



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

توابع همساز ستاره‌گون

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

سید رضا موسوی

پژوهشگر

جمال الدین یار علی

۱۳۹۲/۶/۲۵

نام خانوادگی دانشجو: یارعلی

نام: جمال الدین

عنوان: توابع همساز ستاره گون

استاد راهنما: دکتر احمد زیره
استاد مشاور: سید رضا موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۵
دانشکده علوم ریاضی تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: همساز، توابع ستاره گون ، توابع محدب

چکیده

توابع همساز مختلط مقدار که در دیسک واحد Δ تک ارز و حافظ جهت هستند را می توان به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g در Δ تحلیلی هستند. در این پایان نامه به بررسی شرایط تک ارزی و شرایط ضرایب توابع همساز ستاره گون می پردازیم. همچنین نشان می دهیم که این شرایط ضریبی در صورتی که ضرایب h منفی و ضرایب g مثبت باشند نیز الزامی هستند. سپس به بررسی نقاط فرین و کران های ضرایب این توابع خواهیم پرداخت.

تقدیم به همه‌ی کسانی که

می‌خوانند، بیشتر بدانند.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن این جانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

جمال‌الدین یار علی
۱۳۹۲/۶/۲۵

فهرست مطالب

۱	تعاریف مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۲	۲.۱ رده S	۲
۷	۳.۱ رده S^*	۷
۱۰	۴.۱ رده K	۱۰
۱۴	۵.۱ رده T	۱۴
۱۷	۲ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه α	۱۷
۱۹	۱.۲ زیر رده‌های $S_H^{*\circ}$	۱۹
۲۲	۱.۱.۲ نقاط فرین	۲۲
۲۳	۲.۲ رده $HP(\beta)$	۲۳
۳۰	۳.۲ مرتبه α	۳۰
۳۷	۳ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه مختلط	۳۷
۳۸	۱.۳ مختلط از مرتبه (b, α)	۳۸
۴۵	۲.۳ مرتبه مختلط با توجه به نقاط متقارن	۴۵
۴۹	۳.۳ مرتبه مختلط با توجه به نقاط مزدوج	۴۹
۵۴	مراجع	۵۴
۵۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۵۶

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

تعریف ۱.۱.۱. یک چند جمله‌ای مجموعه‌ای از جملات است که هر جمله به صورت ax^n می‌باشد. به طوری که a ضریب، n توان و x یک متغیر است و همچنین یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط، چند جمله‌ای مختلط نام دارد. بیشترین توان یک چند جمله‌ای مرتبه‌ی آن نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱. هر گاه X و Y دو مجموعه باشند، یک تابع از مجموعه X به مجموعه Y را می‌توان قاعده‌ای تعریف کرد که به هر عضو مجموعه X چون x یک و فقط یک عضو از مجموعه Y چون $f(x)$ را نسبت می‌دهد، تابع f از X به Y را با $f: X \rightarrow Y$ نشان می‌دهیم.

دامنه تابع f که با $dom f$ نمایش داده می‌شود همان مجموعه X است. برد تابع f نیز مجموعه همه عناصری از Y است که تصویر عضوی از X تحت f باشند. برد تابع f را با $ran f$ یا $Im f$ نشان می‌دهیم:

$$ran f = \{y \in Y : \exists x(x \in X \wedge y = f(x))\}$$

تعریف ۳.۱.۱. تابع f را در $\mathbb{C}$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$ ، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ (لم شوارتز). فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M ، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = 0$ صفر مرتبه m تابع $f(z)$ باشد، در این صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m \quad (z \in U_R).$$

همچنین در رابطه فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m$$

که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۶.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ را که در میدان $\mathbb{D}$ تعریف شده است در $\mathbb{D}$ همساز گویند هر گاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام $\mathbb{D}$ در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

ملاحظه ۷.۱.۱. این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u + iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است.

معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۸.۱.۱ (نگاشت ریمان). فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصر به فرد و تک‌ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است. [۱۲، قضیه ۱۱.۱۳]

۲.۱ رده $\mathbb{S}$

توابعی که هم تحلیلی و هم تک‌ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک‌ارز،

که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به تابعی که بر قرص $|z| < 1$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم. و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک‌ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک‌ارز $f(z)$ را می‌توان به $[f(z) - f(0)]/f'(0)$ ، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده تابعی که در محدودیت‌های مذکور صادقند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز بوده و با شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < 1).$$

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathbb{S}$.

ملاحظه ۳.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$ ، می‌نویسیم $z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2}) \log f(z^2)}$ را بی معنی می‌کند.

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم:

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \quad (1.1)$$

(شاخه اصلی $\sqrt{}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$ است. برای اثبات تک‌ارزی، اگر $g(z_1) = g(z_2)$ آنگاه $z_1 \sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2 \sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این صورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ ، یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1 = z_2$ و تک‌ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. اگر $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه $|a_2| \leq 2$. [۱۲، قضیه ۱۲.۳]

مثال ۵.۲.۱. (تابع کوئب). در قضیه ۴.۲.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z^2} = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \quad \text{لذا}$$

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z^2)^2} = z + 2e^{i\alpha} z^2 + 3e^{2i\alpha} z^3 + \dots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱ (پوشش). اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < 1$ که $f(z) \neq c$ ، $c \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

بنا بر قضیه ۴.۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ از طرفی:

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \implies \left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2|$$

و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ ، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم:

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4 \implies |c| \geq \frac{1}{4}$$

□

لم ۷.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|.$$

برهان. چون $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در r داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ ($|z_0| < 1$) تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) = b_0 + b_1z + b_2z^2$ نیز به ازای ($|z| < 1$) تحلیلی و تک‌ارز است، داریم:

$$g(\circ) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(\circ) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1 - |z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست. با توجه به این که تابع $\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \dots$ در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد، لذا بنا بر قضیه ۴.۲.۱، $\frac{b_2}{b_1} \leq 2$ ، یعنی:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1 - |z_0|^2) - 2\overline{z_0} \right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z دلخواه است، قرار می‌دهیم:

$$\left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

یعنی $\frac{z f''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است. لذا:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{z f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

بنا بر لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $\operatorname{Re} \frac{z f''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$ ، یعنی:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r - 4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از r تا r انتگرال می‌گیریم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و لذا داریم

$$\log \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتیجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با $k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ ، لذا کران بالای قضیه ۸.۲.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۲.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه $\circ$ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نا مساوی $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه ۶.۲.۱ مسیر c داخل دایره یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از $\circ$ تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه ۸.۲.۱:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^t \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ ، کران بالای قضیه ۱۰.۲.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱ (Littlewood). اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq en$ [۱۲، قضیه ۱۲.۷]

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < 1$ قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال یابی از 0 تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta \quad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$ لذا از رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود که:

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (3.1)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ که در آن $0 < \theta < \pi$ ، $0 < r < 1$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta. \quad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱)، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ به دست می‌آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد. $\square$

۳.۱ رده $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوئیم هر گاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوئیم هر گاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}^*$ و $|z| < 1$ تصویر D_r و $|z| < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا

می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$ ، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه $w_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه z_1 ای با فرض $|z_1| < 1$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$ داریم:

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه $w_1 \in W$ ها در D_r و همه t ها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است. به عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به طوری که برای t_0 ای، $0 < t_0 < 1$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که تصویرش D_r ، شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد. در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می‌شود.

ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ ، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

$\square$

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه w می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zk'(z)}{k(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم برای $|z| < 1$ ، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است. اگر برای $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 2$ ، [۱۲]، قضیه ۱۰.۱۵.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $1 < |z| < \infty$ ، $f(z) \neq 0$ تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $1 < |z|$ تحلیلی است. لذا می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (6.1)$$

از طرفی برای $1 < |z|$ ، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $Re\{P(z)\} > 0$. بنا بر قضیه ۵.۳.۱ می دانیم

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n\right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه ی زیر می رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا به صورت معادل

$$(k-1)a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (8.1)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به کار برد. لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1)$$

از رابطه فوق در می یابیم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ ، داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در این صورت:

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می باشد. لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. $\square$

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره گون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) نامیده می شود هرگاه:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیر رده $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می دهیم.

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $(0 \leq \alpha < 1)$ ، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in \mathbb{S}^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱ کافی است نشان دهیم $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1 - \alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد.

$$\left| z \frac{f'}{f} - 1 \right| = \left| \frac{z f' - f}{f} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| |z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1 - \alpha$ می باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| \leq (1 - \alpha) \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \right)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است، بنابراین $\square$

۴.۱ ردهی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوئیم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیرردهی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1 و w_2 را در D_r انتخاب می کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0 < t < 1)$ $tw_1 + (1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < r$ موجود هستند به طوری که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\left(\frac{z}{z_2}\right) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به ویژه:

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r \quad (9.1)$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی z_0 در قرص $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$ و بنا بر (۹.۱) نقطه‌ی $f^{-1}(f(z_0)) = z_0$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < 1$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد، آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. $\square$

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

برهان. بنا بر قضیه ۳.۴.۱، $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0.$$

و لذا:

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta}) \right) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ ire^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

$\square$

قضیه ۵.۴.۱ (الکساندر^۱). فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت:

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. $\square$

^۱Alexander

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، لذا بنا بر قضیه ۶.۳.۱ برای هر n ، $n|a_n| \leq 1$ و در نتیجه $|a_n| \leq 1$. $\square$

قضیه ۷.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ و برای $|z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{2}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم. در این صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = \left((c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 \right) = (f(z_0) - f(z_1)) (f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه $\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$ و لذا تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c} \right) + \dots$$

به علاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با به کار بردن قضیه پوششی در می‌یابیم که $\frac{1}{2} \leq |h(z)|$ یا $|c| \geq \frac{1}{2}$. $\square$

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < 1$:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ ($|z_0| < 1$) تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است. بنابراین:

$$g(0) = b(0) = f(z_0) \quad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} \left(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2) \right).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد. لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد. پس بنا بر قضیه ۶.۴.۱

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\overline{z_0} \right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

حال چون z_0 دلخواه است داریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| &\leq \frac{2r}{1-r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r^2 - 2r}{1-r^2} &\leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 2r}{1-r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r-2}{1-r^2} &\leq \frac{\partial}{\partial r} \log|f'(z)| \leq \frac{2r+2}{1-r^2}. \end{aligned}$$

حال از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$-2 \log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq -2 \log(1-r)$$

لذا:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < 1$

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۴.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$. نقطه‌ی $\circ$ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{r}{1-r}.$$

نا مساوی $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است، حال اگر $\frac{1}{4} \leq |f(z)|$ لذا $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)|$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از $\circ$ تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه قبل:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{r}{1+r}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

□

۵.۱ رده‌ی $\mathbb{T}$

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم $\mathbb{T}$ زیر رده‌ای از $\mathbb{S}$ شامل توابعی با ضرایب منفی باشد. گوییم یک تابع تک‌ارز و تحلیلی f در $\mathbb{T}$ قرار دارد هر گاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در $\mathbb{T}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. چون $f(z) \in \mathbb{T}$ ، $f'(z) \neq 0$ در دیسک واحد Δ تک‌ارز است. در این صورت $f'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1} \neq 0$. بنابراین:

$$f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \neq 0 \quad (z=r).$$

فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| > 1$. در این صورت اندیس مثبت N وجود دارد به طوری که $1 - \sum_{n=2}^N n|a_n| r_0^{n-1} < 0$ که $0 < r_0 < 1$ ، بنابراین وجود دارد $1 > \sum_{n=2}^N n|a_n|$. لذا:

$$f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \leq 1 - \sum_{n=2}^N n|a_n| r_0^{n-1} < 0$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0) = 1$ پس وجود دارد $0 < r_1 < r_0$ به طوری که $f'(r_1) = 0$ و این با فرض $f'(z) \neq 0$ در تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

به عکس، فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. در این صورت:

$$\operatorname{Re}(f'(z)) = \operatorname{Re}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}\right) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 0$$

پس برای $z_1, z_2 \in \Delta$ و $z_1 \neq z_2$ ،

$$\operatorname{Re} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^1 \operatorname{Re} f'[z_1 + t(z_2 - z_1)] dt$$

□

لذا $f(z) \in \mathbb{T}$ در Δ تک‌ارز است و $f(z) \in \mathbb{T}$.

قضیه ۳.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ باشد آنگاه

$$r - \frac{1}{r} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1}{r} r^2 \quad (|z| = r)$$

برهان. بنابر قضیه ۲.۵.۱ داریم $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. بنابراین :

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{1}{4} r^2$$

و

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{1}{4} r^2$$

لذا داریم:

$$r - \frac{1}{4} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1}{4} r^2 \quad (|z| = r).$$

□

مثال ۴.۵.۱. بنا بر قضیه ۲.۵.۱، تابع $f(z) = z - \frac{1}{4} z^2$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}$ می‌باشد هرگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. حال با جایگزینی $n = 2$ و $a_2 = \frac{1}{4}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند. لذا کران بالای قضیه ۳.۵.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۵.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ باشد، آنگاه:

$$1 - r \leq |f'(z)| \leq 1 + r \quad (|z| = r).$$

برهان. می‌دانیم:

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \leq 1 + r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1 + r$$

و

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \geq 1 - r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - r$$

لذا داریم:

$$1 - r \leq |f'(z)| \leq 1 + r \quad (|z| = r).$$

□

مثال ۶.۵.۱. برای تابع $f(z) = z - \frac{1}{4} z^2$ کران بالای قضیه ۵.۵.۱ در $z = r$ و کران پایین $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۷.۵.۱. فرض کنیم توابع $f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} |a_{j,m}| z^j$, $(m = 1, 2, \dots, n)$ متعلق به

رده $\mathbb{T}$ باشند. در این صورت تابع $h(z)$ تعریف شده به صورت

$h(z) = \sum_{m=1}^n c_m f_m(z)$, $(c_m \geq 0)$ که در آن $\sum_{m=1}^n c_m = 1$ است نیز در رده $\mathbb{T}$ قرار دارد.

برهان. طبق تعریف $h(z)$ داریم،

$$h(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n c_m |a_{j,m}| \right) z^j$$

چون برای هر $m = 1, 2, \dots, n$ ، $f_m(z)$ در $\mathbb{T}$ قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=2}^{\infty} j |a_{j,m}| \leq 1$ که $m = 1, 2, \dots, n$ بنابراین می‌توانیم ببینیم:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j \left(\sum_{m=1}^n c_m |a_{j,m}| \right) = \sum_{m=1}^n c_m \left(\sum_{j=2}^{\infty} j |a_{j,m}| \right) \leq \sum_{m=1}^n c_m = 1$$

□ حال با توجه به قضیه ۲.۵.۱ نتیجه می‌شود $h(z)$ در $\mathbb{T}$ قرار دارد.

قضیه ۸.۵.۱ (توابع اکسترمال). فرض کنیم

$$f_1(z) = z, f_n(z) = z - \frac{1}{n} z^n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

در این صورت $f(z) \in \mathbb{T}$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن را به شکل $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم، به طوری که $\lambda_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$.

برهان. فرض کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \left(z - \frac{1}{n} z^n \right) \\ &= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا بنا بر قضیه ۲.۵.۱، $f(z) \in \mathbb{T}$.

به عکس، فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}$ ، چون $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ ، $(n = 2, 3, \dots)$ قرار می‌دهیم $\lambda_n = n |a_n|$ و $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$ ؛ لذا:

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_n z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n [z - f_n(z)] \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \right) z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z). \end{aligned}$$

□

فصل ۲

توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه α

تابع پیوسته $f = u + iv$ در میدان مختلط $\mathbb{L}$ یک تابع همساز مختلط مقدار است هر گاه هم u و هم v در $\mathbb{L}$ همساز حقیقی مقدار باشند. در هر دامنه همبند ساده $\mathbb{D} \subset \mathbb{L}$ می‌توان f را به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت، که h و g در $\mathbb{D}$ تحلیلی هستند. فرض کنیم u و v توابع همساز حقیقی باشند. در این صورت توابع تحلیلی G و H وجود دارند که $u = \operatorname{Re}(H)$ و $v = \operatorname{Im}(G)$. حال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f = u + iv &= \operatorname{Re}(H) + i\operatorname{Im}(G) = \frac{1}{2}(H + \bar{H}) + i\frac{1}{2i}(G - \bar{G}) \\ &= \frac{H + G}{2} + \frac{\bar{H} - \bar{G}}{2} = h + \bar{g}. \end{aligned}$$

قضیه ۹.۰.۲ (قضیه لوی^۱). اگر f یک تابع همساز مختلط مقدار موضعا تک ارز در میدان $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ باشد، آنگاه برای هر $z \in \mathbb{D}$ ، ژاکوبین تابع f یعنی $J_f(z)$ ، صفر نیست [۴].

یک شرط لازم و کافی برای موضعا تک‌ارز و حافظ جهت بودن تابع همساز f در $\mathbb{D}$ این است که در $\mathbb{D}$ رابطه $|h'(z)| > |g'(z)|$ برقرار باشد. با توجه به این که $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$ است، از قضیه لوی داریم $|h'(z)| > |g'(z)|$ و f یک تابع همساز موضعا تک‌ارز است.

تعریف ۱۰.۰.۲. رده‌ی توابع $f = h + \bar{g}$ که در دیسک واحد $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ همساز تک‌ارز و حافظ جهت هستند، به طوری که $h(0) = f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ را با $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ نمایش می‌دهیم.

^۱Lewy

در این صورت برای $f = h + \bar{g} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ توابع تحلیلی h و g را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (1.2)$$

در صورتی که بخش مزدوج تحلیلی اعضای $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ صفر باشد، این رده به رده توابع تک‌ارز تحلیلی نرمال شده تبدیل می‌شود. در سال ۱۹۸۴، کلونی^۲ و شیل اسمال^۳ رده‌ی $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ را به همراه زیررده‌های آن، به وجود آوردند. پس از آن، چندین مقاله در رابطه با $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ و زیررده‌های آن نوشته شد. در این فصل، به بررسی چند زیر رده از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ می‌پردازیم و شرایط تک‌ارزی، نقاط فرین و کران‌های انحراف توابع در این زیر رده‌ها را مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۰.۲. برای $0 \leq \alpha < 1$ ، زیر رده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ که شامل توابع همساز ستاره گون از مرتبه α است را با $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. تابعی مانند f و به فرم (۱.۲) را همساز ستاره گون از مرتبه α که $0 \leq \alpha < 1$ و $|z| = r < 1$ می‌نامیم، اگر

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha, \quad |z| = r < 1 \quad (2.2)$$

تعریف ۱.۲.۰.۲. $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ زیر رده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ است که توابع h و g در $f = h + \bar{g}$ به فرم زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^n. \quad (3.2)$$

تعریف ۱.۳.۰.۲. زیررده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ که در آن $f_{\bar{z}}(0) = 0$ است را با $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{\circ}$ نمایش می‌دهیم.

در بخش نخست، به بررسی زیررده‌های مختلف $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{\circ}$ می‌پردازیم. فرض کنیم $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ زیررده‌هایی از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{\circ}$ باشند که شامل توابعی مانند f هستند که Δ را به روی میدان‌های ستاره گون و محدب می‌نگارند. مضاف بر این، زیررده‌های $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ را با $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ و $\mathbb{TK}_{\mathbb{H}}^{\circ}$ نمایش می‌دهیم. که ضرایب $f = h + \bar{g}$ به صورت زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0; \quad g(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n \geq 0. \quad (4.2)$$

در این بخش مقایسه‌ای میان توابع همساز $f = h + \bar{g}$ که ضرایب به فرم (۴.۲) هستند و همتای تحلیلی آنها خواهیم داشت. در ادامه $f = h + \bar{g}$ را در نظر می‌گیریم که h و g به فرم (۴.۲) یا (۱.۲) است.

^۲Clunie

^۳Sheil-Small

۱.۲ زیررده‌های $S_{\mathbb{H}}^{* \circ}$

برای $f = h + \bar{g} \in S_{\mathbb{H}}^{* \circ}$ به فرم (۱.۲)، در [۱۱] نشان داده شده که اگر $f = h + \bar{g} \in S_{\mathbb{H}}^{* \circ}$ باشد، آنگاه $|a_n| \leq (n+1)(2n+1)/6$ و $|b_n| \leq (n-1)(2n-1)/6$ است. در [۳] نیز نشان داده شده که اگر $f = h + \bar{g} \in K_{\mathbb{H}}^{* \circ}$ باشد، آنگاه $|a_n| \leq (n+1)/2$ و $|b_n| \leq (n-1)/2$ خواهد بود. تساوی در همه نتایج برقرار است. بنابراین شرایط ضربی لازم را برای این رده‌ها داریم. حال شرایط کافی را ارایه می‌دهیم و نشان خواهیم داد که برای توابع به فرم (۴.۲) نیز این شرایط لازم هستند.

قضیه ۱.۱.۲. اگر ضرایب تابع $f \in S_{\mathbb{H}}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1$ صدق کند، آنگاه $f \in S_{\mathbb{H}}^{* \circ}$ است.

برهان. ابتدا توجه کنید که

$$|h'(z)| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} > \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} \geq |g'(z)|,$$

بنابراین f موضعا تک ارز و حافظ جهت است. کفایت نشان دهیم که

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < r < 1$$

$$f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n e^{in\theta} + \bar{b}_n e^{-in\theta}) r^n,$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) &= \operatorname{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} - \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}) r^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}) r^{n-1}} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 + A(z)}{1 + B(z)} \end{aligned}$$

با قراردادن

$$\frac{1 + A(z)}{1 + B(z)} = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \quad (5.2)$$

خواهیم داشت اگر $|w(z)| \leq r$ باشد، آنگاه $\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) > 0$ خواهد بود، ولی

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{A - B}{2 + A + B} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)(a_n e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})] r^{n-1}}{2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(a_n e^{i(n-1)\theta} - (n-1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})] r^{n-1}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$|w(z)| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)|a_n| + (n+1)|b_n|]r}{2 - \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)|a_n| + (n-1)|b_n|]r}.$$

□ عبارت آخر از بالا توسط r کراندار است اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1$ باشد.

نتیجه ۲.۱.۲. اگر ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|a_n| + |b_n|) \leq 1$ صدق کند، آنگاه $f \in K_H^\circ$ است.

□ **برهان.** با استفاده از قضیه ۵.۴.۱ (الکساندر) و قضیه ۱.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود.

برعکس حالت تحلیلی، یک تابع همساز ستاره‌گون (یا حتی همساز محدب) زمانی که $|z| = R$ ، برای $|z| < R$ لازم نیست تک‌ارز باشد. به هر حال، کران‌های ضریبی در قضیه ۱.۱.۲ شرطی کافی برای تک‌ارز بودن فراهم می‌کند.

نتیجه ۳.۱.۲. تحت شرایط قضیه ۱.۱.۲، تابع f در دیسک واحد Δ همساز تک‌ارز نیز است.

برهان. اگر $g(z) \equiv 0$ باشد، آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک‌ارزی f از ستاره‌گون بودن آن نتیجه می‌شود. اگر $g(z) \not\equiv 0$ و $z_1 \neq z_2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| &\geq 1 - \left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} b_n(z_1^n - z_2^n)}{(z_1 - z_2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_1^n - z_2^n)} \right| \\ &> 1 - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} \geq 0. \end{aligned}$$

□ که تک‌ارزی را ثابت می‌کند.

ملاحظه ۴.۱.۲. با شرطی که در قضیه ۱.۱.۲ برای ضرایب قرار داده شده، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز همساز ستاره‌گون و تک‌ارز هستند. قضیه بعد ثابت می‌کند که کران‌هایی که برای ضرایب در قضیه قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنیم ضرایب تابع f در (۴.۲) صدق کند. در این صورت، $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}^{*\circ}$ است اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n) \leq 1$ باشد.

برهان. از دید قضیه ۱.۱.۲، فقط نیاز است که نشان دهیم اگر شرط قضیه برقرار نباشد، آنگاه $f \notin T_H^{* \circ}$. برای این کار، نشان خواهیم داد که f حتی تک‌ارز نیست. با انتخاب $z = r > 0$ داریم $f'(0) = 1$ چون $f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n)r^{n-1}$ و $f(r) = r - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)r^n$ و $f'(1) < 0$ است، باید یک $r_0 -$ ای موجود باشد که $r_0 < 1$ به طوری که $f'(r_0) = 0$ است. بنابراین r_0 یک ماکزیمم موضعی $f(r)$ است و $f(r)$ روی بازه حقیقی $(0, 1)$ یک به یک نیست. $\square$

نتیجه ۶.۱.۲. برای f به فرم (۴.۲)، $f \in T_H^{* \circ}$ است اگر و تنها اگر f همساز تک‌ارز باشد.

نتیجه ۷.۱.۲. اگر $f \in T_H^{* \circ}$ باشد، آنگاه $(|z| = r)$ $r - r^2/2 \leq |f(z)| \leq r + r^2/2$ تساوی نیز برای $z - z^2/2$ و $\bar{z} - \bar{z}^2/2$ برقرار است.

برهان. با توجه به این که $2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n) \leq 1$ است، داریم

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \leq r + r^2/2$$

و

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \geq r - r^2/2$$

 $\square$

نتیجه ۸.۱.۲. اگر $f \in T_H^{* \circ}$ باشد، آنگاه $\{w : |w| < 1/2\} \subset f(\Delta)$ است.

برهان. این نتیجه پوششی، از نامساوی سمت چپ در نتیجه ۷.۱.۲ بدست می‌آید. $\square$

ملاحظه ۹.۱.۲. اگر بخش مزدوج تحلیلی f در قضایای ۱.۱.۲ و ۵.۱.۲ صفر باشد، نتایج به شرایط ضریبی کافی برای ستاره‌گون بودن توابع تحلیلی تبدیل می‌شود. به هر حال، یک تفاوت جالب وجود دارد. همچنین در حالت تحلیلی داریم

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) - 1 \right| = \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad z \in \Delta,$$

بنابراین مقادیری از zf'/z در زیرمجموعه‌ای از نیم صفحه راست شامل دیسکی به مرکز و شعاع ۱ قرار می‌گیرد. برای حالت همساز f به فرم (۱.۲)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) - 1 \\ &= \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1)a_n e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta} \right] r^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}) r^{n-1}} \end{aligned}$$

که $f(z) = z - \bar{z}^2/2$ است. بدست می آوریم $|\partial/\partial\theta \arg f(re^{i\theta}) - 1| = |3r/2/(1 - e^{-3i\theta}r/2)|$ با انتخاب $\theta = 0$ و قراردادن $r \rightarrow 1$ ، می بینیم که عبارت آخر می تواند به اندازه ۳ بزرگ باشد.

قضیه ۱۰.۱.۲. برای f به فرم (۴.۲)، $f \in TK_H^\circ$ است اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^\infty n^2(a_n + b_n) \leq 1$ باشد.

برهان. از دید نتیجه ۲.۱.۲ از قضیه ۱.۱.۲ فقط باید نشان دهیم که اگر نامساوی ضربی برقرار نباشد، $f \notin TK_H^\circ$. شرطی لازم و کافی برای این که f ، $|z| = r$ را بر روی یک میدان محدب بنگارد این است که

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta}) \right\} \right) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - \sum_{n=2}^\infty n^2 [a_n e^{i(n-1)\theta} + b_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^\infty n [a_n e^{i(n-1)\theta} - b_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}} \right\} > 0.$$

اگر قرار دهیم $\theta = 0$ ، عبارت آخر برای $\sum_{n=2}^\infty n^2(a_n + b_n) > 1$ و r به اندازه کافی نزدیک به ۱ منفی است. بنابراین $f \notin TK_H^\circ$ و برهان کامل است. $\square$

نتیجه ۱۱.۱.۲. اگر $f \in T_H^*$ باشد، آنگاه f ، $|z| < 1/2$ را به روی یک میدان محدب می نگارد. حالت تساوی نیز برای توابع فرین $z - \bar{z}^2/2$ و $z - z^2/2$ برقرار است.

برهان. کافیت نشان دهیم که $2f(z/2) \in TK_H^\circ$ است. داریم

$$2f(z/2) = z - \sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{2^{n-1}} z^n - \sum_{n=2}^\infty \frac{b_n}{2^{n-1}} \bar{z}^n$$

و

$$\sum_{n=2}^\infty n^2 \left(\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{b_n}{2^{n-1}} \right) \leq \sum_{n=2}^\infty n(a_n + b_n) \leq 1.$$

 $\square$

۱.۱.۲ نقاط فرین

برای هر خانواده فشرد، ماکزیمم یا مینیمم بخش حقیقی هر تابع پیوسته خطی، در یکی از نقاط فرین پیوسته محدب اتفاق می افتد. چون هر دوی TK_H° و T_H^* خانواده های محدب هستند، از نامساوی های ضربی لازم و کافی قضایای ۵.۱.۲ و ۱۰.۱.۲ استفاده می کنیم و نقاط فرین آنها را بدست می آوریم.

قضیه ۱۲.۱.۲ (الف) قرار دهید، $h_1(z) = z$ ، $h_n(z) = z - z^n/n$ ($n = 2, 3, \dots$)، $g_n(z) = z - \bar{z}^n/n$ ($n = 2, 3, \dots$) در این صورت $f \in T_H^*$ است اگر و تنها اگر بتوان آن را به فرم $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$ که $\lambda_n \geq 0, \gamma_n \geq 0$ ، $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n) \geq 0$ و $\gamma_1 = 0$ است، نوشت. به خصوص، $\{g_n\}$ و $\{h_n\}$ نقاط فرین T_H^* هستند.

(ب) قرار دهید $h_1(z) = z$ و $h_n(z) = z - z^n/n^2$ ($n = 2, 3, \dots$) و $g_n(z) = z - \bar{z}^n/n^2$ ($n = 2, 3, \dots$) در این صورت $f \in TK_H^*$ است اگر و تنها اگر بتوان آن را به فرم $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$ که $\lambda_n \geq 0, \gamma_n \geq 0$ ، $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n) \geq 0$ و $\gamma_1 = 0$ است، نوشت. به خصوص، $\{g_n\}$ و $\{h_n\}$ نقاط فرین TK_H^* هستند.

برهان. فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. اثبات قسمت (ب) از قضیه ۱۰.۱.۲ به همان گونه است که اثبات (الف) از قضیه ۵.۱.۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{n} z^n + \frac{\gamma_n}{n} \bar{z}^n \right).$$

در این صورت

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{\lambda_n}{n} + \frac{\gamma_n}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n) = 1 - \lambda_1 \leq 1.$$

برعکس، اگر $f \in T_H^*$ باشد، آنگاه $a_n \leq 1/n$ و $b_n \leq 1/n$ است. قرار دهید $\lambda_n = na_n, \gamma_n = nb_n$ ($n = 2, 3, \dots$) و $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$ و $\gamma_1 = 0$. در این صورت $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$. $\square$

۲.۲ رده $HP(\beta)$

زیررده‌ای از $\mathbb{S}_H$ که در شرط زیر صدق می‌کند را با $HP(\beta)$ نمایش می‌دهیم.

$$Re\{h'(z) + g'(z)\} > \beta, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

و همین طور زیررده‌ای از $HP(\beta)$ که توابع h و g در $f = h + \bar{g}$ به فرم

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -|b_n| z^n. \quad (6.2)$$

هستند را با $HP^*(\beta)$ نمایش می‌دهیم.

به وضوح اگر $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 < 1$ باشد، آنگاه $HP(\beta_2) \subset HP(\beta_1)$ است.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ باشد. به علاوه فرض کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 2 - \beta \quad (7.2)$$

که $a_1 = 1$ و $0 \leq \beta < 1$ است. در این صورت f تک‌ارز همساز و در Δ حافظ جهت و $f \in HP(\beta)$ است.

برهان. برای $1 > |z_2| \geq |z_1|$ با استفاده از قضیه ۷.۲ داریم

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\geq |h(z_1) - h(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)| \\ &\geq |z_1 - z_2| \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z_2|^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z_2|^{n-1} \right) \\ &> |z_1 - z_2| \left[1 - |z_2| \left(\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \right) \right] \\ &\geq |z_1 - z_2| [1 - |z_2|(1 - \beta)] > 0. \end{aligned}$$

بنابراین f در Δ تک‌ارز است. چون

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq \beta + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| > \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1} \geq |g'(z)|. \end{aligned}$$

حال نشان می‌کنیم که $f \in HP(\beta)$ است. با استفاده از این گزاره که $Re w \geq \beta$ است اگر و تنها اگر $|1 - \beta + w| \geq |1 + \beta - w|$ باشد، کفایت نشان دهیم که

$$|1 - \beta + h'(z) + g'(z)| - |1 + \beta - h'(z) - g'(z)| \geq 0. \quad (8.2)$$

با جایگذاری مقادیر $h'(z)$ و $g'(z)$ در نامساوی (۸.۲) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} &|1 - \beta + h'(z) + g'(z)| - |1 + \beta - h'(z) - g'(z)| \\ &= \left| 2 - \beta + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{n-1} \right| - \left| \beta - \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{n-1} \right| \\ &\geq 2 \left[(1 - \beta) - \left(\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1} \right) \right] \\ &> 2 \left[1 - \beta - \left(\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \right) \right] > 0. \end{aligned}$$

نگاشت‌های همساز

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\beta}{n} x_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\beta}{n} y_n z^n, \quad (9.2)$$

که

$$\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 1$$

نشان می‌دهد که تساوی در قضیه ۷.۲ برقرار است. توابع به فرم (۹.۲) در $HP(\beta)$ قرار دارند، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) = 1 + (1-\beta) \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \right) = 2 - \beta.$$

شرطی که در قضیه قبل برای ضرایب تابع $f = h + \bar{g}$ قرار داده شده، ما را قادر می‌سازد تا نتیجه گیری کنیم که توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز در $HP(\beta)$ قرار دارند. قضیه بعد ثابت می‌کند که کرانه‌هایی که برای ضرایب در قضیه قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند. $\square$

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ به فرم (۶.۲) باشد. در این صورت $f \in HP^*(\beta)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 2 - \beta \quad (10.2)$$

که $a_1 = 1$ و $0 \leq \beta < 1$ است.

برهان. قسمت اگر از قضیه قبل و این نکته نتیجه می‌شود که اگر توابع h و g در $f = h + \bar{g} \in HP(\beta)$ باشند، آنگاه $f \in HP^*(\beta)$ است.

برای بخش تنها اگر، نشان می‌دهیم که اگر شرط قضیه ۱۰.۲ برقرار باشد، آنگاه $f \in HP^*(\beta)$ است.

توجه کنید که یک شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۶.۲) در $HP^*(\beta)$ که $0 \leq \beta < 1$ قرار گیرد این است که $Re\{h'(z) + g'(z)\} > \beta$ باشد. یا به طور معادل

$$Re\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1}\right\} > \beta.$$

اگر z را حقیقی انتخاب کنیم و قرار دهیم $z \rightarrow 1^-$ ، داریم

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \geq \beta,$$

$\square$

که دقیقاً حکم قضیه ۱۰.۲ است.

قضیه ۳.۲.۲. اگر $f \in HP^*(\beta)$ باشد، آنگاه

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)r^2, \quad |z| = r < 1$$

و

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)r^2, \quad |z| = r < 1.$$

برهان. فرض کنیم $f \in HP^*(\beta)$ باشد. با قدر مطلق گرفتن از f داریم

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)r^2 \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)r^2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq (1 - |b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\ &\geq (1 - |b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\ &\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)r^2 \\ &\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)r^2. \end{aligned}$$

کرانه‌هایی که برای تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۶.۲) در قضیه ۳.۲.۲ ارایه شده، برای توابع به فرم (۱.۲) نیز صدق می‌کند، در صورتی که شرط قضیه ۷.۲ برقرار باشد. توابع

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)\bar{z}^2$$

و

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{\gamma}(1 - |b_1| - \beta)z^2$$

برای $|b_1| \leq 1 - \beta$ نشان می‌دهند که تساوی برای کرانه‌های داده شده در قضیه ۳.۲.۲ برقرار است.

□

نتیجه زیر، از نامساوی سمت چپ در قضیه ۳.۲.۲ بدست می‌آید.

نتیجه ۴.۲.۲. اگر $f \in HP^*(\beta)$ باشد، آنگاه

$$\{w : |w| < \frac{1}{\beta}(1 - |b_1| + \beta)\} \subset f(\Delta).$$

در قسمت بعد، نقاط فرین پوسته محدب بسته‌ی $HP^*(\beta)$ را تعیین می‌کنیم. این پوسته محدب بسته را با $clco HP^*(\beta)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۲.۲. $f \in clco HP^*(\beta)$ است اگر و تنها اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n), \quad (11.2)$$

که

$$h_1(z) = z, \quad h_n(z) = z - \frac{1-\beta}{n} z^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$g_n(z) = z - \frac{1-\beta}{n} \bar{z}^n$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n) = 1, \quad \lambda_n \geq 0, \gamma_n \geq 0.$$

به خصوص، نقاط فرین $HP^*(\beta)$ ، $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ هستند.

برهان. برای توابع f به فرم (۱۱.۲) داریم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n) z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\beta}{n} \lambda_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\beta}{n} \bar{z} \gamma_n \bar{z}^n.$$

در این صورت

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-\beta} \left(\frac{1-\beta}{n} \lambda_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-\beta} \left(\frac{1-\beta}{n} \gamma_n \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

و بنابراین $f \in clco HP^*(\beta)$ است.

برعکس، فرض کنید که $f \in clco HP^*(\beta)$ باشد. قرار دهید

$$\lambda_n = \frac{n}{1-\beta} |a_n|, \quad n = 2, 3, \dots$$

و

$$\gamma_n = \frac{n}{1-\beta} |b_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

در این صورت توجه کنید که با استفاده از قضیه ۲.۲.۲، $0 \leq \lambda_n \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) و $0 \leq \gamma_n \leq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) تعریف می‌کنیم

$$\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

و توجه داشته باشید که با استفاده از قضیه ۲.۲.۲، $\lambda_1 \geq 0$ است. در نتیجه

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$$

را مطابق مطلوب بدست می‌آوریم.

با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ به آسانی دیده می‌شود که $HP^*(\beta)$ محدب و بسته است، بنابراین $clco HP^*(\beta) = HP^*(\beta)$ است. در این صورت حکم قضیه ۵.۲.۲ واقعا برای $f \in HP^*(\beta)$ برقرار است. $\square$

قضیه ۶.۲.۲. هر عضو از $HP^*(\beta)$ ، دیسک واحد Δ را به روی یک میدان ستاره‌گون می‌نگارد.

برهان. با توجه به تعریف ۳.۳.۱ فقط نیاز داریم که نشان دهیم اگر $f = h + \bar{g} \in HP^*(\beta)$ باشد، آنگاه

$$Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = Re \left\{ \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} \right\} > 0.$$

با استفاده از این گزاره که $Re w > 0$ است اگر و تنها اگر $|1+w| > |1-w|$ باشد و قرار دادن $w = \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}$ کفایت نشان دهیم که

$$\begin{aligned} & |h(z) + \overline{g(z)} + zh'(z) - \overline{zg'(z)}| - |h(z) + \overline{g(z)} - zh'(z) + \overline{zg'(z)}| \\ &= \left| 2z - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)|a_n|z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)|b_n|\bar{z}^n \right| \\ &\quad - \left| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|b_n|\bar{z}^n \right| \\ &\geq 2|z| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1} \right] \\ &> 2|z| \left[1 - \left(\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \right) \right] \\ &\geq 2|z| [1 - (1 - \beta)] = 2|z|\beta \geq 0. \end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۷.۲.۲. هر تابعی که در رده‌ی $HP^*(\beta)$ قرار داشته باشد، دیسک‌های Δ_r که $r < (1/2)(1 - \beta - |b_1|)$ است را به ازای $|b_1| > 1 - \beta$ ، روی میدان‌های محدب می‌نگارد. **برهان.** فرض کنیم $f \in HP^*(\beta)$ و r که $0 < r < 1$ ، ثابت باشد. در این صورت $r^{-1}f(rz) \in HP^*(\beta)$ و داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)r^{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)(nr^{n-1}) \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1 - \beta - |b_1| \leq 1 \end{aligned}$$

به شرط آن که

$$nr^{n-1} \leq \frac{1}{1 - \beta - |b_1|}$$

و این شرط در صورتی برقرار است که $r < (1/2)(1 - \beta - |b_1|)$ باشد. $\square$

نتیجه ۸.۲.۲. اگر $\frac{1}{p} = \beta + |b_1|$ باشد، آنگاه $f \in HP^*(\beta)$ در Δ محدب است.

فرض کنیم $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\bar{z}^n$ باشد، مجموعه‌ی

$$N_{\delta}(f) = \left\{ F : F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\bar{z}^n \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n - A_n| + |b_n - B_n|) \leq \delta \right\},$$

را δ -همسایگی از f می‌نامیم.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنیم $f \in HP^*(\beta)$ و $\delta \leq \beta + 2|b_1|$ باشد. اگر $F \in N_{\delta}(f)$ باشد، آنگاه F یک تابع همساز ستاره‌گون است.

برهان. فرض کنیم

$$F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\bar{z}^n$$

متعلق به $N_{\delta}(f)$ باشد. داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|) &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n - A_n| + |b_n - B_n|) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) + |B_1 - b_1| - |b_1| \\ &\leq \delta - |b_1| + (1 - \beta - |b_1|) \leq 1. \end{aligned}$$

□

بنابراین $F(z)$ یک تابع همساز ستاره گون است.

۳.۲ مرتبه α

در این بخش به بررسی دو زیر رده از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ می پردازیم. آوجی^۴ و زلوتکیویک^۵ [۱] ثابت کردند که شرایط ضریبی $\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1$ برای قرار گرفتن تابع $f = h + \bar{g}$ در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ کافیهست. سیلورمن^۶ [۱۳] ثابت کرد اگر در (۱.۲)، $b_1 = 0$ و a_n و b_n منفی باشند نیز این شرایط ضریبی مورد نیاز است. توجه کنید که در هر دو نتیجه بدست آمده، موضوع به محدودیت $b_1 = 0$ بستگی دارد. برهان ارایه شده در این بخش شرایط ضریبی کافی برای قرارگیری تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۱.۲) در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ را فراهم می کند که $0 \leq \alpha < 1$ و $b_1 = 0$ لزوماً صفر نیست. همچنین نشان می دهیم که همین شرایط برای قرار گرفتن f در $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ لازم است.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ به فرم داده شده در (۱.۲) باشد. همچنین فرض کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \leq 2 \quad (12.2)$$

که $a_1 = 1$ و $0 \leq \alpha < 1$ باشد. در این صورت f در Δ همساز تک ارز و $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ است.

برهان. ابتدا توجه کنید که f در Δ موضعاً تک ارز و حافظ جهت است. زیرا

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| > \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} \geq |g'(z)|. \end{aligned}$$

برای نشان دادن تک ارز بودن f در Δ ملاحظه می کنیم که اگر $g(z) \equiv 0$ آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک ارزی f از ستاره گون بودن (طبق ۵) نتیجه می شود. اگر $g(z) \not\equiv 0$ باشد، آنگاه نشان می دهیم که وقتی $z_1 \neq z_2$ باشد، $f(z_1) \neq f(z_2)$ است.

فرض کنیم $z_1, z_2 \in \Delta$ باشد که $z_1 \neq z_2$ است. چون Δ همبند ساده و محدب است، داریم $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2 \in \Delta$ که $0 \leq t \leq 1$ است. در این صورت می توان نوشت

^۴Avci

^۵Zlotkiewicz

^۶Silverman

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_0^1 \left[(z_2 - z_1)h'(z(t)) + \overline{(z_2 - z_1)}g'(z(t)) \right] dt.$$

با تقسیم معادله‌ی فوق بر $z_2 - z_1 \neq 0$ و در نظر گرفتن بخش حقیقی داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} &= \int_0^1 \operatorname{Re} \left[h'(z(t)) + \frac{\overline{z_2 - z_1}}{z_2 - z_1} g'(z(t)) \right] dt \\ &> \int_0^1 [\operatorname{Re} h'(z(t)) - |g'(z(t))|] dt. \end{aligned} \quad (13.2)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h'(z) - |g'(z)| &\geq \operatorname{Re} h'(z) - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \\ &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \\ &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \\ &\geq 0 \quad \text{با استفاده از (12.2)} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اخیر و نامساوی (۱۳.۲)، تک ارز بودن f نتیجه می‌شود.
حال نشان می‌دهیم که $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ است. طبق شرط (۲.۲) فقط کفایت نشان دهیم که اگر قضیه ۱۲.۲ برقرار باشد، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} \right) \geq \alpha,$$

که $z = re^{i\theta}$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $0 \leq r < 1$ و $0 \leq \alpha < 1$ است.
با استفاده از این گزاره که $\operatorname{Re} w \geq \alpha$ اگر و تنها اگر $|1 - \alpha + w| \geq |1 + \alpha - w|$ ، کفایت ثابت کنیم که

$$|A(z) + (1 - \alpha)B(z)| - |A(z) - (1 + \alpha)B(z)| \geq 0 \quad (14.2)$$

که $A(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}$ و $B(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ است.

با جایگذاری $A(z)$ و $B(z)$ در (۱۴.۲) داریم

$$\begin{aligned}
 & |A(z) + (1 - \alpha)B(z)| - |A(z) - (1 + \alpha)B(z)| \\
 &= |(1 - \alpha)h(z) + zh'(z) + \overline{(1 - \alpha)g(z) - zg'(z)}| \\
 &\quad - |(1 + \alpha)h(z) - zh'(z) + \overline{(1 + \alpha)g(z) + zg'(z)}| \\
 &= \left| (2 - \alpha)z + \sum_{n=2}^{\infty} (n + 1 - \alpha)a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1 + \alpha)b_n z^n \right| \\
 &\quad \left| -\alpha z + \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1 - \alpha)a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1 + \alpha)b_n z^n \right| \\
 &\geq (2 - \alpha)|z| - \sum_{n=2}^{\infty} (n + 1 - \alpha)|a_n||z|^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1 + \alpha)|b_n||z|^n \\
 &\quad - \alpha|z| - \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1 - \alpha)|a_n||z|^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1 + \alpha)|b_n||z|^n \\
 &= 2(1 - \alpha)|z| \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha}{1 - \alpha} |a_n||z|^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha}{1 - \alpha} |b_n||z|^{n-1} \right\} \\
 &\geq 2(1 - \alpha)|z| \left\{ 1 - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha}{1 - \alpha} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha}{1 - \alpha} |b_n| \right) \right\} \geq 0. \quad (۱۲.۲) \text{ با استفاده از }
 \end{aligned}$$

□

نگاشت همساز ستاره‌گون

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{n - \alpha} x_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{n + \alpha} \bar{y}_n \bar{z}^n \quad (۱۵.۲)$$

که $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 1$ نشان می‌دهد که در (۱۲.۲) تساوی نیز برقرار است.

توابع به فرم (۱۵.۲) در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ هستند، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n - \alpha}{1 - \alpha} |a_n| + \frac{n + \alpha}{1 - \alpha} |b_n| \right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 2.$$

شرطی که در قضیه قبل برای ضرایب تابع $f = h + \bar{g}$ قرار داده شده، ما را قادر می‌سازد تا نتیجه گیری کنیم که توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز همساز ستاره‌گون و تک‌ارز هستند. قضیه بعد ثابت می‌کند که کران‌هایی که برای ضرایب در قضیه قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) باشند. در این صورت $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \leq 2 \quad (۱۶.۲)$$

که $a_1 = 1$ و $0 \leq \alpha < 1$ است.

برهان. قسمت اگر از قضیه قبل و این نکته نتیجه می‌شود که اگر قسمت تحلیلی و مزدوج تحلیلی $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) باشند، آنگاه $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.

برای بخش تنها اگر، نشان می‌دهیم که اگر شرط (۱۶.۲) برقرار نباشد، آنگاه $f \notin \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$. توجه کنید که یک شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) از مرتبه α که $0 \leq \alpha < 1$ ستاره‌گون باشد این است که برای $0 \leq \alpha < 1$ ، $\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) - \alpha > 0$ باشد. این شرط هم ارز است با

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - \alpha \\ &= \operatorname{Re} \frac{(1-\alpha)z - \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha)|b_n|\bar{z}^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\bar{z}^n} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

شرط فوق باید برای تمام مقادیر z که $|z| = r < 1$ برقرار باشد. با انتخاب مقادیری از z که روی محور حقیقی مثبت که $|z| = r < 1$ قرار دارند باید داشته باشیم

$$\frac{(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha)|b_n|r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|r^{n-1}} \geq 0. \quad (۱۷.۲)$$

اگر شرط (۱۶.۲) برقرار نباشد، آنگاه برای r به اندازه کافی به ۱، شمارنده در (۱۷.۲) منفی خواهد بود. بنابراین $z_0 = r_0$ در $(0, 1)$ موجود است که خارج قسمت در (۱۷.۲) منفی است و این یک تناقض با شرایط لازم برای $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. و اثبات کامل می‌شود. $\square$

در ادامه نقاط فرین پوسته محدب بسته‌ی $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ را تعیین می‌کنیم. این پوسته محدب بسته را با $clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۲. $f \in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n). \quad (۱۸.۲)$$

که $h_1(z) = z, h_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n$ ($n = 2, 3, \dots$) و $g_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{n+\alpha}\bar{z}^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) و $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0$ است. به خصوص $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ هستند.

برهان. برای توابعی مانند f که به فرم (۱۸.۲) هستند داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n)z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{n-\alpha} X_n z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{n+\alpha} Y_n \bar{z}^n. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{n-\alpha} X_n \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{n+\alpha} Y_n \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n = 1 - X_1 \leq 1 \end{aligned}$$

و بنابراین $f \in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.

برعکس، فرض کنیم $f \in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد. قرار دهید ($n = 2, 3, \dots$) $X_n = \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|$ و $0 \leq X_n \leq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $Y_n = \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|$ در این صورت با استفاده از قضیه قبل، $0 \leq Y_n \leq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) و $2, 3, \dots$ تعریف می کنیم $X_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. در نتیجه $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n)$ را طبق آنچه خواسته شده بود بدست می آوریم.

با استفاده از قضیه قبل، به آسانی می توان دید که $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ محدب و بسته است. بنابراین $\square$ $clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha) = \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. پس حکم قضیه واقعا برای $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ برقرار است.

حال کران های انحراف را برای توابعی که در $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ هستند ارائه می کنیم که به نتایج پوششی برای $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ منتهی می شود.

قضیه ۴.۳.۲. اگر $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، آنگاه

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1| \right)r^2. \quad |z| = r < 1.$$

و

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1| \right)r^2. \quad |z| = r < 1.$$

برهان. فرض کنیم $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد. با قدر مطلق گرفتن از f داریم

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\
 &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\
 &= (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
 &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
 &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} |b_1| \right) r^2, \quad (۱۶.۲) \text{ با استفاده از} \\
 &= (1 + |b_1|)r + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2,
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &\geq (1 - |b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\
 &= (1 - |b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
 &\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
 &\geq (1 - |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} |b_1| \right) r^2, \quad (۱۶.۲) \text{ با استفاده از} \\
 &= (1 - |b_1|)r - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2.
 \end{aligned}$$

□

کرانهایی که برای تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) در قضیه ۴.۳.۲ ارایه شده، برای توابع به فرم (۱.۲) نیز صدق می‌کند، در صورتی که شرط قضیه ۱۲.۲ برقرار باشد. توابع

$$f(z) = z + |b_1|\bar{z} + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) \bar{z}^2$$

و

$$f(z) = (z - |b_1|)z - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) z^2$$

به ازای $|b_1| \leq (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ ، تساوی برای کران‌ها در قضیه ۴.۳.۲ برقرار می‌شود. این نتیجه پوششی بدست آمده از نامساوی سمت چپ در قضیه ۴.۳.۲ بدست می‌آید.

نتیجه ۵.۳.۲. اگر $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، آنگاه

$$\left\{ w : |w| < \frac{1}{2 - \alpha} (1 + (2\alpha - 1)|b_1|) \right\} \subset f(\Delta).$$

فصل ۳

توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه مختلط

فرض کنیم $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ خانواده‌ای از توابع به شکل $f = h + \bar{g}$ باشد که در دیسک واحد $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ و با نرمال سازی زیر، همساز، حافظ جهت و تک ارز باشند.

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad |b_1| < 1. \quad (1.3)$$

در [۳] کلونی^۱ و شیل اسمال^۲، رده‌ی $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ به علاوه برخی از زیررده‌های هندسی و بعضی کران‌های ضربی را مورد تحقیق قرار دادند. پس از آن، نویسندگان زیادی بوده‌اند که به زیررده‌های مرتبط پرداخته‌اند. به خصوص جهانگیری^۳ [۵] درباره زیررده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ شامل توابع ستاره‌گون از مرتبه α ، برای $0 \leq \alpha < 1$ ، بحث کرد. ما این رده را با $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. به خصوص، تابعی مانند f به فرم (۱.۳) همساز ستاره‌گون از مرتبه α ، $0 \leq \alpha < 1$ ، برای $z \in \Delta$ است، هرگاه

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha, \quad |z| = r < 1.$$

سپس، زیررده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ که توابع h و g در $f = h + \bar{g}$ به فرم

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^n, \quad |b_1| < 1. \quad (2.3)$$

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -|b_n| z^n, \quad |b_1| < 1. \quad (3.3)$$

^۱Clunie

^۲Sheil-Small

^۳Jahangiri

هستند را با $\overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}^*$ نمایش می‌دهیم. همین طور فرض کنیم که $\overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}^*(\alpha) = \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha) \cap \overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}$ در [۹]، نصر و اوف رده‌ی توابع ستاره‌گون از مرتبه b را معرفی کردند. فرض می‌کنیم $\mathbb{S}^*(b)$ رده‌ای باشد که شامل توابعی است که تحلیلی و ستاره‌گون از مرتبه مختلط b (b عددی مختلط و ناصفر) هستند و در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} > 0, \quad z \in \Delta.$$

۱.۳ مختلط از مرتبه (b, α)

یکی دیگر از رده‌های توابع، رده‌ی توابع ستاره‌گون از مرتبه عدد مختلط $b \neq 0$ است که توسط نصر^۴ و اوف^۵ در [۹] شرح داده شده است. ویاتروفسکی^۶ [۱۵] نیز رده توابعی که محدب از مرتبه عدد مختلط $b \neq 0$ هستند را معرفی کرد. با ترکیب این تعاریف، رده‌ی جدیدی از توابع را در این بخش تعریف می‌کنیم و به بررسی برخی خواص آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ باشد. در این صورت $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است اگر در شرط زیر صدق کند.

$$\left| \frac{1}{b} \left[\frac{zf'(z)}{zf'(z)} - 1 \right] \right| < \alpha. \quad (4.3)$$

که $0 \leq r < 1$ ، $f'(z) = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(z)) = f(re^{i\theta})$ ، $z' = \frac{\partial}{\partial \theta}(z = re^{i\theta})$ ، $0 < \alpha \leq 1$ ، $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ است. همچنین، فرض می‌کنیم که $\overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}^*(b, \alpha) = \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha) \cap \overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}$ است.

در این بخش، به بررسی خصوصیات این رده‌ی جدید که شامل ضرایب، کران‌ها، نقاط فرین، خصوصیات تلفیق و ترکیب‌های محدب است، می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ و h و g به فرم (۳.۳) باشد. در این صورت $f \in \overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}^*(b, \alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1) + \alpha|b|] |a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) + \alpha|b|] |b_n| \leq \alpha|b|. \quad (5.3)$$

^۴Nasr

^۵Aouf

^۶Wiatrowski

برهان. فرض کنیم $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ باشد. فرض کنیم $w(z)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$w(z) = \frac{zf'(z)}{z'f(z)} - 1 = \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - 1.$$

در این صورت از (۴.۳)، نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$|w(z)| = \left| \frac{-\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|z^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)|b_n|\bar{z}^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n|\bar{z}^n} \right| < \alpha|b|, \quad (z \in \Delta).$$

چون $|z| = (0 \leq r < 1)$ و $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ داریم

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|r^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)|b_n|r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|r^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n|r^{n-1}} < \alpha|b| \quad (۶.۳)$$

حال با میل دادن $r \rightarrow 1^-$ حول مقادیر حقیقی در (۹.۳)، داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)|b_n| \leq \alpha|b| \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \right). \quad (۷.۳)$$

بنابراین (۷.۳)، حکم (۵.۳) از قضیه ۱.۳ را نتیجه می‌دهد.

برعکس، با استفاده از فرض (۵.۳) و قرار دادن $|z| = (0 \leq r < 1)$ از (۴.۳) داریم

$$\begin{aligned} & |(zh'(z) - \overline{zg'(z)}) - (h(z) + \overline{g(z)})| - \alpha|b||h(z) + \overline{g(z)}| \\ &= \left| -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|z^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)|b_n|\bar{z}^n \right| \\ & \quad - \alpha|b| \left| z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n + \sum_{n=2}^{\infty} |b_n|\bar{z}^n \right| \\ & < \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1) + \alpha|b|]|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) + \alpha|b|]|b_n| - \alpha|b| \\ & \leq 0. \quad \text{با استفاده از (۵.۳)} \end{aligned}$$

□

بنابراین $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است که اثبات قضیه ۱.۳ را کامل می‌کند.

تابع همساز

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n-1+\alpha|b|} x_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n+1+\alpha|b|} \bar{y}_n \bar{z}^n \quad (۸.۳)$$

که $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=2}^{\infty} |y_n| = 1$ نشان می‌دهد که برای کران‌های ضرایب در قضیه ۱.۳ تساوی برقرار است.

توابع به فرم (۸.۳) در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ قرار دارند، زیرا

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=2}^{\infty} |y_n| = 1.$$

در قضیه بعد، درباره‌ی نتایج رشد^۷ برای توابعی که در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ قرار دارند بحث می‌کنیم.

قضیه ۳.۱.۳. اگر $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ باشد، آنگاه

$$|f(z)| \leq r + \frac{\alpha|b|}{1+\alpha|b|} r^2, \quad |z| = r < 1$$

و

$$|f(z)| \geq r - \frac{\alpha|b|}{1+\alpha|b|} r^2, \quad |z| = r < 1.$$

برهان. فرض کنیم $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ باشد. با قدر مطلق گرفتن از f داریم.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\ &\leq r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^2 \\ &= r + \frac{\alpha|b|}{1+\alpha|b|} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \frac{1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| \right) r^2 \\ &\leq r + \frac{\alpha|b|}{1+\alpha|b|} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \frac{n+1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| \right) r^2 \\ &\leq r + \frac{\alpha|b|}{1+\alpha|b|} r^2. \end{aligned}$$

^۷growth result

و

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\
&\geq r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^2 \\
&= r - \frac{\alpha|b|}{1 + \alpha|b|} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \frac{1 + \alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| \right) r^2 \\
&\geq r - \frac{\alpha|b|}{1 + \alpha|b|} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n - 1 + \alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \frac{n + 1 + \alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| \right) r^2 \\
&\geq r - \frac{\alpha|b|}{1 + \alpha|b|} r^2.
\end{aligned}$$

□

در ادامه، نقاط فرین پوسته محدب بسته $\bar{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ که با $clco \bar{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ نمایش داده می‌شود را بدست می‌آوریم.

قضیه ۴.۱.۳. $f \in clco \bar{S}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است اگر و تنها اگر $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n)$ باشد، که

$$h_1(z) = z, h_n(z) = z - \frac{\alpha|b|}{n - 1 + \alpha|b|} z^n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

،

$$g_n(z) = z - \frac{\alpha|b|}{n + 1 + \alpha|b|} \bar{z}^n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0 \text{ است.}$$

برهان.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n - 1 + \alpha|b|} X_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n + 1 + \alpha|b|} Y_n \bar{z}^n \\
&= z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n - 1 + \alpha|b|} X_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n + 1 + \alpha|b|} Y_n \bar{z}^n
\end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n| \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1+\alpha|b|}{\alpha|b|} \left(\frac{\alpha|b|}{n-1+\alpha|b|} X_n \right) \\
 & \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1+\alpha|b|}{\alpha|b|} \left(\frac{\alpha|b|}{n+1+\alpha|b|} Y_n \right) \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \\
 &= 1 - X_1 - Y_1 \\
 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

بنابراین $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است.

برعکس، فرض می‌کنیم $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ باشد. قرار دهید

$$X_n = \frac{n-1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |a_n|, (n = 2, 3, 4, \dots),$$

و

$$Y_n = \frac{n+1+\alpha|b|}{\alpha|b|} |b_n|, (n = 2, 3, 4, \dots),$$

که $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1$ است. در این صورت

$$\begin{aligned}
 f(z) &= h(z) + \overline{g(z)} \\
 &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n \\
 &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n-1+\alpha|b|} X_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha|b|}{n+1+\alpha|b|} Y_n \bar{z}^n \\
 &= z + \sum_{n=2}^{\infty} (h_n(z) - z) X_n + \sum_{n=2}^{\infty} (g_n(z) - z) Y_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n).
 \end{aligned}$$

□

برای توابع همساز $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n$ و $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ تلفیق f و F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * F)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n A_n| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n B_n| \bar{z}^n. \quad (9.3)$$

در قضیه بعد، ویژگی‌های تلفیق رده‌ی $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۳. برای $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ، فرض کنیم $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \beta)$ و $F \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ باشد. در این صورت $(f * F) \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \beta) \subset \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است.

برهان. $f(z)$ و $F(z)$ را به صورت $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ و $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |B_n| \bar{z}^n$ بنویسید. در این صورت تلفیق f و F در (۹.۳) داده شده است.

توجه کنید که چون $F \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ است، $|A_n| \leq 1$ و $|B_n| \leq 1$ می‌باشد. حال داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\beta|b|] |a_n| |A_n| + \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\beta|b|] |b_n| |B_n| \\ & \leq \sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\beta|b|] |a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\beta|b|] |b_n|. \end{aligned}$$

بنابراین، $(f * F) \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha) \subset \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \beta)$ است، زیرا اگر $\beta|b| \leq \alpha|b|$ باشد آنگاه سمت راست نامساوی بالا دارای کران $\beta|b|$ است. $\square$

حال، خواص ترکیب محدب از اعضای $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۳. رده‌ی $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ تحت ترکیب محدب بسته است.

برهان. برای $i = 1, 2, 3, \dots$ فرض کنید $f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ که f_i به صورت زیر است

$$f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n,i}| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} |b_{n,i}| \bar{z}^n.$$

برای $1 \leq c_i \leq \infty$ ، ترکیب محدب f_i را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(z) &= c_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_1 |a_{n,1}| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_1 |b_{n,1}| \bar{z}^n - c_2 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_2 |a_{n,2}| z^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_2 |b_{n,2}| \bar{z}^n \dots \\ &= z \sum_{i=1}^{\infty} c_i - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n. \end{aligned}$$

سپس، ملاحظه کنید

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left([n-1+\beta|b|] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \sum_{n=2}^{\infty} \left([n+1+\alpha|b|] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\ &= c_1 \sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\alpha|b|] |a_{n,1}| + \dots + c_m \sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\alpha|b|] |a_{n,m}| + \dots \\ &\quad + c_1 \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\alpha|b|] |b_{n,1}| + \dots + c_m \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\alpha|b|] |b_{n,m}| + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\alpha|b|] |a_{n,i}| + \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\alpha|b|] |b_{n,i}| \right\}. \end{aligned}$$

حالا، $f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$ ، بنابراین از قضیه ۱.۳ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n-1+\alpha|b|] |a_{n,i}| + \sum_{n=2}^{\infty} [n+1+\alpha|b|] |b_{n,i}| \leq \alpha|b|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left([n-1+\alpha|b|] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left([n+1+\alpha|b|] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\ &\leq \alpha|b| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \\ &= \alpha|b|. \end{aligned}$$

□

با استفاده مجدد از قضیه ۱.۳ داریم، $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(b, \alpha)$.

۲.۳. مرتبه مختلط با توجه به نقاط متقارن

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ باشد. در این صورت $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ را همساز ستاره گون از مرتبه مختلط، با توجه به نقاط متقارن گوئیم اگر برای $0 \leq \alpha < 1$ ، عدد مختلط ناصفر b با $0 \leq \theta < 2\pi$ و $0 \leq r < 1$ ، $f'(z) = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(z)) = f(re^{i\theta})$ ، $z' = \frac{\partial}{\partial \theta}(z = re^{i\theta})$ ، $|b| \leq 1$

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{zf'(z)}{z'(f(z) - f(-z))} - 1 \right) \right\} \geq \alpha, \quad |z| = r < 1.$$

همچنین، فرض می‌کنیم که $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha) = \mathbb{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha) \cap \overline{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}$ است. محدودیت $|b| \leq 1$ برای اطمینان از این است که $J_f(z) > 0$ باشد یعنی f تک ارز باشد.

در قضیه ۱.۳.۲، جهانگیری در سال ۱۹۹۹ [۵]، شرط کافی مشابه برای $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(1, \alpha)$ که b_1 لزوماً صفر نیست را به دست آورد. همچنین جهانگیری ثابت کرد شرطی که در قضیه ۱.۳.۲ بیان شده، یک شرط لازم برای قرار گرفتن تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۲.۳)، در $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}^*(1, \alpha)$ است. قضیه زیر که توسط جانتنگ و عبدالحلیم در [۷] ثابت شده، در این بخش مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ به فرم (۱.۳) باشد. اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1 - \alpha)|b|} \right) |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1 - \alpha)|b|} \right) |b_n| \leq 1 \quad (۱۰.۳)$$

که $0 \leq \alpha < 1$ و b عدد مختلط ناصفر با $|b| \leq 1$ باشد، آنگاه f در Δ همساز تک‌ارز است و $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ است. اگر $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ باشد نیز شرط (۱۰.۳) لازم است. [۷]

در ادامه، نقاط فرین پوسته محدب بسته $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ که با $clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ نمایش داده می‌شود را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۳. $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n). \quad (۱۱.۳)$$

که

$$h_1(z) = z, h_n(z) = z - \frac{2(1 - \alpha)|b|}{2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} z^n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

،

$$g_n(z) = z + \frac{2(1-\alpha)|b|}{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} \bar{z}^n (n = 1, 2, 3, \dots)$$
و $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0$ است. به خصوص $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $\bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ هستند.
 برهان.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1-\alpha)|b|}{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} X_n z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-\alpha)|b|}{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} Y_n \bar{z}^n \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1-\alpha)|b|} \left(\frac{2(1-\alpha)|b|}{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} \right) X_n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1-\alpha)|b|} \left(\frac{2(1-\alpha)|b|}{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)} \right) Y_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \\ &= 1 - X_1 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

بنابراین $f \in clco \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ است.

برعکس، فرض می‌کنیم $f \in clco \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ باشد. قرار دهید

$$X_n = \frac{2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1-\alpha)|b|} |a_n|, (n = 2, 3, \dots),$$

و

$$Y_n = \frac{2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)}{2(1-\alpha)|b|} |b_n|, (n = 1, 2, 3, \dots),$$

از قضیه ۲.۲.۳، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $0 \leq X_n \leq 1, n = (2, 3, 4, \dots)$ و همین طور $0 \leq Y_n \leq 1, n = (1, 2, 3, \dots)$ است. تعریف می‌کنیم $X_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. دوباره از قضیه ۲.۲.۳ داریم $X_1 \geq 0$. بنابراین $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n)$ طبق آنچه خواسته شده بود، حاصل می‌شود.
 $\square$

برای توابع همساز $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ و $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \bar{z}^n$ ، تلفیق^۹ f و F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * F)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n A_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n B_n| \bar{z}^n. \quad (۱۲.۳)$$

در قضیه بعد، ویژگی‌های تلفیق رده‌ی $\bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۳. برای $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ ، فرض کنید $f \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ و $F \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \beta)$ باشد. در این صورت $(f * F) \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha) \subset \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \beta)$ است.

برهان. $f(z)$ و $F(z)$ را به صورت $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ و $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \bar{z}^n$ بنویسید. در این صورت تلفیق f و F در (۱۲.۳) داده شده است.

توجه کنید که چون $f \in clco \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \beta)$ است، $|A_n| \leq 1$ و $|B_n| \leq 1$ می‌باشد. حال داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_n| |A_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_n| |B_n| \\ & \leq \sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_n|. \end{aligned}$$

بنابراین، $(f * F) \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha) \subset \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \beta)$ است، زیرا اگر $2(1 - \alpha) \leq 2(1 - \beta)$ باشد آنگاه سمت راست نامساوی بالا دارای کران $2(1 - \alpha)$ است. $\square$

حال، خواص ترکیب محدب از اعضای $\bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۵.۲.۳. رده‌ی $\bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ تحت ترکیب محدب بسته است.

برهان. برای $i = 1, 2, 3, \dots$ ، فرض کنید $f_i \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ که f_i به صورت زیر است

$$f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n,i}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n,i}| \bar{z}^n.$$

برای $1 \leq c_i \leq \infty$ ، ترکیب محدب f_i را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(z) &= c_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_1 |a_{n,1}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_1 |b_{n,1}| \bar{z}^n + c_2 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_2 |a_{n,2}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_2 |b_{n,2}| \bar{z}^n \dots \\ &= z \sum_{i=1}^{\infty} c_i - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n. \end{aligned}$$

سپس، ملاحظه کنید

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left([2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left([2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\ &= c_1 \sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_{n,1}| + \dots \\ &+ c_m \sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_{n,m}| + \dots \\ &+ c_1 \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_{n,1}| + \dots \\ &+ c_m \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_{n,m}| + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_{n,i}| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_{n,i}| \right\}. \end{aligned}$$

حال چون $f_i \in \bar{S}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ ، بنابراین از قضیه ۲.۲.۳ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} [2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |a_{n,i}| + \sum_{n=1}^{\infty} [2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] |b_{n,i}| \leq 2(1 - \alpha).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left([2n + (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left([2n - (|b| - \alpha|b| - 1)(1 - (-1)^n)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\
& \leq 2(1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \\
& = 2(1 - \alpha).
\end{aligned}$$

□

با استفاده مجدد از قضیه ۲.۲.۳ داریم، $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$.

۳.۳. مرتبه مختلط با توجه به نقاط مزدوج

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنیم $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ باشد. در این صورت $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ را همساز ستاره‌گون از مرتبه مختلط، با توجه به نقاط مزدوج گوئیم اگر برای $0 \leq \alpha < 1$ ، عدد مختلط ناصفر b با $0 \leq \theta < 2\pi$ و $0 \leq r < 1$ ، $f'(z) = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(z) = f(re^{i\theta}))$ ، $z' = \frac{\partial}{\partial \theta}(z = re^{i\theta})$ ، $|b| \leq 1$

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{2zf'(z)}{z'(f(z) + \overline{f(\bar{z})})} - 1 \right) \right\} \geq \alpha, \quad |z| = r < 1.$$

همچنین، فرض می‌کنیم که $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha) = \mathbb{S}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha) \cap \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}}$ است. محدودیت $|b| \leq 1$ برای اطمینان از این است که $J_f(z) > 0$ باشد یعنی f تک ارز باشد.

در قضیه ۱.۳.۲، جهانگیری در سال ۱۹۹۹ [۵]، شرط کافی مشابه برای $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}_c}^*(1, \alpha)$ که b_1 لزوماً صفر نیست را بدست آورد. همچنین جهانگیری ثابت کرد شرطی که در قضیه ۱.۳.۲ بیان شده، یک شرط لازم برای قرار گرفتن تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۲.۳)، در $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(1, \alpha)$ است. قضیه زیر که توسط جانتنگ و عبدالحلیم در [۷] ثابت شده، در این بخش مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ به فرم (۱.۳) باشد. اگر

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n + (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1 - \alpha)|b|} \right) |a_n| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n - (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1 - \alpha)|b|} \right) |b_n| \leq 1
\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

که $0 \leq \alpha < 1$ و b عدد مختلط ناصفر با $|b| \leq 1$ باشد، آنگاه f در Δ همساز تک‌ارز است و $f \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ است. اگر $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ باشد نیز شرط (۱۳.۳) لازم است. [۷]

در ادامه، نقاط فرین پوسته محدب بسته $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ که با $clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ نمایش داده می‌شود را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۳. $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n). \quad (14.3)$$

که

$$h_1(z) = z, h_n(z) = z - \frac{(1-\alpha)|b|}{n + (|b| - \alpha|b| - 1)} z^n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

،

$$g_n(z) = z + \frac{(1-\alpha)|b|}{n - (|b| - \alpha|b| - 1)} \bar{z}^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

و $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0$ است. به خصوص $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ هستند.

برهان.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)|b|}{n + (|b| - \alpha|b| - 1)} X_n z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)|b|}{n - (|b| - \alpha|b| - 1)} Y_n \bar{z}^n \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1-\alpha)|b|} \left(\frac{(1-\alpha)|b|}{n + (|b| - \alpha|b| - 1)} \right) X_n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1-\alpha)|b|} \left(\frac{(1-\alpha)|b|}{n - (|b| - \alpha|b| - 1)} \right) Y_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \\ &= 1 - X_1 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

بنابراین $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ است.

برعکس، فرض می‌کنیم $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ باشد. قرار دهید

$$X_n = \frac{n + (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1 - \alpha)|b|} |a_n|, (n = 2, 3, \dots),$$

و

$$Y_n = \frac{n - (|b| - \alpha|b| - 1)}{(1 - \alpha)|b|} |b_n|, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

از قضیه ۲.۳.۳، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $0 \leq X_n \leq 1, n = (2, 3, 4, \dots)$ و همین طور $0 \leq Y_n \leq 1, n = (1, 2, 3, \dots)$ است. تعریف می‌کنیم $X_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. دوباره از قضیه ۲.۳.۳ داریم $X_1 \geq 0$. بنابراین $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n + Y_n g_n)$ طبق آنچه خواسته شده بود، حاصل می‌شود. $\square$

برای توابع همساز $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n$ و $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ تلفیق f و F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * F)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n A_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n B_n| \bar{z}^n. \quad (15.3)$$

در قضیه بعد، ویژگی‌های تلفیق رده‌ی $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_s}^*(b, \alpha)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۳. برای $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ ، فرض کنیم $f \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ و $F \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \beta)$ باشد. در این صورت $(f * F) \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha) \subset \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \beta)$ است.

برهان. $f(z)$ و $F(z)$ را به صورت $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$ و $F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \bar{z}^n$ بنویسید. در این صورت تلفیق f و F در (۱۵.۳) داده شده است.

توجه کنید که چون $f \in clco \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \beta)$ است، $|A_n| \leq 1$ و $|B_n| \leq 1$ می‌باشد. حال داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_n| |A_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_n| |B_n| \\ & \leq \sum_{n=2}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_n|. \end{aligned}$$

بنابراین، $(f * F) \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha) \subset \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \beta)$ زیرا اگر $(1 - \alpha) \leq (1 - \beta)$ باشد آنگاه سمت راست نامساوی بالا دارای کران $(1 - \alpha)$ است. $\square$

حال، خواص ترکیب محدب از اعضای $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ را بررسی می کنیم.

قضیه ۵.۳.۳. رده‌ی $\bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ تحت ترکیب محدب بسته است.

برهان. برای $i = 1, 2, 3, \dots$ فرض کنید $f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ که f_i به صورت زیر است

$$f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n,i}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n,i}| \bar{z}^n.$$

برای $0 \leq c_i \leq 1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_i = 1$ ، ترکیب محدب f_i را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(z) &= c_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_1 |a_{n,1}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_1 |b_{n,1}| \bar{z}^n + c_2 z - \sum_{n=2}^{\infty} c_2 |a_{n,2}| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_2 |b_{n,2}| \bar{z}^n \dots \\ &= z \sum_{i=1}^{\infty} c_i - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n. \end{aligned}$$

سپس، ملاحظه کنید

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left([n + (|b| - \alpha|b| - 1)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left([n - (|b| - \alpha|b| - 1)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\
 & = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_{n,1}| + \dots \\
 & + c_m \sum_{n=1}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_{n,m}| + \dots \\
 & + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_{n,1}| + \dots \\
 & + c_m \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_{n,m}| + \dots \\
 & = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_{n,i}| \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_{n,i}| \right\}.
 \end{aligned}$$

حال چون $f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$ ، بنابراین از قضیه ۲.۳.۳ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n + (|b| - \alpha|b| - 1)] |a_{n,i}| + \sum_{n=1}^{\infty} [n - (|b| - \alpha|b| - 1)] |b_{n,i}| \leq (1 - \alpha).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left([n + (|b| - \alpha|b| - 1)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |a_{n,i}| \right| \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left([n - (|b| - \alpha|b| - 1)] \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_{n,i}| \right| \right) \\
 & \leq (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \\
 & = (1 - \alpha).
 \end{aligned}$$

□

با استفاده مجدد از قضیه ۲.۳.۳ داریم، $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \in \bar{\mathbb{S}}_{\mathbb{H}_c}^*(b, \alpha)$

مراجع

- [1] Y. Avci and E. Zlotkiewicz, *On harmonic univalent mappings*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 44 (1990), 1-7.
- [2] J. A. Cima and A. E. Livingston, *Integral smoothness properties of some harmonic mappings*, Complex Variables 11 (1989), 95-110.
- [3] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 9 (1984), 3-25.
- [4] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge University Press (2004).
- [5] J. M. Jahangiri, *Harmonic functions starlike in the unit disk*, J. Math. Anal. Appl. 235 (1999), 470-477.
- [6] A. Janteng, *Starlike functions of complex order*, Appl. Math. Sci., Vol. 3, 2009, no. 9-12, 557-564.
- [7] A. Janteng, S. A. Halim, *Properties of harmonic functions which are starlike of complex order with respect to symmetric points*, Int. Journal of Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 5-8, 275-281.
- [8] A. Janteng, S. A. Halim, *Properties of harmonic functions which are starlike of complex order with respect to conjugate points*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 28, 1353 - 1359
- [9] M. A. Nasr, and M. K. Aouf, (1985). *Starlike functions of complex order* .J. Natural Sci. Math., 25. 1-12 .
- [10] St. Ruscheweyh, *Neighborhoods of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 521-528.
- [11] T. Sheil-Small, *Constants for planar harmonic mappings*, J. London Math. Soc. (2). 42 (1990). 237-248.

-
- [12] H. Silverman, *Complex Variables*, CENGAGE Learning, March 1975. 3, 7.
- [13] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 51-(1975). 109-116.
- [14] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 220 (1998)., 283-289.
- [15] P. Wiatrowski, *The coefficients of a certain family of holomorphic functions*. Zeszyty Nauk. Univ. Lódz Nauk. Math. Przyrod Ser. II, 39 (1971). 75-85.
- [16] S.Yalçın Karpuzoğulları, M.Öztürk, M.Yamankaradeniz, *A subclass of harmonic univalent functions with negative coefficients*, Appl. Math. Comput., vol.142, Issues 2-3, 2003, 469-476.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
Bound	کران
Complex	مختلط
Convex Function	تابع محدب
Convex Hull	پوسته محدب
Extreme Point	نقطه فرین
Harmonic Function	تابع همساز
Order	مرتبه
Sense Preserving	حافظ جهت
Starlike Functions	توابع ستاره‌گون
Univalent	تک‌ارز

Surname: Yarali

Name: Jamaladdin

Title: Harmonic Starlike Functions

Supervisor: Dr Ahmad Zireh

Advisor: Syyed Reza Moosavi

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Complex Analysis

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: September 2013

Number of pages: [58](#)

Keywords: harmonic, starlike, harmonic convex

Abstract

Complex-valued harmonic functions that are univalent and sense-preserving in the unit disk Δ can be written in the form $f = h + \bar{g}$, where h and g are analytic in Δ . We give univalence criteria and sufficient coefficient conditions for normalized harmonic functions that are starlike. These coefficient conditions are also shown to be necessary when h has negative and g has positive coefficients. These lead to extreme points and distortion bounds.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Harmonic Starlike Functions

Supervisor

Dr Ahmad Zireh

Advisor

Syyed Reza Moosavi

by

Jamaladdin Yarali

September 2013