



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

مسئله مکانیابی معکوس روی گرافها

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر میثم علیشاهی

پژوهشگر

سعداله محمدی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

نام خانوادگی دانشجو: محمدی

نام: سعداله

عنوان: مسئله مکانیابی معکوس روی گراف‌ها

استاد راهنما: دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور: دکتر میثم علیشاهی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۹۴

واژگان کلیدی: ۱- میانه معکوس، درخت، دور، مسئله مکانیابی.

چکیده

در مسائل مکانیابی گسسته (در حالت خاص، مسئله p -میانه)، " n " مشتری با وزن معلوم موجود می‌باشد که هدف پیدا کردن مکان " p " سرویس دهنده (میانه) می‌باشد، به‌طوری‌که مجموع فاصله وزنی مشتریان تا نزدیک‌ترین سرویس دهنده، کمترین مقدار ممکن شود.

اما مسائل مکانیابی گسسته معکوس (در حالت خاص، p -میانه معکوس) عبارتند از تغییر پارامترهای یک مسئله p -میانه با کمترین هزینه که یک مجموعه از پیش تعیین شده سرویس دهندگان " p " به عنوان p -میانه واقع شود. هزینه‌ها متناسب با افزایش و یا کاهش پارامترهای متناظر می‌باشند. این پارامترها طول یال‌ها و وزن رئوس می‌باشد. هر پارامتر فقط می‌تواند بین یک کران پایین و یک کران بالا تغییر کند.

در این پایان نامه، ما ابتدا مسئله ۱-میانه معکوس با وزن رئوس متغیر روی درخت و دور را بررسی می‌کنیم و در انتها نیز مسئله هسته مقید معکوس روی درخت مورد بررسی قرار می‌گیرد که مسئله هسته روی درخت در واقع مسیری است که مجموع فاصله وزنی همه رئوس از این مسیر کمترین مقدار ممکن شود.

تقدیم به

خوشیدینام
امام زمانم

که جهان از نور وجودش روشن است و شقایق ماه بهانه دیدنش جمعه‌ها را انتظار می‌کشد.

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن، به‌خاطر تو، زندانی کشیدن به‌خاطر تو و رنج بردن به پای تو، تنها لذت بزرگ زندگی من است. از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت. به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

^۱ مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش، حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از اساتید فرهیخته، جناب آقای دکتر مهدی زعفرانی و جناب آقای دکتر برات اله غزنوی قصونی که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، با تمام وجود تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود که در دوران کارشناسی و کارشناسی ارشد از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر نمایم و از تمامی دوستان و هم‌کلاسی‌های گرامی‌ام که در طول تحصیل افتخار مصاحبت و هم‌فکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاس‌گزاری نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهر عزیزم، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

سعداله محمدی
شهریور ۱۳۹۲

مقاله مستخرج از پایان نامه

۱. سعداله محمدی-جعفر فتحعلی، (۱۳۹۲)، مسأله هسته مقید معکوس روی درخت، پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران، ۳۷۴-۳۷۱، دانشگاه بوعلی سینا، همدان.



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سعید محمدی رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات تحت عنوان مساله مکانیابی معکوس روی گرافها که در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۲۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸۷۷)	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
---	------------------------------------	--------------------------------

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

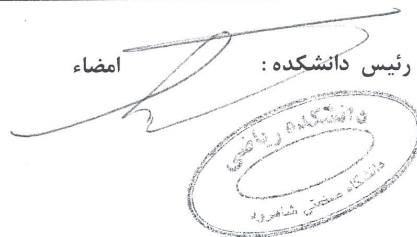
۳- خوب (۱۶/۹۹ - ۱۶)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر مهدی زعفرانی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر برات اله غزنوی قصونی	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء



تعهد نامه

اینجانب سعداله محمدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مساله مکانیابی معکوس روی گراف‌ها تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

فهرست مطالب

ر	لیست تصاویر
ز	لیست جداول
۱	۱ مقدمه ای بر مکانیابی و مکانیابی معکوس
۱	۱.۱ مکانیابی
۴	۱.۱.۱ فضای مسائل مکانیابی
۵	۲.۱.۱ سرویس دهندگان
۶	۳.۱.۱ اندازه گیری فاصله
۷	۴.۱.۱ وزن
۷	۵.۱.۱ مشتریان
۸	۶.۱.۱ اهداف تصمیم گیرنده
۸	۷.۱.۱ تابع هدف های پرکاربرد مکانیابی
۹	۸.۱.۱ برخی مسائل مهم مکانیابی
۱۰	۲.۱ مسئله p -میان و مدل ریاضی آن
۱۳	۳.۱ مکانیابی معکوس
۱۵	۴.۱ مسئله p -میان معکوس روی گراف ها و مدل ریاضی آن
۱۶	۱.۴.۱ مسئله p -میان معکوس با وزن رئوس متغیر
۱۸	۲.۴.۱ مسئله p -میان معکوس با طول یال های متغیر
۲۰	۲ مسئله ۱-میان معکوس روی درخت
۲۰	۱.۲ مسئله ۱-میان روی درخت
۲۲	۲.۲ بیان مسئله ۱-میان معکوس روی درخت و روش حل

۲۹	مثالی برای مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت	۳.۲
۳۴	مسئله ۱- میانه معکوس روی دور	۳
۳۴	معرفی و بیان مسئله	۱.۳
۳۶	برخی نماد گذاری ها	۲.۳
۴۶	بازنویسی برنامه ریزی خطی با دو متغیر	۳.۳
۴۸	روش حل تکراری	۴.۳
۵۳	مثالی برای مسئله ۱- میانه معکوس روی دور	۵.۳
۷۵	مسئله هسته مقید معکوس روی درخت	۴
۷۵	مقدمه	۱.۴
۷۶	مسئله هسته مقید روی درخت	۲.۴
۷۶	روش حلی برای پیدا کردن هسته مقید روی درخت	۱.۲.۴
۷۸	مدل ریاضی مسئله هسته مقید معکوس روی درخت	۳.۴
۷۹	روش حلی برای مسئله هسته مقید معکوس روی درخت	۱.۳.۴
۸۱	مراجع	
۸۵	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۸۹	واژه نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۲۳	درختی که رأس m ، ۱-میانه می باشد.	۱.۲
۲۴	زیر درخت های ریشه دار در رأس s .	۲.۲
۲۹	درختی با ۱۴ رأس.	۳.۲
۳۰	زیر درخت ریشه دار در رأس v_8 ، با بیشترین وزن (زیر درخت T_0).	۴.۲
۳۳	درخت، با وزن های اصلاح شده.	۵.۲
۳۵	دوری با $n + 1$ رأس.	۱.۳
۳۹	گراف مربوط به حالت اول.	۲.۳
۴۰	گراف مربوط به حالت دوم.	۳.۳
۴۱	گراف مربوط به حالت سوم.	۴.۳
۴۱	گراف مربوط به مورد اول از حالت چهارم.	۵.۳
۴۲	گراف مربوط به مورد دوم از حالت چهارم.	۶.۳
۴۳	گراف مربوط به مورد سوم از حالت چهارم.	۷.۳
۵۳	دوری با ۹ رأس.	۸.۳
۵۶	نمودار جعبه های $B(r, s)$ به ازای $r, s = 0, 1, \dots, 8$.	۹.۳
۷۰	عملیات انجام شده روی جعبه های $B(r, s)$ تا رسیدن به یک نقطه شدنی.	۱۰.۳
۷۴	گراف دور با وزن های اصلاح شده.	۱۱.۳
۷۷	درختی با ۱۰ رأس.	۱.۴

لیست جداول

۲۹	اطلاعات مربوط به درخت شکل (۳.۲)	۱.۲
۵۲	تعداد برنامه ریزی‌های خطی موضعی حل شده به وسیله روش تکراری	۱.۳
۵۴	اطلاعات مربوط به دور شکل (۸.۳)	۲.۳
۵۷	مقادیر ξ و η به ازای $r, s = 0, \dots, 8$	۳.۳
۷۹	اطلاعات مربوط به درخت شکل (۱.۴)	۱.۴

فصل ۱

مقدمه ای بر مکانیابی و مکانیابی معکوس

۱.۱ مکانیابی

مسائل مکانیابی مسائلی هستند که وقتی به دنبال یافتن محل و نحوه استقرار بهینه یک یا چند سرویس دهنده بر اساس عوامل و متغیرهای مؤثر بر مکانیابی هستیم، با آنها مواجه می‌شویم. معمولاً در این مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری (سرویس گیرنده یا نقطه تقاضا) موجودند و می‌خواهیم بهترین مکان برای استقرار سرویس دهندگان جدید را به گونه ای بیابیم که هزینه حمل و نقل، تأثیرات محیطی نامطلوب، زمان سرویس دهی، سود، کیفیت، نحوه توزیع سرویس و رعایت انصاف و برابری در آن، کسب بیشترین سهم در بازار و ... بسته به شرایط مسئله بهینه شوند.

مکانیابی تأسیسات و تسهیلات، از کاربردی‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی می‌باشد که در بسیاری از شاخه‌های علوم گسترده شده است. از جمله این شاخه‌ها می‌توان به تحقیق در عملیات، علوم مدیریت و تخصیص منابع، مهندسی صنایع، جغرافیا، اقتصاد، علوم کامپیوتر، ریاضیات، بازاریابی، مهندسی برق، برنامه ریزی شهری، علوم نظامی و دیگر شاخه‌های مرتبط اشاره کرد. از کاربردهای معروف مسائل مکانیابی می‌توان مکانیابی انبارها، کارخانه‌ها، ماشین آلات کارخانه، بیمارستان‌ها، نمایندگی‌های فروش، آتش نشانی‌ها، پاسگاه‌های پلیس، پایانه‌های مسافری، اجزاء الکترونیکی در مدارها، آژیر خطر، چاه‌های نفت، تأسیسات نظامی، نیروگاه‌ها، آزمایشگاه‌ها و ... را نام برد. ترکیبی از مسائل مسیریابی و مکانیابی نیز در این حوزه مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند.

شاید بتوان پیدایش مسئله مکانیابی را به زمانی نسبت داد که در قرن هفدهم فرما^۱ مسئله را به این صورت مطرح کرد: "فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه ای بیابید که مجموع

^۱ Fermat

فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده، مینیمم شود.^۲ «توریچلی» در سال ۱۶۴۰ مشاهده کرد که اگر سه نقطه موجود را سه رأس یک مثلث در نظر بگیریم، محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های متساوی الاضلاعی که بر روی اضلاع مثلث اصلی و رو به بیرون آن ساخته می‌شوند، جواب مسئله است. بدین دلیل، نقطه بهینه را نقطه توریچلی می‌نامند. در سال ۱۶۴۷ کاوالیری^۳ نشان داد که زاویه بین نقطه توریچلی و سه نقطه مورد نظر، ۱۲۰ درجه است. سیمپسون^۴ در سال ۱۷۵۰ ثابت کرد که اگر یک مثلث متساوی الاضلاع بر سه نقطه داده شده گذرانده شود و رئوس این مثلث به یکی از این سه نقطه که بر روی ضلع مقابل قرار گرفته وصل شود، محل تقاطع این سه خط، نقطه توریچلی را می‌دهد. از این رو این سه خط را خطوط سیمپسون می‌نامند.

حالت مستثنایی که سه نقطه داده شده مثلثی را تشکیل دهند که در یک رأس زاویه بیشتر یا مساوی ۱۲۰ درجه داشته باشد، تا سال ۱۸۳۴ بدون حل باقی ماند، تا اینکه هینن^۵ ثابت کرد همان رأسی که در آن زاویه بیشتر یا مساوی ۱۲۰ درجه است، جواب بهینه مسئله است. او همچنین ثابت کرد طول خطوط سیمپسون با هم مساوی هستند و طول آنها با فاصله نقطه بهینه از سه نقطه داده شده نیز برابر است. فسبندر^۶ مفهوم دوگانی را برای مسئله فرما مطرح کرد که بعدها در سال ۱۹۶۷ توسط کوهن^۷ [۴۶] به‌طور مبسوطی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی از تحقیقات وی منتشر گردید.

نظریه مکانیابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر در سال ۱۹۰۹ تحت عنوان *Über den Standort der Industrien* متولد شد [۳، ۶۷]. وبر در این کتاب نتایج تحقیقات خود در مورد صنایع کارخانه‌ای را ارائه کرد. در واقع می‌توان گفت که اولین تعریف مسئله مکانیابی به صورت کاربردی توسط وبر^۸ [۶۷] ارائه شد.

نظریه وبر دارای سه اصل اساسی است. اول اینکه محل مواد اولیه معلوم است. دوم اینکه مکان و میزان مصرف مشتریان مشخص است. تعداد این مکان‌ها متناهی است و جدا از هم هستند. هر تولید کننده بازار نامحدودی در اختیار دارد و امتیازات انحصاری از نظر انتخاب مکان وجود ندارد. سوم اینکه چندین مکان ثابت برای عرضه نیروی کار وجود دارد به‌طوری‌که این نیروی کار دارای قابلیت تحرک و جابجایی نبوده و عرضه آن نامحدود است.

مطالعات جدی بر روی مکانیابی از زمانی شروع شد که در سال ۱۹۶۴ حکیمی^۹ [۳۴]، تابع هدف را

^۲ Torricelli

^۳ Cavalieri

^۴ Simpson

^۵ Heinen

^۶ Fesbender

^۷ Kuhn

^۸ Weber

^۹ Hakimi

به دو صورت کمترین مجموع^{۱۰} و مینیماکس^{۱۱} مطرح کرد. او همچنین مطالعاتی بر روی مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها انجام داد. در واقع حکیمی کسی بود که روابط p-میانه را ابداع و مسئله p-میانه را معرفی کرد. از آن زمان به بعد مطالعات زیادی بر روی مسائل مکانیابی انجام شد. معمولاً در مسائل مکانیابی سرویس دهندگانی که می‌خواهیم مکان استقرار آنها را بیابیم، مطلوب در نظر گرفته می‌شوند و تنها تأثیرات مثبت آنها را به حساب می‌آوریم. بنابراین نزدیک بودن به آنها نوعی جاذبه و دور بودن از آنها نوعی دافعه تلقی می‌شود. در جوامع مدرن و پیشرفته امروزی با فعالیت‌ها و سرویس دهندگانی روبه‌رو هستیم که علاوه بر ارائه خدمات، تأثیرات منفی و مخربی نیز بر محیط پیرامون خود دارند. کارگاه‌های تولیدی، مثال آشکار این مورد هستند. کارگاه کالای مورد نیاز جامعه را تولید کرده و از طرف دیگر آلاینده محیط زیست است. مراکز ورزشی در عین حال که باید در دسترس باشند و امکانات ورزشی و تفریحی مناسب را ارائه دهند، می‌توانند تأثیرات منفی همچون سر و صدا، ازدحام جمعیت و یا مشکلاتی از این قبیل را داشته باشند.

مطالعه مدل‌هایی که هر دو ویژگی را به طور همزمان در خود دارند، انطباق بیشتری با مسائل واقعی و کاربردی دارد و به سرعت در حال پیشرفت است. از دهه ۱۹۶۰ تا اواسط ۱۹۷۰ مدل‌های کمترین مجموع در بخش‌های خصوصی و مدل‌های مینیماکس در بخش خصوصی به کار گرفته می‌شد. از اواسط ۱۹۷۰ این موضوع تغییر کرد. گلدمن و دیرینگ^{۱۲} [۳۲] و چرچ و گارفینکل^{۱۳} [۱۹] اولین کسانی بودند که مواردی را پیشنهاد کردند که بعدها مدل‌های مکانیابی مضر^{۱۴} نام گرفتند. در این دسته مدل‌ها، مشتریان فرض مطلوب بودن سرویس دهنده‌ها را کنار می‌گذارند و دیگر سعی در نزدیک‌تر بودن به آنها را نداشته و تا حدی از آنها دوری می‌کنند. به عنوان کاربردی از این مدل‌ها می‌توان به مکانیابی راکتورهای هسته‌ای، مراکز تصفیه آب و اماکن دفن زباله اشاره کرد. در حقیقت ویژگی‌های این نوع سرویس دهندگان نوعی دافعه ایجاد می‌کند و سبب می‌شود که مشتریان آنها را از خود دور کنند.

اولین طبقه بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر^{۱۵} و میرچندانی^{۱۶} [۳۸] ارائه شد. پس از آن طبقه بندی‌های دیگری از جمله توسط هاماجر^{۱۷} و نیکل^{۱۸} [۳۶] انجام شد. همچنین بررسی‌هایی از کارهای انجام شده در این زمینه ارائه شد که از آن جمله تانسل^{۱۹} و همکاران [۶۳]، کرارپ^{۲۰} و پروزن^{۲۱}

^{۱۰} Minisum^{۱۱} Minimax^{۱۲} Golman and Dearing^{۱۳} Church and Garfinkel^{۱۴} Obnoxious^{۱۵} Handler^{۱۶} Mirchandani^{۱۷} Hamacher^{۱۸} Nickel^{۱۹} Tansel^{۲۰} Krarup^{۲۱} Pruzan

[۴۵]، هانسن^{۲۲} و همکاران [۳۹]، اون^{۲۳} و دسکین^{۲۴} [۵۶]، کاپانرا^{۲۵} [۱۸]، اسکاپارا^{۲۶} و اسکاتلا^{۲۷} [۶۱] لیستی از کارهای انجام شده در زمینه‌های مختلف مکانیابی ارائه کرده‌اند. کارنت^{۲۸} و همکاران نیز کاربردهای مسائل مکانیابی را در [۲۲] بیان نموده‌اند.

۱.۱.۱ فضای مسائل مکانیابی

معمولاً فضای مسائل مکانیابی یکی از سه دسته زیر است:

پیوسته: هرگاه فضای مکان تأسیسات و نقاط تقاضا پیوسته باشند، یعنی توسط متغیرهایی که به صورت پیوسته تغییر می‌کنند، نظیر مختصات مشخص شود، مدل را پیوسته می‌گویند. در این مدل‌ها مکان سرویس‌دهنده را در فضای d بعدی R^d پیدا می‌کنیم. اکثر مسائل مکانیابی در فضای حداقل دوبعدی تعریف می‌شوند. مسائل دوبعدی به خاطر ویژگی‌های هندسی و قابلیت ادراک بصری آنها بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند. در مواجهه با مسائل پیوسته از ابزارهای هندسه و آنالیز (آنالیز تابعی که معمولاً از ویژگی‌های تحدب و تقعر استفاده می‌شود) بهره می‌بریم. عمدتاً مسائل مکانیابی طبیعت و توصیف هندسی دارند ولی مطالعه و روند حل آن‌ها هم شامل بررسی‌های هندسی و هم آنالیزی است.

در کاربردهای عملی، از فضای پیوسته به دو شکل استفاده می‌شود. مسطح، مثل مدارهای مجتمع در مدارهای الکتریکی و الکترونیکی، یک تکه کاغذ، میز کار و یا یک تکه زمین و کروی برای نواحی مثل قاره‌ها و حتی کره زمین. در این حالت‌ها برای مشخص کردن نقاط، احتیاج به دو مؤلفه داریم. در مسائلی که با مکانیابی در ساختمان زیر آب و یا در هوا روبه‌رو هستیم، باید مشخصه سومی که ارتفاع یا عمق را نشان می‌دهد را هم به حساب آوریم. مسائل یک بعدی عمدتاً زمانی رخ می‌دهد که مکانیابی را روی یک خط (مستقیم یا دارای انحناء) انجام می‌دهیم، مثل کشیدن یک بزرگراه یا خط آهن.

گسسته: مدل‌های مکانیابی گسسته مدل‌هایی هستند که در آنها باید مکان سرویس‌دهندگان را تنها روی نقاط از پیش تعیین شده پیدا کنیم. در این مدل‌ها مجموعه‌ای متناهی از نقاط کاندیدا داده شده است که توسط متغیرهای گسسته نشان داده می‌شوند. در مدل‌های مکانیابی پیوسته بر خلاف مدل‌های گسسته نمی‌توان لیست جامع و کاملی از نقاط در دسترس را ارائه داد. از این جهت مدل‌های پیوسته

^{۲۲} Hansen

^{۲۳} Owen

^{۲۴} Deskin

^{۲۵} Cappanera

^{۲۶} Scaparra

^{۲۷} Scutella

^{۲۸} Current

را مدل‌های ایجاد مکان و مدل‌های گسسته را مدل‌های انتخاب مکان نیز خوانده‌اند. یکی از ابزارهای مفید در ریاضیات در مواجهه با مسائل بزرگ و پیوسته ایده گسسته سازی فضا است. یکی از دلایل استفاده از این ایده ساده‌تر شدن و کاهش فضای جواب به تعداد متناهی مجموعه و کاربردهای ویژه در بعضی حالات خاص از مسئله است. در مدل‌های گسسته، در حقیقت هر نقطه نماینده یک ناحیه از فضا است. قابل توجه است که در حالت پیوسته باید یک تابع برای تخمین فاصله بین نقاط انتخاب شود که نحوه انتخاب یک تابع مناسب، خود موضوع مقالات زیادی در زمینه مکانیابی پیوسته بوده است ولی در حالت گسسته، فاصله واقعی پیموده شده و یا از قبل محاسبه شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین مدل‌های پیوسته به راحتی موقعیت‌های عملی و واقعی را مدل می‌کنند و به سرعت اجرا می‌شوند، زیرا به بانک‌های اطلاعاتی عظیم مسافت‌ها و همچنین محاسبه کوتاه‌ترین مسیر احتیاجی ندارند. این نکته قابل ذکر است که به خاطر استفاده از تابع تخمین، دقت کمتری نسبت به انواع گسسته دارند. البته انتخاب نوع فضا به نظر تصمیم گیرنده بستگی دارد. بعضی اوقات ممکن است مزایای مدل‌های پیوسته سبب شود که از دقت آن تا حدی صرف نظر شود. مثلاً در یک شهر ممکن است که انتخاب فاصله مستطیلی (منهتن^{۲۹}) دقت بسیار زیادی در تخمین فاصله واقعی بین دو نقطه از آن را داشته باشد. عمدتاً شهرهایی که دارای خیابان‌های عمود بر هم و توری شکل هستند در این دسته قرار می‌گیرند.

شبکه‌ای: مدل‌های شبکه‌ای مدل‌هایی هستند که در آن سرویس دهندگان روی رئوس و یا یال‌های یک شبکه مستقر می‌شوند. در حوزه مکانیابی با فضای شبکه‌ای، مسائلی وجود دارند که در حالت کلی مسائلی NP-سخت^{۳۰} هستند ولی در گراف‌های خاص مثل درخت‌ها یا K-درخت‌ها در زمان‌های حداکثر از درجه چندجمله‌ای قابل حل هستند. علاوه بر موارد ذکر شده ممکن است فضایی که سرویس دهنده باید در آن قرار گیرد با تعریف نواحی ممنوع محدود شود. نواحی ممنوع نواحی هستند که سرویس دهنده نباید در آن قرار گیرد. این مناطق می‌توانند قوانین منطقه بندی یا سایر محدودیت را مدل کنند.

۲.۱.۱ سرویس دهندگان

فرض کنید P تعداد سرویس دهنده‌ها باشد. حالت‌های $P=1$ و $P>1$ را در نظر می‌گیریم:

۱. $P=1$ ؛ در این حالت فقط یک فعالیت (سرویس دهنده) باید مستقر شود.

۲. $P>1$ ؛ در این حالت علاوه بر پیدا کردن محل استقرار سرویس دهنده‌ها باید چگونگی تخصیص مشتریان به سرویس دهندگان را نیز مشخص کنیم.

^{۲۹} Manhattan

^{۳۰} NP-hard

در حالتی که چند سرویس دهنده را مکانیابی می‌کنیم، ممکن است ارتباط بین سرویس دهندگان جدید نیز دارای اهمیت باشد. مدل‌هایی که این هدف را برآورده می‌کنند شامل فاصله وزن‌دار بین سرویس دهندگان جدید می‌باشند. به عنوان مثالی از این مورد می‌توان به مکانیابی تأسیسات نظامی اشاره کرد که در آن پراکنده شدن و فاصله داشتن سرویس دهندگان جدید میزان ضرر و خسارت و آسیب پذیری را کاهش می‌دهد. در مکانیابی پمپ‌های گاز و یا فست‌فودها تصمیم گیرنده سعی در پراکنده کردن آن‌ها دارد تا از ایجاد رقابت مستقیم آن‌ها با یکدیگر جلوگیری کند.

بر مبنای این پارامتر دو نوع مدل مختلف وجود دارد:

۱. مدل‌هایی که تعداد سرویس دهندگان جدید در آن ثابت است.

۲. مدل‌هایی که تعداد سرویس دهندگان جدید در آن متغیر است.

مدل‌های نوع دوم پیچیده‌تر از مدل‌های نوع اول هستند، زیرا باید متغیر دیگری را که نشان دهنده تعداد سرویس دهندگان است را به مدل اضافه کنیم. در مدل‌های مکانیابی دو حالت رخ می‌دهد. در بسیاری از مدل‌ها فرض بر این است که تصمیم گیرنده با یک فضای خالی روبه‌رو می‌شود که هیچ سرویس دهنده‌ای در آن وجود ندارد. در حالتی دیگر که آن را مکانیابی شرطی^{۳۱} می‌نامیم، تعدادی سرویس دهنده موجود هستند و هدف اضافه کردن تعداد دیگری است.

حداقل سه نوع ارتباط مختلف بین سرویس دهندگان می‌تواند وجود داشته باشد:

۱. فقط فاصله بین مشتریان و سرویس دهندگان در نظر گرفته شود، مثلاً در مکانیابی چند محل دفن زباله در یک کشور.

۲. فقط فاصله بین سرویس دهندگان محاسبه شود، مثلاً مکانیابی سایت‌های موشکی در یک ناحیه بدون جمعیت.

۳. هر دو نوع فاصله ذکر شده در بالا در نظر گرفته شود، مثلاً مکانیابی تعدادی سایت هسته‌ای در یک ناحیه دارای جمعیت.

۳.۱.۱ اندازه‌گیری فاصله

فاصله یک معیار عددی برای تشخیص میزان دور بودن اشیا است. در مسائل مکانیابی، فرض می‌کنیم که ارتباط بین تأسیسات مستقیماً وابسته به موقعیت مکانی آن‌ها باشد و معمولاً به شکل تابعی از فاصله بیان می‌شود. بنابراین مفهوم فاصله نقشی محوری در مکانیابی پیوسته دارد. با توجه به موقعیت و شرایط مسئله

^{۳۱} Conditional

اندازه‌های مختلفی برای ارزیابی فاصله به کار می‌روند. استفاده از روند نرم‌ها به عنوان تابع تخمین فاصله در یک مسئله مکانیابی با فضای پیوسته اولین بار توسط لاو و موریس^{۳۲} [۴۷] پیشنهاد شد. وارد و وندل^{۳۳} [۶۵، ۶۶] نیز استفاده از نرم‌های بلوکی^{۳۴} را مورد مطالعه قرار دادند. برای اندازه‌گیری فاصله بین مشتریان و سرویس دهندگان معمولاً از مترهای زیر استفاده می‌شود:

فاصله مینکوفسکی (نرم L_p):^{۳۵} این فاصله بین دو نقطه $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در صفحه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_p(x, y) = (k_1 |x_1 - y_1|^p + k_2 |x_2 - y_2|^p)^{1/p} \quad ; \quad 1 \leq p \leq \infty$$

فاصله مینکوفسکی برای مدل کردن مسائلی که فاصله در جهت‌های مختلف تقارن ندارد، مناسب است. در مسائل مکانیابی از بین خانواده L_p ها، فاصله اقلیدسی با $p=2$ و همچنین با $k_1 = k_2 = 1$ و فاصله مستطیلی (منهتن) با $p=1$ و $k_1 = k_2 = 1$ بیشتر مورد استفاده هستند. فاصله اقلیدسی برای مدل کردن فاصله‌های هوایی یا دریایی و فاصله مستطیلی برای مدل کردن فاصله‌های خیابانی (به شرط اینکه خیابان‌ها یک‌طرفه نباشند) مناسب هستند.

فاصله شبکه‌ای: برابر با کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی شبکه است. برای محاسبه این فاصله الگوریتم‌های مختلفی پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان الگوریتم‌های دایکسترا^{۳۶} و فلوید^{۳۷} [۸] را نام برد.

۴.۱.۱ وزن

فاصله‌ها در تابع هدف می‌توانند دارای وزن‌های ثابت یا متغیر، یکسان یا مختلف باشند. گاهی برای مشخص کردن میزان تقاضا در هر نقطه ثابت (مشتریان) از وزن‌ها استفاده می‌شود. در مسائل شبکه‌ای، وزن یال می‌تواند نشان دهنده طول مسیر، زمان پیمایش یال، میزان مخاطره و هزینه استفاده از یال و ارائه خدمات و مواردی از این قبیل باشد.

۵.۱.۱ مشتریان

در تعدادی از مدل‌های مکانیابی نقش مشتری‌ها نیز منظور شده است. لذا لازم است که نحوه توزیع و میزان تقاضای آن‌ها را بدانیم. برای مثال، ممکن است فرض کنیم مشتریان به طور یکنواخت در یک ناحیه توزیع

^{۳۲} Love and Morris

^{۳۳} Ward and Wendell

^{۳۴} Block norms

^{۳۵} Minkowsky

^{۳۶} Dijkstra

^{۳۷} Floyd

شده‌اند و یا در نقاط مخصوصی از فضا، مثلاً رئوس یک شبکه قرار دارند و میزان تقاضا تابعی از فاصله باشد.

مشتریان ممکن است به یک سرویس دهنده اختصاص یابند و یا ممکن است در انتخاب آن آزاد باشند که در آن صورت سؤال این است که آیا همیشه مشتریان به نزدیک‌ترین سرویس دهنده مراجعه می‌کنند یا عوامل دیگری در انتخاب سرویس دهنده توسط مشتری دخیل هستند.

۶.۱.۱ اهداف تصمیم گیرنده

مدل می‌تواند یک یا چند هدفه باشد. یعنی تصمیم گیرنده می‌تواند به دنبال مکان بهینه برای استقرار سرویس دهنده تحت یک هدف یا چند هدف به طور همزمان باشد. در بین مدل‌های تک هدفه حداقل سه دسته وجود دارند:

۱. مینیمم سازی تابعی از فاصله: کمترین مجموع^{۳۸}، مینیماکس^{۳۹}.

۲. ماکزیمم سازی تابعی از فاصله: بیشترین مجموع^{۴۰}، ماکزیمین^{۴۱}.

۳. تابع‌های ترکیبی از فاصله

۷.۱.۱ تابع هدف‌های پرکاربرد مکانیابی

در این بخش، لیستی از توابع هدف معروف مکانیابی با توضیح مختصری درباره هر کدام ارائه می‌دهیم:

ماکزین^{۴۲}: نقطه‌ای روی شبکه که مجموع فاصله‌های وزن‌دار را ماکزیمم کند.

مرکز: نقطه‌ای روی شبکه که بیشترین فاصله بین سرویس دهنده و مشتریان را مینیمم کند.

مرکز کلی^{۴۳}: نقطه‌ای روی شبکه که ماکزیمم فواصل بین آن و هر نقطه‌ای روی شبکه را مینیمم کند. تفاوت این مسئله با مسئله مرکز در این است که جواب مسئله مرکز کلی لزوماً یکی از رئوس شبکه نیست و می‌تواند هر جای آن از جمله روی یال‌ها نیز قرار گیرد.

مسئله چند وسیله‌ای وبر^{۴۴}: p نقطه روی صفحه که مجموع فواصل بین مشتری و نزدیک‌ترین سرویس دهنده را مینیمم می‌کنند.

میانه^{۴۵}: نقطه‌ای روی شبکه که مجموع فواصل بین سرویس دهنده و مشتریان را مینیمم کند.

^{۳۸} Minisum

^{۳۹} Minimax

^{۴۰} Maxisum

^{۴۱} Maximin

^{۴۲} Maxian

^{۴۳} General Center

^{۴۴} Multi Weber Problem

^{۴۵} Median

میانۀ کلی^{۴۶}: نقطه‌ای روی شبکه که مجموع فواصل بین آن و هر نقطه روی شبکه را مینیمم کند. تفاوت این مسئله با مسئله میانۀ در این است که جواب مسئله مرکز کلی لزوماً یکی از رئوس شبکه نیست و می‌تواند هر جای آن از جمله روی یال‌ها نیز قرار گیرد.

p-میانۀ^{۴۷}: استقرار p نقطه روی شبکه به گونه‌ای که مجموع فواصل بین مشتری تا نزدیکترین سرویس دهنده مینیمم گردد.

p-مرکز^{۴۸}: استقرار p نقطه روی شبکه به گونه‌ای که بیشترین فاصله بین مشتری و سرویس دهندگان مینیمم گردد.

۸.۱.۱ برخی مسائل مهم مکانیابی

ساده‌ترین مسئله مکانیابی همان مسئله‌ای است که فرما مطرح کرد. تعمیمی از آن که به مسئله فرما-وبر معروف می‌باشد، به این صورت است که فرض کنید n نقطه $p_1, p_2, \dots, p_n$ در صفحه موجودند و به ترتیب دارای وزن‌های $w_1, w_2, \dots, w_n$ هستند، می‌خواهیم نقطه‌ای مانند x را به گونه‌ای بیابیم که مجموع وزنی فاصله x تا نقاط موجود مینیمم شود. یعنی اگر فاصله x تا p را به صورت $d(x, p)$ نمایش دهیم آنگاه مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{i=1}^n w_i d(x, p_i)$$

مسئله فوق به مسئله تک وسیله‌ای با کمترین مجموع معروف است. همچنین اگر هدف پیدا کردن x به گونه‌ای باشد که فاصله وزنی x تا دورترین نقطه موجود مینیمم شود، آنگاه مسئله را مسئله تک وسیله‌ای مینیماکس گویند که به صورت زیر می‌باشد:

$$\min \max_{i=1, \dots, n} w_i d(x, p_i)$$

اگر به جای یک نقطه هدف پیدا کردن چند نقطه باشد یعنی چند مکان برای وسایل جدید به گونه‌ای بیابیم که نزدیکترین نقطه را به نزدیک‌ترین وسیله نسبت داده و بخواهیم مجموع وزنی فاصله‌ها را مینیمم کنیم، مسئله را مسئله چند وسیله‌ای با کمترین مجموع و در حالت دیگر آن را مسئله چند وسیله‌ای مینیماکس گویند. در این حالت اگر $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ مجموعه وسایل جدید باشد که باید مکانیابی شوند و $d(X, p) = \min_{x_i \in X} d(x_i, p)$ آنگاه تابع هدف در مسائل کمترین مجموع و مینیماکس به ترتیب می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

^{۴۶} General Median

^{۴۷} P-median

^{۴۸} P-center

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^n w_i d(X, p_i)$$

و

$$\min G(X) = \max_{i=1, \dots, n} w_i d(X, p_i)$$

واضح است که در حالت چند وسیله‌ای علاوه بر پیدا کردن مکان وسایل، مسئله تخصیص نقاط به وسایل جدید نیز مورد نظر است.

در بحث فوق اگر مکان وسایل جدید بتواند در هر نقطه‌ای از صفحه قرار بگیرد آنگاه مسئله را مسئله مکانیابی پیوسته گویند. برای این حالت راه حل‌هایی برای وقتی که تابع فاصله یعنی $d(x, p)$ به صورت یکی از نرم‌های خطی، اقلیدسی و چبیشف می‌باشد در [۲۷] ارائه شده است.

در حالت گسسته مکان وسایل جدید تنها می‌تواند در نقاط موجود قرار گیرند و حالت خاصی از آن وقتی است که نقاط موجود روی یک شبکه قرار داشته و مکان وسایل جدید نیز باید نقطه‌ای از شبکه باشد. در این حالت وقتی تابع هدف به صورت کمترین مجموع و یا مینیماکس است، به ترتیب مسئله را مسئله میانه و مرکز می‌نامند. همچنین اگر هدف پیدا کردن مکان p وسیله جدید باشد، آنگاه این مسائل به ترتیب مسئله p -میانه و p -مرکز نامیده می‌شوند.

۲.۱ مسئله p -میانه و مدل ریاضی آن

مسئله p -میانه کاربردهای فراوانی دارد که از آن جمله می‌توان به مکانیابی مراکز شبکه‌های ارتباطی کامپیوتری، مراکز توزیع کالا، مراکز اداری، مراکز نظامی، ایستگاه‌های اتوبوس و مراکز پستی اشاره کرد.

در مسئله p -میانه، میانه‌ها می‌توانند هر نقطه‌ای از شبکه انتخاب شوند، که در این حالت مسئله را مسئله p -میانه محض^{۴۹} گویند. اما اگر هدف پیدا کردن نقاط میانه تنها روی رأس‌ها باشد مسئله را مسئله p -میانه رأسی^{۵۰} نامند. در ادامه هر جا از اصطلاح "مسئله p -میانه" استفاده شد منظور مسئله p -میانه محض است. قضیه زیر که توسط حکیمی [۳۴] ارائه شد، بیان می‌کند که مجموعه جواب‌های p -میانه شامل یک جواب p -میانه رأسی است.

قضیه ۱.۲.۱ (حکیمی). [۳۴]. حداقل یک مجموعه متشکل از p رأس در مجموعه جواب‌های p -میانه وجود دارد که یک جواب برای مسئله p -میانه باشد.

^{۴۹} Absolute p-median

^{۵۰} Vertex p-median

با توجه به خاصیت بهینگی رأسی فوق اگر بخواهیم مسئله را به صورت شمارشی حل کنیم برای انتخاب p میانه از بین n رأس نیاز به $\binom{n}{p}$ انتخاب داریم. مثلاً برای $p=1$ به n انتخاب نیاز است که برای هر رأس باید $F(X)$ را محاسبه کنیم یعنی به زمان $O(n^2)$ نیاز می باشد که در آن $n = |V|$. در حالت کلی برای p های بزرگ پیچیدگی زمانی این روش زیاد شده و مسئله NP-سخت [۲۸] می باشد.

روش های تقریبی مختلفی برای حل مسئله p-میانه به کار برده شده است که از آن جمله می توان روش های مبتنی بر برنامه ریزی خطی، روش هایی با استفاده از گراف ها و روش های ابتکاری را نام برد.

مسئله p-میانه را می توان به صورت زیر به یک مسئله برنامه ریزی خطی صفر و یک تبدیل کرد.

فرض کنیم به ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, n$ متغیرهای x_{ij} و y_j را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v_i \text{ به وسیله } v_j \text{ اختصاص داده شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v_j \text{ به عنوان میانه انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

حال چون حداکثر p میانه داریم، پس باید محدودیت $\sum_{j=1}^n y_j \leq p$ را داشته باشیم. همچنین هر رأس تنها باید به یک وسیله اختصاص یابد بنابراین به ازای $i = 1, \dots, n$ داریم $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ و رأس ها را تنها می توان به رئوسی اختصاص داد که به عنوان مکان یک وسیله در نظر گرفته شده باشند (یعنی به ازای آن رأس داشته باشیم $y_j = 1$) بنابراین به ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, n$ داریم $x_{ij} \leq y_j$. یعنی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, v_j) x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & -x_{ij} + y_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n y_j \leq p \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

توجه کنید که در مدل فوق x_{ij} به جای متغیر صفر و یک به صورت یک متغیر حقیقی نوشته شده است زیرا شرط $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ تضمین می کند که x_{ij} حداکثر برابر ۱ شود، همچنین x_{ij} در حالت بهینه نمی تواند

عددی بین صفر تا یک باشد زیرا در غیر اینصورت فرض کنید به ازای یک متغیر مانند x_{kl} داشته باشیم $0 < x_{kl} < 1$ آنگاه داریم $0 < \sum_{j=1, j \neq l}^n x_{kj} < 1$. حال فرض کنید $d(v_k, t) = \min_{1 \leq j \leq n} d(v_k, v_j)$ آنگاه اگر قرار دهیم $x_{kl} = 1$ و $x_{kj} = 0$ به ازای هر $j, j \neq t$ ، آنگاه تابع هدف کاهش پیدا خواهد کرد و بنابراین جواب قبلی نمی‌تواند جواب بهینه باشد.

یکی از روش‌های ابتکاری برای مسئله p -میان که توسط مارنزان^{۵۱} [۴۸] ارائه شده است روش جستجوی همسایگی^{۵۲} می‌باشد. در این روش از یک جواب شدنی برای مسئله، یعنی مجموعه‌ای شامل مکان p وسیله شروع کرده و نقاط تقاضا را به نزدیک‌ترین وسیله نسبت می‌دهیم. مجموعه گره‌های نسبت داده شده به هر وسیله یک همسایگی اطراف آن وسیله تشکیل می‌دهند. در هر همسایگی، مسئله ۱-میان را حل کرده و وسیله را به این مکان جدید تغییر مکان می‌دهیم. سپس هنگامی که برای تمام همسایگی‌ها مکان وسایل دوباره پیدا شدند، همسایگی‌های جدید را به دست آورده و عمل را تکرار می‌کنیم تا زمانی که دیگر تغییری در همسایگی‌ها یا مکان وسایل صورت نگیرد.

بر اساس روش فوق تیتز^{۵۳} و بارت^{۵۴} [۶۴] نیز الگوریتمی ارائه کرده‌اند که در آن برای تغییر مکان یک وسیله، دیگر رأس‌ها به ترتیب بررسی شده و در صورتی که تابع هدف بهبود یافت تغییر مکان انجام می‌گیرد. روند تا زمانی که دیگر بهبودی در جواب حاصل نشود ادامه می‌یابد. با این روش می‌توان یک جواب داده شده را بهبود بخشید. البته نحوه انتخاب مکان‌های جدید و جواب اولیه در سرعت الگوریتم مؤثر است. هانسن^{۵۵} و ملادنویچ^{۵۶} [۴۰] مسئله p -میان را با روش جستجوی همسایگی متغیر حل کرده‌اند که در آن دو جواب که در $k (k \leq p)$ عضو اختلاف دارند به عنوان همسایه در نظر گرفته می‌شوند.

یک روش ابتکاری نیز که به صورت الگوریتمی حریصانه^{۵۷} و بر اساس روش تغییر مکان وسایل می‌باشد، در [۲۰] آمده است که در آن ابتدا نقطه ۱-میان به دست آمده و در مجموعه جواب قرار می‌گیرد. سپس در هر گام یک رأس به این مجموعه اضافه شده و بررسی می‌شود که آیا می‌توان رأس دیگری را جایگزین رأس‌های انتخاب شده کرد تا تابع هدف کاهش یابد یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب، رأس را جایگزین کرده و دوباره عمل بررسی انجام می‌شود. پس از p گام یک جواب تقریبی برای مسئله به دست می‌آید. این الگوریتم یک مجموعه مانند S شامل p رأس را پیدا می‌کند که لزوماً جواب بهینه نیست ولی برای هر مجموعه دیگر مانند X که شامل p رأس از شبکه باشد اگر X و S دارای $p - 1$ رأس مشترک باشند، آنگاه داریم $F(S) \leq F(X)$.

^{۵۱} Maranzana^{۵۲} Neighborhood Search^{۵۳} Teitz^{۵۴} Bart^{۵۵} Hansen^{۵۶} Meladenovic^{۵۷} Greedy

از دیگر روش‌های ابتکاری که برای مسئله p -میان به کار رفته است روش‌های الگوریتم ژنتیک^{۵۸} و جستجوی ممنوع^{۵۹} است. اولین کسانی که الگوریتم ژنتیک را برای مسئله p -میان به کار بردند، هاسج^{۶۰} و گودچایلد^{۶۱} [۴۲] بودند. سپس دیبل^{۶۲} و دشام^{۶۳} [۲۵]، ارکوت^{۶۴} و همکاران [۲۶] و کورا^{۶۵} و همکاران [۲۱] روش‌هایی با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک برای مسئله p -میان ارائه کردند. با استفاده از جستجوی تابو نیز مورنو^{۶۶} و همکاران [۵۴] و رلند^{۶۷} و همکاران [۶۰] روش‌هایی برای مسئله p -میان ارائه کرده‌اند. برای بررسی کارایی یک روش ابتکاری اگر بتوانیم کران‌هایی برای جواب بهینه بیابیم آنگاه می‌توانیم تعیین کنیم که آیا جواب یک روش ابتکاری به جواب بهینه نزدیک شده است یا خیر. یک روش برای تعیین کرانی برای جواب بهینه، روش کاهشی لاگرانژ^{۶۸} است. در این روش با انتقال یک یا چند محدودیت همراه با ضرایبی به نام ضرایب لاگرانژ، به تابع هدف یک مسئله جدید جایگزین مسئله اصلی می‌شود که جواب آن کرانی برای مسئله اصلی است. روش کاهشی لاگرانژ برای مسئله p -میان در [۲۷] و [۲۴] آمده است. در [۳۸] نیز بر روی روش‌های تقریبی گوناگون (ابتکاری و برنامه ریزی ریاضی) که توسط افراد مختلف ارائه شده بررسی‌هایی به عمل آمده است.

برای مسئله p -میان روی درخت، کریو^{۶۹} و حکیمی [۴۴] الگوریتمی دقیق با پیچیدگی زمانی $O(p^2 n^2)$ ارائه کرده‌اند که آن را تمیر^{۷۰} [۶۲] به الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(pn^2)$ بهبود بخشیده است.

۳.۱ مکانیابی معکوس

در سال‌های اخیر مسائل بهینه سازی معکوس علاقه قابل توجهی را به خود جلب کرده است. در یک مسئله بهینه سازی معکوس، هدف این است که پارامترهای مسئله را در کمترین هزینه آن‌چنان تغییر دهیم که یک جواب از پیش تعیین شده، جواب بهینه مسئله شود.

در یکی از اولین مقالات بهینه سازی معکوس، در سال ۱۹۹۲ بورتن و تونت^{۷۱} [۱۶] مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس را با یک کاربرد بسیار جالب در علم زمین شناسی ارائه کردند. آن‌ها در یک شبکه داده شده،

^{۵۸}Genetic Algorithm

^{۵۹}Tabu Search

^{۶۰}Hosage

^{۶۱}Goodchild

^{۶۲}Dibble

^{۶۳}Densham

^{۶۴}Erkut

^{۶۵}Correa

^{۶۶}Moreno-perez

^{۶۷}Rolland

^{۶۸}Lagrangean Relaxation

^{۶۹}Kariv

^{۷۰}Tamir

^{۷۱}Burton and Toint

طول یال‌ها را تغییر دادند (تا حد امکان کوچک کردند) تا یک مسیر از پیش تعیین شده، به عنوان کوتاه‌ترین مسیر مسئله شود. در همان سال برمن^{۷۲} و همکاران [۱۱] مقاله ای منتشر کردند در مورد اینکه چگونه می‌توان یک شبکه حمل و نقل را در یک روش کارا به منظور شناخت مکانیابی وسایل اصلاح کرد. همان مؤلفان [۱۰] مسئله‌ای مشابه مسئله قبل برای هدف مینیماکس را نیز بررسی کردند. در هر دو مقاله آنها شبکه را به وسیله تغییر طول کمان‌ها و به وسیله معرفی کمان‌های جدید بهبود بخشیدند. همچنین مسئله‌ای مشابه آن به وسیله ژانگ^{۷۳} و همکاران [۶۹] بررسی شد. آنها یک الگوریتم چندجمله‌ای قوی برای کوتاه کردن طول‌ها در یک شبکه درخت به اندازه یک بودجه معلوم ارائه کردند که کوتاه‌ترین فاصله از یک وسیله معلوم به دیگر گره‌ها مینیمم شود. برای مشاهده نتایج بیشتر روی مسائل بهینه سازی معکوس شامل شبکه‌ها و مدل‌های مکانیابی، می‌توان به بررسی‌های هیوبرگر^{۷۴} [۴۱] روی این موضوع اشاره کرد.

حال بحث خود را به مسائل مکانیابی معکوس محدود خواهیم کرد. دو مدل از مسائل مکانیابی معروف، مسائل p -میانه و p -مرکز است که قبلاً معرفی شدند. در این مسائل مکانیابی وسایل به وزن مشتریان و فاصله بین مشتریان و سرویس دهندگان وابسته می‌باشد.

برای مسائل مکانیابی در گراف‌ها، موقعیت مشتریان بر روی رئوس گراف منطبق شده است و فاصله بین دو نقطه، در واقع کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو نقطه در گراف به نسبت طول یال‌های داده شده می‌باشد و در مورد مسائل مکانیابی در صفحه، فاصله معمولاً به وسیله نرم l_1 یا l_2 یا l_∞ اندازه‌گیری می‌شود.

بنابراین اگر ما یک نگرش معکوس را در نظر بگیریم، در مورد مسائل روی گراف‌ها، پارامترهایی که در این بین می‌توانند اصلاح شوند، وزن مشتریان یا طول یال‌ها (و یا هر دو) و در مورد مسائل روی صفحه، وزن مشتریان یا موقعیت‌ها (و یا هر دو) می‌باشد.

در سال ۲۰۰۴ بورکارد^{۷۵} و همکاران [۱۴] مسئله " p -میانه معکوس با وزن رئوس متغیر" را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که مسائل p -میانه معکوس گسسته در صورتی که p ثابت باشد و یک متغیر ورودی نباشد، در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. همان مؤلفان [۱۴، ۱۵] مسئله ۱-میانه معکوس با وزن رئوس متغیر را بررسی کردند و نشان دادند که اگر مسئله روی شبکه درخت و یا اینکه در صفحه (که فاصله‌ها به وسیله نرم خطی یا چپیشف اندازه‌گیری شود) باشد، با استفاده از یک الگوریتم از نوع حریصانه و در زمان $O(n \log n)$ قابل حل است و اگر مسئله روی یک دور باشد، در زمان $O(n^2)$ قابل حل خواهد بود. از طرف دیگر گسنر^{۷۶} [۳۰] اثبات کرد که مسئله ۱-میانه معکوس با طول یال‌های متغیر در گراف‌های عمومی، مسئله‌ای NP-سخت می‌باشد. او برای زمانی که مسئله روی یک درخت باشد، یک الگوریتم با

^{۷۲} Berman^{۷۳} Zhang^{۷۴} Heuberger^{۷۵} Burkard^{۷۶} Gassner

پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ پیشنهاد کرد.

در سال ۲۰۱۰ بورکارد و همکارانش [۱۲] یک الگوریتم حریصانه برای مسئله فرما-وبر معکوس با وزن رئوس متغیر و هزینه واحد پیشنهاد کرد، با فرض اینکه نقطه از پیش تعیین شده‌ای که باید ۱-میانۀ مسئله شود با یک نقطه وزنی داده شده در صفحه منطبق نباشد.

مسئله ۱-میانۀ معکوس با مختصات متغیر در واقع اصلاح موقعیت (مختصات) نقاط داده شده در R^d می‌باشد که یک نقطه از پیش تعیین شده در R^d با کمترین هزینه تبدیل به ۱-میانۀ مسئله شود. این مسئله به وسیله باروقی بناب^{۷۷} و همکارانش [۶] بررسی شد. آنها نشان دادند که این مسئله در R^d با استفاده از نرم خطی، یک مسئله NP -سخت می‌باشد. نشان داده شد که اگر وزن نقاط مساوی فرض شده باشد، مسئله در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. آنها برای این مسئله در R^d با استفاده از توان دوم نرم اقلیدسی، یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(dn)$ پیشنهاد کردند. بعلاوه آنها نشان دادند که مسئله در صفحه با استفاده از نرم چپیشف، یک مسئله NP -سخت می‌باشد و همچنین آنها یک الگوریتم شبه چندجمله‌ای دیگری برای این مورد پیشنهاد کردند.

در سال ۱۹۹۹ سای^{۷۸} و همکارانش [۱۷] اثبات کردند که مسئله مکانیابی مرکز معکوس یک مسئله NP -سخت می‌باشد، این در حالی است که خود مسئله مکانیابی مرکز در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. در سال ۲۰۰۸ یانگ و ژانگ^{۷۹} [۶۸] مسئله مرکز رأسی معکوس با طول یال‌های متغیر روی شبکه‌های درخت را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای این مسئله در حالتی که همه طول یال‌های اصلاح شده مثبت باقی بماند، الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2 \log n)$ را پیشنهاد کردند. در سال ۲۰۱۰ علیزاده و بورکارد^{۸۰} [۴] مسئله مکانیابی ۱-مرکز رأسی و محض معکوس را روی درختان بررسی کردند و نشان دادند که مسئله ۱-مرکز رأسی و محض، مشروط بر اینکه طول یال‌ها مثبت اکید باشد، در زمان $O(n^2)$ قابل حل می‌باشد.

۴.۱ مسئله p -میانۀ معکوس روی گراف‌ها و مدل ریاضی آن

همان طور که بیان شد، در مسئله p -میانۀ معکوس روی گراف‌ها، هدف اصلاح کردن پارامترهای مسئله (وزن مشتری‌ها و یا طول یال‌ها) می‌باشد که p رأس از پیش تعیین شده، p -میانۀ مسئله شوند.

^{۷۷}Baroughi Bonab

^{۷۸}Cai

^{۷۹}Yang and Zhang

^{۸۰}Alizadeh and Burkard

۱.۴.۱ مسئله p -میانۀ معکوس با وزن رؤس متغیر

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک با تابع متر d باشد و n نقطه مشتری $p_1, p_2, \dots, p_n$ که به ترتیب دارای وزن های $w_1, w_2, \dots, w_n$ می باشند داده شده باشد (که در مورد کلاسیک، وزن های w_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ مثبت هستند). ما در فضای متریک X ، نقطه p ، $s_1, s_2, \dots, s_p$ را مشخص می کنیم و هدف این است که با اصلاح وزن مشتریان، مجموعه این نقاط از پیش تعیین شده، p -میانۀ مسئله شود. فرض کنید که اگر ما وزن w_i را به اندازه یک واحد افزایش دهیم، متحمل هزینه نامنفی c_i می شویم و به طور مشابه اگر وزن w_i را به اندازه یک واحد کاهش دهیم، متحمل هزینه نامنفی d_i می شویم و البته توجه داریم که این افزایش و کاهش وزن مشتریان نمی تواند به طور دلخواه انجام شود و وزن مشتریان کراندار می باشد و از یک کران بالا و یک کران پایین تبعیت می کند. پس باید این اصلاح وزن مشتریان طوری صورت بگیرد که وزن اصلاح شده در بین کران های داده شده قرار داشته باشد. حال ما مسئله p -میانۀ معکوس با وزن رؤس متغیر را بیان می کنیم:

مسئله عبارت است از پیدا کردن وزن های جدید w_i^* ; $1 \leq i \leq n$ که در کران های داده شده قرار دارند، یعنی: $\underline{w}_i \leq w_i^* \leq \bar{w}_i$ به گونه ای که مجموعه نقاط از پیش تعیین شده $\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ به نسبت وزن های جدید یک p -میانۀ مسئله شوند و هزینه کل برای تغییر وزن ها مینیمم شود. در مورد مسائل گسسته (مثلاً گراف ها) می توان مسئله p -میانۀ معکوس را به وسیله یک برنامه ریزی خطی توصیف کنیم.

فرض کنید $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد که عناصر آن مشتری ها باشند. هر مشتری u_i دارای وزن w_i می باشد. بعلاوه، فرض کنید که مجموعه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ یک مجموعه متناهی شامل تمامی سرویس دهندگان ممکن باشد و $d(u, v)$ فاصله بین مشتری u و سرویس دهنده v باشد. حال اگر φ کلاس همه زیرمجموعه های $S \subseteq V$ با کاردینال $|S| = p$ باشد. شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعه $\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ به نسبت وزن های w_i ; $i = 1, \dots, n$ یک p -میانۀ مسئله شود این است که:

$$\sum_{i=1}^n w_i \min_{k=1, \dots, p} d(u_i, s_k) \leq \sum_{i=1}^n w_i \min_{v_k \in S} d(u_i, v_k) \quad \forall S \in \varphi$$

حال فرض کنید مقداری که وزن مشتری i ام یعنی w_i افزایش می یابد برابر p_i باشد و به طور مشابه مقداری که وزن مشتری i ام کاهش می یابد برابر با q_i باشد آنگاه مسئله p -میانۀ معکوس می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (c_i p_i + d_i q_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n (w_i + p_i - q_i) a_{iS} \leq 0 \quad \forall S \in \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$w_i - q_i \geq \underline{w}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$w_i + p_i \leq \overline{w}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$q_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در مدل فوق:

$$a_{iS} = \min(d(u_i, s_1), d(u_i, s_2), \dots, d(u_i, s_p)) - \min_{v_k \in S} d(u_i, v_k)$$

در مدل برنامه‌ریزی فوق، عبارت (۱.۱) در واقع بیان می‌کند که اگر وزن‌ها اصلاح شوند، یعنی وزن رأس i ام به $w_i + p_i - q_i$ تغییر پیدا کند، به نسبت این وزن‌های جدید، مجموعه از پیش تعیین شده $\{s_1, \dots, s_p\}$ به‌عنوان p-میانه مسئله معرفی شوند. یعنی:

$$\sum_{i=1}^n (w_i + p_i - q_i) \min_{k=1, \dots, p} d(u_i, s_k) \leq \sum_{i=1}^n (w_i + p_i - q_i) \min_{v_k \in S} d(u_i, v_k)$$

که این عبارت در واقع همان رابطه (۱.۱) است. همچنین چون وزن‌ها کران دارند، بعد از اصلاح وزن‌ها باید وزن‌های جدید از این کرانها تبعیت کنند، پس داریم:

$$\underline{w}_i \leq w_i + p_i \leq \overline{w}_i \quad \underline{w}_i \leq w_i - q_i \leq \overline{w}_i$$

و از روابط فوق به راحتی عبارات (۲.۱) و (۳.۱) نتیجه می‌شود. بنابراین مسائل p-میانه معکوس گسسته مشروط بر اینکه p معلوم باشد و یک پارامتر ورودی نباشد، در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. با توجه به برنامه‌ریزی فوق، برنامه $O\left(\binom{p}{m}\right)$ محدودیت دارد و بنابراین برای مسائل p-میانه نسبتاً کوچک قابل استفاده می‌باشد.

توجه داشته باشید که با استفاده از فرض نامنفی بودن c_i و d_i ، می‌توان همیشه فرض کرد که در یکی از جواب‌های بهینه، یکی از مقادیر p_i و q_i برابر صفر می‌باشد. با توجه به ملاحظات بالا، مدل فوق می‌تواند

برای زمانی که وزن مشتریان منفی، و یا به صورت مثبت و منفی (آمیخته)، و یا مسئله p -میانۀ مضر معکوس به کار گرفته شود و در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. خلاصه اینکه داریم:

گزاره ۱.۴.۱. [۱۴]. مسئله p -میانۀ معکوس گسسته، که مشتریان ممکن است هر وزن حقیقی داشته باشند، مشروط بر اینکه p ثابت باشد و یک پارامتر ورودی نباشد، در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد.

۲.۴.۱ مسئله p -میانۀ معکوس با طول یال‌های متغیر

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف متصل با مجموعه رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های E باشد که $|E| = m$ ، و یک ثابت p داده شده باشد (که $p \leq n$ می‌باشد). هر یال $e \in E$ دارای یک طول مثبت l_e می‌باشد و $d_l(v_i, v_j)$ مشخص کننده طول کوتاه‌ترین مسیر از $v_i \in V$ به $v_j \in V$ در گراف G به نسبت طول بردار l باشد. بعلاوه فرض کنید که هر رأس $v \in V$ دارای یک وزن رأسی مثبت $w(v)$ باشد. در مسئله p -میانۀ کلاسیک هدف مکانیابی p سرویس دهنده می‌باشد (یعنی روی رئوس و یا یال‌ها) که مجموع فاصله وزنی از هر رأس به نزدیک‌ترین سرویس دهنده مینیمم شود که جواب بهینه آن یک p -میانۀ نامیده می‌شود. در قضیه (۱.۲.۱) بیان شد که یک جواب بهینه میان مجموعه رئوس قرار دارد، که این خاصیت، خاصیت بهینگی رأسی نامیده می‌شود.

هدف در مسئله p -میانۀ معکوس با طول یال‌های متغیر در واقع اصلاح طول یال‌ها در مینیمم هزینه می‌باشد که مجموعه رئوس از پیش تعیین شده $\{m_1, \dots, m_p\}$ یک p -میانۀ مسئله شود. فرض کنید که اگر ما l_e را به اندازه یک واحد افزایش دهیم، متحمل هزینه نامنفی c_e^+ می‌شویم و به طور مشابه اگر l_e را به اندازه یک واحد کاهش دهیم، متحمل هزینه نامنفی c_e^- می‌شویم. همچنین فرض کنید x_e^+ و x_e^- به ترتیب برابر با مقداری باشد که طول یال l_e افزایش و کاهش پیدا می‌کند (البته توجه داریم که این افزایش و کاهش نمی‌تواند به طور دلخواه انجام شود و فرض بر این است که x_e^+ و x_e^- به ترتیب از کران‌های بالای u_e^+ و u_e^- تبعیت می‌کنند). حال اگر φ مجموعه همه زیرمجموعه‌های $S \subseteq V$ با کاردینال $|S| = p$ باشد. بنابراین ما می‌توانیم مسئله p -میانۀ معکوس با طول یال‌های متغیر روی گراف G را به صورت زیر بیان کنیم:

اصلاح طول یال‌های $e \in E$ به l_e به $\tilde{l}_e = l_e + x_e^+ - x_e^-$ که سه خاصیت زیر را برقرار کند:

- در گراف G به نسبت $\tilde{l}$ ، مجموعه $\{m_1, \dots, m_p\}$ یک p -میانۀ مسئله شود، یعنی:

$$\sum_{v \in V} w(v) \min_{i=1, \dots, p} d_{\tilde{l}}(v, m_i) \leq \sum_{v \in V} w(v) \min_{v_k \in S} d_{\tilde{l}}(v, v_k) \quad \forall S \in \varphi$$

- کران محدودیت‌ها برقرار باشد، یعنی برای هر $e \in E$ داشته باشیم:

$$0 \leq x_e^- \leq u_e^- \quad 0 \leq x_e^+ \leq u_e^+$$

• تابع هزینه خطی زیر مینیمم شود

$$\sum_{e \in E} (c_e^+ x_e^+ + c_e^- x_e^-)$$

این فرمول بندی مسئله P -میانه معکوس یک مدل برنامه ریزی غیر خطی می‌باشد. هر چند در [۷] اگر گراف یک درخت باشد، یک فرمول بندی خطی برای این مسئله ارائه شده است. ما در فصل دوم و سوم به بررسی مسئله ۱-میانه معکوس "با وزن رئوس متغیر" روی درخت و دور می‌پردازیم.

فصل ۲

مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت

همان‌طور که می‌دانید گراف $T = (V, E)$ را یک درخت می‌گویند، هرگاه همبند و فاقد دور باشد. در این فصل، ما ابتدا مسئله ۱- میانه روی درخت و همچنین خاصیت بسیار جالبی را که فقط روی درخت برقرار است را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس با استفاده از حل مسئله ۱- میانه روی درخت، مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت را مطرح کرده و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید درخت $T = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E داده شده باشد که مجموعه رئوس (مشتریان) به صورت $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ می‌باشد و هر رأس v_i دارای وزن نامنفی w_i باشد و همچنین W مجموع وزن‌های رئوس این درخت باشد، یعنی:

$$W = \sum_{i=1}^n w_i$$

۱.۲ مسئله ۱- میانه روی درخت

در مسئله ۱- میانه فقط به دنبال یافتن یک سرویس دهنده مانند x هستیم که بنا بر قضیه بهینگی رأسی (حکیمی) که در (۱.۲.۱) بیان شد، می‌تواند آن سرویس دهنده مورد نظر روی یک رأس واقع شود و همچنین مجموع وزنی فاصله‌ها از این سرویس دهنده تا مشتری‌ها مینیمم شود، یعنی تابع خطی زیر مینیمم شود:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n w_i d(x, v_i)$$

بنا بر خاصیت بهینگی رأسی که در حالت کلی برای مسئله p - میانه برقرار است، می‌توانیم مسئله ۱- میانه را به صورت شمارشی حل کنیم، یعنی میانه را از بین n رأس انتخاب کنیم که در این حالت به n انتخاب

نیاز داریم که برای هر رأس تابع فوق را محاسبه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که مینیمم مقدار به ازای کدام رأس اتفاق افتاده است، آن رأس را به عنوان سرویس دهنده (۱- میانه مسئله) انتخاب می‌کنیم.

علاوه بر خاصیت فوق، در حالت $p=1$ یک خاصیت دیگر روی درختان برقرار می‌باشد، که به خاصیت اکثریت^۱ معروف است. این خاصیت که توسط گلدمن^۲ در [۳۳] ارائه شده است به صورت زیر است:

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید که T یک درخت باشد و T_1 و T_2 دو زیر درخت متناظر با افراز $\{V_1, V_2\}$ باشند که برای $k=1, 2$ زیر درخت T_k شامل رئوس V_k باشد. آنگاه T_1 شامل یک جواب برای مسئله ۱- میانه است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\sum_{\{i: v_i \in T_1\}} w_i \geq \frac{1}{2} \sum_{\{i: v_i \in T\}} w_i$$

به عبارت دیگر می‌توان بیان کرد که اگر m یک ۱- میانه درخت T باشد، آنگاه:

$$m \in V_1 \iff w(V_1) \geq w(V_2).$$

قضیه فوق بیان می‌کند که اگر زیر درختی از T شامل اکثریت وزن درخت باشد، آنگاه ۱- میانه در این زیر درخت قرار دارد. ملاحظه می‌شود که پیدا کردن جواب مسئله، مستقل از طول یال‌ها می‌باشد و فقط به وزن رئوس وابسته می‌باشد. همچنین در قالب یک لم می‌توان بیان کرد که:

لم ۲.۱.۲. [۵۳]. اگر $w(V_1) \geq w(V_2)$ باشد، آنگاه پیدا کردن یک ۱- میانه درخت T معادل است با پیدا کردن یک ۱- میانه برای درخت T_1 .

حال فرض کنید که v یک رأس دلخواه درخت با درجه k باشد و رئوس $v_1, \dots, v_k$ رئوس مجاور v باشند. اگر ریشه درخت را در رأس v فرض کنیم، با حذف یال‌های (v, v_j) ; $j = 1, \dots, k$ زیردرختان $T_1, \dots, T_k$ که به ترتیب در $v_1, \dots, v_k$ ریشه دار می‌باشند، به دست می‌آیند. اگر $w(T_i)$ مجموع همه وزن‌های رئوس زیر درخت T_i را مشخص کند، یکی از نتایج ملاحظات هوته و گلدمن (با توجه به نمادگذاری‌های فوق) را می‌توان در قالب لم زیر بیان کرد:

لم ۳.۱.۲. (محک بهینگی). [۴۳، ۳۳]. رأس v یک ۱- میانه درخت داده شده T است، اگر و تنها اگر وزن همه زیر درختان متناظرش (یعنی $w(T_i)$ ها) بزرگتر از نصف درخت نباشد یعنی:

$$\max_{1 \leq i \leq k} w(T_i) \leq \frac{W}{2}$$

^۱ Majority Property

^۲ Goldman

با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ برای مسئله ۱- میانه روی درختان ارائه کرد که به آن الگوریتم اکثریت می‌گویند.

الگوریتم ۴.۱.۲. الگوریتم اکثریت، برای حل مسئله ۱- میانه:

گام ۱: اگر درخت T شامل تنها یک رأس باشد، توقف کنید، این رأس همان ۱- میانه است.

گام ۲: برای هر رأس انتهایی مانند v_i ، اگر $w(v_i) \geq \frac{W}{4}$ ، آنگاه به گام ۴ بروید، در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

گام ۳: فرض کنید v_j رأس مجاور v_i باشد، رأس v_i و کمان (i, j) را حذف کنید و $w(v_j)$ را به اندازه $w(v_i)$ افزایش دهید و سپس به گام ۱ بروید.

گام ۴: توقف کنید، v_i یک ۱- میانه است.

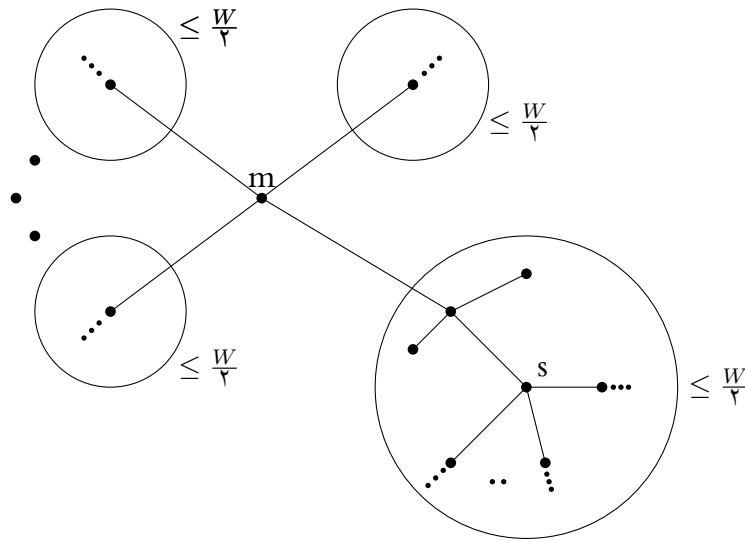
همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوریتم فوق از رأس‌های انتهایی درخت شروع کرده و وزن آنها را به وزن رئوس ماقبل (پدر) می‌افزاید. طبق قضیه فوق اولین رأسی که مجموع وزنی فرزندان و خودش از نصف وزن کل درخت بیشتر یا مساوی باشد، نقطه ۱- میانه می‌باشد.

۲.۲ بیان مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت و روش حل

در مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت $T = (V, E)$ ، وزن رئوس درخت را باید چنان تغییر داد که یک نقطه از پیش تعیین شده، به عنوان ۱- میانه مسئله واقع شود، که البته ما برای این تغییر وزن‌ها متحمل هزینه‌هایی می‌شویم. هدف در این مسئله در واقع مینیم کردن این هزینه‌ها می‌باشد که مدل ریاضی آن در حالت کلی برای مسئله p - میانه معکوس روی گراف در بخش (۱.۴.۱) بیان شد. در ادامه روش حل مسئله ۱- میانه معکوس، که در [۱۴] آمده است را ارائه می‌کنیم.

فرض کنید رأس m ، یک ۱- میانه درخت T به نسبت وزن‌های داده شده درخت باشد و رأس s که $s \neq m$ ۱- میانه درخت به نسبت وزن‌های داده شده نباشد (شکل (۱.۲) را ببینید).

فرض کنید ما می‌خواهیم رأس s به نسبت وزن‌های اصلاح شده به عنوان ۱- میانه درخت واقع شود. اگر رأس s ، از درجه k باشد، با حذف k یال متصل به رأس s ، زیر درختان $T_1, \dots, T_k$ به دست می‌آید. یکی از این زیردرختان تولید شده، شامل ۱- میانه مسئله یعنی رأس m است، فرض کنید این زیر درخت، T_k باشد. از طرفی بنا بر قضیه (۱.۱.۲) و همچنین محک بهینگی که در (۳.۱.۲) بیان شد، در می‌یابیم که زیر درخت T_k وزنی بیشتر از نصف وزن کل درخت دارد، پس بقیه زیر درختان باید وزنی کمتر از نصف وزن کل درخت داشته باشند یعنی



شکل ۱.۲: درختی که رأس m ، ۱-میانه می باشد.

$$w(T_i) < \frac{W}{4} \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

و همچنین

$$w(T_k) > \frac{W}{4}$$

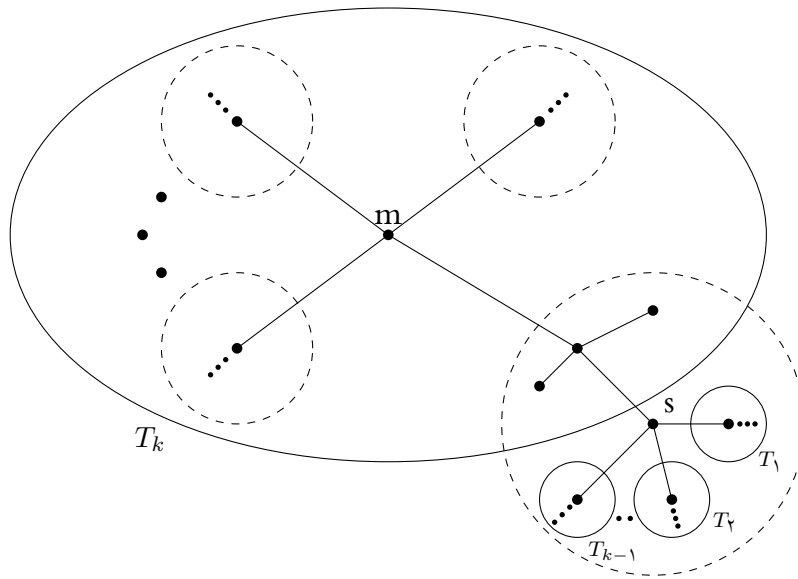
نتایج فوق در واقع از این حقیقت پیروی می کند که رأس m ، یک ۱-میانه می باشد و رأس s در یکی از زیر درختان با وزن $(\leq \frac{W}{4})$ ، که در رأس m ریشه دار می باشد، واقع شده است. حال چون زیر درخت های $T_1, \dots, T_{k-1}$ در همان زیر درخت ریشه دار شده در m ، با وزن $(\leq \frac{W}{4})$ قرار گرفته اند، آنها باید وزنی کمتر از نصف وزن کل درخت داشته باشند.

فرض کنید W_0 وزن فعلی رأس s را مشخص کند و W_i مجموع وزن های فعلی رئوس در زیر درختان T_i ؛ $i = 1, \dots, k$ را مشخص کند. تعریف می کنیم:

$$H = \sum_{i=0}^k \frac{W_i}{4}$$

برای حل مسئله، ما باید وزن های w_i ؛ $i = 1, \dots, n$ را تغییر دهیم، پس در واقع وزن W_0 و همچنین وزن زیر درخت های T_i ، یعنی W_i ؛ $i = 0, \dots, k$ تغییر پیدا می کند. در روند حل مسئله، مقدار شکاف بهیجگی^۳ نقش مهمی را بازی می کند که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

^۳Optimality Gap



شکل ۲.۲: زیر درخت‌های ریشه دار در رأس s.

$$D = W_k - H$$

لم ۱.۲.۲. [۱۴]. اگر $W_1 \leq \frac{W}{2}, \dots, W_{k-1} \leq \frac{W}{2}$ باشد، آنگاه رأس s ۱-میانه خواهد بود و تنها اگر $D = \circ$ باشد.

برهان. می‌دانیم $D = \circ$ است اگر و تنها اگر $W_k = \frac{W}{2}$ باشد، زیرا:

$$\begin{aligned} D = \circ &\iff W_k - H = \circ \\ &\iff W_k = \left(\frac{W}{2} + \dots + \frac{W_k}{2} \right) \\ &\iff W_k = \frac{W}{2} \end{aligned}$$

□ پس بنا بر لم (۳.۱.۲) در می‌یابیم که در این حالت رأس s ۱-میانه درخت خواهد بود.

با استفاده از مفروضات مسئله چون رأس ۱-میانه به نسبت وزن‌های موجود (یعنی رأس m) در زیر درخت T_k قرار دارد و همچنین رأس s یک ۱-میانه درخت نیست، پس زیر درخت T_k وزنی بیشتر از نصف وزن درخت دارد، بنابراین بنا به تعریف شکاف بهینگی، D مقداری مثبت می‌باشد، برای اینکه ما به هدف خود برسیم، یعنی رأس s به‌عنوان ۱-میانه مسئله واقع شود، بنا بر لم (۱.۲.۲) باید مقدار D را با این تغییر وزن‌های رئوس، کم کرده تا به مقدار صفر برسیم.

اگر ما به اندازه δ واحد وزن رأس s یا یک رأس در زیر درخت‌های $T_1, \dots, T_{k-1}$ را تغییر دهیم، آنگاه مقدار H به اندازه $\frac{\delta}{4}$ تغییر می‌کند و بنا بر تعریف شکاف بهینگی، مقدار D نیز به اندازه $\frac{\delta}{4}$ - تغییر می‌کند، بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$D_{new} = W_k - (H + \frac{\delta}{4}) = W_k - H - \frac{\delta}{4} = D - \frac{\delta}{4}$$

همچنین اگر ما به اندازه δ واحد وزن یک رأس در زیر درخت T_k را تغییر دهیم، این تغییر وزن، مقدار وزن W_k را به اندازه δ و همچنین مقدار H را به اندازه $\frac{\delta}{4}$ تغییر می‌دهد، پس بنا بر تعریف شکاف بهینگی، مقدار D به اندازه $\frac{\delta}{4}$ تغییر می‌کند، بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$D_{new} = (W_k + \delta) - (H + \frac{\delta}{4}) = D + \delta - \frac{\delta}{4} = D + \frac{\delta}{4}$$

حال بنا بر گفته‌های فوق، برای کاهش مقدار D با استفاده از تغییر وزن رئوس، ما می‌توانیم عملیات زیر را انجام دهیم:

• افزایش وزن رأس s ، یا رئوس واقع در زیر درختان $1, 2, \dots, k-1$ ؛ T_i ;

• کاهش وزن رئوس واقع در زیر درخت T_k .

از طرف دیگر، هر عملیاتی که D را بیشتر می‌کند، باید به وسیله یک تغییر وزن در رئوس خنثی گردد (مقدار D کم شود) اما این کاهش و افزایش مقدار D که در واقع با استفاده از تغییر وزن رئوس اتفاق می‌افتد برای ما هزینه‌هایی را به دنبال دارد، ولی هدف ما کاهش این هزینه‌ها است و همچنین از طرفی می‌توان مسئله را بدون افزایش مقدار D و خنثی کردن شکاف بهینگی بعد از آن، حل کرد، پس ما عملیات خود را فقط روی کاهش مقدار D ، با استفاده از موارد ذکر شده در بالا محدود می‌کنیم.

با توجه به ضرایب هزینه c و d که در (۱.۴.۱) بیان شد و همچنین با توجه به مطالب فوق، ما برای ریشه درخت (یعنی رأس s) و همچنین رئوس واقع در زیر درختان $1, 2, \dots, k-1$ ؛ T_i ضرایب هزینه c را در نظر می‌گیریم و همچنین برای رئوس واقع در زیر درخت T_k ضرایب هزینه d را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه درخت T ، تعداد n رأس دارد، اگر φ یک جایگشت از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، ما به طور صعودی ضرایب هزینه را در یک لیست مرتب می‌کنیم، داریم:

$$r_{\varphi(1)} \leq r_{\varphi(2)} \leq \dots \leq r_{\varphi(n)}$$

اگر رأس $v_{\varphi(l)}$ ، رأس s و یا یکی از رئوس واقع در زیر درختان $1, 2, \dots, k-1$ ؛ T_i باشد، آنگاه ضریب هزینه $r_{\varphi(l)}$ در واقع همان $c_{\varphi(l)}$ می‌باشد و در غیر این صورت، یعنی اگر $v_{\varphi(l)}$ متعلق به یکی از رئوس

واقع در زیر درخت T_k باشد، آنگاه ضریب هزینه $r_{\varphi(l)}$ در واقع همان $d_{\varphi(l)}$ می باشد. حال فرض کنید که $r_{\varphi(1)} = c_1$. در این حالت برای کاهش مقدار شکاف بهیگی یعنی D ، می توانیم وزن w_1 را به اندازه p_1 افزایش دهیم. اما چون این افزایش وزن نمی تواند به صورت دلخواه باشد چون w_1 کراندار می باشد، ما دو حالت زیر را متمایز می کنیم:

حالت اول: این حالت وقتی است که ما وزن w_1 را به اندازه p_1 افزایش می دهیم ولی در حین این افزایش وزن، قبل از اینکه به کران بالای وزن w_1 برسیم، مقدار D برابر صفر شده و ما به جواب بهینه می رسیم، یعنی در این حالت داریم:

$$D = 0 \implies W_k - (H + \frac{p_1}{\gamma}) = 0 \implies W_k = H + \frac{p_1}{\gamma}$$

بنابراین مقدار p_1 به صورت زیر می باشد:

$$p_1 = \gamma(W_k - H) = \gamma(W_k - \sum_{i=0}^k \frac{W_i}{\gamma}) = \gamma(\frac{1}{\gamma}W_k - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{k-1} W_i) = W_k - \sum_{i=0}^{k-1} W_i$$

که اگر مقدار فوق را به وزن w_1 اضافه کنیم، وزن جدید کمتر از کران بالای w_1 می باشد. توجه داریم که در این حالت مقدار وزن رئوس، در زیر درخت T_k بعد از اصلاح وزن ها دقیقاً برابر با نصف کل وزن درخت می باشد. از طرفی بنا بر مطالب گفته شده $1, \dots, k-1$ ؛ $\forall i$ ؛ $w(T_i) < \frac{W}{\gamma}$ می باشد، پس بنا بر لم (۱.۲.۲) جواب فعلی بهینه است.

حالت دوم: این حالت وقتی است که ما وزن w_1 را به اندازه p_1 افزایش می دهیم، یعنی $w_1^* = w_1 + p_1$ و در این افزایش وزن به کران بالای وزن w_1 می رسیم، پس داریم:

$$p_1 = \bar{w}_1 - w_1$$

ولی مقدار D هنوز برابر صفر نشده است و داریم:

$$D_{new} = D - \frac{p_1}{\gamma}$$

و ما فعلاً به جواب بهینه نرسیده ایم، چون می دانیم مقدار p_1 نمی تواند بیشتر از این افزایش پیدا کند، ما همین مقدار p_1 را به وزن w_1 اضافه می کنیم و $r_{\varphi(1)}$ را از لیستمان حذف کرده و به عنصر بعدی لیست، یعنی $r_{\varphi(2)}$ می رویم.

حال صورت دیگر را در نظر می گیریم، فرض کنیم اولین عنصر لیست، d_1 باشد، یعنی $d_1 = r_{\varphi(1)}$ ، پس v_1 در زیر درخت T_k قرار دارد و برای کاهش شکاف بهیگی باید وزن این رأس را به اندازه q_1 کم کنیم، اما بنا بر کراندار بودن w_1 ، این کاهش وزن نمی تواند به صورت دلخواه انجام شود. ما مشابه مورد قبل دو مورد را به صورت متمایز در نظر می گیریم:

حالت اول: این حالت وقتی است که ما وزن w_1 را به اندازه q_1 کاهش می دهیم ولی در حین این کاهش وزن، قبل از اینکه به کران پایین وزن w_1 برسیم، مقدار D برابر صفر شده و ما به جواب بهینه می رسیم، یعنی در این حالت داریم:

$$D = 0 \implies (W_k - q_1) - (H - \frac{q_1}{2}) = 0 \implies W_k - H - q_1 + \frac{q_1}{2} = 0$$

بنابراین مقدار q_1 به صورت زیر است:

$$q_1 = 2(W_k - H) = 2(W_k - \sum_{i=0}^k \frac{W_i}{2}) = 2(\frac{1}{2}W_k - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} W_i) = W_k - \sum_{i=0}^{k-1} W_i$$

که اگر مقدار فوق را از وزن w_1 کم کنیم، وزن جدید، بیشتر از کران پایین w_1 می باشد. توجه داریم که در این حالت مقدار وزن رئوس، در زیر درخت T_k بعد از اصلاح وزن ها دقیقاً برابر با نصف کل وزن درخت می باشد. از طرفی بنا بر مطالب گفته شده $1, \dots, k-1$ ، $\forall i$ ، $w(T_i) < \frac{W}{2}$ می باشد، پس بنا بر لم (۱.۲.۲) جواب فعلی بهینه است.

حالت دوم: این حالت وقتی است که ما وزن w_1 را به اندازه q_1 کاهش می دهیم، یعنی $w_1^* = w_1 - q_1$ و در این کاهش وزن به کران پایین وزن w_1 می رسیم، پس نتیجه می گیریم:

$$q_1 = w_1 - \underline{w}_1$$

ولی مقدار D هنوز برابر صفر نشده است و داریم:

$$D_{new} = D - \frac{q_1}{2}$$

و ما فعلاً به جواب بهینه نرسیده ایم، چون می دانیم مقدار q_1 نمی تواند بیشتر از این کاهش پیدا کند، ما همین مقدار q_1 را از وزن w_1 کم می کنیم و $r_{\varphi(1)}$ را از لیستمان حذف کرده و به عنصر بعدی لیست، یعنی $r_{\varphi(2)}$ می رویم.

در ملاحظات فوق مشاهده شد که ما می‌توانیم برای حل مسئله ۱- میانه معکوس روی یک درخت، با یک روش حریصانه پیش رویم، به این صورت که ابتدا لیست ضرایب هزینه را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم، سپس اولین عنصر این لیست را انتخاب می‌کنیم و بر طبق مطالب گفته شده، وزن متناظر با آن را افزایش یا کاهش می‌دهیم. اگر در این افزایش و کاهش با کران بالا یا پایین وزن متناظر مواجه شدیم، این عنصر را از لیست حذف کرده و عنصر بعدی لیست را پردازش می‌کنیم. به محض اینکه به حالت اول در هر یک از دو مورد فوق رسیدیم، توقف می‌کنیم. رأس s به عنوان یک ۱- میانه درخت می‌باشد. البته در نظر داریم که بنا بر مرتب سازی ضرایب هزینه، هر توزیع دیگر وزن‌ها که باعث شود رأس s یک ۱- میانه درخت واقع شود، هزینه ای بیشتر یا مساوی را خواهد داشت. در نتیجه، بنا بر مطالب گفته شده، برای رسیدن به جواب بهینه به الگوریتم زیر می‌رسیم:

الگوریتم ۲.۲.۲. الگوریتم حل مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت:

گام ۱: وزن کل درخت یعنی $W = \sum_{i=1}^n w_i$ را محاسبه کنید.

گام ۲: وزن زیر درختان ریشه دار شده در رأس s را محاسبه کنید.

• اگر همه زیر درختان وزنی کمتر یا مساوی $\frac{W}{2}$ داشتند، توقف کنید، وزن‌های داده شده از قبل بهینه بوده‌اند.

• در غیر اینصورت، زیر درخت با بیشترین وزن را T و همچنین وزن این زیر درخت را W_0 بنامید.

گام ۳: برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، اگر رأس v_i خود رأس s یا رأسی خارج از زیر درخت T است، قرار دهید $r_i = c_i$ و در غیر اینصورت قرار دهید $r_i = d_i$.

گام ۴: قرار دهید $D = W_0 - \frac{W}{2}$ و $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

گام ۵: اگر $R \neq \emptyset$ ، آنگاه کوچک‌ترین عنصر R مثلاً r_i را پیدا کنید. در غیر اینصورت یک جواب شدنی برای مسئله وجود ندارد.

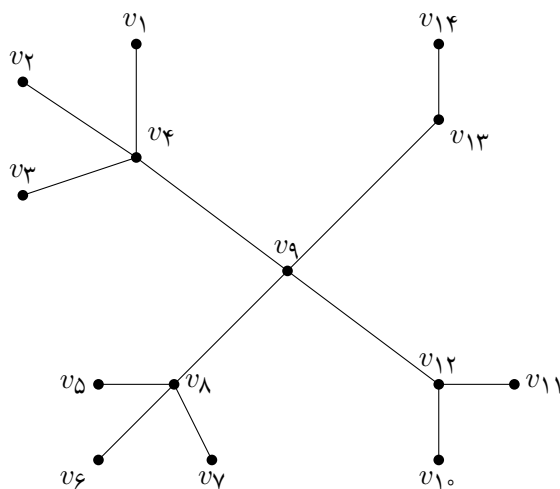
گام ۶: اگر $r_i = c_i$ باشد، آنگاه قرار دهید $p_i = \min(2D, \bar{w}_i - w_i)$ ؛ $D = D - p_i/2$ و در غیر اینصورت قرار دهید $q_i = \min(2D, w_i - \underline{w}_i)$ ؛ $D = D - q_i/2$.

گام ۷: اگر $D = 0$ ، آنگاه توقف کنید، جواب بهینه به دست آمده است، در غیر اینصورت به گام ۵ برگردید.

گزاره ۳.۲.۲. [۱۴]. مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت، به وسیله یک الگوریتمی از نوع حریصانه، در زمان $O(n \log n)$ قابل حل است.

۳.۲ مثالی برای مسئله ۱-میانه معکوس روی درخت

گرافی با ۱۴ رأس مانند شکل (۳.۲) را در نظر بگیرید.



شکل ۳.۲: درختی با ۱۴ رأس

اطلاعات مربوط به این گراف (نظیر وزن رئوس، کران بالا و پایین وزن رئوس و هزینه‌ها برای افزایش و یا کاهش وزن رئوس) در جدول (۱.۲) آورده شده است.

i	w_i	$\underline{w}_i$	$\overline{w}_i$	c_i	d_i
۱	۳	۱	۵	۳	۳
۲	۲	۱	۴	۱	۴
۳	۵	۲	۶	۴	۱
۴	۴	۲	۶	۲	۲
۵	۳	۱	۵	۲	۵
۶	۶	۲	۸	۱	۲
۷	۵	۱	۷	۱	۴
۸	۱	۰	۴	۲	۳
۹	۳	۱	۶	۴	۵
۱۰	۲	۱	۵	۲	۴
۱۱	۴	۲	۶	۳	۱
۱۲	۵	۲	۷	۵	۲
۱۳	۳	۱	۵	۳	۱
۱۴	۶	۲	۸	۲	۳

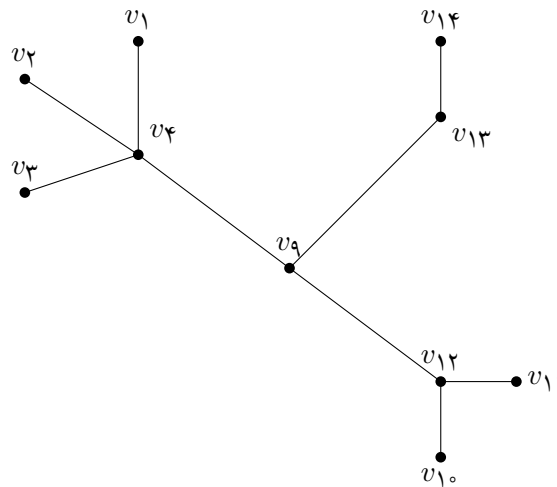
جدول ۱.۲: اطلاعات مربوط به درخت شکل (۳.۲)

اگر الگوریتم اکثریت را برای این درخت به کار ببریم، می‌توان دریافت که رأس v_9 ۱-میانه درخت خواهد بود. حال اگر طول یال‌ها را ۱ واحد در نظر بگیریم (البته توجه دارید که این الگوریتم مستقل از طول یال‌ها

می باشد)، مجموع فاصله وزنی از رأس v_9 به سایر رئوس (مشتریان) برابر با ۸۵ می باشد. در این درخت، به نسبت وزن های داده شده، رأس v_8 یک ۱- میانه درخت نیست. (چون مجموع فاصله وزنی این رأس تا سایر رئوس، برابر با ۱۰۷ می باشد که بیشتر از مجموع فاصله وزنی رأس v_9 تا سایر رئوس (یعنی ۸۵) می باشد). هدف در این مسئله این است که وزن ها را آن چنان تغییر دهیم که در کران های داده شده صدق کند و رأس v_8 با کمترین هزینه ممکن، به عنوان یک ۱- میانه درخت به نسبت وزن های اصلاح شده واقع شود. الگوریتم بیان شده در بخش قبل را روی این مسئله پیاده می کنیم. ابتدا وزن کل رئوس درخت را محاسبه می کنیم:

$$W = \sum_{i=1}^{14} w_i = 52$$

به گام ۲ می رویم، چون وزن همه زیر درختان ریشه دار در رأس v_8 کمتر یا مساوی $\frac{W}{2}$ نیست، زیر درخت ریشه دار در رأس v_8 با بیشترین وزن را در نظر می گیریم و آن زیر درخت را T می نامیم و وزن این زیر درخت را W_0 می نامیم که در این مسئله $W_0 = 37$ می باشد. (شکل (۴.۲) را ببینید)



شکل ۴.۲: زیر درخت ریشه دار در رأس v_8 ، با بیشترین وزن (زیر درخت T).

(بقیه زیر درختان ریشه دار در رأس v_8 ، درختانی با یک رأس می باشند، که این زیر درختان به ترتیب تک رأس های v_5 ، v_6 و v_7 می باشند).

به گام ۳ می رویم، هزینه های r_i برای هر رأس به صورت زیر می باشد:

$$r_i = c_i ; i = 5, 6, 7, 8 \quad , \quad r_i = d_i ; i = 1, \dots, 4, 9, \dots, 14$$

به گام ۴ می‌رویم، داریم:

$$R = \{d_1, d_2, d_3, d_4, c_5, c_6, c_7, c_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}\}$$

$$D = W_0 - \frac{W}{2} = 37 - 26 = 11$$

به گام ۵ می‌رویم، کوچکترین عنصر مجموعه R را انتخاب می‌کنیم که $d_3 = 1$ است. به گام ۶ می‌رویم، داریم:

$$q_3 = \min(22, 3) = 3, \quad D = 11 - 1/5 = 9/5$$

به گام ۷ می‌رویم، چون مقدار D برابر صفر نشده است، به گام ۵ برمی‌گردیم، عنصر d_3 را از لیست موجود (یعنی مجموعه R) حذف کرده و از عناصر باقیمانده کوچکترین عنصر را انتخاب می‌کنیم که $c_6 = 1$ است. به گام ۶ می‌رویم، داریم:

$$p_6 = \min(19, 2) = 2, \quad D = 9/5 - 1 = 4/5$$

اگر روند تکراری فوق را با توجه به الگوریتم ادامه دهیم، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$p_7 = \min(17, 2) = 2, \quad D = 4/5 - 1 = -1/5$$

$$q_{11} = \min(15, 2) = 2, \quad D = -1/5 - 1 = -6/5$$

$$q_{13} = \min(13, 2) = 2, \quad D = -6/5 - 1 = -11/5$$

$$q_4 = \min(11, 2) = 2, \quad D = -11/5 - 1 = -16/5$$

$$p_5 = \min(9, 2) = 2, \quad D = -16/5 - 1 = -21/5$$

$$p_8 = \min(7, 3) = 3, \quad D = -21/5 - 1/5 = -22/5$$

$$q_{12} = \min(4, 3) = 3, \quad D = -22/5 - 1/5 = -23/5$$

حال از بین عناصر باقیمانده در مجموعه R کوچکترین عنصر را انتخاب می‌کنیم که $d_1 = 3$ می‌باشد. به گام ۶ می‌رویم، داریم:

$$q_1 = \min(1, 2) = 1, \quad D = 0.5 - 0.5 = 0$$

به گام ۷ می‌رویم، چون مقدار D برابر صفر شده است، توقف می‌کنیم، جواب بهینه به دست آمده است. با توجه به اینکه p_i مقداری است که به وزن رأس i ام اضافه می‌شود و q_i مقداری است که از وزن رأس i ام کم می‌شود، با توجه به مقادیر به دست آمده، وزن‌های اصلاح شده به شرح زیر می‌باشد:

$$w_3^* = w_3 - q_3 = 5 - 3 = 2$$

$$w_6^* = w_6 + p_6 = 6 + 2 = 8$$

$$w_7^* = w_7 + p_7 = 5 + 2 = 7$$

$$w_{11}^* = w_{11} - q_{11} = 4 - 2 = 2$$

$$w_{13}^* = w_{13} - q_{13} = 3 - 2 = 1$$

$$w_4^* = w_4 - q_4 = 4 - 2 = 2$$

$$w_5^* = w_5 + p_5 = 3 + 2 = 5$$

$$w_8^* = w_8 + p_8 = 1 + 3 = 4$$

$$w_{12}^* = w_{12} - q_{12} = 5 - 3 = 2$$

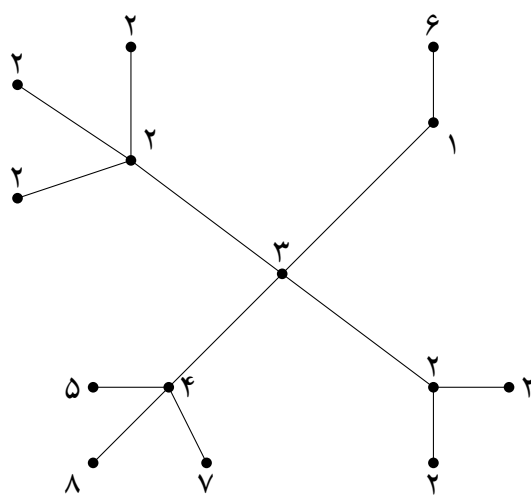
$$w_1^* = w_1 - q_1 = 3 - 1 = 2$$

بقیه وزن‌ها که در موارد بالا دیده نمی‌شود، بدون تغییر باقی می‌مانند، نتیجه می‌گیریم:

$$w_2^* = 2, \quad w_9^* = 3, \quad w_{10}^* = 2, \quad w_{14}^* = 6$$

حال گراف حاصل از این اصلاح وزن‌ها را می‌توان در شکل (۵.۲) دید (اعداد نمایش داده شده بر روی رئوس، همان وزن‌های اصلاح شده می‌باشند).

اگر زیر درختان ریشه‌دار شده در رأس v_8 را ملاحظه کنید، مشاهده می‌شود که وزن زیر درخت T_0 به نسبت وزن‌های جدید، دقیقاً نصف وزن درخت می‌باشد و سه زیر درخت دیگر که تک رأس‌های v_6, v_5 و v_7 می‌باشند، وزنی کمتر از نصف وزن درخت را دارند. اکنون با توجه به لم (۳.۱.۲) می‌توان دریافت که رأس v_8 یک ۱-میانه درخت به نسبت وزن‌های اصلاح شده می‌باشد.



شکل ۵.۲: درخت، با وزن‌های اصلاح شده

فصل ۳

مسئله ۱- میانه معکوس روی دور

همان‌طور که می‌دانید گراف $G = (V, E)$ را یک دور می‌نامند، هرگاه بسته باشد و هر رأس آن از درجه ۲ باشد (روی رأس‌ها حلقه نداشته باشیم) یا به عبارت دیگر، مسیری که ابتدا و انتهایش بر هم منطبق باشد. در مسئله ۱- میانه معکوس روی یک دور، هدف تغییر وزن رئوس با کمترین هزینه می‌باشد که یک رأس از پیش تعیین شده به عنوان ۱- میانه این گراف واقع شود. در سال ۲۰۰۸ بورکارد و همکارانش [۱۵] مسئله ۱- میانه معکوس روی دور را مورد بررسی قرار دادند.

۱.۳ معرفی و بیان مسئله

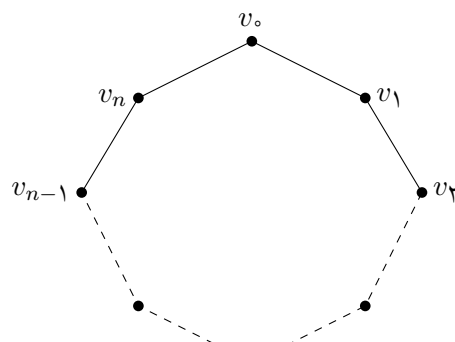
فرض کنیم دور $G = (V, E)$ با $n + ۱$ رأس شماره گذاری شده در جهت عقربه‌های ساعت داده شده باشد که:

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, \quad E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$$

بنا به خاصیت دور $|V| = |E| = n + ۱$. همچنین در رابطه بالا e_j بیانگر یال بین رأس v_j و رأس v_{j+1} می‌باشد. یا به طور خلاصه داریم:

$$e_j = [j, j + ۱]; \quad \forall j = 0, \dots, n - ۱, \quad e_n = [n, 0]$$

هر رأس $e_j \in E$ یک طول مثبت دارد که آن را l_j می‌نامیم و همچنین هر رأس v_j یک وزن نامنفی دارد که آن را w_j می‌نامیم. حال فرض کنید $d(i, j)$ طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس v_i و v_j را مشخص کند. در ادامه به بررسی مسئله ۱- میانه معکوس روی دور می‌پردازیم که از مرجع [۱۵] استفاده شده است.



شکل ۱.۳: دوری با $n+1$ رأس

در مسئله ۱- میانه معکوس روی یک دور، هدف تغییر وزن رئوس با کمترین هزینه می باشد که رأس از پیش تعیین شده v_0 به عنوان ۱- میانه این گراف واقع شود. هزینه در این مسئله متناسب با افزایش و کاهش وزن رئوس می باشد. البته توجه داریم که این تغییرات در وزن ها نمی تواند به صورت دلخواه انجام شود و هر وزن w_j بین یک کران پایین ($\underline{w}_j \geq 0$) و یک کران بالا ($\bar{w}_j$) قرار دارد. فرض کنید هزینه برای تغییر وزن w_j به اندازه یک واحد (افزایش وزن یا کاهش وزن) یکسان باشد (مثلاً هزینه را قرار دهید ۱). بنابراین هزینه کل، به وسیله تابع زیر اندازه گیری می شود:

$$\sum_{j=0}^n (p_j + q_j)$$

فرض کنید مقداری که وزن مشتری i ام یعنی w_i افزایش می یابد برابر p_i باشد و به طور مشابه مقداری که وزن مشتری i ام کاهش می یابد برابر q_i باشد. ما یک جواب به صورت (p_j, q_j) ; $j = 0, \dots, n$ را شدنی می نامیم، هرگاه این جواب تضمین کند که رأس v_0 یک ۱- میانه مسئله می باشد و همچنین کران های وزن ها رعایت شده باشد. با استفاده از این نمادگذاری، مسئله ۱- میانه معکوس روی دور، می تواند به صورت برنامه ریزی خطی زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=0}^n (p_j + q_j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=0}^n (d(i, j) - d(0, j))(p_j - q_j) \geq \sum_{j=0}^n (d(0, j) - d(i, j))w_j ; i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq p_j \leq \bar{w}_j - w_j ; j = 0, 1, \dots, n \\ & 0 \leq q_j \leq w_j - \underline{w}_j ; j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3)$$

محدودیت اول برنامه ریزی فوق در واقع بیان می کند که بعد از اصلاح وزن ها مجموع وزنی فاصله ها از هر رأس v_i به تمام رئوس دیگر، حداقل به بزرگی مجموع وزنی فاصله ها از رأس $v_\circ$ به تمام رئوس دیگر می باشد یا به عبارت دیگر رأس $v_\circ$ به عنوان یک ۱- میانه دور می باشد که این یعنی به ازای هر $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=\circ}^n (w_j + p_j - q_j) d(\circ, j) &\leq \sum_{j=\circ}^n (w_j + p_j - q_j) d(i, j) \Rightarrow \\ \sum_{j=\circ}^n w_j d(\circ, j) + \sum_{j=\circ}^n (p_j - q_j) d(\circ, j) &\leq \sum_{j=\circ}^n w_j d(i, j) + \sum_{j=\circ}^n (p_j - q_j) d(i, j) \Rightarrow \\ \sum_{j=\circ}^n (d(i, j) - d(\circ, j)) (p_j - q_j) &\geq \sum_{j=\circ}^n (d(\circ, j) - d(i, j)) w_j. \end{aligned}$$

که رابطه آخر به دست آمده، همان محدودیت اول برنامه ریزی خطی (۱.۳) می باشد و با توجه به اینکه وزن w_j کراندار می باشد و بین یک کران بالا و یک کران پایین می باشد، داریم:

$$\forall j = \circ, 1, \dots, n; \quad w_j + p_j \leq \bar{w}_j, \quad \underline{w}_j \leq w_j - q_j$$

اکنون با استفاده از این حقیقت که p_j و q_j مقادیری نامنفی هستند، محدودیت دوم و سوم برنامه ریزی خطی (۱.۳) به دست می آید.

۲.۳ برخی نماد گذاری ها

فرض کنید L مجموع طول یال ها در دور را مشخص کند، یعنی:

$$L = \sum_{j=\circ}^n l_j$$

همچنین فرض کنید $d^R(i, j)$ فاصله بین رأس v_i و v_j زمانی که در جهت عقربه های ساعت حرکت می کنیم را مشخص کند و به طور مشابه $d^L(i, j)$ فاصله بین رأس v_i و v_j زمانی که در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت می کنیم را مشخص کند، همچنین نقطه M ، نقطه ای روی دور باشد که مقابل رأس $v_\circ$ باشد، یعنی نقطه ای که فاصله آن تا رأس $v_\circ$ چه در جهت عقربه های ساعت و چه در خلاف جهت عقربه های ساعت، یکسان باشد. پس داریم:

$$d^R(v_\circ, M) = d^L(v_\circ, M) = \frac{L}{2}$$

البته توجه داریم که نقطه M ممکن است روی یک رأس یا روی یک یال واقع شود. ما فاصله جدید $\hat{d}(j)$ را برای رئوس $j = 0, 1, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{d}(j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ d(j, M) & d(0, j) = d^R(0, j) \\ d(0, j) & d(0, j) = d^L(0, j) \end{cases} \quad (2.3)$$

تابع اندازه فوق در واقع به این معناست که اگر رأس v_j در نیم دور راست قرار داشته باشد، فاصله بین رأس v_j و نقطه M در جهت عقربه‌های ساعت مد نظر است و اگر رأس v_j در نیم دور چپ قرار داشته باشد، فاصله بین رأس v_0 و رأس v_j در خلاف جهت عقربه‌های ساعت مد نظر می‌باشد. اکنون بعد از محاسبه $\hat{d}(j)$ آنها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم، داریم:

$$0 = \hat{d}(\pi(0)) \leq \hat{d}(\pi(1)) \leq \hat{d}(\pi(2)) \leq \dots \leq \hat{d}(\pi(n)) \quad (3.3)$$

اکنون مسئله برنامه ریزی خطی معادل با مسئله (۱.۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=0}^n x_j + \sum_{j=0}^n y_j \\ \text{s.t.} \quad & Ax + \bar{A}y \geq b \\ & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ & 0 \leq y \leq \bar{y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

که در برنامه ریزی خطی فوق $x_0 = p_0$ ، و برای هر $1 \leq j \leq n$ داریم:

$$x_j = \begin{cases} q_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور راست باشد (شامل نقطه } M\text{).} \\ p_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور چپ باشد.} \end{cases} \quad (5.3)$$

اگر در رابطه فوق x_j متناظر با ضابطه اول باشد، آن را متغیر از نوع q (یا q -متغیر) و اگر متناظر با ضابطه دوم باشد، آن را متغیر از نوع p (یا p -متغیر) می‌نامند، همچنین برای هر $0 \leq j \leq n$ داریم:

$$y_j = \begin{cases} p_{\pi(n-j)} & x_{n-j} = q_{\pi(n-j)} \\ q_{\pi(n-j)} & x_{n-j} = p_{\pi(n-j)} \end{cases} \quad (6.3)$$

به طور مشابه، اگر در رابطه فوق y_j متناظر با ضابطه اول باشد، آن را متغیر از نوع p (یا p -متغیر) و اگر

متناظر با ضابطه دوم باشد، آن را متغیر از نوع q (یا q -متغیر) می نامند. ضرایب $A = (a_{ij})$ و $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ نیز به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a_{ij} = \begin{cases} d(i, \circ) & j = \circ \\ (-1)(d(i, \pi(j)) - d(\circ, \pi(j))) & x_j = q_{\pi(j)} \\ (d(i, \pi(j)) - d(\circ, \pi(j))) & x_j = p_{\pi(j)} \end{cases} \quad (۷.۳)$$

و

$$\bar{a}_{ij} = -a_{i, n-j} \quad (۸.۳)$$

برای هر $i = 1, \dots, n$ بردار طرف راست، یعنی b نیز از رابطه زیر به دست می آید:

$$b_i = \sum_{j=\circ}^n (d(\circ, j) - d(i, j)) w_j \quad (۹.۳)$$

در برنامه ریزی خطی (۴.۳)، مقادیر $\bar{x}_j$ و $\bar{y}_j$ در واقع همان کران های بالای متغیرهای اصلی $p_{\pi(j)}$ و $q_{\pi(j)}$ که متناظر با x_j و y_j می باشند، هستند.

گزاره ۱.۲.۳. [۱۵]. ستون های ماتریس A و $\bar{A}$ به طور یکنواخت نزولی هستند، یعنی:

$$a_{ij} \geq a_{ik} \quad \forall \circ \leq j < k \leq n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (۱۰.۳)$$

$$\bar{a}_{ij} \geq \bar{a}_{ik} \quad \forall \circ \leq j < k \leq n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (۱۱.۳)$$

برهان. برای اثبات این گزاره، فقط حالت (۱۰.۳) را اثبات می کنیم، چون با در نظر گرفتن (۱۰.۳) و با توجه به اینکه $\bar{a}_{ij} = -a_{i, n-j}$ ، حالت (۱۱.۳) به طور مستقیم نتیجه می شود، چون برای هر $j < k$ داریم:

$$-j > -k \implies n-j > n-k \xrightarrow{(۱۰.۳)} a_{i, n-k} \geq a_{i, n-j} \implies -a_{i, n-k} \leq -a_{i, n-j} \xrightarrow{(۸.۳)} \bar{a}_{ij} \geq \bar{a}_{ik}$$

اکنون به اثبات رابطه (۱۰.۳) می پردازیم، ابتدا ستون صفر را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم. اگر ستون زام متناظر با یک p -متغیر باشد، بنا بر نامساوی مثلث داریم:

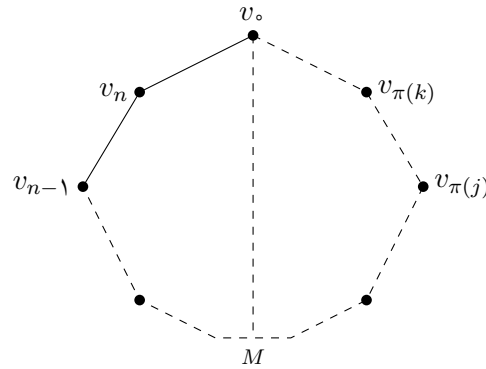
$$a_{ij} = d(i, \pi(j)) - d(\circ, \pi(j)) \leq d(i, \circ) + d(\circ, \pi(j)) - d(\circ, \pi(j)) = d(i, \circ) = a_{i\circ}$$

و در حالتی که ستون زام متناظر با یک q -متغیر باشد، به طور مشابه داریم:

$$a_{ij} = d(\circ, \pi(j)) - d(i, \pi(j)) \leq d(\circ, i) + d(i, \pi(j)) - d(i, \pi(j)) = d(\circ, i) = a_{i\circ}$$

پس برای هر $i = 1, \dots, n$ و هر $j = 1, \dots, n$ داریم $a_{i\circ} \geq a_{ij}$. بنابراین کفایت ستون‌های j و k که $1 \leq j < k \leq n$ را مورد بررسی قرار دهیم. برای این کار چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: هر دو رأس $v_{\pi(j)}$ و $v_{\pi(k)}$ در نیم دور راست قرار داشته باشند (شامل M).



شکل ۲.۳: گراف مربوط به حالت اول

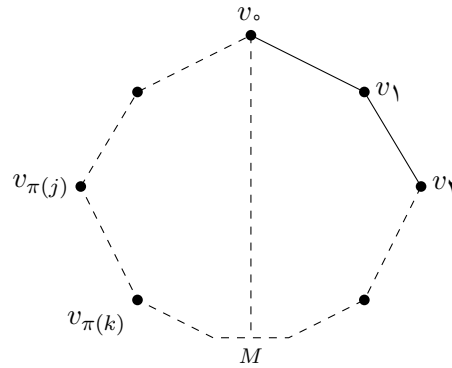
در این حالت، با توجه به رابطه (۵.۳) هر دو متغیر x_j و x_k متناظر با q -متغیر هستند. از آنجایی که $j < n$ می‌باشد و بنا بر رابطه (۳.۳)، $\hat{d}(\pi(j)) \leq \hat{d}(\pi(k))$ ، پس داریم:

$$d(\circ, \pi(j)) = d(\circ, \pi(k)) + d(\pi(k), \pi(j))$$

با توجه به رابطه فوق و با استفاده از نامساوی مثلث برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= d(\circ, \pi(j)) - d(i, \pi(j)) \\ &= d(\circ, \pi(k)) + d(\pi(k), \pi(j)) - d(i, \pi(j)) \\ &\geq d(\circ, \pi(k)) + d(\pi(k), \pi(j)) - d(i, \pi(k)) - d(\pi(k), \pi(j)) \\ &= a_{ik} \end{aligned}$$

حالت دوم: هر دو رأس $v_{\pi(k)}$ و $v_{\pi(j)}$ در نیم دور چپ قرار داشته باشند.



شکل ۳.۳: گراف مربوط به حالت دوم

در این حالت، با توجه به رابطه (۵.۳) هر دو متغیر x_j و x_k متناظر با p -متغیر هستند. از آنجایی که $j < n$ می‌باشد و بنا بر رابطه (۳.۳)، $\hat{d}(\pi(j)) \leq \hat{d}(\pi(k))$ ، پس داریم:

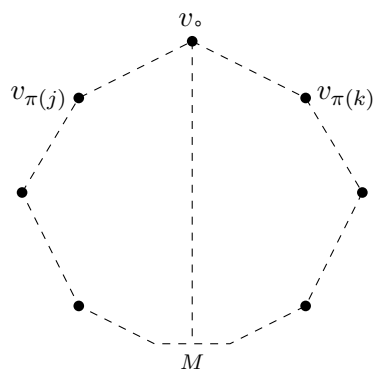
$$d(\circ, \pi(k)) = d(\circ, \pi(j)) + d(\pi(j) + \pi(k))$$

با توجه به رابطه فوق و با استفاده از نامساوی مثلث برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= d(i, \pi(k)) - d(\circ, \pi(k)) \\ &= d(i, \pi(k)) + d(\circ, \pi(j)) - d(\pi(j), \pi(k)) \\ &\leq d(i, \pi(j)) + d(\pi(j) + \pi(k)) - d(\circ, \pi(j)) - d(\pi(j), \pi(k)) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

حالت سوم: رأس $v_{\pi(j)}$ در نیم دور چپ و رأس $v_{\pi(k)}$ در نیم دور راست قرار داشته باشد.

در این حالت، x_j متناظر با یک p -متغیر و x_k متناظر با یک q -متغیر می‌باشد. با توجه به اینکه $\hat{d}_{\pi(j)} \leq \hat{d}_{\pi(k)}$ واضح است که کوتاه‌ترین مسیر بین $v_{\pi(j)}$ و $v_{\pi(k)}$ مسیری است که از رأس v_0 می‌گذرد. پس بنا بر نامساوی مثلث داریم:



شکل ۴.۳: گراف مربوط به حالت سوم

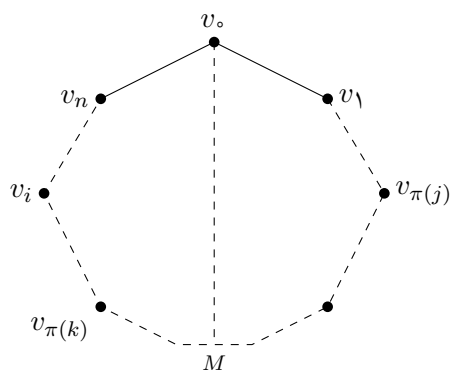
$$d(o, \pi(k)) + d(o, \pi(j)) = d(\pi(k), \pi(j)) \leq d(i, \pi(j)) + d(i, \pi(k))$$

$$\implies d(i, \pi(j)) - d(o, \pi(j)) \geq d(o, \pi(k)) - d(i, \pi(k))$$

$$\implies a_{ij} \geq a_{ik}$$

حالت چهارم: رأس $v_{\pi(j)}$ در نیم دور راست و رأس $v_{\pi(k)}$ در نیم دور چپ قرار داشته باشد. در این حالت سه مورد زیر را تفکیک می‌کنیم:

۱. اگر $\pi(k) \leq i \leq n$ باشد.

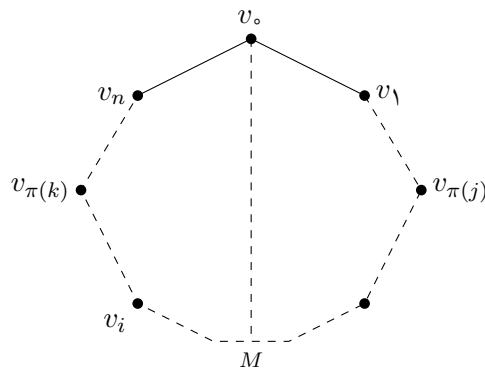


شکل ۵.۳: گراف مربوط به مورد اول از حالت چهارم

آنگاه $d(o, \pi(k)) = d(o, i) + d(i, \pi(k))$ و با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned}
 d(i, \pi(j)) + d(i, \pi(k)) &= d(i, \pi(j)) + d(\circ, \pi(k)) - d(\circ, i) \\
 &\leq d(i, \circ) + d(\circ, \pi(j)) + d(\circ, \pi(k)) - d(\circ, i) \\
 &= d(\circ, \pi(j)) + d(\circ, \pi(k)) \\
 &\Rightarrow a_{ij} \geq a_{ik}
 \end{aligned}$$

۲. اگر $\pi(j) \leq i \leq \pi(k)$ باشد.



شکل ۶.۳: گراف مربوط به مورد دوم از حالت چهارم

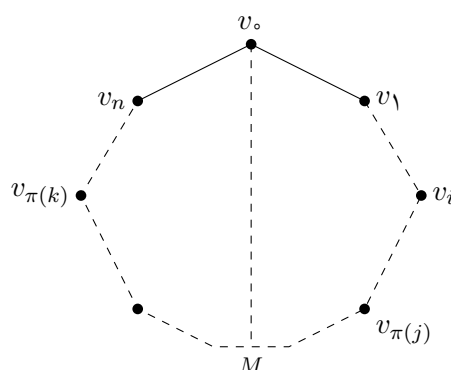
آنگاه $d(i, \pi(j)) + d(i, \pi(k)) = d(\pi(j), \pi(k))$ و با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned}
 d(i, \pi(j)) + d(i, \pi(k)) &= d(\pi(j), \pi(k)) \\
 &\leq d(\circ, \pi(k)) + d(\circ, \pi(j)) \\
 &\Rightarrow a_{ij} \geq a_{ik}
 \end{aligned}$$

۳. اگر $1 \leq i < \pi(j)$ باشد.

آنگاه $d(\circ, \pi(j)) = d(\circ, i) + d(i, \pi(j))$ و با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned}
 d(\circ, \pi(j)) + d(\circ, \pi(k)) &= d(\circ, i) + d(i, \pi(j)) + d(\circ, \pi(k)) \\
 &\geq d(i, \pi(k)) + d(i, \pi(j)) \\
 &\Rightarrow a_{ij} \geq a_{ik}
 \end{aligned}$$



شکل ۷.۳: گراف مربوط به مورد سوم از حالت چهارم

□

و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.

اگر برنامه ریزی خطی (۴.۳) شدنی باشد، ساختار ویژه‌ای دارد که در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۲.۲.۳. [۱۵]. اگر برنامه ریزی خطی (۴.۳) شدنی باشد، آنگاه اندیس‌های r و s ای وجود دارد که:

$$\begin{cases} x_j^* = \bar{x}_j & \forall j = 0, 1, \dots, r-1 \\ x_r^* \geq 0 \\ x_j^* = 0 & \forall j = r+1, \dots, n \end{cases} \quad (12.3)$$

و

$$\begin{cases} y_j^* = \bar{y}_j & \forall j = 0, 1, \dots, s-1 \\ y_s^* \geq 0 \\ y_j^* = 0 & \forall j = s+1, \dots, n \end{cases} \quad (13.3)$$

یک جواب بهینه مسئله (۴.۳) می‌باشد. همچنین می‌توانیم همیشه فرض کنیم x_r^* یا y_s^* مثبت اکید هستند.

برهان. فرض کنید $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ ، $j = 0, \dots, n$ یک جواب بهینه برای مسئله (۴.۳) باشد و فرض کنید $\hat{x}_r$ اولین عنصری باشد که از کران بالایش کوچکتر می‌باشد و همچنین اندیس l که $r+1 \leq l \leq n$ وجود داشته باشد که $\hat{x}_l \geq 0$.

بنا بر گزاره (۱.۲.۳) برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $a_{ir} \geq a_{il}$. فرض کنید $\bar{a}_i$ سطر i ام ماتریس $\bar{A}$ باشد. حال اگر $\bar{x}_r + \eta = \hat{x}_r + \eta = \bar{x}_r$ و $\hat{x}_l - \delta = 0$ باشد، با در نظر گرفتن $\epsilon = \min\{\eta, \delta\}$ ، افزایش $\bar{x}_r$ به اندازه ϵ و کاهش $\bar{x}_l$ به اندازه ϵ شدنی بودن را بهم نمی‌زند و همچنین مقدار تابع هدف نیز تغییر نمی‌کند، زیرا:

$$0 \leq \hat{x}_r < \bar{x}_r \implies 0 < \hat{x}_r + \epsilon \leq \bar{x}_r$$

$$0 < \hat{x}_l \leq \bar{x}_l \implies 0 \leq \hat{x}_l - \epsilon < \bar{x}_l$$

پس دو محدودیت آخر مسئله (۴.۳) برقرار می‌باشد، برای محدودیت اول (که در اینجا ما سطر دلخواه i را در نظر گرفته ایم) نیز داریم:

$$Ax + \bar{A}y = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i0} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \vdots \\ \hat{x}_r + \epsilon \\ \vdots \\ \hat{x}_l - \epsilon \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} + \bar{A}y$$

اکنون سطر i ام را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} & a_{i0}\hat{x}_0 + \cdots + a_{ir}(\hat{x}_r + \epsilon) + \cdots + a_{il}(\hat{x}_l - \epsilon) + \cdots + a_{in}\hat{x}_n + \bar{a}_i y \\ &= a_{i0}\hat{x}_0 + \cdots + a_{ir}\hat{x}_r + a_{ir}\epsilon + \cdots + a_{il}\hat{x}_l - a_{il}\epsilon + \cdots + a_{in}\hat{x}_n + \bar{a}_i y \end{aligned} \quad (۱۴.۳)$$

حال چون $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ یک جواب بهینه است، پس $Ax + \bar{A}y \geq b$ ، در نتیجه برای سطر i ام داریم:

$$a_{i0}\hat{x}_0 + \cdots + a_{ir}\hat{x}_r + \cdots + a_{il}\hat{x}_l + \cdots + a_{in}\hat{x}_n + \bar{a}_i y \geq b_i$$

و چون $a_{ir} \geq a_{il}$ ، پس برای $0 \leq \epsilon$ داریم:

$$\epsilon a_{ir} \geq \epsilon a_{il} \implies \epsilon a_{ir} - \epsilon a_{il} \geq 0$$

پس در ادامه (۱۴.۳) رابطه داریم:

$$a_{i0}\hat{x}_0 + \cdots + a_{ir}\hat{x}_r + a_{ir}\epsilon + \cdots + a_{il}\hat{x}_l - a_{il}\epsilon + \cdots + a_{in}\hat{x}_n + \bar{a}_i y \geq b_i$$

با توجه به توضیحات بالا رابطه $Ax + \bar{A}y \geq b$ برقرار می‌باشد. مقدار تابع هدف نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{r-1} \hat{x}_j + (\hat{x}_r + \epsilon) + \sum_{j=r+1}^{l-1} \hat{x}_j + (\hat{x}_l - \epsilon) + \sum_{j=l+1}^n \hat{x}_j + \sum_{j=0}^n \hat{y}_j \\ &= \sum_{j=0}^n \hat{x}_j + \sum_{j=0}^n \hat{y}_j \end{aligned}$$

با استفاده از روند فوق به صورت تکراری، می‌توان به یک جواب بهینه به صورت بیان شده در (۱۲.۳) رسید. همچنین می‌توان استدلالی شبیه استدلال قبل برای $\hat{y}$ و رابطه (۱۳.۳) بیان کرد. □

اگر وزن یک رأس افزایش پیدا کند، کاهش وزن آن رأس در آن زمان امری بی‌معنی است، زیرا افزایش وزن و کاهش بعد از آن برای ما هزینه‌ای را در بر دارد (به عنوان مثال، فرض کنیم وزن رأس اول را ابتدا ۶ واحد افزایش دهیم و سپس ۲ واحد کاهش دهیم، این ۶ واحد افزایش و این ۲ واحد کاهش وزن، برای ما هزینه‌ای را در بر دارد، می‌توان برای کاهش هزینه، به جای ۶ واحد افزایش و سپس ۲ واحد کاهش وزن، از همان ابتدا ۴ واحد وزن را افزایش دهیم که هم هدف را برآورده می‌کند و هم هزینه کمتری را برای ما در بر دارد). بنابراین برای هر جواب بهینه (x^*, y^*) از مسئله (۴.۳) به فرم بیان شده در گزاره (۲.۲.۳)، رابطه‌ای برقرار می‌باشد که در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۳.۲.۳. [۱۵]. برای هر جواب بهینه به صورت (x_j^*, y_j^*) ; $j = 0, 1, \dots, n$ برای برنامه ریزی خطی (۴.۳)، داریم:

$$x_j^* y_{n-j}^* = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (15.3)$$

برهان. با توجه به رابطه (۵.۳) و (۶.۳) داریم:

$$x_j^* = \begin{cases} q_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور راست باشد (شامل نقطه } M) \\ p_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور چپ باشد.} \end{cases}$$

و

$$y_{n-j}^* = \begin{cases} p_{\pi(j)} & x_j = q_{\pi(j)} \\ q_{\pi(j)} & x_j = p_{\pi(j)} \end{cases}$$

پس برای $j = 0, \dots, n$ می‌توان نوشت:

$$x_j^* y_{n-j}^* = \begin{cases} q_{\pi(j)} \cdot p_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور راست باشد (شامل نقطه } M\text{).} \\ p_{\pi(j)} \cdot q_{\pi(j)} & \text{اگر رأس } v_{\pi(j)} \text{ در نیم دور چپ باشد.} \end{cases}$$

که در رابطه بالا باید از بین $p_{\pi(j)}$ و $q_{\pi(j)}$ حداقل یکی صفر باشد، چون افزایش وزن یک رأس و کاهش بعد از آن، و یا برعکس، کاهش وزن یک رأس و افزایش بعد از آن، برای ما هزینه‌های اضافی را در بر دارد. پس برای هر رأس، یا باید وزن آن را افزایش داد و یا وزن آن را کاهش داد، پس بنا بر توضیحات فوق داریم:

$$x_j^* y_{n-j}^* = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

□

اکنون با ترکیب این گزاره و گزاره (۲.۲.۳) و این حقیقت که یا x_r^* یا y_s^* مثبت اکید است، می‌توان دریافت که در یک جواب بهینه به فرم بیان شده در گزاره (۲.۲.۳) همواره $r + s \leq n$ است.

۳.۳ بازنویسی برنامه ریزی خطی با دو متغیر

در این بخش می‌خواهیم برنامه ریزی خطی (۴.۳) را با معرفی متغیرهای جدید، طوری بازنویسی کنیم که تنها دو متغیر داشته باشیم. برای $\xi \geq 0$ و $\eta \geq 0$ توابع قطعه‌ای خطی $g_i(\xi)$ و $\bar{g}_i(\eta)$ را به ازای $i = 1, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_i(\xi) = \sum_{j=0}^{r-1} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir} \left(\xi - \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j \right), \quad \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j \leq \xi \leq \sum_{j=0}^r \bar{x}_j$$

$$\bar{g}_i(\eta) = \sum_{k=0}^{s-1} \bar{a}_{ik} \bar{y}_k + \bar{a}_{is} \left(\eta - \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \right), \quad \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \leq \eta \leq \sum_{k=0}^s \bar{y}_k$$

با استفاده از گزاره (۲.۲.۳) و روابط زیر:

$$\xi = \sum_{j=0}^n x_j, \quad \eta = \sum_{k=0}^n y_k$$

می‌توان برنامه ریزی خطی (۴.۳) را به صورت مسئله زیر با دو متغیر نوشت که جواب‌های بهینه مشترکی

دارند:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \xi + \eta \\
 s.t : \quad & g_i(\xi) + \bar{g}_i(\eta) \geq b_i ; \quad i = 1, \dots, n \\
 & 0 \leq \xi \leq \sum_{j=0}^n \bar{x}_j \\
 & 0 \leq \eta \leq \sum_{k=0}^n \bar{y}_k
 \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

بر طبق گزاره (۱.۲.۳) توابع $g_i(\xi)$ و $\bar{g}_i(\eta)$ برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ توابعی مقعر می‌باشند که شیب آنها به طور یکنواخت کاهش پیدا می‌کند. حال چون می‌دانیم که مجموع توابع مقعر، خود تابعی مقعر می‌باشد و همچنین مجموعه $\{x : g(x) \geq b\}$ محدب می‌باشد، برای هر تابع مقعر g ، لم زیر را داریم.

لم ۱.۳.۳. [۱۵]. مجموعه B که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک مجموعه محدب است

$$B = \{(\xi, \eta) \mid g_i(\xi) + \bar{g}_i(\eta) \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

برای مجموعه B تعریف شده به صورت بالا، مرز B حداکثر به $\lambda(n+1)$ جعبه به صورت زیر تقسیم می‌شود:

$$B(r, s) = \left\{ (\xi, \eta) : \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j \leq \xi \leq \sum_{j=0}^r \bar{x}_j, \quad \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \leq \eta \leq \sum_{k=0}^s \bar{y}_k \right\}$$

با توجه به گزاره (۲.۲.۳)، یکی از جواب‌های بهینه که در واقع همان جواب مد نظر ماست، شکل خاصی دارد، که به دنبال پیدا کردن اندیس r و s و همچنین مقادیر x_r و y_s می‌باشم، هر نقطه (x_r, y_s) در یک جعبه $B(r, s)$ قرار دارد و برعکس، برای هر نقطه به فرم شرح داده شده در گزاره (۲.۲.۳) اندیس‌های r و s وجود دارد که این نقطه متناظر با یک نقطه در $B(r, s)$ می‌باشد. بعد از پیدا کردن اندیس‌های r و s و مقادیر x_r و y_s و با استفاده از روابط زیر به جواب نهایی می‌رسیم:

$$\forall 0 \leq j \leq r-1 ; x_j = \bar{x}_j, \quad \forall j \geq r+1 ; x_j = 0$$

$$\forall 0 \leq j \leq s-1 ; y_j = \bar{y}_j, \quad \forall j \geq s+1 ; y_j = 0$$

توابع $g_i(\xi)$ و $\bar{g}_i(\eta)$ توابعی مقعر می‌باشند، می‌توانیم برای هر $i = 1, \dots, n$ محدودیت‌های به صورت $g_i(\xi) + \bar{g}_i(\eta) \geq b_i$ را به وسیله محدودیت‌های زیر جایگزین کرد:

$$\forall r, s = 0, 1, \dots, n, \sum_{j=0}^{r-1} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir} \left(\xi - \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j \right) + \sum_{k=0}^{s-1} \bar{a}_{ik} \bar{y}_k + \bar{a}_{is} \left(\eta - \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \right) \geq b_i$$

که رابطه فوق با ترکیب

$$l_{ir}(\xi) = \sum_{j=0}^{r-1} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir} \left(\xi - \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j \right)$$

برای هر $r = 0, 1, \dots, n$ و همچنین

$$\bar{l}_{is}(\eta) = \sum_{k=0}^{s-1} \bar{a}_{ik} \bar{y}_k + \bar{a}_{is} \left(\eta - \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \right)$$

برای هر $s = 0, 1, \dots, m$ به دست می‌آید، که اگر $m \leq n$ باشد، می‌توان به یک برنامه ریزی خطی با دو متغیر و $O(n^3)$ محدودیت رسید.

۴.۳ روش حل تکراری

در این بخش به دنبال ارائه روش حلی برای مسئله هستیم، اما یکی از جواب‌های بهینه ساختار ویژه‌ای دارد که در گزاره (۲.۲.۳) بیان شد و ما در واقع به دنبال پیدا کردن این جواب بهینه هستیم، پس اگر اندیس r و s و همچنین مقادیر x_r و x_s را پیدا کنیم، با استفاده از گزاره (۲.۲.۳) می‌توان به جواب بهینه نهایی رسید. برای این منظور مسائل LP موضعی به صورت زیر را در نظر بگیرید (در برنامه ریزی زیر a^j و $\bar{a}^j$ به ترتیب ستون‌های زام ماتریس‌های A و $\bar{A}$ می‌باشد).

$$\begin{aligned} \min \quad & x_r + y_s \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j a^j + a^r x_r + \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^s y_s \geq b \\ & 0 \leq x_r \leq \bar{x}_r \\ & 0 \leq y_s \leq \bar{y}_s \end{aligned} \quad (17.3)$$

که در واقع در این مسائل موضعی به دنبال پیدا کردن مینیم $x_r + y_s$ می‌باشیم که همان محدودیت‌های مسئله (۱۶.۳) را برقرار کند. برای این منظور می‌توان مسائل موضعی (۱۷.۳) را در تمامی جعبه‌های $B(r, s)$ (یعنی برای هر $r = 0, 1, \dots, n$, $s = 0, 1, \dots, m$) حل کنیم و سپس مقادیر تابع هدف‌ها را مقایسه کرده و کمترین مقدار را انتخاب کنیم. با توجه به اینکه در هر یک از $O(n^2)$ جعبه، جواب بهینه مسئله فوق (که یک مسئله برنامه ریزی خطی با دو متغیر و $O(n)$ محدودیت می‌باشد) باید مشخص شود، مسئله با این روش در زمان $O(n^3)$ قابل حل می‌باشد.

ما به دنبال سرعت بخشیدن به روش حل و همچنین کم کردن پیچیدگی زمانی حل مسئله می‌باشیم، برای این منظور دو فاز زیر را در نظر می‌گیریم:

در فاز اول حل مسئله ما یک جواب شدنی را مشخص می‌کنیم یا اینکه ثابت می‌کنیم که مسئله نشدنی است. و در فاز دوم، با آن جواب شدنی شروع می‌کنیم و جواب بهینه را محاسبه می‌کنیم. اکنون فرض کنید که یک جواب شدنی مسئله (۴.۳) از قبل مشخص باشد. این جواب شدنی متناظر با یک نقطه (x_r, y_s) در جعبه $B(r, s)$ می‌باشد. ما می‌توانیم فرض کنیم که $|x_r| + |y_s| > 0$. حال با مشخص بودن اندیس‌های r و s مسائل موضعی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 LP(r, s) : \min \quad & x_r + y_s \\
 s.t : \quad & \sum_{j=0}^{r-1} \bar{x}_j a^j + a^r x_r + \sum_{k=0}^{s-1} \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^s y_s \geq b \\
 & 0 \leq x_r \leq \bar{x}_r \\
 & 0 \leq y_s \leq \bar{y}_s
 \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

البته توجه داریم که تفاوت مسئله (۱۷.۳) و مسئله (۱۸.۳) در این است که در مسئله اول اندیس‌های r و s معلوم نیستند، این در حالیست که در مسئله دوم با داشتن جواب شدنی (x_r, y_s) و قرار گرفتن آن در جعبه $B(r, s)$ ، ما اندیس‌های r و s را در اختیار داریم و این مقادیر معلوم می‌باشند. حال با توجه به تحذب مجموعه B می‌توان به کم‌ترین رسید.

لم ۱.۴.۳. [۱۵]. اگر جواب بهینه $LP(r, s)$ که آن را x_r^* و y_s^* می‌نامیم، یکی از شرایط زیر را برقرار کند، جواب متناظرش در مسئله (۴.۳) بهینه است.

$$0 < x_r^* < \bar{x}_r \quad \text{و} \quad 0 < y_s^* < \bar{y}_s \tag{۱۹.۳}$$

$$(r = 0 \quad \text{و} \quad x_0^* = 0) \quad \text{یا} \quad (r = n \quad \text{و} \quad x_n^* = \bar{x}_n) \tag{۲۰.۳}$$

$$(y_m^* = \bar{y}_m \text{ و } s = m) \text{ یا } (y^* = 0 \text{ و } s = 0) \quad (21.3)$$

مقدار تابع هدف مسئله (۴.۳) را به ازای این جواب به دست آمده، z می‌نامیم. در مواردی که جواب بهینه $LP(r, s)$ در شرایط (۱۹.۳-۲۱.۳) صدق نکند، ما باید حداکثر سه مسئله LP موضعی دیگر را نیز حل کنیم، که در این حالت دو مورد زیر را تفکیک می‌کنیم:

• نقطه بهینه در یکی از گوشه‌های جعبه واقع شود، در این حالت مسائل موضعی (۱۸.۳) را برای جعبه‌های مجاور این نقطه گوشه‌ای نیز باید حل کنیم، به عنوان مثال اگر در حال رسیدگی کردن به جعبه $B(r, s)$ نقطه بهینه در گوشه چپ پایینی این جعبه واقع شود، در این حالت باید مسئله را در جعبه‌های $B(r-1, s)$ و $B(r-1, s-1)$ و $B(r, s-1)$ نیز حل کنیم، مشروط بر اینکه جعبه‌های ذکر شده تهی نباشند.

• اگر در حال رسیدگی کردن به جعبه $B(r, s)$ نقطه بهینه در جعبه مجاور آن واقع شود، باید مسئله در این جعبه نیز مورد بررسی قرار گیرد، مشروط بر اینکه این جعبه تهی نباشد.

بعد از بررسی موارد فوق، فرض کنید z_1 و z_2 و z_3 مقادیر تابع هدف مسئله (۴.۳) به ازای جواب‌های بهینه متناظر با این مسائل LP موضعی ذکر شده باشد. اگر فقط یک LP موضعی جدید وجود داشت، قرار می‌دهیم:

$$z_2 = z_3 = \infty$$

با استفاده از توضیحات بالا، اگر داشته باشیم:

$$\min(z_1, z_2, z_3) = z$$

آنگاه جواب متناظر با z جواب بهینه مورد نظر می‌باشد و اگر $\min(z_1, z_2, z_3) < z$ ، باید نقطه شدنی قبلی را با نقطه شدنی متناظر با مینیمم مقدار z_1 و z_2 و z_3 تعویض کرد و روند فوق را با استفاده از این نقطه شدنی جدید ادامه داد. و سپس بررسی کرد که آیا لم (۱.۴.۳) برقرار می‌باشد یا خیر. و در صورت برقرار نبودن، باید طبق موارد گفته شده مسائل موضعی جدید را حل کنیم و روند را ادامه دهیم.

لم ۲.۴.۳. [۱۵]. با شروع از یک جواب شدنی، یک جواب بهینه مسئله (۴.۳) در زمان $O(n^2)$ پیدا خواهد شد.

حال ما با این سؤال برخورد می‌کنیم که چگونه یک نقطه شدنی اولیه را پیدا کنیم؟ (مشروط بر اینکه مسئله شدنی باشد).

برای این منظور ما در یک روش مشابه روش فوق حرکت می‌کنیم. ابتدا از $r = s = 0$ یعنی جعبه $B(0, 0)$ شروع کرده و یک سری LP موضعی با تابع هدف‌های مختلف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بررسی جعبه $B(0, 0)$ اگر نقاط $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ نشدنی باشد، یعنی در محدودیت‌های مسئله (۱۷.۳) صدق نکند، با مشاهده محدودیت‌ها، واضح است که این نقاط در دو محدودیت آخر صدق می‌کنند، پس در محدودیتی از نوع محدودیت اول صدق نمی‌کند، یعنی بردار طرف دوم (همان بردار b) حداقل دارای یک مؤلفه مثبت می‌باشد (فرض کنید اولین مؤلفه مثبت بردار b در b_i واقع شده باشد). در این مورد، ما i امین سطر ماتریس ضرایب را به عنوان تابع هدف انتخاب می‌کنیم و مسئله LP موضعی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & a_{i0}x_0 + \bar{a}_{i0}y_0 \\ \text{s.t.} \quad & a^\circ x_0 + \bar{a}^\circ y_0 \geq \bar{b} \\ & 0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \\ & 0 \leq y_0 \leq \bar{y}_0 \end{aligned} \quad (22.3)$$

که در برنامه ریزی فوق بردار $\bar{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{b}_i = \begin{cases} 0 & b_i \geq 0 \\ b_i & b_i < 0 \end{cases}$$

این تعریف تضمین می‌کند که همه نامساوی‌های شدنی قبل، شدنی می‌مانند. حال فرض کنید که (x^*, y^*) یک جواب بهینه این مسئله LP موضعی باشد. ما جایگزین می‌کنیم بردار طرف راست b را با بردار $\hat{b}$ ، یا همان بردار b_{new} که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{b} = b - x^*_0 a^\circ - y^*_0 \bar{a}^\circ.$$

اگر $\hat{b} \leq 0$ ، آنگاه نقطه جاری، یک نقطه شدنی برای مسئله (۴.۳) می‌باشد و برای حل مسئله وارد فاز دوم می‌شویم که توضیح داده شد. در غیر این صورت دو امکان وجود دارد، اگر نقطه جاری i امین محدودیت را برقرار کند، ادامه می‌دهیم از این نقطه همراه با یک تابع هدف جدید (که از یک مؤلفه $\hat{b}_i > 0$ ناشی می‌شود). در غیر این صورت ما تابع هدف قبلی را نگه داشته و یک LP موضعی جدید را با شروع از نقطه جاری حل می‌کنیم.

(البته توجه داریم که مشابه مطالب گفته شده بعد از لم (۱.۴.۳)، در اینجا نیز اگر بعد از بررسی جعبه $B(r, s)$ جواب در نقطه گوشه این جعبه و یا روی مرز و یا در جعبه مجاور واقع شود، مشابه مطالب گفته شده، باید مسئله در آن جعبه‌های مجاور نیز مورد بررسی قرار گیرد).

لم ۳.۴.۳. [۱۵]. اگر مسئله ۱- میانه معکوس روی گراف دور شدنی باشد، الگوریتم بیان شده بالا یک جواب شدنی را بیان می‌کند.

رفتار محاسباتی الگوریتم، منجر به این حدس می‌شود که در حقیقت $O(n)$ برنامه ریزی خطی موضعی باید مطرح شود تا یک جواب شدنی پیدا شود. این روش حل روی بیش از ۱۵۰۰۰ مورد آزمایش تولید شده تصادفی با ۱۰ تا ۵۰۰ رأس اجرا شده است (جدول (۱.۳) را ببینید).

تعداد رئوس	maxval	avLPfeas	avLPopt	maxLPfeas	maxLPopt
۱۰	۱۰	۴.۷	۱.۶	۲۶	۶
۱۰	۱۰۰	۴.۹	۱.۵	۳۱	۵
۲۰	۲۰	۸.۲	۱.۹	۵۰	۸
۲۰	۴۰۰	۸.۰	۱.۹	۵۰	۷
۵۰	۵۰	۱۴.۵	۲.۳	۸۰	۱۱
۵۰	۲۵۰۰	۱۴.۶	۲.۳	۷۸	۱۰
۱۰۰	۱۰۰	۲۱.۸	۲.۷	۱۰۴	۱۲
۱۰۰	۱۰۰۰۰	۲۲.۹	۲.۷	۱۰۵	۱۲
۲۰۰	۲۰۰	۲۶.۶	۲.۷	۱۲۳	۱۴
۵۰۰	۵۰۰	۵۱.۲	۳.۹	۱۹۸	۲۰

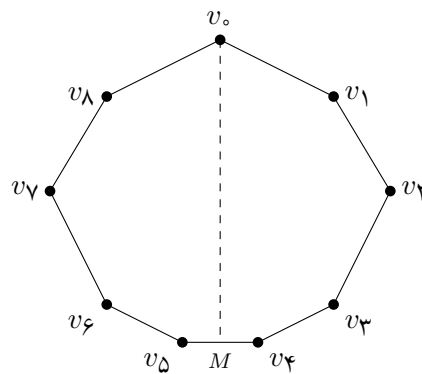
جدول ۱.۳: تعداد برنامه ریزی‌های خطی موضعی حل شده به وسیله روش تکراری

وزن‌های هر مورد، کران‌های بالایی و پایینی وزن‌ها و طول یال‌ها به طور تصادفی بین صفر و اعداد ستون $(maxval)$ انتخاب شده بودند. ستون $(avLPfeas)$ از جدول، بیانگر میانگین تعداد برنامه ریزی‌های خطی موضعی می‌باشد که حل می‌شود تا یک جواب شدنی پیدا شود و یا اینکه نشدنی بودن مسئله اثبات شود. ستون $(avLPopt)$ بیانگر میانگین تعداد برنامه ریزی‌های خطی موضعی که حل می‌شود، تا با شروع از یک جواب شدنی، یک جواب بهینه پیدا شود. بیشترین تعداد برنامه ریزی خطی که حل شده است تا یک جواب شدنی تعیین شود یا نشدنی بودن مسئله مشاهده شود در ستون $(maxLPfeas)$ و همچنین بیشترین تعداد برنامه ریزی خطی موضعی که حل می‌شود تا با شروع از یک جواب شدنی به یک جواب بهینه برسیم در ستون

($maxLPopt$) آورده شده است. این جدول نشان می‌دهد که برای پیدا کردن یک جواب شدنی، هرگز بیشتر از $O(n)$ برنامه ریزی خطی موضعی حل نمی‌شود و حتی به‌طور متوسط این تعداد خیلی کمتر می‌باشد. در حقیقت این اشاره می‌کند که روش تکراری در زمان $O(n^2)$ اجرا می‌شود. همچنین این نتایج نشان می‌دهد که مسئله ۱-میانه معکوس روی یک دور می‌تواند در یک روش ساده و بسیار سریع به‌وسیله نگارش تکراری حل شود.

۵.۳ مثالی برای مسئله ۱-میانه معکوس روی دور

مطالب و همچنین روش حل بیان شده در این فصل را با یک مثال، بیان می‌کنیم. یک دور با ۹ رأس $v_0, v_1, \dots, v_8$ مانند شکل (۸.۳) را در نظر بگیرید که می‌خواهیم رأس v_0 به‌عنوان یک ۱-میانه این گراف واقع شود.



شکل ۸.۳: دوری با ۹ رأس

اطلاعات مربوط به وزن رئوس، طول یال‌ها و همچنین کران پایین و بالای وزن‌ها در جدول (۲.۳) بیان شده است.

با توجه به رابطه (۲.۳) مقادیر $\hat{d}(j)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{d}(0) = 0, \quad \hat{d}(1) = 12, \quad \hat{d}(2) = 7$$

$$\hat{d}(3) = 6, \quad \hat{d}(4) = 4, \quad \hat{d}(5) = 18$$

$$\hat{d}(6) = 12, \quad \hat{d}(7) = 11, \quad \hat{d}(8) = 3$$

j	w_j	l_j	$\underline{w}_j$	$\overline{w}_j$
۰	۱	۷	۰	۱۰
۱	۲	۵	۰	۵
۲	۸	۱	۰	۱۰
۳	۱۱	۲	۷	۱۵
۴	۷	۵	۷	۱۰
۵	۱۲	۶	۷	۱۵
۶	۱۴	۱	۷	۱۵
۷	۹	۸	۴	۱۰
۸	۳	۳	۰	۱۰

جدول ۲.۳: اطلاعات مربوط به دور شکل (۸.۳)

این مقادیر را در یک لیست به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$\circ = \hat{d}(\pi(\circ)) \leq \hat{d}(\pi(۱)) \leq \hat{d}(\pi(۲)) \leq \dots \leq \hat{d}(\pi(۸))$$

پس طبق مقادیر $\hat{d}(j)$ به دست آمده، در رابطه قبل داریم:

$$\pi(\circ) = \circ, \quad \pi(۱) = ۸, \quad \pi(۲) = ۴$$

$$\pi(۳) = ۳, \quad \pi(۴) = ۲, \quad \pi(۵) = ۷$$

$$\pi(۶) = ۱, \quad \pi(۷) = ۶, \quad \pi(۸) = ۸$$

با توجه به روابط (۵.۳) و (۶.۳) و همچنین دو محدودیت آخر مسئله (۱.۳) برای متغیرهای x_j داریم:

$$\circ \leq x_\circ = p_\circ \leq ۹, \quad \circ \leq x_۱ = p_۸ \leq ۷, \quad \circ \leq x_۲ = q_۴ \leq \circ$$

$$\circ \leq x_۳ = q_۳ \leq ۴, \quad \circ \leq x_۴ = q_۲ \leq ۸, \quad \circ \leq x_۵ = p_۷ \leq ۱$$

$$\circ \leq x_۶ = p_۶ \leq ۱, \quad \circ \leq x_۷ = q_۱ \leq ۲, \quad \circ \leq x_۸ = p_۵ \leq ۳$$

و همچنین برای مقادیر y_j نیز داریم:

$$\circ \leq y_\circ = q_۵ \leq ۵, \quad \circ \leq y_۱ = p_۱ \leq ۳, \quad \circ \leq y_۲ = q_۶ \leq ۷$$

$$\circ \leq y_۳ = q_۷ \leq ۵, \quad \circ \leq y_۴ = p_۲ \leq ۲, \quad \circ \leq y_۵ = p_۳ \leq ۴$$

$$\circ \leq y_۶ = p_۴ \leq ۳, \quad \circ \leq y_۷ = q_۸ \leq ۳, \quad \circ \leq y_۸ = q_\circ \leq ۱$$

حال بنا بر رابطه‌های (۷.۳) و (۸.۳) و (۹.۳) ماتریس‌های A و $\bar{A}$ و همچنین بردار b به صورت زیر خواهند بود:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -5 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 4 & 2 & 2 & -10 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 11 & 3 & 1 & 1 & -11 \\ 15 & 15 & 15 & 11 & 9 & 1 & -1 & -1 & -13 \\ 18 & 12 & 10 & 6 & 4 & -4 & -6 & -6 & -18 \\ 12 & 6 & 4 & 0 & -2 & -10 & -12 & -12 & -12 \\ 11 & 5 & 3 & -1 & -3 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ 3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

و

$$b = (67, 324, 363, 397, 438, 360, 323, 27)$$

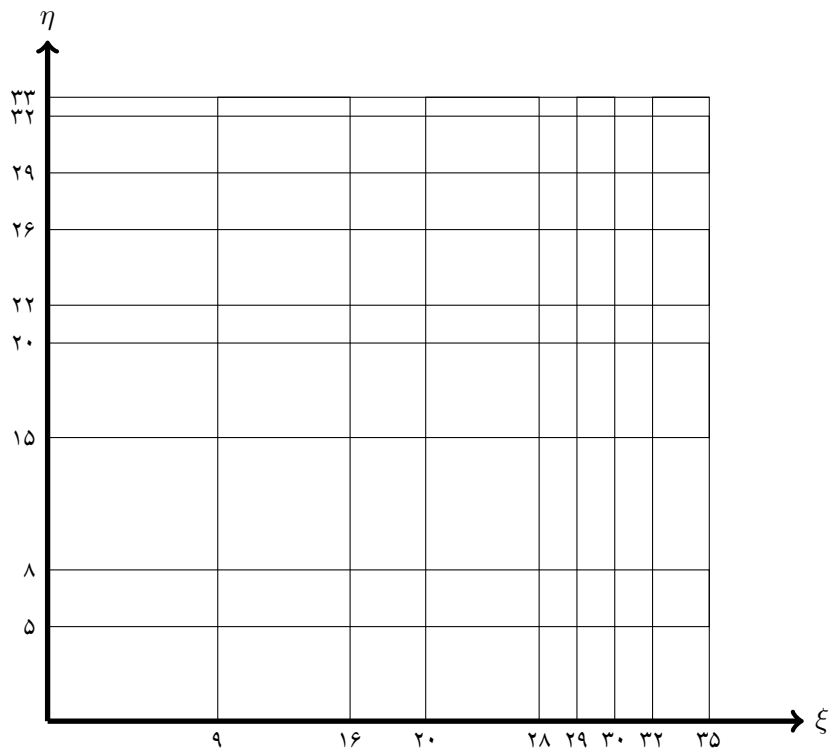
و

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ 10 & -2 & -2 & -4 & -12 & -12 & -12 & -12 & -12 \\ 11 & -1 & -1 & -3 & -11 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ 13 & 1 & 1 & -1 & -9 & -11 & -15 & -15 & -15 \\ 18 & 6 & 6 & 4 & -4 & -6 & -10 & -12 & -18 \\ 12 & 12 & 12 & 10 & 2 & 0 & -4 & -6 & -12 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 3 & 1 & -3 & -5 & -11 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

با توجه به رابطه (۴.۳) می‌توان مسئله را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=0}^8 x_j + \sum_{j=0}^8 y_j \\ \text{s.t.} \quad & Ax + \bar{A}y \geq b \\ & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ & 0 \leq y \leq \bar{y} \end{aligned}$$

شکل (۹.۳) نمودار جعبه‌های $B(r, s)$ را به ازای $r, s = 0, 1, \dots, 8$ نشان می‌دهد و همچنین جدول (۳.۳) مقادیر ξ و η را به ازای r و s های مختلف نشان می‌دهد (شکل (۹.۳) و جدول (۳.۳) را ببینید).



شکل ۹.۳: نمودار جعبه‌های $B(r, s)$ به‌ازای $r, s = ۰, ۱, \dots, ۸$.

حال بنا بر مطالب گفته شده در روش تکراری، ما به دنبال یافتن یک جواب شدنی برای مسئله فوق می‌باشیم. برای این منظور ابتدا از جعبه $B(۰, ۰)$ شروع می‌کنیم، مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $r = s = ۰$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۰ + y_۰ \\ \text{s.t.} \quad & a^۰ x_۰ + \bar{a}^۰ y_۰ \geq b \\ & ۰ \leq x_۰ \leq ۹ \\ & ۰ \leq y_۰ \leq ۵ \end{aligned}$$

که محدودیت‌های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

r	ξ	s	η
۰	۹	۰	۵
۱	۱۶	۱	۸
۲	۱۶	۲	۱۵
۳	۲۰	۳	۲۰
۴	۲۸	۴	۲۲
۵	۲۹	۵	۲۶
۶	۳۰	۶	۲۹
۷	۳۲	۷	۳۲
۸	۳۵	۸	۳۳

جدول ۳.۳: مقادیر ξ و η به ازای $۸, \dots, ۰, s, r$.

$$\boxed{7x_0 + 5y_0 \geq 67}, \quad 12x_0 + 10y_0 \geq 324, \quad 13x_0 + 11y_0 \geq 363$$

$$15x_0 + 13y_0 \geq 397, \quad 18x_0 + 18y_0 \geq 438, \quad 12x_0 + 12y_0 \geq 360$$

$$11x_0 + 11y_0 \geq 323, \quad 3x_0 + 3y_0 \geq 27$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه اول بردار سمت راست (بردار b) مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ در همان محدودیت اول مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نیستند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت اول و در جعبه $B(0, 0)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\max Z_{0,0} = 7x_0 + 5y_0$$

$$s.t : a^0 x_0 + \bar{a}^0 y_0 \geq \bar{b}$$

$$0 \leq x_0 \leq 9$$

$$0 \leq y_0 \leq 5$$

که در برنامه ریزی فوق بردار $\bar{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{b}_i = \begin{cases} 0 & b_i \geq 0 \\ b_i & b_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{\circ}^* = 9, y_{\circ}^* = 5 \Rightarrow Z_{\circ, \circ} = 88$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^{\circ} - 5\bar{a}^{\circ} \\ &= (-21, 166, 191, 197, 186, 192, 169, -15) \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه های مثبت در این بردار دیده می شود، با توجه به جواب بهینه به دست آمده برای این مسئله موضعی، این جواب در نقطه گوشه راست بالایی جعبه $B(\circ, \circ)$ واقع شده است، پس جعبه های مجاور (یعنی جعبه های $B(1, \circ)$ و $B(1, 1)$ و $B(\circ, 1)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بررسی جعبه $B(1, \circ)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = \circ$, $r = 1$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + y_{\circ} \\ \text{s.t.} \quad & (a^{\circ} \bar{x}_{\circ}) + a^1 x_1 + \bar{a}^{\circ} y_{\circ} \geq b \\ & \circ \leq x_1 \leq 7 \\ & \circ \leq y_{\circ} \leq 5 \end{aligned}$$

که محدودیت های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5y_{\circ} &\geq 4, \quad 12x_1 + 1^{\circ}y_{\circ} \geq 216, \quad 13x_1 + 11y_{\circ} \geq 246 \\ 15x_1 + 13y_{\circ} &\geq 262, \quad 12x_1 + 18y_{\circ} \geq 276, \quad 6x_1 + 12y_{\circ} \geq 252 \\ 5x_1 + 11y_{\circ} &\geq 224, \quad -3x_1 + 3y_{\circ} \geq \circ \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می کنید مؤلفه اول بردار سمت راست مثبت می باشد، پس نقطه $x_1 = \circ$ و $y_{\circ} = \circ$ در همان محدودیت اول مسئله صدق نمی کند و این نقاط شدنی نمی باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت اول و در جعبه $B(1, \circ)$ را در نظر می گیریم:

$$\max Z_{1,\circ} = ۶۳ + ۷x_1 + ۵y_\circ$$

$$s.t : a^1 x_1 + \bar{a}^\circ y_\circ \geq \overline{b(1,\circ)}$$

$$\circ \leq x_1 \leq ۷$$

$$\circ \leq y_\circ \leq ۵$$

که در برنامه ریزی فوق $b(1,\circ) = b - (a^\circ \bar{x}_\circ)$ و بردار $\overline{b(1,\circ)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$\overline{b(1,\circ)}_i = \begin{cases} \circ & b(1,\circ)_i \geq \circ \\ b(1,\circ)_i & b(1,\circ)_i < \circ \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1^* = ۵, y_\circ^* = ۵ \Rightarrow Z_{1,\circ} = ۱۲۳$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - ۹a^\circ - ۵a^1 - ۵\bar{a}^\circ \\ &= (-۵۶, ۱۰۶, ۱۲۶, ۱۲۲, ۱۲۶, ۱۶۲, ۱۴۴, \circ) \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه های مثبت در این بردار دیده می شود.

بررسی جعبه $B(\circ, 1)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 1$, $r = \circ$ به صورت زیر می باشد:

$$\min x_\circ + y_1$$

$$s.t : a^\circ x_\circ + (\bar{a}^\circ \bar{y}_\circ) + \bar{a}^1 y_1 \geq b$$

$$\circ \leq x_\circ \leq ۹$$

$$\circ \leq y_1 \leq ۳$$

که محدودیت های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{7x_0 - 7y_1 \geq 42} , \quad 12x_0 - 2y_1 \geq 274 , \quad 13x_0 - y_1 \geq 308$$

$$15x_0 + y_1 \geq 332 , \quad 18x_0 + 6y_1 \geq 348 , \quad 12x_0 + 12y_1 \geq 300$$

$$11x_0 + 11y_1 \geq 268 , \quad 3x_0 + 3y_1 \geq 12$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه اول بردار سمت راست مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_0 = 0$ و $y_1 = 0$ در همان محدودیت اول مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نمی‌باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت اول و در جعبه $B(0, 1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z_{0,1} = 25 + 7x_0 - 7y_1 \\ \text{s.t.} \quad & a^0 x_0 + \bar{a}^1 y_1 \geq \overline{b(0, 1)} \\ & 0 \leq x_0 \leq 9 \\ & 0 \leq y_1 \leq 3 \end{aligned}$$

که در برنامه ریزی فوق $b(0, 1) = b - (\bar{a}^0 \bar{y}_0)$ و بردار $\overline{b(0, 1)}$ به‌وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{b(0, 1)}_i = \begin{cases} 0 & b(0, 1)_i \geq 0 \\ b(0, 1)_i & b(0, 1)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_0^* = 9 , \quad y_1^* = 0 \Rightarrow Z_{0,1} = 88$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^0 - 5\bar{a}^0 - 0\bar{a}^1 \\ &= (-21, 166, 191, 197, 186, 192, 169, -15) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه‌های مثبت در این بردار دیده می‌شود.

بررسی جعبه $B(1, 1)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 1$, $r = 1$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + y_1 \\ \text{s.t.} \quad & (a^\circ \bar{x}_\circ) + a^1 x_1 + (\bar{a}^\circ \bar{y}_\circ) + \bar{a}^1 y_1 \geq b \\ & 0 \leq x_1 \leq 7 \\ & 0 \leq y_1 \leq 3 \end{aligned}$$

که محدودیت های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 7y_1 &\geq -21, \quad \boxed{12x_1 - 2y_1 \geq 166}, \quad 13x_1 - y_1 \geq 191 \\ 15x_1 + y_1 &\geq 197, \quad 12x_1 + 6y_1 \geq 186, \quad 6x_1 + 12y_1 \geq 192 \\ 5x_1 + 11y_1 &\geq 169, \quad -3x_1 + 3y_1 \geq -15 \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می کنید مؤلفه دوم بردار سمت راست مثبت می باشد، پس نقطه $x_1 = 0$ و $y_1 = 0$ در محدودیت دوم مسئله صدق نمی کند و این نقاط شدنی نمی باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت دوم و در جعبه $B(1, 1)$ را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z_{1,1} = 1 \cdot 0 + 12x_1 + 5 \cdot 0 - 2y_1 \\ \text{s.t.} \quad & a^1 x_1 + \bar{a}^1 y_1 \geq \overline{b(1, 1)} \\ & 0 \leq x_1 \leq 7 \\ & 0 \leq y_1 \leq 3 \end{aligned}$$

که در برنامه ریزی فوق $b(1, 1) = b - (a^\circ \bar{x}_\circ) - (\bar{a}^\circ \bar{y}_\circ)$ ، و بردار $\overline{b(1, 1)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$\overline{b(1, 1)}_i = \begin{cases} 0 & b(1, 1)_i \geq 0 \\ b(1, 1)_i & b(1, 1)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1^* = 7, y_1^* = 2 \Rightarrow Z_{1,1} = 238$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^\circ - 7a^1 - 5\bar{a}^\circ - 2\bar{a}^1 \\ &= (-56, 86, 102, 90, 90, 126, 112, 0) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه‌های مثبت در این بردار دیده می‌شود. با بررسی جعبه‌های $B(0, 0)$ و $B(0, 1)$ و $B(1, 0)$ و $B(1, 1)$ ، مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار تابع هدف به ازای جعبه $B(1, 1)$ اتفاق افتاده است. ادامه روند حل مسئله را از این جعبه پیگیری می‌کنیم، مشاهده شد که نقطه بهینه مسئله بعد از بررسی در این جعبه، روی ضلع سمت راست جعبه $B(1, 1)$ اتفاق افتاده است، که این نقطه در واقع متعلق به جعبه $B(2, 1)$ نیز می‌باشد، با توجه به اینکه کران بالای x_2 صفر می‌باشد ($\bar{x}_2 = 0$)، پس این نقطه متعلق به جعبه $B(3, 1)$ نیز می‌باشد، در اینجا به بررسی جعبه $B(3, 1)$ می‌پردازیم.

بررسی جعبه $B(3, 1)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 1$, $r = 3$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_3 + y_1 \\ \text{s.t.} \quad & (a^\circ \bar{x}_0) + (a^1 \bar{x}_1) + (a^2 \bar{x}_2) + a^3 x_3 + (\bar{a}^\circ \bar{y}_0) + \bar{a}^1 y_1 \geq b \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq y_1 \leq 3 \end{aligned}$$

که محدودیت‌های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 7x_3 - 7y_1 &\geq -70, \quad 12x_3 - 2y_1 \geq 82, \quad 13x_3 - y_1 \geq 190 \\ 11x_3 + y_1 &\geq 92, \quad 6x_3 + 6y_1 \geq 102, \quad 12y_1 \geq 150 \\ -x_3 + 11y_1 &\geq 134, \quad -3x_3 + 3y_1 \geq 6 \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه دوم بردار سمت راست مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_3 = 0$ و $y_1 = 0$ در محدودیت دوم مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نمی‌باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت دوم و در جعبه $B(3, 1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\max Z_{3,1} = 10x_3 + 8x_4 + 12x_3 + 50 - 2y_1$$

$$s.t : a^3 x_3 + \bar{a}^1 y_1 \geq \overline{b(3, 1)}$$

$$0 \leq x_3 \leq 4$$

$$0 \leq y_1 \leq 3$$

که در برنامه ریزی فوق $(\bar{a}^0 \bar{y}_0) - (a^2 \bar{x}_2) - (a^1 \bar{x}_1) - (a^0 \bar{x}_0) - b(3, 1) = b$ ، و بردار $\overline{b(3, 1)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{b(3, 1)}_i = \begin{cases} 0 & b(3, 1)_i \geq 0 \\ b(3, 1)_i & b(3, 1)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3^* = 3, y_1^* = 3 \Rightarrow Z_{3,1} = 322$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^0 - 7a^1 - 3a^3 - 5\bar{a}^0 - 3\bar{a}^1 \\ &= (-70, 52, 64, 56, 66, 114, 104, 6) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه‌های مثبت در این بردار دیده می‌شود. نقطه بهینه روی ضلع بالایی جعبه $B(3, 1)$ واقع شده است که این نقطه متعلق به جعبه $B(3, 2)$ نیز می‌باشد، پس به بررسی جعبه $B(3, 2)$ می‌پردازیم.

بررسی جعبه $B(3, 2)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 2$, $r = 3$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_3 + y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & (a^0 \bar{x}_0) + (a^1 \bar{x}_1) + (a^2 \bar{x}_2) + a^3 x_3 + (\bar{a}^0 \bar{y}_0) + (\bar{a}^1 \bar{y}_1) + \bar{a}^2 y_2 \geq b \\
 & 0 \leq x_3 \leq 4 \\
 & 0 \leq y_2 \leq 7
 \end{aligned}$$

که محدودیت‌های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 7x_3 - 7y_2 &\geq -49, \quad \boxed{12x_3 - 2y_2 \geq 88}, \quad 13x_3 - y_2 \geq 103 \\
 11x_3 + y_2 &\geq 89, \quad 6x_3 + 6y_2 \geq 84, \quad 12y_2 \geq 114 \\
 -x_3 + 11y_2 &\geq 101, \quad -3x_3 + 3y_2 \geq -3
 \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه دوم بردار سمت راست مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_3 = 0$ و $y_2 = 0$ در محدودیت دوم مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نمی‌باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت دوم و در جعبه $B(3, 2)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z_{3,2} = 236 + 12x_3 - 2y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & a^3 x_3 + \bar{a}^2 y_2 \geq \overline{b(3, 2)} \\
 & 0 \leq x_3 \leq 4 \\
 & 0 \leq y_2 \leq 7
 \end{aligned}$$

که در برنامه ریزی فوق $b(3, 2) = b - (a^0 \bar{x}_0) - (a^1 \bar{x}_1) - (a^2 \bar{x}_2) - (\bar{a}^0 \bar{y}_0) - (\bar{a}^1 \bar{y}_1)$ و بردار $\overline{b(3, 2)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{b(3, 2)}_i = \begin{cases} 0 & b(3, 2)_i \geq 0 \\ b(3, 2)_i & b(3, 2)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3^* = 4, \quad y_2^* = 3 \Rightarrow Z_{3,2} = 278$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$b_{new} = b - 9a^0 - 7a^1 - 4a^3 - 5\bar{a}^0 - 3\bar{a}^1 - 3\bar{a}^2 \\ = (-56, 46, 54, 42, 42, 78, 72, 0)$$

ملاحظه می‌کنید که مؤلفه اول بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه‌های مثبت در این بردار دیده می‌شود. نقطه بهینه روی ضلع سمت راست جعبه $B(3, 2)$ واقع شده است که این نقطه متعلق به جعبه $B(4, 2)$ نیز می‌باشد، پس به بررسی جعبه $B(4, 2)$ می‌پردازیم. **بررسی جعبه $B(4, 2)$:** مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 2$, $r = 4$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\min x_4 + y_2$$

$$s.t : (a^0 \bar{x}_0) + (a^1 \bar{x}_1) + (a^2 \bar{x}_2) + (a^3 \bar{x}_3) + a^4 x_4 + (\bar{a}^0 \bar{y}_0) + (\bar{a}^1 \bar{y}_1) + \bar{a}_2 y_2 \geq b$$

$$0 \leq x_4 \leq 8$$

$$0 \leq y_2 \leq 7$$

که محدودیت‌های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$7x_4 - 7y_2 \geq -77, \quad 12x_4 - 2y_2 \geq 40, \quad 11x_4 - y_2 \geq 51$$

$$9x_4 + y_2 \geq 45, \quad 4x_4 + 6y_2 \geq 60, \quad -2x_4 + 12y_2 \geq 114$$

$$-3x_4 + 11y_2 \geq 105, \quad -3x_4 + 3y_2 \geq 9$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه دوم بردار سمت راست مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_4 = 0$ و $y_2 = 0$ در محدودیت دوم مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نمی‌باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت دوم و در جعبه $B(4, 2)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\max Z_{۴,۲} = ۲۸۴ + ۱۲x_۴ - ۲y_۲$$

$$s.t : a^۴x_۴ + \bar{a}^۲y_۲ \geq \overline{b(۴, ۲)}$$

$$0 \leq x_۴ \leq ۸$$

$$0 \leq y_۲ \leq ۷$$

که در برنامه ریزی فوق $b(۴, ۲) = b - (a^0 \bar{x}_0) - (a^1 \bar{x}_1) - (a^2 \bar{x}_2) - (a^3 \bar{x}_3) - (\bar{a}^0 \bar{y}_0) - (\bar{a}^1 \bar{y}_1)$ و بردار $\overline{b(۴, ۲)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$\overline{b(۴, ۲)}_i = \begin{cases} 0 & b(۴, ۲)_i \geq 0 \\ b(۴, ۲)_i & b(۴, ۲)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_۴^* = ۷, y_۲^* = ۷ \Rightarrow Z_{۴,۲} = ۳۵۴$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^0 - 7a^1 - 4a^2 - 7a^4 - 5\bar{a}^0 - 3\bar{a}^1 - 7\bar{a}^2 \\ &= (-77, -30, -19, -25, -10, 44, 49, 9) \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که مؤلفه اول تا پنجم بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه های مثبت در این بردار دیده می شود. نقطه بهینه روی ضلع بالایی جعبه $B(۴, ۲)$ واقع شده است که این نقطه متعلق به جعبه $B(۴, ۳)$ نیز می باشد، پس به بررسی جعبه $B(۴, ۳)$ می پردازیم.

بررسی جعبه $B(۴, ۳)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = ۳, r = ۴$ به صورت زیر می باشد:

$$\min x_۴ + y_۳$$

$$s.t : (a^0 \bar{x}_0) + (a^1 \bar{x}_1) + (a^2 \bar{x}_2) + (a^3 \bar{x}_3) + a^4 x_۴ + (\bar{a}^0 \bar{y}_0) + (\bar{a}^1 \bar{y}_1) + (\bar{a}^2 \bar{y}_2) + \bar{a}_3 y_۳ \geq b$$

$$0 \leq x_۴ \leq ۸$$

$$0 \leq y_۳ \leq ۵$$

که محدودیت‌های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 7x_4 - 7y_3 &\geq -28, & \boxed{12x_4 - 4y_3 \geq 54}, & & 11x_4 - 3y_3 &\geq 58 \\ 9x_4 - y_3 &\geq 38, & 4x_4 + 4y_3 &\geq 18, & -2x_4 + 10y_3 &\geq 30 \\ -3x_4 + 11y_3 &\geq 28, & -3x_4 + 3y_3 &\geq -12 \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مؤلفه دوم بردار سمت راست مثبت می‌باشد، پس نقطه $x_4 = 0$ و $y_3 = 0$ در محدودیت دوم مسئله صدق نمی‌کند و این نقاط شدنی نمی‌باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت دوم و در جعبه $B(4, 3)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad Z_{4,3} &= 270 + 12x_4 - 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad a^4 x_4 + \bar{a}^3 y_3 &\geq \overline{b(4, 3)} \\ 0 &\leq x_4 \leq 8 \\ 0 &\leq y_3 \leq 5 \end{aligned}$$

که در برنامه ریزی فوق، عبارت $b(4, 3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b(4, 3) = b - (a^0 \bar{x}_0) - (a^1 \bar{x}_1) - (a^2 \bar{x}_2) - (a^3 \bar{x}_3) - (\bar{a}^0 \bar{y}_0) - (\bar{a}^1 \bar{y}_1) - (\bar{a}^2 \bar{y}_2)$$

و بردار $\overline{b(4, 3)}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{b(4, 3)}_i = \begin{cases} 0 & b(4, 3)_i \geq 0 \\ b(4, 3)_i & b(4, 3)_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_4^* = 8, \quad y_3^* = 4 \Rightarrow Z_{4,3} = 350$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^0 - 7a^1 - 4a^3 - 8a^4 - 5\bar{a}^0 - 3\bar{a}^1 - 7\bar{a}^2 - 4\bar{a}^3 \\ &= (-56, -26, -18, -30, -30, 6, 8, 0) \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که مؤلفه اول تا پنجم بردار b_{new} منفی شده ولی هنوز مؤلفه های مثبت در این بردار دیده می شود. نقطه بهینه روی ضلع سمت راست جعبه $B(4, 3)$ واقع شده است که این نقطه متعلق به جعبه $B(5, 3)$ نیز می باشد، پس به بررسی جعبه $B(5, 3)$ می پردازیم.

بررسی جعبه $B(5, 3)$: مسئله (۱۸.۳) به ازای این جعبه، یعنی به ازای $s = 3$, $r = 5$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 + y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=0}^4 (a^i \bar{x}_i) + a^5 \bar{x}_5 + \sum_{j=0}^2 (\bar{a}^j \bar{y}_j) + \bar{a}^3 \bar{y}_3 \geq b \\ & 0 \leq x_5 \leq 1 \\ & 0 \leq y_3 \leq 5 \end{aligned}$$

که محدودیت های این مسئله (به استثنای دو محدودیت آخر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 7x_5 - 7y_3 &\geq -84, \quad 4x_5 - 4y_3 \geq -42, \quad 3x_5 - 3y_3 \geq -30 \\ x_5 - y_3 &\geq -34, \quad -4x_5 + 4y_3 \geq -14, \quad \boxed{-10x_5 + 10y_3 \geq 46} \\ -11x_5 + 11y_3 &\geq -52, \quad -3x_5 + 3y_3 \geq 12 \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می کنید مؤلفه ششم بردار سمت راست مثبت می باشد، پس نقطه $x_5 = 0$ و $y_3 = 0$ در محدودیت ششم مسئله صدق نمی کند و این نقاط شدنی نمی باشند. بنا بر مطالب گفته شده در بخش قبل، مسئله LP موضعی (۲۲.۳) با تابع هدف متناظر با محدودیت ششم و در جعبه $B(5, 3)$ را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z_{5,3} = 314 - 10x_5 + 10y_3 \\ \text{s.t.} \quad & a^5 x_5 + \bar{a}^3 y_3 \geq \overline{b(5, 3)} \\ & 0 \leq x_5 \leq 1 \\ & 0 \leq y_3 \leq 5 \end{aligned}$$

که در برنامه ریزی فوق، عبارت $b(5, 3)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$b(\omega, \mathfrak{z}) = b - \sum_{i=0}^4 (a^i \bar{x}_i) - \sum_{j=0}^2 (\bar{a}^j \bar{y}_j)$$

و بردار $\overline{b(\omega, \mathfrak{z})}$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$\overline{b(\omega, \mathfrak{z})}_i = \begin{cases} 0 & b(\omega, \mathfrak{z})_i \geq 0 \\ b(\omega, \mathfrak{z})_i & b(\omega, \mathfrak{z})_i < 0 \end{cases}$$

با حل مسئله موضعی فوق جواب بهینه این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_5^* = 0, y_3^* = 5 \Rightarrow Z_{\omega, \mathfrak{z}} = 364$$

و همچنین بردار b_{new} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} b_{new} &= b - 9a^0 - 7a^1 - 4a^3 - 8a^4 - 5\bar{a}^0 - 3\bar{a}^1 - 7\bar{a}^2 - 5\bar{a}^3 \\ &= (-49, -22, -15, -29, -34, -4, -3, -3) \end{aligned}$$

مشاهده می شود که تمامی مؤلفه های بردار b_{new} منفی شده است، پس توقف می کنیم (به یک جواب شدنی رسیده ایم). عملیات انجام شده روی جعبه ها تا رسیدن به یک نقطه شدنی را می توانید در شکل (۱۰.۳) ملاحظه کنید.

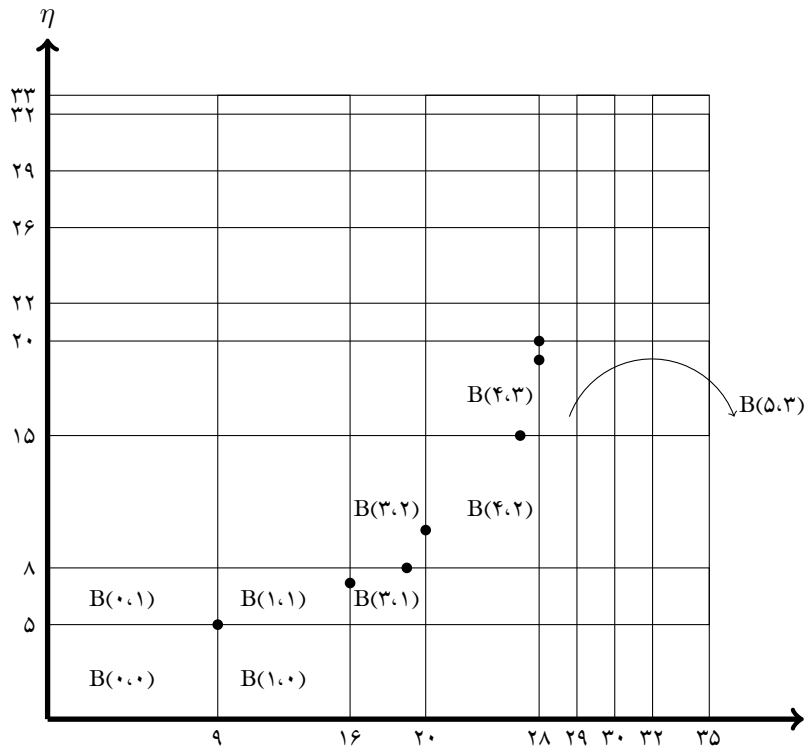
با روند انجام شده به یک جواب شدنی برای مسئله (۴.۳) رسیدیم که به صورت زیر می باشد:

$$\forall 0 \leq i \leq 4; x_i = \bar{x}_i, x_5 = 0, \forall 6 \leq i \leq 8; x_i = 0$$

و

$$\forall 0 \leq j \leq 2; y_j = \bar{y}_j, y_3 = 5, \forall 4 \leq j \leq 8; y_j = 0$$

با داشتن این جواب شدنی وارد فاز دوم حل مسئله می شویم، مسئله $LP(r, s)$ را در این جعبه (یعنی جعبه $(B(\omega, \mathfrak{z}))$ در نظر می گیریم، داریم:



شکل ۱۰.۳: عملیات انجام شده روی جعبه‌های $B(r, s)$ تا رسیدن به یک نقطه شدنی

$$\begin{aligned}
 LP(5, 3) : \min Z &= x_5 + y_3 \\
 s.t : \sum_{j=0}^4 \bar{x}_j a^j + a^5 x_5 + \sum_{k=0}^2 \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^3 y_3 &\geq b \\
 0 &\leq x_5 \leq 1 \\
 0 &\leq y_3 \leq 5
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله فوق، به صورت زیر می باشد:

$$x_5^* = 0, y_3^* = 4.727273 \Rightarrow Z = 4.727273$$

جواب فوق در شرایط لم (۱.۴.۳) صدق نمی کند و چون این جواب در نقطه گوشه بالایی جعبه واقع شده است، به بررسی جعبه‌های مجاور می پردازیم (یعنی جعبه‌های $B(4, 3)$ ، $B(4, 4)$ و $B(5, 4)$).
 بررسی جعبه $B(4, 3)$: مسئله $LP(r, s)$ را در این جعبه در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 LP(۴, ۳) : \min \quad & Z = x_۴ + y_۳ \\
 s.t : \quad & \sum_{j=0}^3 \bar{x}_j a^j + a^۴ x_۴ + \sum_{k=0}^2 \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^۳ y_۳ \geq b \\
 & 0 \leq x_۴ \leq ۸ \\
 & 0 \leq y_۳ \leq ۵
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله فوق، به صورت زیر می باشد:

$$x_۴^* = ۶/۴۴۶۴۲۹, \quad y_۳^* = ۴/۳۰۳۵۷۱ \Rightarrow Z = ۱۰/۷۵$$

بررسی جعبه $B(۴, ۴)$: مسئله $LP(r, s)$ را در این جعبه در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 LP(۴, ۳) : \min \quad & Z = x_۴ + y_۴ \\
 s.t : \quad & \sum_{j=0}^3 \bar{x}_j a^j + a^۴ x_۴ + \sum_{k=0}^3 \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^۴ y_۴ \geq b \\
 & 0 \leq x_۴ \leq ۸ \\
 & 0 \leq y_۴ \leq ۲
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله فوق، به صورت زیر می باشد:

$$x_۴^* = ۶/۶۳۶۳۶۴, \quad y_۴^* = 0 \Rightarrow Z = ۶/۶۳۶۳۶۴$$

بررسی جعبه $B(۵, ۴)$: مسئله $LP(r, s)$ را در این جعبه در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 LP(۴, ۳) : \min \quad & Z = x_۵ + y_۴ \\
 s.t : \quad & \sum_{j=0}^4 \bar{x}_j a^j + a^۵ x_۵ + \sum_{k=0}^3 \bar{y}_k \bar{a}^k + \bar{a}^۴ y_۴ \geq b \\
 & 0 \leq x_۵ \leq ۱ \\
 & 0 \leq y_۴ \leq ۲
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله فوق، به صورت زیر می باشد:

$$x_5^* = 0, y_4^* = 0 \Rightarrow Z = 0$$

حال با توجه به مسائل فوق:

$$\min(\underbrace{Z_{LP(4,3)}}_{10/75}, \underbrace{Z_{LP(4,4)}}_{6/636364}, \underbrace{Z_{LP(5,4)}}_0) = 0 < Z_{LP(5,3)} = 4/727273$$

چون کمترین مقدار تابع هدف به ازای جعبه $B(5, 4)$ می باشد، پس جواب شدنی که متناظر با جعبه $B(5, 3)$ بود را با جعبه $B(5, 4)$ جایگزین می کنیم و دوباره روند را ادامه می دهیم، مسئله $LP(r, s)$ را در این جعبه در نظر می گیریم، جواب بهینه به صورت زیر می باشد:

$$x_5^* = 0, y_4^* = 0 \Rightarrow Z = 0$$

جواب فوق در شرایط لم (۱.۴.۳) صدق نمی کند و چون این جواب در نقطه گوشه پایینی جعبه واقع شده است، به بررسی جعبه های مجاور می پردازیم (یعنی جعبه های $B(4, 4)$ ، $B(4, 3)$ و $B(5, 3)$). مقدار تابع هدف مسئله $LP(r, s)$ به ازای این جعبه ها به شرح زیر می باشد:

$$Z_{LP(4,4)} = 6/636364, Z_{LP(4,3)} = 10/75, Z_{LP(5,3)} = 4/727273$$

حال با توجه به مسائل فوق، چون:

$$\min(\underbrace{Z_{LP(4,4)}}_{6/636364}, \underbrace{Z_{LP(4,3)}}_{10/75}, \underbrace{Z_{LP(5,3)}}_{4/727273}) = 4/727273 \neq Z_{LP(5,4)} = 0$$

پس جواب فعلی در جعبه $B(5, 4)$ بهینه بوده و جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$\forall 0 \leq i \leq 4; x_i^* = \bar{x}_i, x_5^* = 0, \forall 6 \leq i \leq 8; x_i^* = 0$$

$$\forall 0 \leq j \leq 3; y_j^* = \bar{y}_j, y_4^* = 0, \forall 5 \leq j \leq 8; y_j^* = 0$$

با توجه به رابطه های:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_0 = p_0 \leq 9, \quad 0 \leq x_1 = p_8 \leq 7, \quad 0 \leq x_2 = q_4 \leq 0 \\ 0 &\leq x_3 = q_3 \leq 4, \quad 0 \leq x_4 = q_2 \leq 8, \quad 0 \leq x_5 = p_7 \leq 1 \\ 0 &\leq x_6 = p_6 \leq 1, \quad 0 \leq x_7 = q_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_8 = p_5 \leq 3 \end{aligned}$$

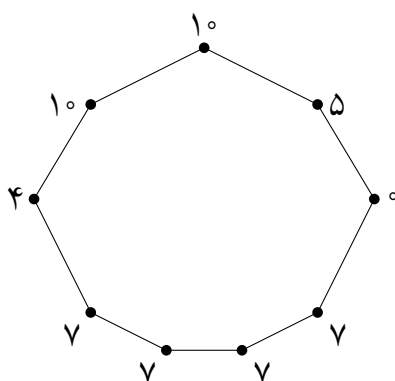
و نیز:

$$\begin{aligned} 0 &\leq y_0 = q_5 \leq 5, \quad 0 \leq y_1 = p_1 \leq 3, \quad 0 \leq y_2 = q_6 \leq 7 \\ 0 &\leq y_3 = q_7 \leq 5, \quad 0 \leq y_4 = p_2 \leq 2, \quad 0 \leq y_5 = p_3 \leq 4 \\ 0 &\leq y_6 = p_4 \leq 3, \quad 0 \leq y_7 = q_8 \leq 3, \quad 0 \leq y_8 = q_0 \leq 1 \end{aligned}$$

و همچنین با توجه به این مطلب که p_i مقداری است که به وزن رأس i اضافه می‌کنیم و q_i مقداری است که از وزن رأس i کم می‌کنیم، و با توجه به جواب بهینه داریم:

$$\begin{aligned} w_0^* &= w_0 + p_0 = 1 + 9 = 10 \\ w_1^* &= w_1 + p_1 = 2 + 3 = 5 \\ w_2^* &= w_2 - q_2 = 8 - 8 = 0 \\ w_3^* &= w_3 - q_3 = 11 - 4 = 4 \\ w_4^* &= w_4 - q_4 = 7 - 0 = 7 \\ w_5^* &= w_5 - q_5 = 12 - 5 = 7 \\ w_6^* &= w_6 - q_6 = 14 - 7 = 7 \\ w_7^* &= w_7 - q_7 = 9 - 5 = 4 \\ w_8^* &= w_8 + p_8 = 3 + 7 = 10 \end{aligned}$$

گراف زیر، گراف دور با وزن‌های اصلاح شده را نمایش می‌دهد که اعداد روی رئوس بیانگر وزن اصلاح شده می‌باشد:



شکل ۱۱.۳: گراف دور با وزنهای اصلاح شده

فصل ۴

مسئله هسته مقید معکوس روی درخت

۱.۴ مقدمه

یکی از مسائل مکانیابی، پیدا کردن هسته درخت می‌باشد که عبارت است از پیدا کردن مسیری که مجموع فاصله وزنی رئوس از آن کمترین مقدار ممکن باشد. در نتیجه با واقع کردن سرویس دهندگان بر روی آن مسیر دسترسی مشتریان به سرویس دهندگان تا حد امکان تسهیل می‌شود. واضح است که برخلاف مسئله p -میان که سرویس دهندگان بر روی چند نقطه جدا از هم قرار دارند، در این مسئله سرویس دهنده یک وسیله به هم پیوسته است که بر روی یک مسیر قرار می‌گیرد. مسئله پیدا کردن هسته بر روی یک شبکه یا درخت به‌طور جداگانه قابل بررسی و دارای خواص متفاوتی است. حکیمی در سال ۱۹۹۳ نشان داد که پیدا کردن مسیر بر روی شبکه یک مسئله NP -سخت است [۳۵]. اما پیدا کردن هسته بر روی درخت، به نسبت آسان‌تر است. در سال ۱۹۸۰ مورگان و اسلیتر^۱ الگوریتمی خطی برای آن ارائه کردند [۵۵]. فرض کنید درخت $T = (V, E)$ با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ داده شده باشد که هر رأس v_i دارای وزن w_i می‌باشد و همچنین طول هر یال درخت ۱ واحد می‌باشد. تابع هدف این مسئله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F(P) = \min \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, P)$$

که در آن P یک مسیر می‌باشد و داریم:

$$d(v_i, P) = \min_{u \in V(P)} d(v_i, u)$$

^۱Morgan and Slater

که در رابطه فوق، $V(P)$ رئوس متعلق به مسیر P می‌باشند. هر مسیر که ابتدایش در رأس v_i و انتهایش در رأس v_j باشد را با P_{v_i, v_j} نشان می‌دهیم.

کاربرد مسئله مسیر، در حوزه وسیعی از علوم مدیریت و تخصیص منابع قابل جستجو و بررسی می‌باشد. به عنوان مثال در طراحی مسیر حرکت قطارهای شهری، خیابان‌های داخل یک شهر یا جاده‌های برون شهری و یا مسیر لوله‌های آب و فاضلاب و یا مسیر اتوبوس‌های درون شهری می‌توان از مسئله هسته برای بهینه سازی و تسهیل حرکت و دسترسی استفاده کرد.

۲.۴ مسئله هسته مقید روی درخت

در بعضی موارد هدف پیدا کردن هسته‌ای است که طول آن مقدار مشخصی باشد، چنین هسته‌ای را هسته مقید می‌گویند. این مسئله هنگامی که سرویس دهنده نمی‌تواند تمام شبکه را پوشش دهد یا امکانات کافی برای ایجاد یک سرویس دهنده بهینه با طول ماکزیمم وجود ندارد، به وجود می‌آید. مدل ریاضی این مسئله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(P) = \min \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, P)$$

که در آن P مسیری به طول ℓ می‌باشد. ادوارد مینیکا^۲ در سال ۱۹۸۵ این مسئله را بررسی کرد [۵۲] و روش حلی را برای پیدا کردن هسته مقید پیشنهاد داد که دارای مرتبه زمانی $O(n^3)$ می‌باشد. او همچنین در سال ۱۹۸۳ به همراه پاتل^۳ به این نتیجه رسید که لزومی ندارد هسته مقید، از نقطه ۱-میانه بگذرد [۵۱]. در سال ۱۹۹۶ پنگ و لو^۴ مسئله هسته مقید را بررسی نمودند [۵۷] و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ به روی درخت وزن‌داری که طول یال‌های آن ۱ می‌باشد پیاده سازی کردند. آلستراپ^۵ و همکاران نیز در سال ۲۰۰۱ مسئله هسته مقید را برای درخت با طول یال دلخواه بررسی نمودند و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n\ell)$ ارائه کردند که در آن ℓ طول هسته می‌باشد [۵].

۱.۲.۴ روش حلی برای پیدا کردن هسته مقید روی درخت

روشی که مینیکا [۵۲] برای پیدا کردن هسته مقید روی درخت بیان کرد به صورت زیر می‌باشد:

برای هر دو برگ v_i و v_j از درخت T کلیه مسیرهای P_{v_i, v_j} که طول آنها بزرگتر یا مساوی ℓ می‌باشد را در نظر بگیرید. برای هر یک از این مسیرها، از رأس v_i به سمت رأس v_j یک مسیر ℓ واحدی را جدا کنید و

^۲Minieka

^۳Patel

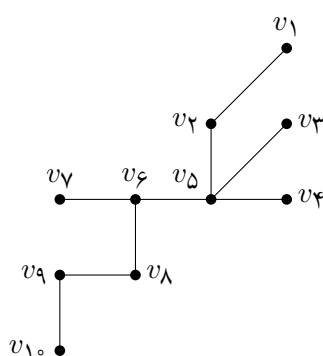
^۴Peng and Lo

^۵Alstrup

حال این مسیر را یک واحد در جهت رأس v_j حرکت داده تا یک مسیر ℓ واحدی دیگر ایجاد شود. روند فوق را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به یک مسیر ℓ واحدی برسیم که رأس انتهایی آن بر روی رأس v_j منطبق شود. به این ترتیب، کلیه مسیرهای به طول ℓ را در اختیار داریم. از بین این مسیرهای به دست آمده با طول ℓ ، مسیری که مقدار تابع زیر به ازای آن مسیر، کمترین مقدار ممکن شود، مسیر بهینه مسئله می‌باشد.

$$G(P) = \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, P) \quad (1.4)$$

به عنوان مثال گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱.۴: درختی با ۱۰ رأس

در گراف فوق، وزن رئوس v_1 تا v_{10} به ترتیب ۱، ۳، ۵، ۲، ۴، ۶، ۲، ۳، ۲ و ۲ می‌باشد. می‌خواهیم در درخت شکل (۱.۴) هسته به طول ۴ را پیدا کنیم. ابتدا فاصله هر دو برگ روی درخت را محاسبه نموده و مسیرهای با طول بزرگتر یا مساوی ۴ می‌باشد را مشخص می‌کنیم که این مسیرها به صورت زیر می‌باشند (مسیرهای مشابه ذکر نشده‌اند).

$$\{P_{v_1, v_7}, P_{v_1, v_{10}}, P_{v_3, v_{10}}, P_{v_4, v_{10}}, P_{v_7, v_{10}}\}$$

حال با توجه به روند توضیح داده شده، کلیه مسیرهای به طول ۴ به صورت زیر می‌باشد:

$$\{P_{v_1, v_7}, P_{v_1, v_8}, P_{v_2, v_9}, P_{v_3, v_9}, P_{v_4, v_9}, P_{v_5, v_{10}}, P_{v_7, v_{10}}\}$$

به نسبت وزن‌های داده شده، مجموع فاصله وزنی مشتریان (رئوس) از ۷ مسیر فوق به ترتیب ۱۵، ۱۲، ۱۱، ۱۴، ۱۴ و ۲۷ می‌باشد. با توجه به مقادیر به دست آمده، مسیر P_{v_3, v_9} مسیر بهینه می‌باشد.

۳.۴ مدل ریاضی مسئله هسته مقید معکوس روی درخت

فرض کنید درخت $T = (V, E)$ با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ داده شده باشد که هر رأس v_i دارای وزن w_i می باشد و همچنین طول هر یال درخت ۱ واحد می باشد و همچنین مسیر P با طول ℓ از پیش تعیین شده باشد. ما می خواهیم وزن مشتریان را آنچنان اصلاح کنیم که با کمترین هزینه ممکن، این مسیر از پیش تعیین شده، به عنوان هسته مقید بهینه مسئله واقع شود. البته این تغییر وزن رئوس نمی تواند به صورت دلخواه انجام شود و وزن رئوس کراندار می باشند و وزن های اصلاح شده نیز باید در این کران ها صدق کند، یعنی:

$$\underline{w}_i \leq w_i^* \leq \bar{w}_i ; \quad i = 1, \dots, n$$

فرض کنید برای افزایش وزن w_i به اندازه یک واحد، ما متحمل هزینه نامنفی c_i ، و برای کاهش وزن w_i به اندازه یک واحد، متحمل هزینه نامنفی d_i شویم. همچنین فرض کنید، p_i بیانگر مقداری باشد که وزن w_i افزایش پیدا کرده و q_i بیانگر مقداری باشد که وزن w_i کاهش پیدا کرده است. حال اگر φ مجموعه تمام مسیرهای با طول ℓ در درخت داده شده باشد، سپس مسئله هسته مقید معکوس روی درخت می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (c_i p_i + d_i q_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n (w_i + p_i - q_i) a_{iS} \leq 0 \quad \forall S \in \varphi \\ & 0 \leq p_i \leq \bar{w}_i - w_i ; \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq q_i \leq w_i - \underline{w}_i ; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

که در رابطه فوق:

$$a_{iS} = d(v_i, P) - d(v_i, S)$$

در این مدل، محدودیت اول بیان می کند که مسیر از پیش تعیین شده P به نسبت وزن های اصلاح شده، مسیر بهینه می باشد (یعنی مجموع فاصله وزنی مشتریان از این مسیر، به نسبت بقیه مسیرهای موجود با طول ℓ ، کمترین مقدار شود). دو محدودیت آخر نیز این مطلب را بیان می کند که اصلاح وزن رئوس درخت نمی تواند به صورت دلخواه انجام شود و هر یک از وزن ها بعد از اصلاح شدن نیز باید در بین کران بالا و پایین خود قرار گیرند.

۱.۳.۴ روش حلی برای مسئله هسته مقید معکوس روی درخت

مانند روند توضیح داده شده در بخش قبل، برای هر دو برگ v_i و v_j از درخت T کلیه مسیرهای P_{v_i, v_j} که طول آنها بزرگتر یا مساوی ℓ می باشد را در نظر بگیرید. برای هر یک از این مسیرها، از رأس v_i به سمت رأس v_j یک مسیر ℓ واحدی را جدا کنید و حال این مسیر را یک واحد در جهت رأس v_j حرکت داده تا یک مسیر ℓ واحدی دیگر ایجاد شود. روند فوق را آنقدر ادامه می دهیم تا به یک مسیر ℓ واحدی برسیم که رأس انتهایی آن بر روی رأس v_j منطبق شود. با توجه به اینکه بین هر دو رأس یک درخت، تنها یک مسیر وجود دارد و با توجه به روند فوق، کلیه مسیرهای به طول ℓ را در اختیار داریم. حال با داشتن کلیه مسیرهای با طول ℓ و همچنین مدل ریاضی مسئله هسته مقید معکوس، می توان برای هر $i = 1, \dots, n$ مقادیر p_i و q_i را به دست آورد و به جواب بهینه رسید. به عنوان مثال درخت شکل (۱.۴) را در نظر بگیرید که اطلاعات مربوط به این درخت در جدول (۱.۴) آورده شده است.

رئوس	w_i	$\underline{w}_i$	$\overline{w}_i$	c_i	d_i
v_1	۱	۰	۴	۱	۲
v_2	۳	۱	۵	۳	۱
v_3	۵	۲	۸	۲	۳
v_4	۲	۰	۵	۴	۱
v_5	۴	۱	۶	۱	۲
v_6	۶	۴	۷	۲	۴
v_7	۲	۰	۳	۵	۱
v_8	۳	۱	۵	۱	۳
v_9	۲	۱	۶	۲	۳
v_{10}	۲	۰	۳	۱	۲

جدول ۱.۴: اطلاعات مربوط به درخت شکل (۱.۴)

فرض کنید مسیر $P_{v_5, v_{10}}$ با طول ۴ مسیر از پیش تعیین شده مد نظر ما باشد (این مسیر را به اختصار P می نامیم). می خواهیم وزن رئوس درخت را با کمترین هزینه ممکن آن چنان تغییر دهیم که این مسیر از پیش تعیین شده، به عنوان مسیر بهینه مسئله واقع شود. همان طور که در بخش قبل مشاهده کردید کلیه مسیرهای با طول ۴ در این درخت به صورت زیر می باشد:

$$\{P_{v_1, v_7}, P_{v_1, v_8}, P_{v_2, v_9}, P_{v_3, v_9}, P_{v_4, v_9}, P_{v_5, v_{10}}, P_{v_7, v_{10}}\}$$

مسیر P به نسبت وزن های داده شده، یک مسیر بهینه نمی باشد. مسئله (۲.۴) را برای این درخت و با توجه به مسیرهای به دست آمده با طول ۴، در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^{10} (c_i p_i + d_i q_i) \\
 s.t : \quad & \sum_{i=1}^{10} (w_i + p_i - q_i) [d(v_i, P) - d(v_i, P_{v_1, v_7})] \leq 0 \\
 & \sum_{i=1}^{10} (w_i + p_i - q_i) [d(v_i, P) - d(v_i, P_{v_1, v_8})] \leq 0 \\
 & \vdots \\
 & \sum_{i=1}^{10} (w_i + p_i - q_i) [d(v_i, P) - d(v_i, P_{v_7, v_{10}})] \leq 0 \\
 & 0 \leq p_i \leq \bar{w}_i - w_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n \\
 & 0 \leq q_i \leq w_i - \underline{w}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

با حل مسئله فوق، جواب بهینه مسئله به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 p_i^* &= 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 9 \quad , \quad p_{10}^* = 1 \\
 q_1^* &= 0 \quad , \quad q_7^* = 1 \quad , \quad q_8^* = 2 \quad , \quad q_i^* = 0 \quad ; \quad i = 4, \dots, 10
 \end{aligned}$$

با توجه به جواب های به دست آمده، اصلاح وزن ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 w_7^* &= w_7 - q_7^* = 3 - 1 = 2 \\
 w_8^* &= w_8 - q_8^* = 5 - 2 = 3 \\
 w_{10}^* &= w_{10} + p_{10}^* = 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

و وزن بقیه رئوس بدون تغییر باقی می ماند. حال با این وزن های جدید، مشاهده می شود که مسیر از پیش تعیین شده P، به عنوان یک میسر بهینه مسئله واقع می شود، زیرا به نسبت وزن های جدید (اصلاح شده)، مجموع فاصله وزنی مشتریان از مسیرهای P_{v_1, v_7} ، P_{v_1, v_8} ، P_{v_7, v_9} ، $P_{v_7, v_{10}}$ و $P_{v_7, v_{10}}$ به ترتیب ۲۱، ۱۵، ۱۱، ۱۱، ۱۲ و ۲۱ می باشد و مجموع فاصله وزنی مشتریان از مسیر P، مقدار ۱۱ می باشد.

مراجع

- [۱] حسین تقی‌زاده کاخکی- جعفر فتحعلی، (۱۳۸۲)، مسئله p -میانه روی شبکه، سی و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران، ۶۵-۷۴، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۲] سمیه حبیب نیا زنده جان، (۱۳۸۸)، پایان نامه کارشناسی ارشد، مسأله پیدا کردن هسته روی درخت، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت معلم سبزوار.
- [۳] سهامی ح، (۱۳۸۶) "آمایش و مکانیابی" چاپ اول، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، پژوهشکده مهندسی پدافند غیر عامل.
- [4] Alizadeh, B., Burkard, R.E., *Combinatorial algorithms for inverse absolute and vertex 1-center location problems on trees*, Networks. published online 2010 in Wiley Online Library. doi:10.1002/net.20427.
- [5] Alstrup, S., Lauridsen, P.W, Sommerlund, P., Thorup, M., *Finding cores of limited length*, <http://www.itu.dk/sw3965.asp>.
- [6] Baroughi Bonab, F., Burkard, R.E., Alizadeh, B., (2010), *Inverse median location problems with variable coordinates*, Central Euro J Oper. Res, 18:365-381.
- [7] Baroughi Bonab, F., Burkard, R.E., Gassner, E., (2011), *Inverse p -median problems with variable edge lengths*, Mathematical Methods of Oper. Res, 73: 263-280.
- [8] Bazaraa, M.S., Sherali, H., Jarvis, J., (2005), *Linear programming and network flows*, third ed. John Wiley and Sons.
- [9] Benkoczi, R., Bhattacharya, B., (2005), *A new template for solving p -median problems for trees in sub-quadratic time (extended abstract)*, Lecture Notes Comput Sci, 3669:271-282.
- [10] Berman, O., Ingco, D.I., Odoni, A.R., (1994), *Improving the location of minimax facilities through network modification*, Networks 24: 31-41.
- [11] Berman, O., Ingco, D.I., Odoni, A.R., (1992), *Improving the location of minisum facilities through network modification*, Ann. Oper. Res, 40: 1-16.
- [12] Burkard, R.E., Galavii, M., Gassner, E., (2010), *The inverse Fermat-Weber problem*, Euro J Oper Res, 206:11-17.
- [13] Burkard, R.E., Gassner, E., Hatzl, J., (2006), *A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on a cycle*, Networks, 48: 16-23.
- [14] Burkard, R.E., Pleschiutchnig, C., Zhang, J.Z., (2004), *Inverse median problems*, Dis. Opt, 1:23-39.
- [15] Burkard, R.E., Pleschiutchnig, C., Zhang, J.Z., (2008), *The inverse 1-median problem on a cycle*, Dis. Opt, 5:242-253.

- [16] Burton, D., Toint, Ph.L., (1992), *On an instance of the inverse shortest path problem*, Math. Programming 53: 45–61.
- [17] Cai, M.C., Yang, X.G., Zhang, J.Z., (1999), *The complexity analysis of the inverse center location problem*, J. Global Optim. 15: 213–218.
- [18] Cappanera, P., (1999), *A survey on obnoxious facility location problems*, Thechnical Report: TR-99-11, Department of Computer Science, University of Piza.
- [19] Charch, R.L., Garfinkel, R.S., (1978), *Location an obnoxious facility on a network*, Trans. Sci. 12: 107-118.
- [20] Cheriyan, J., Ravi R., (1998), *Aproximation for Networks Problems*.
- [21] Corra, E.S., Steiner, M.T.A., Freitas, A.A., Cornieri, C., (2001), *A genetic algorithm for the p-median problem*, Available in Address: Citeaser.nj.ncg.com/458099.html.
- [22] Current, J., Daskin, M., Schilling, D., (1929), *Discrete network location models*, Forthcoming as Chapter 3 in: Facility Location Theory and Methods. Z.Drezner and H.Hamacher (eds.), 2001. Chicago University Press, Chicago, Illinois.
- [23] Dantzig, G.B., (1998), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [24] Daskin, M.S., (1995), *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*, John Wiley, New York.
- [25] Dibble, C., Densham, P.J., (1993), *Generating interesting alternatives in GIS and SDSS using genetic algorithms*, GIS/LIS Symposium, University of Nebraska, Lincoln.
- [26] Erkut, E., Bozkaya, B., Zhang, J., (2001), *An effective genetic algorithm for the p-median problem*.
- [27] Francis, R., McGinnis, Jr.L.F., White, J.A., (1992), *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, Prentice Hall.
- [28] Garey, M.R., Johnson, D.S., (1979), *Computers and intractability: A guid to the theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, California.
- [29] Gassner, E., (2010), *An inverse approach to convex ordered median problems in trees*, J Combinat Opt published online 2010 doi:10.1007/s10878-010-9353-3.
- [30] Gassner, E., (2008), *The inverse 1-maxian problem with edge length modification*, J Combinat Opt 16:50–67.
- [31] Gavish, B., Sridhar, S., (1995), *Computing the 2-median on tree networks in $O(n \log n)$ time*, Networks, 26:305–317.
- [32] Goldman, A.J., Dearing, P.M., (1975), *Concepts of optimal location for partially noxious facilities*, ORSA Bull. 23, 1, B31.
- [33] Goldman, A.J., (1962), *Optimal center location in simple networks*, Transportation Sci. 2: 77–91.
- [34] Hakimi, S.L., (1964), *Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph*, Oper. Res, 12:450-459.
- [35] Hakimi, S.L, Schmeichel, E.F, Labble, M., (1993), *On locating path or tree shaped facilities on network*, Networks, 23: 543-555.
- [36] Hamacher, H.W., Nickel, S., (1998), *classification of location models*, Location Sci., 6: 229-242.

- [37] Hamacher, H.W., (1995), *Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [38] Handler, G.Y., Mirchandani, P.B., (1979), *Location on Networks: Theory and Algorithms*, MIT Press, Cambridge.
- [39] Hansen, P., Labbe, M., Peeters, D., Thisse, J.F., (1987), *Single facility location on networks*, Annals of Discrete Math, 31: 113-146.
- [40] Hansen, P., Meladenovic, N., (1997), *Variable neighborhood search for the p-median*, Location Sci., 5: 207-226.
- [41] Heuberger, C., (2004), *Inverse optimization: A survey on problems, methods, and results*, Journal of Combinatorial Optimization 8: 329-361.
- [42] Hosage, M., Goodchild, M.F., (1986), *Discrete space location-allocation solutions from genetic algorithms*, Ann. Oper. Res, 6: 35-46.
- [43] Hua, et al., (1961), *Applications of mathematical models to wheat harvesting*, Acta Mathematica Sinica 11, 63-75 (in Chinese) (English translation in Chinese Math. 2, 1962, 77-91).
- [44] Kariv, O., Hakimi, S. L., (1979), *An algorithmic approach to network location problems. Part II: p-medians*, SIAM J. Appl. Math., 37: 539-560.
- [45] Krarup, J., Pruzan, P. M., (1983), *The simple plant location problem: Survey and synthesis*, EJOR, 12: 36-81.
- [46] Kuhn, H.W., (1967), *On a pair of dual nonlinear programs*, Nonlinear programming, J.Abadie(ed.), North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 37-54.
- [47] Love, R.F., Morris, J.G., Wesolovsky, G.O., (1988), *Facilities location models and methods*, Elsevier Science Publishing Co.
- [48] Maranzana, F.E., (1964), *On the location of supply points to minimize transport costs*, Oper. Res Quarterly, 15: 261-270.
- [49] Megiddo, N., (1984), *Linear programming in linear time when the dimension is fixed*, J ACM 31:114-127.
- [50] Megiddo, N., (1983), *Linear-time algorithms for linear programming in R^r and related problems*, SIAM Journal on Computing 12: 759-776.
- [51] Minieka, E., Patel, N.H., (1983), *On finding a core of a tree with a specified length*, J.Algorithms. 4: 345-352.
- [52] Minieka, E., (1985), *The optimal location of a path or tree in a tree network*, Networks. 15: 309-321.
- [53] Mirchandani, P.B., Francis, R.L., (1990), *Discrete Location Theory*, John Wiley.
- [54] Moreno-Perez, J.A., Moreno-Vega, J.M., Meladenovic, N., (1994), *Tabu search and simulated annealing in p-median problems*, Talk at the Canadian Operational Research Society Conference, Montral.
- [55] Morgan, C.A., Slater, P.J., (1980), *A linear algorithm for a core of a tree*, Jorنال of algorithms, 1: 247-258.
- [56] Owen, S.H., Daskin, M.S., (1998), *Strategic facility location: A review*, EJOR, 111: 423-447.
- [57] Peng, S., and Lo, W., (1996), *Efficient algorithms for finding a core of a tree with a specified length*, J.Algorithms, 20: 445-458.

- [58] Plastria, F., (1996), *Optimal location of undesirable facilities: a selective overview*, Belg. J. Oper. Res. Statist. Comput. Sci. 36: 109–127.
- [59] Pleschiutchnig, C., (2005), *Inverse median problems*, Ph.D. Thesis, Institute of Mathematics B, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- [60] Rolland, E., Schilling, D.A., Current, J. R., (1997), *An efficient tabu search heuristic for the p-median problem*, EJOR, 96: 329-342.
- [61] Scaparra, M.P., Scutella, M. G., (2001), *Facilities, locations, customers: Building blocks of location models: A survey*, Technical Report: tr-01-18, University of Piza, Italy.
- [62] Tamir. A., (1996), *An $O(p \cdot n^2)$ algorithm for the p-median and related problems on tree graphs*, Oper. Res Letters, 19: 59-64.
- [63] Tansel, B.C., Francis, R.L., Lowe, T. J., (1983), *Location on networks: A survey*, Management Sci., 29: 482-511.
- [64] Teitz, M.B., Bart, P., (1968), *Heuristic methods for estimating generalized vertex median of a weighted graph*, Oper. Res, 16: 955-961.
- [65] Ward, J.E., Wendell, R.E., (1980), *A new norm for measuring distance which yields linear location problems*, Oper. Res, 28: 836-844.
- [66] Ward, J.E., Wendell, R.E., (1985), *Using block norms for location modelling*, Operations Research, 33: 1074-1090.
- [67] Weber, A., (1929), *Über den Standort der Industrien*, Tübingen, 1909; English Trans.: *Theory of Location of Industries*, (C.J.Friedrich, ed.and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois.
- [68] Yang, X., Zhang, J., (2008), *Inverse center location problem on a tree*, J Syst Sci Complexity 21:651–664.
- [69] Zhang, J., Liu, Z., Ma, Z., (2000), *Some reverse location problems*, European J. Oper. Res. 124: 77–88.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Modify	اصلاح کردن
Increase	افزایش
Algorithm	الگوریتم
Optimum	بهینه
Optimization	بهینه سازی
Maximum	بیشترین
Function	تابع
Change	تغییر دادن
Iterative	تکراری
Fixed	ثابت
Current	جاری
Box	جعبه
Solution	جواب
Polynomial	چند جمله‌ای
Greedy	حریصانه
Majority property	خاصیت اکثریت
Linear	خطی

Degree	درجه
Clockwise	در جهت عقربه‌های ساعت
Tree	درخت
Counterclockwise	در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
Arbitrarily	دلخواهانه
Cycle	دور
Vertex	رأس
Method	روش
Root	ریشه
Subtree	زیردرخت
Column	ستون
Supplier	سرویس دهنده
Network	شبکه
Feasible	شدنی
Optimality gap	شکاف بهینگی
Coefficient	ضریب
Length	طول
Distance	فاصله
Solvable	قابل حل
Lie	قرار گرفتن-واقع شدن
Decrease	کاهش
Upper bound	کران بالا
Lower bound	کران پایین

Minimum	کمترین
Shortest path	کوتاه‌ترین مسیر
Graph	گراف
Discrete	گسسته
Corner	گوشه
Variable	متغیر
Corresponding	متناظر
Positive	مثبت
Neighbor	مجاور
Set	مجموعه
Convex	محدب
Constraint	محدودیت
Optimality criterion	محک بهینگی
Ordered	مرتب
Center	مرکز
Problem	مسئله
Customer	مشتری
Provided	مشروط
Inverse	معکوس
Value	مقدار
Concave	مقعر
Location	مکانیابی
Negative	منفی

Local.....	موضعی
Median.....	میانه
Triangle-inequality	نامساوی مثلث
Point	نقطه
Halfcycle	نیم دور
Objective.....	هدف
Cost.....	هزینه
Conditional-core.....	هسته مقید
Weight	وزن
Edge.....	یال
Unique	یکتا
P-median.....	P-میانه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algorithm	الگوریتم
Arbitrarily	دلخواهانه
Box	جعبه
Center	مرکز
Change	تغییر دادن
Clockwise	در جهت عقربه‌های ساعت
Coefficient	ضریب
Column	ستون
Concave	مقعر
Conditional-core	هسته مقید
Constraint	محدودیت
Convex	محدب
Corner	گوشه
Corresponding	متناظر
Cost	هزینه
Counterclockwise	در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
Current	جاری

Customer	مشتری
Cycle	دور
Decrease	کاهش
Degree	درجه
Discrete	گسسته
Distance	فاصله
Edge	یال
Feasible	شدنی
Fixed	ثابت
Function	تابع
Graph	گراف
Greedy	حریصانه
Halfcycle	نیم دور
Increase	افزایش
Inverse	معکوس
Iterative	تکراری
Length	طول
Lie	قرار گرفتن - واقع شدن
Linear	خطی
Local	موضعی
Location	مکانیابی
Lower bound	کران پایین
Majority property	خاصیت اکثریت

Maximum.....	بیشترین
Median.....	میانۀ
Method.....	روش
Mininum.....	کمترین
Modify	اصلاح کردن
Negative.....	منفی
Neighbor.....	مجاور
Network.....	شبکه
Objective.....	هدف
Optimality criterion.....	محک بهینگی
Optimality gap.....	شکاف بهینگی
Optimization.....	بهینه سازی
Optimum.....	بهینه
Ordered.....	مرتب
P-median.....	P- میانۀ
Point.....	نقطه
Polynomial.....	چند جمله‌ای
Positive.....	مثبت
Problem.....	مسئله
Provided.....	مشروط
Root.....	ریشه
Set.....	مجموعه
Shortest path.....	کوتاه‌ترین مسیر

Solution	جواب
Solvable	قابل حل
Subtree	زیردرخت
Supplier	سرویس دهنده
Tree	درخت
Triangle-inequality	نامساوی مثلث
Unique	یکتا
Upper bound	کران بالا
Value	مقدار
Variable	متغیر
Vertex	رأس
Weight	وزن

Surname: Mohammadi

Name: Sadollah

Title: Inverse Location Problem On Graphs

Supervisor: Dr. Jafar Fathali

Advisor: Dr. Meysam Alishahi

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Operations Research

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: September 2013

Number of pages: [94](#)

Keywords: Inverse 1-median, Tree, Cycle, Location problem.

Abstract

In discrete location problems (in particular, the p-median problems), there are "n" customers with given weight which goal is to find the location of "p" supplier (median) such that the sum of weighted distances from customers to the nearest supplier get minimized.

But the inverse discrete location problems (in particular, the inverse p-median problems) consist in changing the parameters of a p-median problem at minimum cost such that a set of "p" prespecified suppliers becomes the p-median. The costs are proportional to the increase or decrease of the corresponding parameters. These parameters are the length of edges and the weight of vertices. Every parameter can only be changed between a lower bound and an upper bound.

In this thesis, first we consider the inverse 1-median problem with variable vertices weight on tree and cycle and finally the inverse conditional core problem on tree is considered, that the core problem on tree is in fact a path that sum of weighted distances from all vertices to this path is minimized.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Inverse Location Problem On Graphs

Supervisor

Dr. Jafar Fathali

Advisor

Dr. Meysam Alishahi

by

Sadollah Mohammadi

September 2013