1}} \\ x_3(t) &= \frac{e^{g_1}(1 + g_0)}{1 - g_2 e^{g_1}(1 + g_0)} \end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

بنابراین به راحتی مقادیر g_0, g_1, g_2 قابل محاسبه است. با توجه به معادله اول رابطه (۲۹.۳)

$$g_2 = \frac{-1}{x_1} \tag{۳۰.۳}$$

با توجه به معادله دوم رابطه (۲۹.۳) و (۳۰.۳) داریم :

$$
\begin{aligned}
&x_2 + \frac{x_2}{x_1} + g_0 e^{g_1} = g_0 e^{g_1} \\
&\Rightarrow g_0 e^{g_1} = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} \\
&x_3(t) = \frac{e^{g_1}(1+g_0)}{1 - g_2 e^{g_1}(1+g_0)} \Longrightarrow x_3 + \frac{x_3}{x_1} e^{g_1} + \frac{x_2 x_3}{x_1 - x_2} = e^{g_1} + \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} \\
&\Rightarrow x_3 - \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_3}{x_1} e^{g_1} \\
&\Rightarrow e^{g_1} = \frac{x_1^2 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
g_1 = \log\left[\frac{x_1^2 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\right] \tag{۳۱.۳}
$$

داشتیم $g_0 e^{g_1} = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}$ بنابراین

$$
g_0 = \frac{\frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}}{e^{g_1}} = \frac{x_2 (x_1 - x_3)}{x_1 (x_3 - x_2)} \tag{۳۲.۳}
$$

همان طور که می‌بینیم معادله سوم (۲۷.۳) یک معادله ریکاتی جدید است، اگر جواب این معادله را در معادله دوم قرار دهیم، مقدار g_1 به دست می‌آید. همچنین اگر مقدار g_1 را معادله اول جایگذاری کنیم، g_0 نیز به دست می‌آید. بنابراین این نتیجه را می‌گیریم که اگر یک جواب از معادله را داشته باشیم، توسط آن می‌توانیم بقیه جواب‌ها را به دست آوریم، در نهایت جواب عمومی به راحتی قابل محاسبه است.

حالت سوم

$$
U(t) = \exp(h_2 L_2)\exp(h_1 L_1)\exp(h_0 L_0) \tag{۳۳.۳}
$$

که طبق حالت‌های قبل دستگاه

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_0 &= a_0 + a_1 h_0 + a_2 h_0^2 \\
\dot{h}_1 &= a_1 - 2 a_2 h_0 \\
\dot{h}_2 &= a_2 e^{h_1}
\end{aligned} \tag{۳۴.۳}
$$

و جواب عمومی

$$
x(t) = \frac{e^{h_1} x_0}{1 - h_2 x_0} + h_0 \tag{۳۵.۳}
$$

به دست می‌آید، بنابراین با توجه به شرایط اولیه و (۳۵.۳) داریم :

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \frac{-e^{h_1}}{h_2} + h_0 \\ x_2(t) =& h_0 \\ x_3(t) =& \frac{e^{h_1}}{1-h_2} + h_0 \end{aligned} \tag{۳۶.۳}$$

در نتیجه مقادیر h_0, h_1, h_2 با توجه به روابط (۳۶.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$h_0 = x_2(t) \tag{۳۷.۳}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) =& \frac{-e^{h_1}}{h_2} \Longrightarrow (x_2(t) - x_1(t))h_2 = e^{h_1} \\ x_3(t) - x_2(t) =& \frac{e^{h_1}}{1-h_2} \Longrightarrow (x_3(t) - x_2(t))(1-h_2) \\ \Rightarrow& (x_2(t) - x_1(t))h_2 = (x_3(t) - x_2(t))(1-h_2) \\ \Rightarrow& \frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_3(t) - x_2(t)} = \frac{1}{h_2} - 1 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$h_2 = \frac{x_2(t) - x_3(t)}{x_1(t) - x_3(t)} \tag{۳۸.۳}$$

داشتیم، $e^{h_1} = (x_2(t) - x_1(t))h_2$ پس

$$h_1 = \log\left[\frac{(x_3(t) - x_2(t))(x_2(t) - x_1(t))}{(x_3(t) - x_1(t))}\right] \tag{۳۹.۳}$$

توجه داشته باشید که در این حالت معادله اول (۳۴.۳) معادله ریکاتی است که اگر جواب آن را در معادله دوم جایگذاری کنیم مقدار h_1 به دست می‌آید، به همین ترتیب اگر مقدار h_1 را در معادله سوم قرار داده شود مقدار h_2 به دست می‌آید.

حالت چهارم)

$$U(t) = \exp(f_1 L_1)\exp(f_0 L_0)\exp(f_2 L_2), \tag{۴۰.۳}$$

که دستگاه

$$\begin{aligned} \dot{f}_0 =& a_0 + a_1 f_0 - 2a_0 f_0 f_2 \\ \dot{f}_1 =& a_1 - 2a_0 f_2 \\ \dot{f}_2 =& a_2 - a_1 f_2 + a_0 f_2^2, \end{aligned} \tag{۴۱.۳}$$

جواب عمومی آن

$$x(t)=\frac{e^{f_1}x_0+f_0}{1-f_2(e^{f_1}x_0+f_0)}. \qquad (۴۲.۳)$$

می‌باشد، بنابراین با توجه به رابطه (۴۲.۳) و شرایط اولیه داریم :

$$x_1(t)=\frac{e^{f_1}x_1+f_0}{1-f_2(e^{f_1}x_1+f_0)}$$

چون $x_1 \longrightarrow \infty$ پس

$$x_1(t)=\frac{e^{f_1}}{-f_2e^{f_1}} \Longrightarrow x_1(t)=\frac{-1}{f_2} \qquad (۴۳.۳)$$

هم‌چنین

$$x_2(t)=\frac{e^{f_1}x_2+f_0}{1-f_2(e^{f_1}x_2+f_0)}$$

چون $x_2(0)=0$ بنابراین

$$x_2(t)=\frac{f_0}{1-f_2f_0} \qquad (۴۴.۳)$$

هم‌چنین

$$x_3(t)=\frac{e^{f_1}x_3+f_0}{1-f_2(e^{f_1}x_3+f_0)}$$

چون $x_3(0)=1$ در نتیجه

$$x_3(t)=\frac{e^{f_1}+f_0}{1-f_2(e^{f_1}+f_0)} \qquad (۴۵.۳)$$

حال مقادیر f_0, f_1, f_2 با توجه به روابط بالا به راحتی قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}
f_2 =&\frac{-1}{x_1}\\
x_2(t) =&\frac{f_0}{1-f_2f_0} \Longrightarrow x_2(1+\frac{1}{x_1}f_0)=f_0 \Longrightarrow x_2=(1-\frac{x_2}{x_1})f_0\\
\Rightarrow& f_0=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}\\
x_3(t) =&\frac{e^{f_1}x_3+f_0}{1-f_2(e^{f_1}x_3+f_0)} \Longrightarrow x_3(t)\left(1+\frac{1}{x_1}\left(e^{f_1}+\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}\right)\right)=e^{f_1}+\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}\\
\Rightarrow& x_3(t)+\frac{x_3}{x_1}e^{f_1}+\frac{x_3x_2}{x_1-x_2}=e^{f_1}+\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}\\
\Rightarrow&\frac{x_3(x_1-x_2)+x_2(x_3-x_1)}{(x_1-x_2)}=\frac{(x_1-x_3)}{x_1}e^{f_1}\\
\Rightarrow& e^{f_1}=\frac{x_1^2(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
f_1 =&\log\left[\frac{x_1^2(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right]
\end{aligned}$$

همان طور که می‌بینیم معادله سوم در رابطه (۴۱.۳) برای f_2 مثل حالت دوم می‌باشد.

حالت پنجم)

$$U(t) = \exp(v_0 L_0)\exp(v_2 L_2)\exp(v_1 L_1) \tag{۴۶.۳}$$

در این صورت نیز مثل حالت اول دستگاه آن به صورت

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= a_0 e^{-v_1}\\ \dot{v}_1 &= a_1 - 2a_0 v_2 e^{-v_1}\\ \dot{v}_2 &= a_2 e^{v_1} - a_0 v_2^2 e^{-v_1}\end{aligned} \tag{۴۷.۳}$$

و جواب عمومی آن نیز به صورت

$$x(t) = \frac{e^{v_1}(x_0 + v_0)}{1 - v_2(x_0 + v_0)}, \tag{۴۸.۳}$$

می‌باشد، بنابراین با توجه به رابطه (۴۸.۳) و شرایط اولیه مقادیر x_1, x_2, x_3 به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$x_1(t) = \frac{e^{v_1}(x_1 + v_0)}{1 - v_2(x_1 + v_0)}$$

چون $x_1 \longrightarrow \infty$ پس

$$x_1(t) = \frac{e^{v_1} v_0}{-v_2 v_0} \Longrightarrow x_1(t) = \frac{e^{v_1}}{-v_2} \tag{۴۹.۳}$$

همچنین $x_2(0) = 0$ بنابراین

$$x_2(t) = \frac{e^{v_1}(x_2 + v_0)}{1 - v_2(x_2 + v_0)} \Longrightarrow x_2(t) = \frac{e^{v_1} v_0}{1 - v_2 v_0} \tag{۵۰.۳}$$

چون $x_3(0) = 1$ پس

$$x_3(t) = \frac{e^{v_1}(x_3 + v_0)}{1 - v_2(x_3 + v_0)} \Longrightarrow x_3(t) = \frac{e^{v_1}(1 + v_0)}{1 - v_2(1 + v_0)} \tag{۵۱.۳}$$

بنابراین با توجه به (۴۹.۳) و (۵۰.۳) و (۵۱.۳) داریم :

$$
\begin{aligned}
e^{v_1} &= -x_1 v_2 \\
x_2 &= \frac{e^{v_1} v_0}{1 - v_2 v_0} \Longrightarrow x_2 - x_2 v_2 v_0 = -x_1 v_2 v_0 \\
&\Rightarrow x_2 = (x_2 - x_1) v_2 v_0 \Longrightarrow v_2 v_0 = \frac{x_2}{(x_2 - x_1)} \\
x_3 &= \frac{e^{v_1}(1 + v_0)}{1 - v_2(1 + v_0)} \Longrightarrow x_3 - x_3 v_2 - x_3 v_2 v_0 = -x_1 v_2 - x_1 v_2 v_0 \\
&\Rightarrow x_3 + (x_1 - x_3) v_2 = (x_3 - x_1) \frac{x_2}{(x_2 - x_1)} \\
&\Rightarrow v_2 = \frac{-(x_2 - x_3) x_1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)} \\
&\Rightarrow e^{v_1} = x_1 \frac{(x_2 - x_3) x_1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)} \Longrightarrow v_1 = \log\left[\frac{x_1^2 (x_2 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}\right] \\
&\Rightarrow v_2 v_0 = \frac{x_2}{(x_2 - x_1)} \Longrightarrow v_0 = \frac{(x_3 - x_1) x_2}{(x_2 - x_3) x_1}
\end{aligned}
$$

حالت ششم

$$U(t) = \exp(w_2 L_2) \exp(w_0 L_0) \exp(w_1 L_1) \tag{۵۲.۳}$$

مثل حالت‌های قبل داریم :

$$
\begin{aligned}
\dot{w}_0 &= a_0 e^{-w_1} - a_2 w_0^2 e^{w_1} \\
\dot{w}_1 &= a_1 + 2 a_2 w_0 e^{w_1} \\
\dot{w}_2 &= a_2 e^{w_1}
\end{aligned} \tag{۵۳.۳}
$$

و جواب عمومی آن به صورت

$$x(t) = \frac{e^{w_1} x_0}{1 - w_2 x_0} + w_0 e^{w_1} \tag{۵۴.۳}$$

است، با توجه به شرایط اولیه و رابطه (۵۴.۳) داریم :

$$x_1(t) = \frac{e^{w_1} x_1}{1 - w_2 x_1} + w_0 e^{w_1}$$

چون $x_1 \longrightarrow \infty$ پس

$$x_1(t) = \frac{e^{w_1}}{1 - w_2} + w_0 e^{w_1} \tag{۵۵.۳}$$

همچنین $x_2(0) = 0$ بنابراین

$$x_2(t) = \frac{e^{w_1} x_2}{1 - w_2 x_2} + w_0 e^{w_1} \Longrightarrow x_2(t) = w_0 e^{w_1} \tag{۵۶.۳}$$

چون $x_3(0) = 1$ پس

$$x_3(t) = \frac{e^{w_1} x_3}{1 - w_2 x_3} + w_0 e^{w_1} \Longrightarrow x_3(t) = \frac{e^{w_1}}{1 - w_2} + w_0 e^{w_1} \tag{۵۷.۳}$$

در نتیجه با توجه به مقادیر x_1, x_2, x_3 داریم :

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 =& \frac{-e^{w_1}}{w_2} \Longrightarrow e^{w_1} = (x_2 - x_1) w_2 \\
\Rightarrow& (x_3 - x_2)(1 - w_2) = e^{w_1} \\
\Rightarrow& (x_3 - x_2)(1 - w_2) = (x_2 - x_1) w_2 \Longrightarrow w_2 = \frac{(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)} \\
\Rightarrow& e^{w_1} = (x_2 - x_1) w_2 \Longrightarrow w_1 = \log\left[\frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)}\right] \\
\Rightarrow& x_2(t) = w_0 e^{w_1} \Longrightarrow w_0 = \frac{x_2(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}
\end{aligned}$$

همان طور که می‌بینیم در دو حالت آخر معادله دیفرانسیل جدایی ناپذیر از نوع معادله ریکاتی نیست، که یک جواب معادله را پیدا کنیم و توسط آن جواب، به توانیم بقیه جواب‌ها را به دست آوریم.
بنابراین اگر در معادله سوم (۴۷.۳) $\phi(t) = \dot{v}_1$ تعریف کنیم، آنگاه معادله ریکاتی

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\phi^2 + q(t)\phi + p(t) \tag{۵۸.۳}$$

با شرط

$$q(t) = \frac{\dot{a}_2}{a_0}, \qquad p(t) = \dot{a}_1 - 2a_0 a_2 - \frac{a_1}{a_0}\dot{a}_2 + \frac{a_1^2}{2} \tag{۵۹.۳}$$

به دست می‌آید. در مورد حالت ششم نیز مشابه این اگر از معادله دوم رابطه (۵۳.۳) مشتق بگیریم و تغییر متغیر $\varphi(t) = \dot{w}_1$ را به کار ببریم، آنگاه معادله ریکاتی

$$\dot{\varphi} = s(t) + r(t)\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 \tag{۶۰.۳}$$

به دست می‌آید، که

$$r(t) = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \qquad s(t) = \dot{a}_1 - \frac{a_1}{a_2}\dot{a}_2 + 2a_0 a_2 - \frac{1}{2}a_1^2. \tag{۶۱.۳}$$

این نتیجه را می‌گیریم که با کاهش دادن مرتبه معادله دیفرانسیل و تعیین کردن یک خم در $\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ که به یک دستگاه معادله دیفرانسیل منجر می‌شود، توانایی پیدا کردن جواب عمومی از معادله را داریم. در نتیجه جواب عمومی از معادله ریکاتی را توسط اصل برهم‌نهی

$$x = \frac{x_0 x_1(x_3 - x_2) + x_2(x_1 - x_3)}{x_0(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3)} \tag{۶۲.۳}$$

می‌بینیم، که $x_\circ$ یک ثابت است. حالا هدف کلی این است که از نو ساختن معادله دیفرانسیل اصلی از اصل برهم‌نهی داده شده چگونه ممکن است. در این مورد معادله ریکاتی اصل برهم‌نهی(۶۲.۳) با

$$x_\circ = \frac{a - cx}{dx - b}$$

معادل است، اگر از معادله قبلی مشتق گرفته و برابر صفر قرار بدهیم، آنگاه

$$\begin{aligned}
&(\dot{a} - \dot{c}x - c\dot{x})(dx - b) - (a - cx)(\dot{d}x + d\dot{x} - \dot{b}) = \circ \\
&\Rightarrow \dot{x} = \frac{(\dot{c}d - c\dot{d})}{(bc - ad)}x^{۲} + \frac{(-\dot{a}d + a\dot{d} + \dot{b}c - b\dot{c})}{(bc - ad)}x + \frac{(\dot{a}b - a\dot{b})}{(bc - ad)},
\end{aligned}$$

یک معادله ریکاتی است.

فصل ۴

اصل برهم‌نهی برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۴ اصل برهم‌نهی

دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x,t), \qquad i = ۱, \dots, n \tag{۱.۴}$$

را در نظر بگیرید. می‌خواهیم توضیح دهیم، که آیا مجموعه$\{x^{(۱)}, \dots, x^{(m)}\}$ از جواب‌های اولیه و تابع $\Phi : \mathbb{R}^{n(m+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری‌که جواب عمومی (۱.۴) به صورت

$$x = \Phi(x^{(۱)}, \dots, x^{(m)}; a_۱, \dots, a_n),$$

بیان شود. $a_n, \dots, a_۱$ ثابت‌هایی هستند، که به شرایط اولیه وابسته است. قبل از اینکه به حالت کلی بپردازیم ملاحظه می‌کنیم، دست کم در این مورد دستگاه،

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

که A یک ماتریس ثابت، دستگاه مستقل خطی است. مشخص می‌کند شار ϕ_t می‌تواند به عنوان یک خم روی گروه $\mathrm{GL(n, \mathbb{R})}$ با $\phi_t(x) = e^{At}x$ بیان شود. شار ایجاب می‌کند

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \phi_t o A$$

که می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از جواب‌ها تعیین شده باشد.

ماتریس $n \times n$، X که ستون‌های آن را مجموعه از جواب‌ها $\{x_۱(t), \dots, x_n(t)\}$ درنظر می‌گیریم که مستقل هستند. پس ماتریسی که از آنها تشکیل می‌گردد معکوس‌پذیر است، در نتیجه

$$X(t) = (x_۱(t), \dots, x_n(t))$$

یک ماتریس وارون‌پذیر است، بنابراین

$$X(t) = e^{tA}X(\circ) \Longrightarrow e^{tA} = X(t)X(\circ)^{-۱}$$

جواب‌های دستگاه اولیه این اجازه را می‌دهد که شار معادله دیفرانسیل مرتبه اول را پیدا کنیم. با هر دستگاه معادله دیفرانسیل خطی روی $\mathbb{R}^n$ می‌توانیم یک معادله روی $\mathrm{GL(n, \mathbb{R})}$ توسط

$$\dot{g} = gA$$

یا

$$g^{-۱}\frac{dg}{dt} = A$$

که ماتریس A عضوی از $\mathrm{gl}(n, \mathrm{R})$ وابسته کنیم. از این روش پیداکردن جواب می‌توان برای چند دستگاه وابسته

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

استفاده کرد. در این مورد اگر ما مجموعه از جواب‌های اولیه را با $X(t) = (x_۱(t), \ldots, x_n(t))$ نشان دهیم، آنگاه

$$X(t) = R(t, ۰)X(۰) \Longrightarrow R(t, ۰) = X(t)X(۰)^{-۱}$$

می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر دوران در ساختار حفظ شود، آنگاه

$$A(t) = \phi_t^{-۱} o \frac{d\phi_t}{dt}$$

یک زیر جبر معین از $\mathrm{gl}(n, \mathrm{R})$ است. حقیقت امر این است که جواب عمومی توسط عملگر خطی از مجموعه جواب‌های اولیه تعیین شده است، و این یک اصل برهم‌نهی خطی است. این بدیهی است که میدان برداری غیرخطی باشد و به خواهیم این امر اتفاق بیافتد، چون دست کم در این مورد واضح است یک نوع اصل برهم‌نهی غیرخطی وجود دارد که توسط لی [۸] اثبات شده است، این اصل برهم‌نهی غیرخطی از تعمیم دادن ترکیب قبلی که عمل از گروه غیرخطی، و $\mathbb{R}^n$ برای منیفلد M جایگزین شده است.

در حالت کلی از دستگاه رابطه (۱.۴)، قضیه برای وجود و یکتایی جواب این قبیل دستگاه‌ها می‌گوید که برای هر مقدار به اندازه کوچک t یک دیفئومورفیسم موضعی از $\mathbb{R}^n$ وجود خواهد داشت، که میان مقادیر اولیه و مقادیر واضح از پارامتر t تناظر نظیر به نظیر برقرار می‌کند.

برای انواع دیگر میدان برداری که توسط خم g_t توصیف شده است، به زیرگروه‌های لی دیگر از دیفئومورفیسم تعلق دارد چون اصل برهم‌نهی غیرخطی قابل تعمیم دادن است.

نتایجی که توسط لی [۸] برقرار می‌کند، این است که دوران کلی با دستگاه (۱.۴) تعریف شده می‌تواند بر حسب m جواب اولیه بیان شده باشد.

مثال ۱.۱.۴. عمل مؤثر گروه لی G با بعد r را روی منیفلد هموار ملاحظه کنید

$$\Phi : G \times M \to M, \qquad \Phi_g : M \to M, \qquad \Phi_x : G \to M,$$

که با نگاشت $\Phi_g(x) = \Phi_x(g) = \Phi(g, x)$ برای $g \in G, x \in M$ نشان داده می‌شود. یک نقطه اولیه $x(۰)$ انتخاب می‌کنیم، و همه خم‌های $g : I \to G$ در گروه را یک خم در منیفلد M با

$$x(t) = \Phi(g(t), x(۰)) = \Phi_{g(t)}(x(۰)) = \Phi_{x(۰)}(g(t)),$$

نشان می‌دهیم. اگر نسبت به t مشتق بگیریم، آنگاه داریم

$$\dot{x}(t) = \Phi_{x(۰)*g(t)}\dot{g}(t).$$

که $\dot{g}(t) \in T_{g(t)}G$ و $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}M$.

اگر $x_۲ = \Phi_g(x_۱)$ باشد، آنگاه

$$\Phi_{x_۲} = \Phi_{x_۱} \circ R_g,$$

که R_g یک انتقال راست در گروه لی G می‌باشد، زیرا برای هر $g \in G$ داریم

$$\Phi_{x_۲}(g') = \Phi(g', x_۲) = \Phi(g', \Phi(g, x_۱)) = \Phi(g'g, x_۱) = (\Phi_{x_۱} \circ R_g)(g').$$

حال با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری داریم

$$\Phi_{x_۲*} = (\Phi_{x_۱*} \circ R_g),$$

بنابراین

$$\Phi_{x_۱*} = (\Phi_{x_۲*} \circ R_{g^{-۱}}),$$

اگر از این رابطه برای $g = g(t)$ و $x_۱ = x(۰)$ استفاده کنیم، آنگاه

$$\dot{x}(t) = \Phi_{x(t)*e}(R_{g^{-۱}(t)*g(t)}\dot{g}(t)).$$

چون $R_{g^{-۱}}$ انتقال از راست $g(t)$ با عنصر همانی $e \in G$ و $\dot{g}(t) \in T_{g(t)}G$ بنابراین

$$R_{g^{-۱}(t)*g(t)}\dot{g}(t) \in T_eG.$$

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنید $\mathbf{v}$ یک میدان برداری رویM و $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد. در مختصات موضعی اگر $\mathbf{v} = \sum \xi^{\mathbf{i}}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}}$ باشد، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}f(\exp(\varepsilon v)x) &= \sum_{i=۱}^{m} \xi^i(\exp(\varepsilon v)x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\varepsilon v)x)\\ &\equiv V(f)[\exp(\varepsilon v)x]\end{aligned}$$

به ویژه در $\varepsilon = ۰$

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=۰} f(\exp(\varepsilon v)x) = \sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = v(f)(x) \qquad (۲.۴)$$

میدان برداری $\mathbf{v}$ به عنوان یک دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول روی تابع حقیقی مقدار $f(x)$ روی M عمل می‌کند .بنابراین با استفاده از قضیه تیلور :

$$f(\exp(\varepsilon v)x) = f(x) + \varepsilon v(f)(x) + o(\varepsilon^۲)$$

بنابراین $v(f)$ تغییر بی‌نهایت کوچک در تابع f تحت شار تولید شده توسط v می‌دهد. با ادامه روند دیفرانسیل‌گیری و جایگزینی در بسط تیلور داریم:

$$f(\exp(\varepsilon v)x) = f(x) + \varepsilon v f(x) + \frac{\varepsilon^۲}{۲}v^۲(f)(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k!}v^k(f)(x) + o(\varepsilon^{k+۱}),$$

که $v^۲(f) = v(v(f)), v^۳(f) = v(v^۲(f))$و ...

علاوه بر این عملگر تعیین شده توسط v خواص اصلی مشتق را دارا است.

۱. خطی بودن:

$$v(f+g) = v(f) + v(g)$$

۲. قاعده لایب‌نیتز:

$$v(fg) = v(f).g + f.v(g)$$

هر مشتق روی فضای توابع هموار در x یک بردار مماس است به ویژه در مختصات موضعی داده شده توسط $\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ این رویکرد اغلب در تعریف بردار مماس و کلاف مماسی در یک روش عاری از مختصات استفاده می‌شود. پس اگر $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی M باشد، آنگاه $\mathbf{v}(\mathbf{f})$ یک تابع هموار برای هر $f: M \to \mathbb{R}$ است، بنابراین می‌توان میدان برداری برای مشتق را تعریف کرد.

مثال ۳.۱.۴. فرض کنید $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{r}$ یک پایه از جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. و

$$[e_\alpha, e_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma,$$

و X_α میدان‌های برداری اولیه در این صورت برای هر تابع مشتق‌پذیر f با توجه به (۲.۴) داریم

$$(X_\alpha f) = \frac{d}{dt}[f(\exp(-te_\alpha)m)] \mid_{t=0},$$

پس

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma,$$

بنابراین با توجه به دستگاه (۱.۴) داریم

$$X(t) = \sum a_\alpha(t) X_\alpha$$

و

$$g^{-1}\frac{dg}{dt} = a_\alpha(t) e_\alpha$$

در این روش دستگاه داده شده با یک دستگاه با بعد بالاتر از معادلات خطی مرتبه اول جایگزین شده است. به عبارت دیگر دستگاه اولیه از معادلات دیفرانسیل را با یک دستگاه جدید روی گروه G جابجا شده است. در این اصل انتخاب حالت‌های مختلف برای خم $g(t)$ وجود دارد به طوری‌که $x_1(t) = \Phi(g(t), x_1(0))$. زیرا به حالت تعادل درآوردن گروه در نقطه $x_1(0)$ ممکن است غیر بدیهی باشد. اگر جواب مشخص $x_2(t)$ را انتخاب کنیم، آنگاه ابهام گروه فصل مشترک نسبت به گروه ایزوتروپی از $x_1(0)$ و $x_2(0)$ را کاهش دادیم. و تا زمانی‌که به یک مجموعه از m جواب‌های مشخص $x_1, \dots, x_m$ برسیم می‌توانیم این روش را تکرار کنیم، البته در اینجا r تا توابع مجهول و mn شرایط داریم که باید $mn \geq r$ باشد. واضح است که مجموعه جواب اولیه دستگاه به صورت $x_1, \dots, x_m$ بیان شده است. به طوری‌که

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Phi(g(t), x_1(0)) \\ \dots &= \dots\dots \\ x_m(t) &= \Phi(g(t), x_m(t)) \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

یک مجموعه مینیمال برای به دست آوردن $g(t)$ از طریق قضیه تابع ضمنی باشد. پس

$$g(t) = \left(F(x_1(t), \dots, x_m(t); x_1(0), \dots, x_m(0)\right),$$

در نتیجه هر جواب دیگر را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$x(t) - \Phi(F(x_1(t), \ldots, x_m(t); x_1(0), \ldots, x_m(0)), x(0)) = 0.$$

بنابراین طرف چپ این رابطه یک ثابت برای حرکت تعریف می‌کند. با عمل $\Phi : G \times M \to M$ کوچکترین عدد صحیح m را می‌یابیم، به طوری‌که گروه ایزوتوپی عمل G روی $M^m = M \times \ldots \times M$ توسعه یافته و با Φ

$$\Phi^m(g, x_1, \ldots, x_m) = (\Phi(g, x_1), \ldots, \Phi(g, x_m)),$$

در عنصر همانی به طوری‌که مختصات‌ها متفاوت هستند کاهش می‌یابد. با یک مثال برای حالت $n = 1$ این روش توضیح داده می‌شود.

مثال ۴.۱.۴. می‌خواهیم یک جبر لی با بعد متناهی و حقیقی برای عملگر دیفرانسیلی

$$X_\alpha = f_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

پیدا کنیم. همان طور که می‌دانیم جبر لی با بعد متناهی و حقیقی میدان های برداری در $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ و زیر جبرهای آن است. پس

$$X_0 = x\frac{\partial}{\partial x}, X_- = \frac{\partial}{\partial x}, X_+ = x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
[X_0, X_-] &= [x\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}] = -\frac{\partial}{\partial x} = -X_- \\
[X_0, X_+] &= [x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}] = x^2\frac{\partial}{\partial x} = X_+ \\
[X_-, X_+] &= [\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}] = 2x\frac{\partial}{\partial x} = 2X_0
\end{aligned}$$

در نتیجه میدان برداری X را می‌توان به صورت ترکیب خطی $X = a_1X_0 + a_2X_+ + a_0X_-$ با توابع حقیقی $a_0 = a_0(t), a_1 = a_1(t), a_2 = a_2(t)$ نوشت.

برای سادگی فرض می‌کنیم که a_2, a_1, a_0 اعداد حقیقی هستند، سپس معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

به دست می‌آوریم، که معادله ریکاتی است. اول دترمینان را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

که مخالف صفر است، در حالی‌که دستگاه $a + bx_1 + cx_1^2 = 0$ و $a + bx_2 + cx_2^2 = 0$ همیشه یک جواب دارد، بنابراین $m = 3$.

اکنون برای به دست آوردن جواب عمومی میدان‌های برداری

$$V_\circ = x\frac{\partial}{\partial x} + x_۱\frac{\partial}{\partial x_۱} + x_۲\frac{\partial}{\partial x_۲} + x_۳\frac{\partial}{\partial x_۳},$$
$$V_- = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_۱} + \frac{\partial}{\partial x_۲} + \frac{\partial}{\partial x_۳},$$
$$V_+ = x^۲\frac{\partial}{\partial x} + x_۱^۲\frac{\partial}{\partial x_۱} + x_۲^۲\frac{\partial}{\partial x_۲} + x_۳^۲\frac{\partial}{\partial x_۳}$$

و جواب را از دستگاه

$$V_\circ f = V_+ f = V_- f = \circ$$

به دست می‌آوریم. این دستگاه از معادلات دیفرانسیل جزئی انتگرال‌پذیر است، زیرا میدان برداری $V_\circ$ و V_- و V_+ یک جبر لی بسته است، بنابراین آنها توزیع انتگرال‌پذیر تعریف می‌کند.

با توجه به دستگاه $V_- f = \circ$ اگر **سیستم مشخصه** آن را بنویسیم

$$\frac{dx}{۱} = \frac{dx_۱}{۱} = \frac{dx_۲}{۱} = \frac{dx_۳}{۱}$$

حال با انتگرال‌گیری داریم

$$u_۱ = x - x_۱, \qquad u_۲ = x_۱ - x_۲, \qquad u_۳ = x_۲ - x_۳,$$

اگر $f(x, x_۱, x_۲, x_۳) = \varphi(u_۱, u_۲, u_۳)$ شرایط $V_\circ f = \circ$ را می‌توان به صورت

$$u_۱\frac{\partial\varphi}{\partial u_۱} + u_۲\frac{\partial\varphi}{\partial u_۲} + u_۳\frac{\partial\varphi}{\partial u_۳} = \circ,$$

نوشت. بنابراین سیستم مشخصه آن

$$\frac{du_۱}{u_۱} = \frac{du_۲}{u_۲} = \frac{du_۳}{u_۳}$$

است. در نتیجه

$$v_۱ = \frac{u_۱}{u_۲}, \qquad v_۲ = \frac{u_۳}{u_۲}, \qquad \varphi(u_۱, u_۲, u_۳) = \phi(v_۱, v_۲),$$

سرانجام شرایط $V_+ f = \circ$ می‌توان به صورت

$$v_۱(v_۱ + ۱)\frac{\partial\phi}{\partial v_۱} - v_۲(v_۲ + ۱)\frac{\partial\phi}{\partial v_۲} = \circ.$$

بنابراین سیستم مشخصه آن

$$\frac{dv_۱}{v_۱(v_۱ + ۱)} = -\frac{dv_۲}{v_۲(v_۲ + ۱)}$$

داریم

$$\int \frac{d\xi}{\xi(\xi + ۱)} = \log\frac{\xi}{\xi + ۱}$$

پس ثابت‌های حرکت f را به دست می‌آوریم، که تابعی از

$$\zeta = \frac{v_۱}{(v_۱+۱)}\frac{v_۲}{(v_۲+۱)},$$

است، در نتیجه

$$\frac{(x-x_۱)(x_۲-x_۳)}{(x-x_۲)(x_۱-x_۳)} = c$$

پس یک اصل برهم‌نهی غیرخطی فراهم کردیم، اگر $x(t)$ را به عنوان یک تابع از سه جواب مستقل در نظر بگیریم داریم

$$x = \frac{(x_۱-x_۳)x_۲c + x_۱(x_۳-x_۲)}{(x_۱-x_۳)c + (x_۳-x_۲)}.$$

بنابراین برای $n = ۱$ فقط یک معادله دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد که آن معادله ریکاتی است.

مراجع

[1] Carinena J.F., Marmo G., nasarre J., *The non-linear superposition principle and the Wei-Norman method* , J. Math. Phys. 1-17 (1998).

[2] Dattoli G., Gallardo J.C. and Torre A., *An algebraic view to Operatorial Ordering and ItsApplications to Optics* , Riv. Nuovo Cim. 11, 1-79(1988).

[3] Davis H.T., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover, New York (1962).

[4] Gilmore R., *Lie Groups, Physics, and Geometry* ,univer-sity press, ISBN 978-0-521-88400, 2008.

[5] Lahiri A., Roy P.K. and Bagchi B., *Supersymmetric in Quantum Mechanics* , Int. J. Mod. Phys. A 5,,1383-456 (1990).

[6] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer, Washington, 2002.

[7] Lee, John M., *Riemannian Manifolds*, in: an introduction to curvature, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] Lie S., *Theorie der transfoemationgruppen*, Teubner, Liepzig (1893).

[9] Olver, P.J., *Differential Invariants and Invariant Differential Equations Paper*, U.S.A., 1994.

[10] Olver, P.J., *Differential Invariants Paper*, U.S.A., 1993.

[11] Olver, P.J., Rosenau, p., *Group-Invariant Solutions of Differential Equations*, Siam J. Appl. Math. Vol. 47, No. 2, April 1987.

[12] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1986.

[13] Rosu H.C. and Socorro J., *One parameter family of closed, radiation-filled Friedmann-Robertson-Walker quantum universes* , Phys. Lett. A 223, 28-30 (1996).

[14] Smith D.R., *Decoupling and order reduction via the Riccati tranformation*, SIAM Review 29, 91-113 (1987).

[15] Socorro J. and Rpsu H.C., *Supersymmetric double Darboux method in quantum cosmology, 2nd Mexican School of Gravitation and Mathematical Physics*, Tlaxcala (1996).

[16] Stahlhofen A., *The Riccati equation as comon basis for Supersymmetric Quantum Mechanics and the Factorization method*, Preprint Duke University (1988).

[17] Stahlhofen A. and Bleuler K., *An algebraic form of the Factorization method*, Nuovo Cim. 104 B, 447-65 (1989).

[18] Wei J. and Norman E., *Lie algebraic solution of linear differential equations* , J. Math. Phys. 4, 575- 81 (1963).

[19] Winternitz P., *Lie groups and solutions of nonlinear differential equations, in Non-linear Phenomena*, K.B Wolf Ed., Lecture Nots in Physics 189, Springer-Verlag N.Y (1983) .

[20] Witten E., *Dynamical breaking of Supersymmetric* , Nucl. Phys. B 188, 513-55 (1981).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اساسی	Fundamental
اصل	principle
اطلس	Atlas
افقی	Horizontal
اکیدا	Strictly
امتداد	Prolongation
انتقال	Translation
بعد	Dimension
پس‌کشنده	Pull Back
پیش‌برنده	Push Forward
پیچشی	Involution
تبدیل	Transformation
تکاملی	Evolution
حقیقی مقدار	Real-Valued
دیفرانسیل کامل	Total Differential
دیفئومورفیسم	Diffeomorphism
روش	Method

زیرنمایش، مجموعه جواب .... Subvariety
ساختار هموار .... Smooth Structure
سازگار .... Compatible
سوفوس لی .... Sophus Lie
سیستم مشخصه .... Characteristic System
عملگر .... Operator
غیرخطی .... Non-Linear
فاکتورگیری .... Factorization
فروبنیوس .... Frobenius
فشرده .... Compact
فضای جت، فضای افشانه .... Jet Space
فضای مماس .... Tangent Space
فلو .... Flow
کارت .... Chart
کاهش .... Reduction
کروشه‌ی لی .... Lie Bracket
کلاف مماس .... Tangent Bundle
گروه تقارن .... Symmetry Group
ماکسیمال .... Maximal
منحصر به فرد .... Particular
مستقل .... Independent
مشتق لی .... Lie Derivative
مشخصه .... Characteristic

معادله دیفرانسیل .... Differential Equation

منحنی انتگرال .... Integral Curve

موثر .... Effective

موضعی .... Local

مولد بی‌نهایت کوچک .... Infinitesimal Generator

میدان برداری .... Vector Field

ناوردای دیفرانسیلی .... Differential Invariant

ناوردای راست .... Right Invariant

نگاشت نمایی .... Exponential Map

نیم-منظم .... Semi-Regular

همبند .... Connect

وابسته .... Dependent

وارون‌پذیری .... Invertible

وی - نورمن .... Wei-Norman

یکتایی .... Uniqueness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Atlas	اطلس
Bundle	کلاف
Characteristic System	سیستم مشخصه
Chart	کارت
Compact	فشرده
Compatible	سازگار
Connect	همبند
Dependent	وابسته
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Differential Invariant	ناوردای دیفرانسیلی
Dimension	بعد
Effective	موثر
Evolution	تکاملی
Exponential Map	نگاشت نمایی
Factorization	فاکتورگیری
Flow	فلو

Frobenius .... فروبنیوس

Fundamental .... اساسی

Horizontal .... افقی

Independent .... مستقل

Infinitesimal Generator .... مولد بی‌نهایت کوچک

Integral Curve .... منحنی انتگرال

Invertible .... وارون پذیر

Involution .... پیچشی

Jet Space .... فضای جت، فضای افشانه

Lie Bracket .... کروشه‌ی لی

Lie Derivative .... مشتق لی

Local .... موضعی

Method .... روش

Maximal .... ماکسیمال

Non-linear .... غیرخطی

Operator .... عملگر

Particular .... منحصر به فرد

Prolongation .... امتداد

Principle .... اصل

Push Forward .... پیش‌برنده

Real-Valued .... حقیقی-مقدار

Reduction .... کاهش

Right Invariant .... ناوردای راست

نیم-منظم .... Semi-Regular

گروه تقارن .... Semmetry Group

اکیدا .... Strictly

ساختار هموار .... Smooth Structure

سوفوس لی .... Sophus Lie

زیرنمایش، مجموعه جواب .... Subvariety

گروه تقارن .... Symmetry Group

کلاف مماس .... Tangent Bundle

فضای مماس .... Tangent Space

تبدیل .... Transformation

انتقال .... Translation

یکتایی .... Uniqueness

میدان برداری .... Vector Field

وی - نورمن .... Wei-Norman

Surname: Saeidifar Name: Mahmood

Title: The Non-Linear Superposition Principle And The Wei-Norman Method.

Supervisor: Dr. Reza Hejazi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Differential Geometry

University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 92/06/25 Number of pages: 65

Keywords: Non-Linear Superposition Principle, Riccati Differential Equations, Differential Equations, Symmetry of Differential Equations, Wei-Norman Method

Abstract

In this thesis we try to express a general method for finding the solutions of differential equations by using the non-linear superposition principle and the Wei-Norman method and their usage in differential equations. In Chapter 1, we explain the concepts and basic definitions that are needed. In chapter 2, first we state the definitions of prolongation and then the prolongation of vector fields and group action are described with some examples. Other sections of this chapter include differential invariants definition and some methods for calculating. In chapter 3,we review the problem of reducing a second order linear differential equation to a non-linear Riccati differential equation. In the other sections of this chapter we explain a method developed by Wei and Norman for determining the solutions of a differential equations and we apply the method to study Riccati differential equation. The superposition principle for first order differential equations system is studied in chapter 4.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

The Non-Linear Superposition Principle And The Wei-Norman Method.

Supervisor

Dr. Reza Hejazi

by

Mahmood Saeidifar

92/06/25