بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی

استاد راهنما

دکتر سیدرضا حجازی

پژوهشگر

اعظم هادیلو

۱۳۹۲/۶/۲۵

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم..**اعظم هادیلو** رشته ریاضی گرایش ...**هندسه دیفرانسیل**... تحت عنوان« ....**کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی**....» که در تاریخ ...۱۳۹۲/۶/۲۵.... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار خوب امتیاز ۱۸/۷۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) **۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)**

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) **۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)**

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر سید رضا حجازی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر میرحیدر جعفری	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر هادی پسندیده	استادیار	

دکتر احمد زیره- رئیس دانشکده ریاضی

نام خانوادگی دانشجو: هادیلو نام: اعظم

عنوان: کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی

استاد راهنما: دکتر سیدرضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۵ تعداد صفحات: ۶۴

واژگان کلیدی: کانکشن، کانکشن فرم، کلاف اصلی، کانکشن های روی کلاف اصلی

چکیده

در تئوری کلاسیک کانکشن ها، لازم است که منیفلد مورد بحث یک کلاف اصلی باشد و گروه باید بطور آزاد عمل کند. در این پایان نامه سعی شده است که بیشتر روی کلافهای اصلی و معرفی آنها تمرکز شود. فصل اول مفاهیم بنیادی و مقدماتی مربوط به پایان نامه همراه با مثال و قضایایی می‌باشد، فصل دوم بطور کامل به کلافهای اصلی، مثالها و قضایایی در مورد آنها اختصاص یافته است و کلافهای مورد بحث در آن کلافهای کنج، کلافهای وابسته و کلافهای پس کشنده می‌باشند. در فصل سوم به معرفی کانکشنهای جزئی می‌پردازیم که به عنوان عمل گروه فراگیر بکار برده می‌شوند و باید روی کانکشنهایی که برای تعریف کانکشن کلاف اصلی استفاده می‌شوند تمرکز کنیم. در بخش دیگری از این فصل به معرفی خمیدگی کانکشنهای روی کلاف اصلی می‌پردازیم.

تقدیم به...

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که سایهی مهربانیش، سایه‌سار زندگیم می‌باشد،
همدلی که با واژه‌ی تلاش آشنایی دارد، تلاش راستین را می‌شناسد و مرا در راه رسیدن به اهداف عالی یاری می‌رساند ؛ همو که حس تعهد و مسئولیت را در زندگی مان تلالویی خدایی داده است؛ این پایان نامه تقدیم به همسر عزیزم می‌گردد.

خدایا...

خدایا مرا به علم توانگر ساز، به حلم زینت بخش، به تقوا عزیز کن و به عافیت زیبایی ده.

خدایا! از زوال نعمت، تغییر عافیت، غضب ناگهانی و همه چیزهایی که مایه ناخشنودی توست به تو پناه می‌برم.

خدایا! تو را به غیب دانی و قدرتی که بر آفرینش داری سوگند می‌دهم تا زمانی که زندگی را برای من بهتر می‌دانی مرا زنده نگهدار و زمانی که مرگ را برایم بهتر می‌دانی مرا بمیران.

خدایا! از تو می‌خواهم که ترس خود را در آشکار و نهان نصیب من کنی، در حال خشنودی و خشم کلمه اخلاص را به زبان من جاری نمایی و در حال فقر و توانگری میانه روی را شعار من سازی.

خدایا! چنان که خلقت مرا نیک کردی سیرتم را نیز نیک کن.

خداوندا! یک لحظه مرا به خودم وامگذار و چیزهای خوبی که به من بخشیده ای، از من باز مگیر.!!!!

تعهد نامه

اینجانب **اعظم هادیلو** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **کانکشن های وابسته به عمل گروههای لی** تحت راهنمائی **دکتر سید رضا حجازی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد.

تقدیر و تشکر...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید، به طریق علم رهنمونمان شد، به همنشینی رهروان دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد شایسته، جناب آقای دکتر سیدرضا حجازی، که در کمال سعه ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از اساتید محترم، سرکار خانم دکتر الهام دسترنج و جناب آقای دکتر هادی پسندیده که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند، کمال تشکر را دارم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان صمیمانه از آنها قدردانی می‌کنم.

اعظم هادیلو

۱۳۹۲/۶/۲۵

فهرست مطالب

پیشگفتار

کلاف‌های اصلی به عنوان یک چهارچوب مناسب برای تحلیل عملهای گروه و تقارن بکار برده میشوند. کلافهای اصلی نقش مهمی در تحلیل سیستمهای مکانیکی متقارن بازی میکنند. در این پایان نامه سعی شده است بیشتر کلاف‌های اصلی و کانکشنهای روی آنها مورد بررسی قرار گیرند.

ابتدا در فصل اول مفاهیم بنیادی و مقدماتی هندسی مورد نیاز را بیان کرده‌ایم که از جمله‌ی آنها گروه لی و عملهای آن است. یک گروه لی، یک مجموعه ی G با دو ساختار است:ساختار اول ساختار جبری است یعنی G یک گروه است و ساختار دوم آن ساختار هندسی است یعنی اینکه G یک منیفلد (حقیقی- هموار) است و همچنین عمل‌های ضرب گروهی و معکوس در G باید هموار باشند. ساده ترین مثال برای یک گروه لی فضای $\mathbb{R}^n$ با عمل گروه جمع و نگاشت وارون آن، وارون معمولی نسبت به عمل جمعی می‌باشد. در بخش گروه لی، بطور مفصل، قضایا و مثالهایی را مطرح کرده‌ایم که در فصول دوم و سوم، در مباحث، مورد نیاز هستند. فصل اول را با مبحث عملگر ∇ به پایان رسانده‌ایم که در آن به معرفی کانکشن ریمانی و بیان قضیه اساسی هندسه ریمانی پرداخته‌ایم.

فصل دوم با عنوان کانکشن ها در کلاف‌های اصلی، به معرفی کلافهای اصلی، کلافهای وابسته و کلافهای پس کشنده، همراه با مثالهایی برای درک بهتر، پرداخته است. یک G-کلاف اصلی یک سه گانه‌ی $(\mathbb{P}, M, \pi)$ است که $\mathbb{P}$ و M منیفلدهای هموار و π یک نگاشت هموار از $\mathbb{P}$ به M است. $\mathbb{P}$ فضای کامل، M فضای پایه و نگاشت π تصویر کلاف اصلی نام می‌گیرند. کلاف اصلی بدیهی، بدیهی ترین مثال از G-کلاف اصلی می‌باشد.

سپس بعد از معرفی کلاف‌های وابسته و کلاف‌های پس کشنده به مبحث کانکشن های روی کلاف اصلی می‌رسیم که بطور مفصل به تعریف آن و بیان لمی در موردش پرداخته‌ایم. پایان بخش فصل دوم، مبحث مشتق کوواریان (همورد) است.

آخرین فصل این پایان نامه، کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی است. همانطور که گفتیم کلاف‌های اصلی نقش مهمی در تحلیل سیستم های مکانیکی در فیزیک بازی می‌کنند، به همین خاطر در این فصل تا حدودی مباحث فیزیکی مطرح شده است که از جمله‌ی آنها می‌توان به فاکتور لختی، تانسور لختی قفل شده،

کانکشن فرم مکانیکی ساده و عمل گروه دوران $SO(۳)$ روی $\mathbb{R}^۳$ که مرتبط با دوران جسم صلب است، اشاره کرد.

البته برای جلوگیری از دور شدن از بحث مورد نظر، این موضوعات فقط در حد تعریف بیان شده‌اند و چندین قضیه و گزاره را در ارتباط با آنها عنوان کرده‌ایم. بخش انتهایی این پایان نامه را به خمیدگی کانکشنهای روی کلاف اصلی اختصاص داده و به معرفی فرم خمیدگی و بیان گزاره‌ای در رابطه با آن پرداخته‌ایم. امید است نتیجه تلاش و زحمت چندین ماهه‌ی بنده، مورد عنایت و قبول خوانندگان این رساله قرار گیرد.

فصل ۱

مفاهیم بنیادی هندسه

۱.۱ تعاریف اولیه

در این فصل برای درک بهتر مفاهیم بخش ها و فصول بعد به تعاریف و قضایای مقدماتی بهمراه مثالهایی از آنها می‌پردازیم.

با فرض اینکه خواننده با ویژگیهای اساسی فضای توپولوژیک آشنایی دارد، اولین تعریف را به منیفلد توپولوژیکی اختصاص می‌دهیم:

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد آنرا یک **منیفلد توپولوژیکی n-بعدی** گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ بترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشند بطوریکه $U \cap V = \emptyset$.
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض کنید M یک منیفلد n- بعدی توپولوژیک باشد، یک چارت مختصاتی(یا فقط یک چارت) روی M یک زوج (U, φ) است که U یک زیر مجموعه ی باز از M و $\varphi : U \to \tilde{U}$ یک همئومورفیسم از U به یک زیرمجموعه باز$\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ است. با استفاده از تعریف منیفلد توپولوژیک، هر نقطه $p \in M$ مشمول در یک دامنه چارت (U, φ) است. اگر $\varphi(p) = ۰$ می‌گوئیم چارت در p متمرکز شده است. U را دامنه چارت یا همسایگی چارت در هر نقطه‌اش می‌نامیم،نگاشت φ یک نگاشت مختصاتی (موضعی) و توابع مولفه‌ای $(x^۱, ..., x^n)$ از φ تعریف شده به صورت$\varphi(p) = (x^۱(p), ..., x^n(p))$ مختصات موضعی روی U نامیده می‌شود.

حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-۱}$ دیفئومورفیسم باشد.

مجموعه $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک اطلس روی M می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک **منیفلد هموار** نامیده و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با چارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n, \mathbb{I})$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را **نگاشتی هموار** گوئیم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر چارت $\varphi_\beta : U_\beta \to V_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\varphi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک **برش** از نگاشت پیوسته ی $\pi : \tilde{M} \to M$ نگاشت پیوسته‌ای مانند $\sigma : M \to \tilde{M}$ است که $\pi \circ \sigma = Id$.

تعریف ۵.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم عملگر خطی $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(p) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

قرار می‌دهیم:

$$T_pM := \{X : \text{است } p \in M \text{ یک عملگر مشتق در نقطه } X\},$$

آنرا **فضای مماسی** منیفلد M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم. همچنین $\coprod_{p\in M} T_pM = TM$ را **کلاف مماسی** منیفلد M می‌گوئیم.

قضیه ۶.۱.۱. *هر کلاف مماسی ساختار منیفلدی هموار می‌پذیرد و $2m$-بعدی است.*

برهان. [۷] □

تعریف ۷.۱.۱. **میدان برداری** $\mathbf{v}$ روی M بردار مماس $\mathbf{v}|_p \in T_pM$ در هر نقطه‌ی $p \in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_p$ بطور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض می‌کنیم M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها باشد به ازای هر $p \in M$ نگاشت $dF|_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ را **نگاشت دیفرانسیل** F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $\mathbf{v}|_p \in T_pM$ با ضابطه

$$dF(\mathbf{v}|_p)f(y) = \mathbf{v}(f \circ F)(p), \qquad y = F(p),$$

تعریف می‌شود و در مختصات موضعی داریم:

$$dF(\mathbf{v}|_x) = dF\left(\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آنرا نگاشت پیش‌برنده (پوشفوروارد) می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها باشد، به نقطه $p \in M$ یک **نقطه منظم** از F می‌گوئیم اگر $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ پوشا باشد و نقطه p **بحرانی** است هرگاه $\mathrm{rank}F(p) < \dim N$ یا اگر تابع هموراری موجود باشد که بعد M از N کمتر باشد، تمامی نقاط آن بحرانی خواهد بود.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر $F : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد ، **رتبه** F در $p \in M$ رتبه ی نگاشت خطی $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ است و این یعنی رتبه ی ماتریس مشتقات جزئی F در هر چارت هموار یا بعد $\mathrm{Im}F_* \subset T_{F(p)}N$. اگر F در هر نقطه دارای رتبه ی k باشد میگوئیم F دارای رتبه ی ثابت است و می‌نویسیم $\mathrm{rank}F = k$.

یک نگاشت هموار $F : M \to N$ **سابمرژن** نامیده میشود اگر F_* در هر نقطه پوشا باشد یا بطور هم ارز $\mathrm{rank}F = \dim N$؛ و یک **ایمرژن** نامیده می‌شود اگر F_* در هر نقطه یک به یک باشد یا بطور هم ارز $\mathrm{rank}F = \dim M$.

گزاره ۱۱.۱.۱. ***ویژگیهای سابمرژن ها***

فرض کنید $\pi : M \to N$ یک سابمرژن باشد:

۱. *π یک نگاشت باز است.*

۲. *هر نقطه از M در یک تصویر از یک برش موضعی هموار از π است.*

۳. *اگر π پوشا باشد، یک نگاشت خارج قسمتی است.*

برهان. [۷] □

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر M یک منیفلد باشد یک **خم** در M یعنی یک خم هموار و پارامتری شده که یک نگاشت پیوسته $\gamma : J \to M$ است که $J \subset \mathbb{R}$ یک بازه است. بدون اینکه در نظر بگیریم J باز است یا بسته، کراندار است یا بیکران. اما **خم قطعه ای**، خمی است که دامنه‌ی آن یک بازه بسته کراندار $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد. همواری خم γ یعنی اینکه توابع مولفه‌ای γ^iها در هر مختصات موضعی دارای مشتقات یکطرفه از هر مرتبه‌ای در نقاط پایانی باشند.

تعریف ۱۳.۱.۱. نگاشت $F : X \to Y$ بین دو فضای توپولوژیک X,Y یک **ایمبدینگ توپولوژیک** است هرگاه F همئومورفیسم باشد. شرط فوق ایجاب میکند که توپولوژی X,Y یکی باشد بنابراین توپولوژی $\mathrm{Im}F$ باید زیرفضایی باشد یعنی اگر V یک عضو از پایه ی توپولوژی Y باشد آنگاه $\mathrm{Im}F \cap V$ در Y باز است.

تعریف ۱۴.۱.۱. ایمرژن $F : M \to N$ یک **ایمبدینگ** است هرگاه ایمبدینگ توپولوژیکی باشد.

مثال ۱۵.۱.۱. دراینجا مثالهایی از سابمرژن، ایمرژن و ایمبدینگ مطرح می‌کنیم:

- اگر $M_۱, \cdots, M_k$ منیفلدهای هموار باشند، هر تصویر $\pi_i : M_۱ \times \cdots \times M_k \to M_i$ یک سابمرژن است ، بویژه تصویر $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ بروی n مختصات اول یک سابمرژن است.

- اگر $M_۱, \cdots, M_k$ منیفلدهای هموار باشند، اگر $p_i \in M_i$ نقاط دلخواهی باشند، هر نگاشت $\iota_j : M_j \to M_۱ \times \cdots \times M_k$ بصورت

$$\iota_j(q) = (p_۱, \cdots, p_{j-۱}, q, p_{j+۱}, \cdots, p_k)$$

یک ایمبدینگ هموار است بویژه نگاشت شمول $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ که $(x^۱, \cdots, x^n)$ را به $(x^۱, \cdots, x^n, ۰, \cdots, ۰)$ تصویر می‌کند یک ایمبدینگ هموار است.

- اگر $\gamma : J \to M$ یک خم هموار در منیفلد M باشد سپس γ یک ایمرژن است اگر وتنها اگر $\gamma'(t) \neq ۰$ برای هر $t \in J$.

- اگر $F : M \to N$ یک دیفئومرفیسم موضعی باشد سپس F هم ایمرژن است و هم سابمرژن.

- اگر E یک کلاف برداری هموار روی یک منیفلد هموار M باشد نگاشت تصویر $\pi : E \to M$ یک سابمرژن است.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، **کروشه‌ی لی** آنها، $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۱.۱}$$

هم‌چنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=۱}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

سپس داریم:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{v}(\eta^i)-\mathbf{w}(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (۲.۱)$$

گزاره ۱۷.۱.۱. *میدانهای برداری $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، کروشه‌ی لی آنها در خواص زیر صدق می‌کنند:*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v}+c'\mathbf{v}',\mathbf{w}]=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}],$$
$$[\mathbf{v},c\mathbf{w}+c'\mathbf{w}']=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v},\mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=-[\mathbf{w},\mathbf{v}].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]+[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]=۰.$$

برهان. با استفاده از (۱.۱) و (۲.۱) به آسانی اثبات می‌شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرم‌های دیفرانسیلی دوگان میدان‌های برداری‌اند. نقطه‌ی داده شده‌ی $p\in M$ را در نظر می‌گیریم، تابع خطی و حقیقی مقدار ω . $T_pM\to\mathbb{R}$ روی فضای مماسی، **۱-فرم دیفرانسیلی** در p تعریف می‌کند. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_pM می‌باشد و فضای هم‌مماسی نامیده شده و به صورت T_p^*M نوشته می‌شود. فضاهای هم‌مماسی با هم تشکیل کلاف هم‌مماسی $T^*M=\sqcup_{p\in M}T_p^*M$ را می‌دهند که مشابه کلاف مماسی، تشکیل منیفلد هموار $۲m$-بعدی می‌دهد. تابع حقیقی مقدار و هموار $f:M\to\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$، ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x=(x^1,\dots,x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، که دوگان پایه‌های مختصاتی $\partial_{x^j}:=\frac{\partial}{\partial x^j}$ از فضای مماسی‌اند، پایه‌ای برای فضاهای هم‌مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. بر حسب این پایه هر ۱-فرم در حالت عمومی فرم مختصات موضعی زیر را دارد:

$$\omega=\sum_{i=1}^{m}h_i(x)dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مراتب بالاتر به عنوان نگاشت چندخطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین **k-فرم دیفرانسیلی** Ω در نقطه‌ی $p\in M$ نگاشت k-خطی زیر است:

$$\Omega:\underbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}_{k\text{-بار}}\to\mathbb{R},$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در p بوسیله‌ی $\Lambda^k T_p^* M$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید $F : M \to N$ یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار M, N باشد دوگان نگاشت خطی $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ یک نگاشت خطی بصورت :

$$F^* = (F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_p M$$

است که به آن **پس کشنده** (پول بک) نگاشت F میگویند و برای هر یک-فرم ω و هر $X \in T_pM$

$$(F^*\omega)X = \omega(F_*X).$$

تعریف ۲۰.۱.۱. **مشتق خارجی** یک k-فرم دیفرانسیلی یک $(k+۱)$-فرم دیفرانسیلی است.

اگر f یک تابع هموار (۰-فرم) باشد مشتق خارجی f یک دیفرانسیل f است که بصورت df نوشته می شود و یک، ۱-فرم یکتاست که برای هر میدان برداری هموار X ، $df(X) = d_X f$ که $d_X f$ مشتق مستقیم از f در راستای X است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n-بعدی و TM کلاف مماس ۲n-بعدی آن باشد و $\pi : TM \to M$ نگاشت تصویر طبیعی باشد، تصویر معکوس هر $p \in M$، $(\pi^{-1}(p))$ ، به یک زیر فضا از TM تصویر می‌شود که به آن **تار** می‌گویند.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید M یک فضای توپولوژیکی باشد، یک **کلاف برداری** از رتبه k روی M یک فضای توپولوژیک E با نگاشت پیوسته ی پوشای $\pi : E \to M$ است که:

- برای هر $p \in M$ ، مجموعه $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$، (که تار E روی p نام دارد) یک زیرفضای برداری k-بعدی E باشد.

- برای هر $p \in M$ ، یک همسایگی مانند U از p در M و یک همئومورفیسم $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (که یک **بدیهی سازی موضعی** از E روی U نامیده می‌شود) موجود باشد طوریکه :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & U \\ & U \times \mathbb{R}^k \arrow[u, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

(که π_1 یک تصویر روی عامل اول است) و چنانکه برای هر $q \in U$، تحدید Φ به E_q یک ایزومورفیسم خطی از E_q به $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ است. اگر M و E منیفلدهای هموار باشند، π یک نگاشت هموار است و بدیهی سازیهای موضعی می توانند به دیفئومورفیسم ها محصور شوند، سپس E یک **کلاف برداری هموار**

نامیده می‌شود. دراین حالت ، هر بدیهی سازی موضعی را که یک دیفئومورفیسم بروی آن است، یک **بدیهی سازی موضعی هموار** می‌نامیم.

یک کلاف برداری دارای رتبه یک ، اغلب **کلاف برداری خطی** نامیده می‌شود. فضای E، فضای کامل از کلاف، M فضای پایه ی آن و π تصویر آن است. اگر $U \subset M$ باز باشد، به آسانی می‌توان بررسی کرد که $E|_U = \pi^{-1}(U)$ دوباره یک کلاف برداری با تحدید π است طوریکه نگاشت تصویر آن، تحدید E به U نامیده می‌شود. اگر یک بدیهی سازی موضعی روی کل M موجود باشد (که یک **بدیهی سازی فراگیر** از E نامیده می‌شود) سپس E یک **کلاف بدیهی** نامیده می‌شود. در این حالت، E ، خودش یک هومورفیسم به فضای حاصل‌ضرب $M \times \mathbb{R}^k$ است. اگر $E \to M$ یک کلاف هموار باشد که یک بدیهی سازی هموار بپذیرد می‌گوئیم E بطور هموار بدیهی است.

مثال ۲۳.۱.۱. کلافهای حاصل‌ضرب

یک مثال ساده از کلافهای برداری رتبه ی k روی هر فضای M ، منیفلد حاصل‌ضرب $E = M \times \mathbb{R}^k$ با نگاشت $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \to M$ به عنوان تصویر آن می‌باشد. این کلاف بوضوح بدیهی است (با نگاشتهای همانی به عنوان یک بدیهی سازی فراگیر). اگر M یک منیفلد هموار باشد سپس $M \times \mathbb{R}^k$ بطور هموار بدیهی است.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $E \to M$ یک کلاف برداری باشد، اگر $U \subset M$ یک مجموعه باز باشد، برشهای هموار موضعی $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ از E روی U ، مستقل هستند اگر مقادیر آنها برای هر $p \in U$، $\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p)$، عناصر مستقل خطی از E_p باشند. یک **کنج موضعی** برای E روی U یک k-تایی از برشهای موضعی مانند $(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ که $\sigma_i : U \to E$ است که E را تولید می‌کنند لذا $(\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p))$ یک پایه برای تار E_p ، برای هر $p \in U$ است و **کنج فراگیر** نامیده می‌شود اگر $U = M$.

مثال ۲۵.۱.۱. کنج فراگیر برای یک کلاف حاصل‌ضرب

اگر $E = M \times \mathbb{R}^k$ یک کلاف حاصل‌ضرب باشد، پایه ی استاندارد $(e_1, \cdots, e_k)$ برای $\mathbb{R}^k$ یک کنج فراگیر $(\tilde{e}_i)$ برای E را نتیجه می‌دهد که بصورت $\tilde{e}_i(p) = (p, e_i)$ تعریف شده است. اگر M یک منیفلد هموار باشد این کنج فراگیر هموار است.

قضیه ۲۶.۱.۱. *یک کلاف برداری بدیهی است اگر و تنها اگر یک کنج فراگیر بپذیرد.*

برهان. [۷] □

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر $\omega^1, \cdots, \omega^k$ ۱-فرمهای دیفرانسیلی در p و $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ میدانهای برداری باشند ضرب وج آنها یک k-فرم دیفرانسیلی $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k; \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \rangle = \det\Big(\langle \omega^i; \mathbf{v}_j \rangle \Big). \tag{۳.۱}$$

۱-فرمهای $\omega^1, \cdots, \omega^k$ وابسته خطی هستند اگر وتنها اگر ضرب وج آنها صفر شود:

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0.$$

ضرب وج چند خطی است:

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge (c\omega^i + c'\omega'^i) \wedge \cdots \wedge \omega^k = c(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^i \wedge \cdots \wedge \omega^k) + c'(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega'^i \wedge \cdots \wedge \omega^k)$$

قضیه ۲۸.۱.۱. *اگر $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{(k+1)}(M)$ عملگر دیفرانسیلی روی منیفلد M باشد:*

۱) *اگر $f \in C^\infty(M)$ و X یک میدان برداری باشد آنگاه :*

$$df(X) = X(f)$$

۲) *اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ و $\eta \in \Omega^\ell(M)$:*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

۳) $d^2\omega = 0$.

برهان. [۸] □

تعریف ۲۹.۱.۱. اگر ω یک k-فرم و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری هموار باشد،**ضرب هوک** $\mathbf{v}$ با ω یک $(k-1)$-فرم $\mathbf{v} \lrcorner\, \omega$ است که برای هر مجموعه‌ای از میدان‌های برداری $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k-1}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \mathbf{v} \lrcorner\, \omega; \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k-1} \rangle = \langle \omega; \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k-1} \rangle. \tag{۴.۱}$$

ضرب هوک دوخطی است لذا کافی است آنرا برای عناصر پایه محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner\, (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = \begin{cases} 0, & i \neq j_k \\ (-1)^{k-1} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{k-1}} \wedge dx^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}, & i = j_k. \end{cases}$$

بعنوان مثال:

$$\partial_x \lrcorner\, dz \wedge dx = -dz$$

$$\partial_x \lrcorner\, dy \wedge dz = 0$$

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، V^* **فضای دوگان** V یا **فضای هم‌بردارها** را مشخص می‌کند، نگاشت $V^* \times V \to \mathbb{R}$ را برای همه $\omega \in V^*$ و $X \in V$ به صورت :

$$(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X\rangle \qquad (\omega, X) \mapsto \omega(X)$$

تعریف می‌کنیم.

یکk -**تانسور کوواریانت** روی V یک نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \to \mathbb{R},$$

است بطور مشابه یک ℓ-**تانسور کنترااواریانت** نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell\text{-بار}} \to \mathbb{R}$$

است و نیز یک تانسور از نوع $\binom{k}{\ell}$ که یک **تانسور** k -**کوواریانت** ، ℓ-**کنترااواریانت** است، یک نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \times \underset{\ell\text{-بار}}{\times} \underbrace{V^* \cdots \times V^*} \to \mathbb{R}$$

است.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و $S \in T^k(V)$ و $T \in T^\ell(V)$. یک نگاشت بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+\ell\text{-بار}} \to \mathbb{R},$$

که

$$S \otimes T(X_1, \cdots, X_{k+\ell}) = S(X_1, \cdots, X_k)T(X_{k+1}, \cdots, X_{k+\ell}).$$

$S \otimes T$ یک $(k+\ell)$-تانسور کوواریانت است که **ضرب تانسوری** S و T نامیده می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد، یک کلاف k-**تانسور کوواریانت** روی M به صورت

$$T^kM = \coprod_{p\in M} T^k(T_pM),$$

و **کلاف ℓ-تانسور کنتراواریانت** به صورت

$$T_\ell M = \coprod_{p\in M} T_\ell(T_pM),$$

است، هر یک از این کلافها، **کلاف تانسوری** روی M نامیده می‌شود.

یک برش از یک کلاف تانسوری ،یک **میدان تانسوری** روی M نامیده می‌شود. یک میدان تانسوری هموار است هرگاه برش آن هموار باشد. مجموعه تمام میدانهای برداری از نوع $\binom{k}{\cdot}$ را با $\mathcal{J}^k(M)$ و مجموعه تمام میدان‌های برداری از نوع $\binom{\cdot}{\ell}$ را با $\mathcal{J}_\ell(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد، یک زیر فضای k-بعدی مانند $D_p \subset T_pM$ در هر نقطه $p \in M$، **یک توزیع مماس k-بعدی** روی M، یا فقط **یک توزیع** ، نامیده می‌شود. یک توزیع هموار است اگر اجتماع آنها یک زیر کلاف $D = \amalg_{p\in M} D_p \subset TM$ باشد. به این توزیع‌ها میدان‌های k-صفحه ای یا زیر کلافهای مماس هم گفته می‌شود.

تعریف ۳۴.۱.۱. **پوچساز** توزیع k-بعدی $D \subset TM$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann(D)} = \{\omega \in \Omega^{۱}(m) : \omega(X) = \cdot ; X \in D\}$$

تعریف ۳۵.۱.۱. اگر M و N فضاهای توپولوژیک باشند، یک نگاشت $F: M \to N$ (پیوسته یا ناپیوسته) را **سره** می‌گوییم اگر برای هر مجموعه فشرده $K \subset N$، تصویر معکوس $F^{-۱}(K)$ فشرده باشد.

لم ۳۶.۱.۱. *فرض کنید M یک فضای فشرده و N یک فضای هاسدورف باشد، سپس هر نگاشت پیوسته $F: M \to N$ سره است.*

برهان. اگر $K \subset N$ فشرده باشد سپس در N بسته است زیرا N هاسدورف است. با توجه به پیوستگی، $F^{-۱}(K)$ در M بسته و لذا فشرده است. □

لم ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $F: M \to N$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای هاسدورف باشد اگر یک وارون چپ برای F موجود باشد(طوریکه یک نگاشت پیوسته $G: N \to M$، که $G \circ F = Id_M$) سپس F سره است.*

برهان. اگر $K \subset N$ یک مجموعه فشرده باشد سپس هر نقطه $x \in F^{-۱}(K)$ در رابطه

$x = G(F(x)) \in G(K)$ صدق میکند. چون K در N بسته است لذا $F^{-۱}(K)$ یک زیرمجموعه بسته از مجموعه فشرده $G(K)$ است و بنابراین فشرده است. □

۲.۱ گروههای لی

تعریف ۱.۲.۱. یک **گروه لی** r-پارامتری، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است بطوریکه عمل گروهی

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g \cdot h, \qquad g,h \in G,$$

و وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

۱.۲.۱ عملهای گروه لی

اگر G یک گروه و M یک مجموعه باشد، یک **عمل چپ** ازG روی M نگاشت $G \times M \to M$ است که به صورت $(g,p) \mapsto g \cdot p$ نوشته می‌شود و :

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 \cdot g_2) \cdot p \qquad , g_1, g_2 \in G \qquad , p \in M$$

$$e \cdot p = p \qquad , p \in M$$

و **عمل راست** بطور مشابه یک نگاشت$M \times G \to M$ با خواص زیر است:

$$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 \cdot g_2) \qquad , g_1, g_2 \in G, p \in M;$$

$$p \cdot e = p \qquad , p \in M.$$

فرض کنید $\theta : G \times M \to M$ یک عمل چپ از گروه G روی M باشد:

- برای هر $p \in M$ **مدار** p تحت عمل گروه، مجموعه ای به صورت زیر است:
  $$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\},$$
  مجموعه تمام تصاویر p تحت عمل عناصر G.

- عمل **متعدی** است اگر این عمل تنها یک مدار داشته باشد یا به عبارت دیگر مدار هر نقطه از آن کل M باشد.

- فرض کنید $p \in M$ ، **گروه ایزوتروپی** p، مجموعه ای از عناصر $g \in G$ است که p را ثابت می‌کند:
  $$G_p = \{g \in G : g.p = p\}$$

- عمل آزاد است اگر گروه ایزوتروپی آن همانی شود:

$$G_p = \{e\} \qquad p \in M.$$

- فرض کنید گروه لی G بطور پیوسته روی منیفلد M عمل می‌کند، به این عمل سره می‌گوئیم اگر نگاشت $G \times M \to M \times M$ که $(g,p) \mapsto (g \cdot p, p)$ ، یک نگاشت سره باشد.

مثال ۲.۲.۱. عمل طبیعی $\mathrm{GL(n)}$ روی $\mathbb{R}^n$ از چپ بصورت $(A,x) \mapsto A \cdot x$ است که $x \in \mathbb{R}^n$ یک n-تایی است. این یک عمل است زیرا $\mathbb{I}_n x = x$ و ضرب ماتریسی $(AB)x = A(BX)$ شرکت پذیر است. این عمل هموار است و دارای دو مدار $\{۰\}$ و $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ می‌باشد.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید G بطور هموار، آزاد و سره روی منیفلد هموار M عمل کند، فضای خارج قسمتی $\frac{M}{G}$ یک منیفلد توپولوژیکی با بعد $\mathrm{dimM} - \mathrm{dimG}$ است و یک ساختار هموار یکتا می‌پذیرد که نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \to \frac{M}{G}$ یک سابمرژن هموار است.*

برهان. [۷] □

مثال ۴.۲.۱. در اینجا مثال‌هایی از گروههای لی بیان می‌کنیم.

- اگر G یک گروه لی و M یک منیفلد هموار باشد، **عمل بدیهی** G روی M بصورت $g \cdot p = p$ است برای همه $g \in G$. این عمل هموار است و گروه ایزوتوپی آن کل G است.

- $G = \mathbb{R}^n$ که دارای ساختار منیفلدی معمولی است را در نظر می‌گیریم، عمل‌گروه آنرا جمع برداری $(x,y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون آنرا، وارون معمولی یک میدان برداری نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می‌گیریم. این دو عملگر بوضوح هموارند بنابراین $\mathbb{R}^n$ گروه لی آبلی n-پارامتری می‌باشد. (عمل جمع بردارها جابجایی‌پذیر می‌باشد.)

- بطور عمومی‌تر، گروههای ماتریسی زیر با عمل ضرب ماتریسی یک گروه لی است.گروه خطی عمومی

$$\mathrm{GL}(n) = \{X : \det X \neq ۰\},$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر و یک گروه لی $n^۲$-پارامتری می‌باشد. گروه خطی ویژه‌ی

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = ۱\},$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های وارون‌پذیر با دترمینان یک و یک گروه لی $(n^۲ - ۱)$-پارامتری است. گروه متعامد

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : X^T X = I\},$$

گروه لی $\frac{1}{2}n(n-1)$-پارامتری و گروه متعامد ویژه‌ی

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) : \det X = 1\},$$

گروه لی $\frac{1}{2}n(n-1)$-پارامتری می‌باشد. همچنین گروه آفین

$$\mathrm{A}(n-1) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n-1)\,,\ a \in \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

گروه لی $n(n-1)$-پارامتری است. اگر همه‌ی این گروههای ماتریسی را روی صفحه‌ی مختلط در نظر بگیریم بعد آنها دو برابر می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد که روی دو منیفلد هموار M و N عمل می‌کند، یک نگاشت $F : M \to N$ نسبت به عمل G **اکوواریان** است اگر برای هر $g \in G$:

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$$

بطور معادل اگر θ و φ عمل‌های معین روی M و N باشند، F اکوواریان است اگر برای هر $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ {\scriptstyle\theta_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} \\ M & \xrightarrow[F]{} & N \end{array}$$

قبل از مثال درمورد نگاشت اکوواریان ، به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید G و H دو گروه لی باشند، منظور از **هomomorفیسم گروههای لی** نگاشت هموار $F : G \to H$ است که به مفهوم جبری یک همومورفیسم از G به H است یعنی:

$$F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$$

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید G وH گروههای لی باشند، و $F : G \to H$ یک همومورفیسم گروههای لی باشد. یک عمل طبیعی چپ از G روی خودش وجود دارد. عمل چپ θ از G روی H را بصورت :

$$\theta_g(h) = F(g)h,$$

تعریف می‌کنیم. برای بررسی عمل بودن آن کافی است ببینیم که $\theta_e(h) = F(e)h = h$ و

$$\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(h) = F(g_1)(F(g_2)h) = (F(g_1)F(g_2))h = F(g_1 g_2)h = \theta_{g_1 g_2}(h),$$

چون F یک همومورفیسم است. با توجه به این G-عمل ها، F اکوواریان است زیرا:

$$\theta_g \circ F(g') = F(g)F(g') = F(gg') = F \circ L_g(g').$$

تعریف ۸.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$، ضرب از راست $R_g : G \to G$ که بوسیله‌ی $R_g(h) = h \cdot g$ تعریف می‌شود با معکوس $R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$ دیفئومورفیسم است. یک میدان برداری $\mathbf{v}$ روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم:

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}.$$

تعریف ۹.۲.۱. **جبرلی راست** $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد.

به طور عمومی‌تر، جبرلی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\,,\,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G},$$

است که $[\,,\,]$ همان کروشه ی لی است.

برای تعریف میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبرلی چپ نیز به همین شکل عمل می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک **گروه موضعی از تبدیلات** که روی M عمل می‌کنند بوسیله‌ی یک گروه لی G، زیرمجموعه باز $\mathcal{U}$ که حوزه تعریف عمل گروه است بطوریکه $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$، و نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود و دارای خاصیت‌های زیر است:

- اگر $(h, x) \in \mathcal{U}$، $(g, \Psi(h, x)) \in \mathcal{U}$ و همچنین $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$ سپس $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x)$.
- برای هر $x \in M$، $\Psi(e, x) = x$.
- اگر $(g, x) \in \mathcal{U}$ سپس $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x$.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک **مدار** از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه‌ی گروه-ناوردای غیرتهی کمین از منیفلد M می‌باشد. بعبارت دیگر، $\mathcal{O} \subset M$ در صورتی مدار است که در شرایط زیر صدق کند،

- اگر $x \in \mathcal{O}$، $g \in G$ و $g \cdot x$ تعریف شده باشد، سپس $g \cdot x \in \mathcal{O}$ است.
- اگر $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ و $\tilde{\mathcal{O}}$ در بخش قبل صدق کند سپس یا $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ یا $\tilde{\mathcal{O}}$ تهی می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند.

- گروه G به طور **نیم-منظم** عمل می‌کند اگر همه مدارهای آن به عنوان زیرمنیفلدی از M دارای بعد یکسان باشند.

- گروه G به طور منظم عمل می‌کند اگر علاوه بر نیم-منظم بودن عمل، برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک دلخواه U از x وجود داشته باشد با این خاصیت که هر مدار از G، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند.

تعریف ۱۳.۲.۱. گروه تبدیلات G به طور موثر عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت عمل‌های متفاوت داشته باشند، بطوریکه برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g \cdot x = h \cdot x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x, \ \forall x \in M\}$، که زیرگروه نرمال بسته از G می‌باشد موثر بودن عمل G را اندازه می‌گیرد به این معنی که G به طور موثر عمل می‌کند اگر وتنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به طور موثر عمل نکند آنرا با گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{G_M}$ که به طور موثر روی M همانند خود G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم تصور کنیم که همه‌ی عمل گروهها به طور (موضعا) موثر عمل می‌کنند. می‌گوییم گروه لی G به طور موضعا موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. **منحنی انتگرال** از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد بطوریکه بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد، یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \dots, m, \tag{۵.۱}$$

باشند که $\xi^i(x)$ ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

تعریف ۱۵.۲.۱. اگر $\mathbf{v}$ میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال بیشین پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده بوسیله $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل ۰، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۶.۱}$$

$$\Psi(0, x) = x, \tag{۷.۱}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon,x)}. \tag{۸.۱}$$

با مقایسه‌ی دو خاصیت (۷.۱) و (۸.۱) با خاصیت گروه تبدیلات موضعی می‌بینیم که شار تولید شده بوسیله‌ی میدان برداری با عمل‌گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه یک-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری $\mathbf{v}$، **مولد بینهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود از اینرو بوسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^{2}),$$

$(\xi^{1}, \dots, \xi^{m}) = \xi$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ که گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند سپس مولد بینهایت کوچک آن بوسیله‌ی (۹.۱) با قرار دادن $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید.

$$\mathbf{v}|_{x} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{۹.۱}$$

تناظری یک‌به‌یک بین گروههای یک-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بینهایت کوچکشان وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه یک-پارامتری تولیدشده بوسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ بعنوان نگاشت نمایی آنها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه یک-پارامتری یا شار تولید شده بوسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ بکار می‌بریم.

تعریف ۱۶.۲.۱. نگاشت نمایی $\exp : \mathcal{G} \to G$ با قرار دادن $\varepsilon = 1$ در زیرگروه یک-پارامتری تولید شده بوسیله $\mathbf{v}$ بدست می‌آید:

$$\exp(\mathbf{v}) \equiv \exp(\mathbf{v})e.$$

گزاره ۱۷.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه لی و $\mathcal{G}$ جبر لی آن باشد:*

- *نگاشت نمایی یک نگاشت هموار از $\mathcal{G}$ به G است.*
- *برای هر $X \in \mathcal{G}$، $F(t) = \exp(tX)$ یک زیر گروه یک پارامتری از G تولید شده توسط X است.*
- *برای هر $X \in \mathcal{G}$،*

$$\exp(s+t)X = \exp(sX) \circ \exp(tX).$$

- *نگاشت* $\exp_* : T_\circ \mathcal{G} \to T_e G$ *، یک نگاشت همانی است.*

- *نگاشت نمایی یک دیفئومورفیسم موضعی از یک همسایگی* $\circ \in \mathcal{G}$ *به یک همسایگی از* $e \in G$ *برقرار می‌کند.*

- *اگر* $F : G \to H$ *یک هومومورفیسم گروههای لی باشد:*

$$\exp \circ F_* = F \circ \exp .$$

- *اگر* θ *شار یک میدان برداری ناوردای چپ مانند* X *باشد آنگاه:*

$$\theta_t = R_{\exp tX}.$$

برهان. [۷] □

اکنون به معرفی "نگاشت الحاقی" می‌پردازیم:

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید G یک گروه لی و $\mathcal{G}$ جبرلی آن باشد، برای هر $g \in G$ نگاشت $C_g : G \to G$ به صورت $C_g(h) = ghg^{-۱}$ هومومورفیسم گروههای لی است، فرض می‌کنیم $\mathrm{Ad}(g) = (C_g)_* : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ هومورفیسم جبرهای لی آن را معرفی می‌کند زیرا برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ ، $C_{g_۱ g_۲} = C_{g_۱} \circ C_{g_۲}$؛ بلافاصله نتیجه می‌دهد که:

$$\mathrm{Ad}(g_۱ g_۲) = \mathrm{Ad}(g_۱) \circ \mathrm{Ad}(g_۲),$$

Ad هموار است و نمایش الحاقی از G نامیده می‌شود. نمایش الحاقی از جبرلی $\mathcal{G}$ بصورت $\mathrm{ad} : \mathcal{G} \to \mathcal{GL}(\mathcal{G})$ است که $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنید X و Y میدان‌های برداری هموار روی منیفلد هموار M باشند و θ شار X باشد مشتق لی X نسبت به Y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\circ} (\theta_{-t})_* Y_{\theta_t(p)} = \lim_{t \to \circ} \frac{(\theta_{-t})_* Y_{\theta_t(p)} - Y_p}{t} \qquad (۱.۱۰)$$

قضیه ۱.۲.۲۰. *فرض کنید* X *و* Y *میدان‌های برداری هموار روی منیفلد* M *باشند:*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

برهان. [۷] □

قضیه ۱.۲.۲۱. *فرض کنید* G *یک گروه لی ،* $\mathcal{G}$ *جبر لی آن و* $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathcal{G})$ *نمایش الحاقی از* G *باشد، خواهیم داشت،* $\mathrm{Ad}_* : \mathcal{G} \to \mathcal{GL}(\mathcal{G})$ *که* $\mathrm{Ad}_* = \mathrm{ad}$.

برهان. فرض کنید $X \in \mathcal{G}$ دلخواه باشد، چون $t \mapsto \exp tX$ یک خم هموار در G است که بردار مماس در $t = ۰$، X است، می توان $\mathrm{Ad}_*(X)$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathrm{Ad}_*(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=۰} \mathrm{Ad}(\exp tX)$$

$\mathrm{Ad}_*(X)$ یک عنصر از جبرلی $\mathrm{GL}(\mathcal{G})$ است ؛ در دوطرف معادله بالا می‌توان از عنصر دلخواه $Y \in \mathcal{G}$ استفاده کرد:

$$\mathrm{Ad}_*(X)Y = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=۰} \mathrm{Ad}(\exp tX)\right)Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=۰}\left(\mathrm{Ad}(\exp tX)Y\right).$$

به عنوان یک عنصر $\mathcal{G}$، $\mathrm{Ad}(\exp tX)Y$ یک میدان برداری ناوردای چپ روی G است و لذا توسط مقدار خودش در همانی تعیین می‌شود. با توجه به اینکه:

$$\begin{aligned} C_g(h) = ghg^{-۱} &= R_{g^{-۱}}gh = R_{g^{-۱}}L_gh \\ \Rightarrow C_g &= R_{g^{-۱}}L_g \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$\mathrm{Ad}(g) = (C_g)_* = (R_{g^{-۱}} \circ L_g)_* = (R_{g^{-۱}})_* \circ (L_g)_*,$$

مقدار آن در $e \in G$ می‌تواند بصورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}(\exp tX)Y)_e &= (R_{\exp(-tX)})_*(L_{\exp tX})_*Y_e \\ &= (R_{\exp(-tX)})_*Y_{\exp tX}, \end{aligned}$$

شار X توسط $\theta_t(g) = R_{\exp tX}(g)$ بدست می‌آید بنابراین:

$$(\mathrm{Ad}(\exp tX)Y)_e = (\theta_{-t})_*Y_{\theta_t(e)}$$

حال با مشتقگیری نسبت به t در $t = ۰$ داریم:

$$(\mathrm{Ad}_*(X)Y)_e = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=۰} (\theta_{-t})_*Y_{\theta_t(e)} = (\mathcal{L}_XY)_e = [X, Y]_e.$$

□

۳.۱ عملگر ∇

۱.۳.۱ کانکشن ریمانی

تعریف ۱.۳.۱. یک **متریک ریمانی** روی یک منیفلد هموار یک میدان ۲-تانسوری $g \in \mathcal{J}^{۲}(M)$ است که متقارن $(g(X,Y) = g(Y,X))$ و مثبت $(X \neq ۰ \quad g(X,X) > ۰)$ است. یک متریک ریمانی یک ضرب داخلی روی هر فضای مماس T_pM تعیین می‌کند که برای هر $X, Y \in T_pM$ به صورت

$g(X,Y) := \langle X,Y\rangle_g$ نوشته می‌شود. یک منیفلد با متریک ریمانی،**منیفلد ریمانی** نامیده می‌شود و به صورت زوج (M,g) نوشته می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M و $\mathcal{E}(M)$ فضای برش‌های هموار E و $\mathcal{J}(M)$ فضای میدان‌ای برداری روی M باشد یک کانکشن در E نگاشتی به شکل

$$\nabla : \mathcal{J}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$

۲) $\nabla_X(aY_1+bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$

۳) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

که $\nabla_X Y$ مشتق کوواریان Y در جهت X نامیده می‌شود.

اگر کلاف برداری در تعریف فوق را کلاف مماسی فرض کنیم واضح است که مجموعه برش‌های TM همان میدان‌های برداری هستند و $\mathcal{E}(M) = \mathcal{J}(M)$ لذا نگاشت $\nabla : \mathcal{J}(M) \times \mathcal{J}(M) \to \mathcal{J}(M)$ با ویژگیهای تعریف قبل یک کانکشن خطی روی M می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید g یک متریک ریمانی یا شبه ریمانی روی منیفلد M باشد کانکشن خطی ∇ را **سازگار** با g میگویند هرگاه به ازای میدان‌های برداری Z,Y,X در M داشته باشیم:

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

تعریف ۴.۳.۱. روی منیفلد هموار M مجهز به کانکشن خطی ∇یک میدان تانسوری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\tau : \mathcal{J}(M) \times \mathcal{J}(M) &\to \mathcal{J}(M)\\ (X,Y) &\to \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].\end{aligned}$$

به این میدان تانسوری ، **تانسور تاب** منیفلد M گفته می‌شود.

کانکشن خطی ∇ را متقارن می‌گویند هر گاه تانسور تاب آن صفر شود.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

قضیه ۱.۳.۵. ***قضیه اساسی هندسه ریمانی***

فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی یا شبه ریمانی باشد کانکشن خطی یکتای متقارنی مانند ∇ روی M سازگار با g وجود دارد به این کانکشن، ***کانکشن ریمانی یا کانکشن لوی چویتا*** *گفته می‌شود.*

برهان. فرض کنید ∇ چنین کانکشنی باشد.میدان‌های برداری X و Y و Z را روی منیفلد M در نظر می‌گیریم طبق فرمول سازگاری داریم:

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle,\\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle,\\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

سپس شرط متقارن بودن کانکشن را اعمال کنید:

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle+\langle Y,\nabla_Z X\rangle-\langle Y,\nabla_Z X\rangle\\ &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_Z X\rangle+\langle Y,\nabla_X Z-\nabla_Z X\rangle\\ &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_Z X\rangle+\langle Y,[X,Z]\rangle,\\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle+\langle Z,\nabla_X Y\rangle-\langle Z,\nabla_X Y\rangle\\ &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_X Y\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle,\\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle+\langle X,\nabla_Y Z\rangle-\langle X,\nabla_Y Z\rangle\\ &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Y Z\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle &= ۲\langle Z,\nabla_X Y\rangle+\langle Y,[X,Z]\rangle\\ &\quad+\langle Z,[Y,X]\rangle-\langle X,[Z,Y]\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle Z,\nabla_X Y\rangle &= \frac{۱}{۲}(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\\ &\quad-\langle Z,[Y,X]\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle). \end{aligned} \qquad (۱۱.۱)$$

حال فرض می‌کنیم $\nabla^۱,\nabla^۲$ دو کانکشن متقارن و سازگار با g باشند، چون سمت راست رابطه (۱۲.۱)

مستقل از کانکشن‌هاست بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^1_X Y, Z\rangle - \langle \nabla^2_X Y, Z\rangle &= \langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\rangle = 0\\ &\Rightarrow \nabla^1_X - \nabla^2_X = 0\\ &\Rightarrow \nabla^1_X = \nabla^2_X\\ &\Rightarrow \nabla^1 = \nabla^2.\end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم چنین کانکشنی وجود دارد، فرض می‌کنیم (U, x^i) یک چارت روی M باشد رابطه (۱۲.۱) را روی $X = \partial_i$، $Y = \partial_j$ و $Z = \partial_\ell$ می‌نویسیم:

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_\ell\rangle = \frac{1}{2}\Big(\partial_i\langle \partial_j, \partial_\ell\rangle + \partial_j\langle \partial_\ell, \partial_i\rangle - \partial_\ell\langle \partial_i, \partial_j\rangle\Big). \qquad (۱۲.۱)$$

طبق تعریف متریک ریمانی (شبه‌ریمانی) و کانکشن داریم:

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle,$$

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

لذا رابطه ی (۱۳.۱)به شکل زیر بازنویسی می‌شود :

$$\begin{aligned}\langle \Gamma^k_{ij}\partial_k, \partial_\ell\rangle = \Gamma^k_{ij}\langle \partial_k, \partial_\ell\rangle &= \Gamma^k_{ij}g_{k\ell} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij})\\ &\Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}). \qquad (۱۳.۱)\end{aligned}$$

چون $g_{ij} = g_{ji}$ بنابراین $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. لذا تاب کانکشن صفر و کانکشن متقارن است. حال سازگاری کانکشن با متریک g را ثابت می‌کنیم. برای این کار نشان می‌دهیم $\nabla g = 0$. چون g یک میدان ۲-تانسوری است، بنابراین داریم:

$$g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^\ell_{kj}g_{i\ell} - \Gamma^\ell_{ki}g_{\ell j},$$

هم چنین داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma^\ell_{kj}g_{i\ell} + \Gamma^\ell_{ki}g_{\ell j} &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})\\ &= \partial_k g_{ij},\end{aligned}$$

در نهایت:

$$g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \partial_k g_{ij} = 0.$$

□

لم ۶.۳.۱. *اگر ∇ یک کانکشن خطی روی M باشد، و $F \in \mathcal{J}^k_\ell(M)$ ، Y_iها میدان‌های برداری و ω^iها ۱-فرمها؛ نگاشت :*

$$\nabla F : \underbrace{\mathcal{J}(M) \times \cdots \times \mathcal{J}(M)}_{k\text{-بار}} \times \underbrace{\mathcal{J}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{J}^1(M)}_{\ell\text{-بار}} \to C^\infty(M)$$

بصورت

$$\nabla F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega^1, \cdots, \omega^\ell, X) = \nabla_X F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega^1, \cdots, \omega^\ell),$$

یک $\binom{k+1}{\ell}$-میدان تانسوری تعریف می‌کند.

برهان. [۸] □

میدان تانسوری ∇F **مشتق کوواریان کامل** F نامیده می‌شود. برای مثال ، فرض کنید u یک تابع هموار روی M باشد. سپس $\nabla u \in \mathcal{J}^1(M)$ یک ۱-فرم du است، زیرا هر دو تانسور عمل یکسان روی بردارها دارند:

$$\langle \nabla u, X \rangle = \nabla_X u = Xu = \langle du, X \rangle.$$

قضیه ۷.۳.۱. *برای هر منیفلد هموار M با یک متریک ریمانی g ، یک کانکشن ریمانی یکتای ∇ روی M متناظر با g وجود دارد.*

برهان. [۸] □

تعریف ۸.۳.۱. در تئوری کلاسیک همواره میدانهای برداری پایه‌ای را به صورت $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ نمایش می‌دهند که یک دستگاه مختصات (x, U) در هر نقطه $p \in U$ است، این میدان‌های برداری یک پایه‌ی منظم برای M_p تولید می‌کنند:

$$(X_1(p), \cdots, X_n(p)).$$

در حالت کلی یک پایه‌ی منظم $(V_1, \cdots, V_n)$ برای یک فضای برداری V یک **کنج** در V نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی و $p \in M$ باشد. یک **کنج خطی** در p یک پایه‌ی منظم $\{X_1, \cdots, X_n\}$ از T_pM است. مجموعه تمام کنج‌های خطی در $p \in M$ بصورت $L_p(M)$ و مجموعه تمام کنج‌های خطی روی M به صورت $L(M)$ مشخص می‌شوند و **کلاف کنج خطی** نامیده می‌شود که در فصل بعد بصورت مفصل‌تر به آن می‌پردازیم.

فصل ۲

کانکشن ها در کلاف‌های اصلی

۱.۲ کلاف‌های اصلی

تعریف ۱.۱.۲. یک G- کلاف اصلی یک سه گانه‌ی $(\mathbb{P}, M, \pi)$ است که $\mathbb{P}$ و M منیفلدهای هموارند، $\pi : \mathbb{P} \to M$ یک نگاشت است و $\mathbb{P} \times G \to G$ یک عمل از راست متعدی است که :

۱. $M = \dfrac{\mathbb{P}}{G}$

۲. G بطور آزاد روی $\mathbb{P}$ عمل میکند.

۳. $\mathbb{P}$ موضعا بدیهی است.

۴. π یک سابمرژن هموار است.

می‌گوئیم $\mathbb{P}$ موضعا بدیهی است اگر برای هر $p \in M$ یک مجموعه باز $p \in U_\alpha \subset M$ و یک دیفئومورفیسم

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G,$$

وجود داشته باشد که برای نگاشت هموار $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ داشته باشیم:

$$\phi_\alpha(u) = (\pi(u), g_\alpha(u)).$$

g_α یک اکوواریان نسبت به عمل راست G روی $\mathbb{P}$ است و G روی خودش بوسیله ضرب از راست عمل می‌کند. از طرف دیگر، برای $u \in \mathbb{P}$ و $a \in G$، داریم :

$$g_\alpha(u \cdot a) = g_\alpha(u)a.$$

ما $(\mathbb{P}, M, \pi)$ را بصورت $\mathbb{P} \to M$ یا فقط $\mathbb{P}$ مشخص می‌کنیم و $\mathbb{P}$ را **فضای کامل**، M را **فضای پایه**، و π را **تصویر** و G را **گروه ساختاری** می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۲. در اینجا مثال‌هایی از کلاف‌های اصلی ارائه می‌دهیم؛

۱. **کلاف اصلی بدیهی**

برای یک منیفلد هموار M و گروه لی G، قرار می‌دهیم $\mathbb{P} = M \times G$ و نگاشت تصویر $\pi : \mathbb{P}(= M \times G) \to M$ می‌باشد. یک عمل آزاد راست از G روی $\mathbb{P}$ به صورت

$$R_b(m, a) = (m, a) \cdot b = (m, ab)$$

است که $b \in G$ و $(m, a) \in \mathbb{P} = M \times G$. سه گانه‌ی $(\mathbb{P}, M, \pi)$ که π تصویر بروی عامل اول است، کلاف اصلی روی M است، و **کلاف بدیهی** نامیده می‌شود.

۲. **کلاف کنج**

برای یک منیفلد هموار M و $p \in M$ ، قرار می‌دهیم

$$M_p = \operatorname{span}(X_1, \cdots, X_n),$$

که $(X_1, \cdots, X_n)$ یک پایه منظم از T_pM است، M_p را یک **کنج خطی** در p می‌نامیم. در نهایت قرار می‌دهیم $\mathbb{P} = \coprod_{p \in M} M_p$.

برای $\mathbb{P}$، گروه ماتریس‌های $n \times n$ وارونپذیر $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ را داریم که :

اگر $u \in \mathbb{P}$ و $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ سپس

$$u.a = (Y_1, \cdots, Y_n),$$

که $Y_i = \sum_j A_i^j X_j$ با $a = (A_i^j)$. واضح است که این یک عمل آزاد و متعدی روی هر فضایی از کنج‌ها است. فرض کنید $\pi : \mathbb{P} \to M$ نگاشتی باشد که هر عضو $\mathbb{P}$ را به پایه‌ی $(X_1, \cdots, X_n)$ از T_pM در نقطه‌ی p می‌نگارد. فرض کنید $(U, (x^i))$ یک دستگاه مختصات موضعی روی M باشد، هر کنج خطی $(X_1, \cdots, X_n)$ می‌تواند به صورت

$$X_i = \sum_j X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

نوشته می‌شود که ماتریس $(X_i^j) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ است. تعریف می‌کنیم

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$

به صورت

$$\phi(p, (X_1, \cdots, X_n)) = (p, (X_i^j)) \in U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

که $X_i = \sum_j X_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$. این بیان یکتاست و تضمین می‌کند که ϕ یک دیفئومورفیسم باشد. بنابراین $M \to \mathbb{P}$ یک کلاف اصلی است که **کلاف کنج‌های خطی** با گروه ساختاری $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ نامیده می‌شود.

۳. فرض کنید H یک زیرگروه بسته از گروه لی G باشد، نشان می‌دهیم G یک H-کلاف اصلی با فضای پایه‌ی $M = \dfrac{G}{H}$ می‌باشد.

عمل راست H روی G را به صورت $g \mapsto g \cdot a$ تعریف می‌کنیم که $a \in H$ و $g \in G$. این عمل دیفرانسیل‌پذیر است زیرا G یک گروه لی است. تصویر را به صورت $\pi : G \to M = \dfrac{G}{H}$ تعریف می‌کنیم که نگاشت $\pi : g \mapsto [g]$ و $[g] = \{g \cdot h | h \in H\}$.

بوضوح g و $g \cdot a$ به همان نقطه‌ی $[g]$ نگاشته می‌شوند، بنابراین

$$\pi(g) = \pi(g \cdot a)(= [g])$$

برای تعریف بدیهی‌سازی‌های موضعی، نیاز به تعریف یک نگاشت $f_i : G \to H$ روی هر چارت U_i داریم. فرض کنید s یک برش موضعی روی U_i و $g \in \pi^{-1}([g])$ باشد. f_i را بصورت

$f_i(g) = s([g])^{-1} g$ تعریف می‌کنیم. چون $s([g])$ یک برش است، برای $g \cdot a$ که $a \in H$ خواهیم داشت:

$$s([g])^{-1} g = a^{-1} g^{-1} g = a^{-1} \in H.$$

سپس بدیهی‌سازی موضعی $\phi_i : U_i \times H \to G$ را که $\phi_i^{-1}(g) = ([g], f_i(g))$ تعریف می‌کنیم بوضوح $f_i(g \cdot a) = f_i(g) \cdot a$ که $(a \in H)$ بنابراین $\phi_i^{-1}(g \cdot a) = ([g], f_i(g)a)$.

۲.۲ کلاف‌های وابسته

فرض کنید $M \to \mathbb{P}$ یک کلاف اصلی هموار باشد و F یک منیفلد هموار باشد که یک عمل چپ توسط G میپذیرد. برای ضرب $\mathbb{P} \times F$ یک عمل راست

$$(\mathbb{P} \times F) \times G \to \mathbb{P} \times F$$

تعریف می‌کنیم که

$$(u, f) \cdot a = (u \cdot a\,, a^{-1} \cdot f).$$

در ادامه می‌توانیم $(\mathbb{P} \times F)/G$ را بصورت $\mathbb{P} \times_G F$ با توپولوژی خارج قسمتی مشخص کنیم. فرض کنید

$$q : \mathbb{P} \times F \to \mathbb{P} \times_G F$$

نگاشت خارج قسمتی باشد.

تصویر روی فاکتور اول را به صورت $p_1 : \mathbb{P} \times F \to \mathbb{P}$ در نظر می‌گیریم و نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\pi} : \mathbb{P} \times_G F \to M$$

چنانکه $\tilde{\pi}([p.f]) = p$ ، که $[p,f]$ یک نقطه از $\mathbb{P} \times_G F$ را مشخص می‌کند. کار بعدی ما ساخت بدیهی‌سازی‌های موضعی این کلاف است. فرض کنید $U \subset M$ یک مجموعه باز بدیهی برای $\mathbb{P} \to M$ باشد ($\mathbb{P} = M \times G$) و

$$g : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

یک بدیهی‌سازی موضعی برای کلاف بدیهی باشد. برای برش $s : U \to \pi^{-1}(U)$ که $s(p) = g^{-1}(p,e)$. نگاشت همئومورفیسم ψ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi : U \times F \to \tilde{\pi}^{-1}(U)$$

که $\psi(p,f) = [s(p),f]$ به طوری که

$$\tilde{\pi}([s(p),f]) = \tilde{\pi} \circ q(s(p),f) = \pi \circ p_1(s(p),f) = p,$$

لازم به ذکر است که تساوی بالا با توجه به نمودار زیر برقرار است :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \times F \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{P} \times_G F \arrow[r, "\tilde{\pi}"'] & M
\end{tikzcd}$$

ψ یک دیفئومورفیسم و ψ^{-1} بدیهی‌سازی موضعی مورد نظر می‌باشد . توجه کنید که

$$\psi|_{p \times F} : p \times F \to \tilde{\pi}^{-1}(p)$$

یک دیفئومورفیسم است و لذا $\mathbb{P} \times_G F \to M$ تارهای دیفئومورف با F دارد یعنی $\tilde{\pi}^{-1}(p) = [p,f]$ طوریکه $f \in F$. در نهایت یک عمل چپ بدیهی G روی تارهای $\mathbb{P} \times_G F$ وجود دارد که

$$(g,[p,f]) \mapsto [p, g \cdot f].$$

ما کلاف تاری $\mathbb{P} \times_G F \to M$ را **کلاف تاری وابسته به $\mathbb{P}$ با تار F** می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۲. در اینجا دو مثال مطرح می‌کنیم، ابتدا کلاف برداری مربوط به یک کلاف اصلی و سپس یک حالت خاص از کلاف برداری ، کلاف الحاقی ، که در ادامه فصل مهم خواهد بود.

۱. **کلاف‌های برداری**

فرض کنید $\mathbb{P} \to M$ یک کلاف اصلی با گروه ساختاری G باشد و V هر فضای برداری با بعد متناهی باشد که G روی آن از چپ عمل می‌کند، نگاشت هموار زیر

$$\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut(V)} \subset \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^* = \mathrm{End(V)}$$

یک نمایش خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V است، کلاف وابسته‌ی $\mathbb{P} \times_G V$ یک **کلاف برداری** با تار V است که فضای کامل کلاف، $\mathbb{P} \times V$ و یک عمل راست G روی $\mathbb{P} \times V$ به صورت:

$$(p, \mathrm{v}) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})\mathrm{v})$$

می‌باشد.

یک کلاف برداری حقیقی شامل:

۱) فضای توپولوژیک M (فضای پایه) و $\mathbb{P}$ (فضای کامل)

۲) نگاشت هموار $\pi : \mathbb{P} \to M$ (تصویر کلاف)

۳) برای هر $p \in M$ ، ساختار یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی روی تار $\pi^{-1}(\{p\})$

است که برای هر نقطه در M، یک همسایگی باز U و یک عدد طبیعی k و یک همئومورفیسم

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

وجود دارد که برای همه $p \in U$:

- برای همه $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ داریم: $(\pi \circ \psi)(p, \mathrm{v}) = p$
- نگاشت $\mathrm{v} \mapsto \psi(p, \mathrm{v})$ یک ایزومورفیسم بین فضاهای برداری $\mathbb{R}^k$ و $\pi^{-1}(\{p\})$ است. همسایگی باز U با همئومورفیسم ψ یک بدیهی‌سازی موضعی از کلاف برداری نامیده می‌شود.

۲. **کلاف الحاقی**

فرض کنید G یک گروه لی با جبرلی $\mathcal{G}$ و $\mathbb{P} \to M$ یک کلاف اصلی باشد، فرض کنید

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{G})$$

یک نمایش الحاقی از G باشد **کلاف الحاقی** از $\mathbb{P}$ یک کلاف وابسته

$$\mathrm{Ad}_{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \times_{\mathrm{Ad}} \mathcal{G}$$

است. عناصر کلاف الحاقی کلاسهای هم ارزی از زوج های $[p,x]$ هستند که $p \in \mathbb{P}$ و $x \in \mathcal{G}$ به طوری که برای همه $g \in G$ داریم:

$$[p,x] = [p \cdot g, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)].$$

۳.۲ کلاف‌های پس کشنده

فرض کنید $\pi : \mathbb{P} \to M$ کلاف تاری با تار F و $f : N \to M$ یک نگاشت پیوسته باشد، **کلاف پس کشنده** را بصورت

$$f^*\mathbb{P} := \{(n,u) \in N \times \mathbb{P} | f(N) = \pi(u)\} \subset N \times \mathbb{P}$$

تعریف می‌کنیم و آنرا با زیرفضای توپولوژیکی و نگاشت تصویر $\pi' : f^*\mathbb{P} \to N$ مجهز می‌کنیم که تصویر بروی عامل اول به صورت

$$\pi'(n,u) = n$$

است. تصویر بروی عامل دوم نگاشت $\tilde{f} : f^*\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ را به ما می‌دهد به طوری که:

$$\begin{tikzcd} f^*\mathbb{P} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathbb{P} \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

اگر (U,φ) یک بدیهی‌سازی موضعی از $\mathbb{P}$ باشد $(\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G)$ و $(f^{-1}U, \psi)$ یک بدیهی‌سازی موضعی $(\psi : \pi'^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times G)$ از $f^*\mathbb{P}$ باشد که

$$\psi(n,u) = (n, \mathrm{proj}_2(\varphi(u)))$$

$f^*\mathbb{P}$ یک کلاف تاری روی N با تار F است. کلاف $f^*\mathbb{P}$، پس کشنده‌ی $\mathbb{P}$ توسط f نامیده می‌شود.

هر برش s از $\mathbb{P}$ روی M یک برش از $f^*\mathbb{P}$ القا می‌کند که برش پس کشنده‌ی f^*s نامیده می‌شود؛ به سادگی

$$f^*s = s \circ f.$$

اگر کلاف $\mathbb{P} \to M$ دارای گروه ساختاری G با توابع انتقال t_{ij} (نسبت به یک خانواده از بدیهی‌سازی‌های موضعی $\{(U_i, \varphi_i)\}$) باشد سپس کلاف پس کشنده‌ی $f^*\mathbb{P}$ نیز دارای گروه ساختاری G است. توابع انتقال در $f^*\mathbb{P}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f^*t_{ij} = t_{ij} \circ f.$$

توجه کنید که $(\pi_*)|_{T_u\mathbb{P}^h}$ یک ایزومورفیسم بروی $T_{\pi(u)}M$ است و یک کانکشن روی یک کلاف اصلی $\mathbb{P} \to M$ در هر $u \in \mathbb{P}$ تصاویر زیر را می‌دهد

$$T_u\mathbb{P} \to T_u\mathbb{P}^v, \qquad T_u\mathbb{P} \to T_u\mathbb{P}^h.$$

برای X که یک میدان برداری هموار روی $\mathbb{P}$ است، ما مولفه‌های افقی و عمودی X را توسط X^h و X^v مشخص می‌کنیم. همواری توزیع تضمین می‌کند که X^h و X^v میدان‌های برداری هموار هستند. در ادامه این بخش یک روش مناسبتر برای تعریف کانکشن روی یک کلاف اصلی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۲. برای یک گروه لی G با جبرلی $\mathcal{G}$ ، یک ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار ω_G برای هر $v \in T_gG$ به صورت

$$\omega_G(v) = (L_{g^{-1}})_*(v)$$

است . ω_G یک **۱-فرم ناوردای چپ استاندارد** روی G یا **فرم مورر- کارتان** نامیده می‌شود. همچنین ω_G یک فرم $\mathcal{G}$-مقدار است و لذا می‌تواند یک برش از کلاف

$$T^*(G) \otimes \mathcal{G}$$

درنظر گرفته شود.

از طرف دیگر $\omega_G \in \Omega^1(G;\mathcal{G})$ است. ما می‌توانیم ω_G را در شرایط یک پایه روی $\mathcal{G}$ و کنج ناوردای چپ استاندارد برای $\Omega^1(G)$، بنویسیم که در ادامه به آن می‌پردازیم. فرض کنید $(E_1, \cdots, E_n)$ یک پایه برای $\mathcal{G}$ باشد و $(X_1, \cdots, X_n)$ میدان‌های برداری ناوردای چپ متناظر روی G باشند. برای هر $g \in G$ ، فرض کنید ω^i ۱-فرم دوگان از X^i باشد که

$$\omega^i(X_j) = \delta^i_j.$$

ω^i ها هموار هستند و می‌توان نوشت

$$\omega_G = \sum_i \delta^j_i \omega^i \otimes E_j.$$

از طرفی یک کانکشن ۱-فرم روی $\mathbb{P}$ یک، ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار $\omega_p : T_p\mathbb{P} \to \mathcal{G}$ است $(\omega \in \Omega^1(\mathbb{P};\mathcal{G}))$ که برای هر $v \in T_p\mathbb{P}$:

$$\omega_p(v) = \begin{cases} v & v \in T_p\mathbb{P}^v \\ 0 & v \in T_p\mathbb{P}^h \end{cases} \tag{۱.۲}$$

بنابراین $\ker(\omega_p) = T_p\mathbb{P}^h$.

لم ۲.۴.۳. *یک کانکشن روی یک کلاف اصلی هموار $\mathbb{P} \to M$ با یک ۱-فرم دیفرانسیلی $\omega \in \Omega^1(\mathbb{P}) \otimes \mathcal{G}$ که دارای ویژگی‌های زیر است؛ هم ارز است:*

۱. *تحت ضرب از راست توسط G ، فرم ω به نمایش الحاقی G روی $\mathcal{G}$ تبدیل می‌شود به طوری که*
$$\omega_{pg}((R_g)_*(v)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega_p(v))$$
برای هر $p \in \mathbb{P}$ و $g \in G$.

۲. *برای هر $p \in \mathbb{P}$ و $v \in T_p\mathbb{P}$، فرض کنید ایمبدینگ $R_p : G \to \mathbb{P}$ بصورت زیر داده شده است*
$$R_p(g) = p \cdot g$$
سپس
$$(R_p)^*(\omega) = \omega_G.$$

برهان. فرض کنید $\omega \in \Omega^1(\mathbb{P}; \mathcal{G})$ در شرایط (۱) و (۲) بالا صدق می‌کند. برای هر $p \in \mathbb{P}$ ، ω_p یک نگاشت خطی $\omega_p : T_p\mathbb{P} \to \mathcal{G}$ است . برای $T_p\mathbb{P}^h = \ker(\omega_p)$ ، توجه کنید که ω_p پوشاست ولذا $\dim(T_p\mathbb{P}^h) = \dim\mathbb{P} - \dim G = \dim M$. مجموعه $\coprod_{p\in\mathbb{P}} T_p\mathbb{P}^h = T\mathbb{P}^h$ هسته‌ی یک فرم هموار روی $\mathbb{P}$ است ، لذا یک توزیع روی $\mathbb{P}$ تشکیل می‌دهد. با محدود کردن تصویر ایمبدینگ $R_p : G \to \mathbb{P}$ به فایبر $\pi^{-1}(\pi(p))$ ، یک دیفئومورفیسم
$$R_p : G \to \pi^{-1}(\pi(p))$$
بدست می‌آوریم که یک ایزومورفیسم
$$(R_p)_* : \mathcal{G} \to T_p(\pi^{-1}(\pi(p))) = T_p\mathbb{P}^v$$
را نتیجه می‌دهد.

برای هر بردار عمودی V یک $v \in \mathcal{G}$ وجود دارد که $(R_p)_*(v) = V$، نتیجه می‌شود که
$$\omega(V) = \omega((R_p)_*(v)) = \omega_G(v) = v.$$
بنابراین $\omega|_{T_p\mathbb{P}^v} = (R_p)_*^{-1}$ و $\omega|_{V_p}$ یک ایزومورفیسم است. لذا
$$T_p\mathbb{P} = T_p\mathbb{P}^h \oplus T_p\mathbb{P}^v$$
و همچنین π_* یک ایزومورفیسم روی $T_p\mathbb{P}^h$ است.

ادعا می‌کنیم که $T\mathbb{P}^h$ تحت ضرب از راست بوسیله G، ناورداست. برای فهمیدن آن $V \in T_p\mathbb{P}^h$ ($\omega_p(V) = 0$) انتخاب می‌کنیم. بوسیله (۱)
$$\omega_{pg}((R_g)_*(V)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega_p(V)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(0) = 0$$

بنابراین

$$(R_g)_*(T_p\mathbb{P}^h) \subset T_{p.g}\mathbb{P}^h,$$

و از اینکه $(R_g)_*$ یک دیفئومورفیسم است می‌توان نوشت $(R_g)_*(T_p\mathbb{P}^h) = T_{p.g}\mathbb{P}^h$. بنابراین یک ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار به یک توزیع ارتقا پیدا می‌کند. توجه کنید همچنین ω می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$T_p\mathbb{P} \to T_p\mathbb{P}^v \to \mathcal{G},$$

که

$$X \to X^v \to (R_p)_*^{-1}(X^v).$$

اکنون فرض می‌کنیم کانکشن روی $\mathbb{P}$ داده شده است. $\omega \in \Omega^1(\mathbb{P};\mathcal{G})$ را طوری تعریف می‌کنیم که:

$$T_p\mathbb{P} \to T_p\mathbb{P}^v \to \mathcal{G}$$

که یک بردار عمودی X را به $(R_p)_*^{-1}(X^v)$ می‌نگارد.

ادعا می‌کنیم که ω هموار است. برای فهمیدن این موضوع توجه کنید که نگاشت $T_p\mathbb{P} \to T_p\mathbb{P}^v$ هموار است زیرا کانکشن یک توزیع هموار است. فرض کنید

$$\sigma : \mathbb{P} \times G \to \mathbb{P}$$

عمل G روی $\mathbb{P}$ را بصورت $(p,g) \mapsto p.g$ مشخص می‌کند. سپس

$$\sigma_* : T\mathbb{P} \times TG \to T\mathbb{P}$$

بصورت $\sigma_*(p,g)(X,Y) = (R_p)_*(Y) + (R_g)_*(X)$ ، یک نگاشت هموار است. چون نگاشت شمول

$$\mathbb{P} \times \mathcal{G} \hookrightarrow T\mathbb{P} \times TG$$

بصورت $(p,v) \mapsto (\cdot_p, v_e)$ هموار است و بنابراین ترکیب

$$\mathbb{P} \times \mathcal{G} \to T_p\mathbb{P}^v \subset T\mathbb{P}$$

بصورت $(p,v) \mapsto (R_p)_*(v)$ هموار است.

دو زیرکلاف از $T\mathbb{P}$ یعنی $T\mathbb{P}^v$ و $T\mathbb{P}^h$ وجود دارند که مولفه های عمودی و افقی از $T\mathbb{P}$ هستند. همواری نگاشت $(p,v) \mapsto (R_p)_*(v)$ ایجاب می‌کند که نگاشت

$$p \mapsto (R_p)_* \in \mathcal{G}^* \otimes T\mathbb{P}^v$$

هموار باشد ، سپس نگاشت

$$p \mapsto (R_p)_*^{-1} \in (T\mathbb{P}^v)^* \otimes \mathcal{G}$$

هموار است چون وارونه کردن مختصات توسط ماتریس‌های وارون یک عمل هموار است.

ω یک ترکیب از نگاشتهای هموار است . اکنون باید نشان دهیم ω در (۱) و (۲) صدق می‌کند. در پایان، اگر $p \in \mathbb{P}$ و $a, g \in G$ سپس

$$R_{p\cdot g}(a) = p \cdot g \cdot a = R_p \circ L_g(a)$$

و

$$R_p \circ R_g = R_g \circ R_p.$$

برای $p \in \mathbb{P}$ و $g \in G$ ثابت کردیم، سپس برای $v \in T_p\mathbb{P}$ ثابت می‌کنیم. با توجه به روابط بالا ، رابطه زیر را بدست می‌آوریم .

$$\omega_{p\cdot g}((R_g)_*(v)) = (R_{p\cdot g})_*^{-۱}((R_g)_*(v)).$$

نتیجه می‌شود که

$$(L_{g^{-۱}})_* \circ (R_p)_*^{-۱} \circ (R_g)_*(v) = (L_{g^{-۱}})_* \circ (R_g)_* \circ (R_p)_*^{-۱}(v)$$

و

$$\mathrm{Ad}(g^{-۱}) = (L_{g^{-۱}} \circ R_g)_* : \mathcal{G} \to \mathcal{G}.$$

بنابراین ویژگی (۱) برقرار می‌شود.

اکنون به اثبات ویژگی (۲) می‌پردازیم، برای $a \in G$ و $v \in T_aG$ ،

$$\begin{aligned}
R_p^*\omega(v) &= \omega_{p.a}((R_p)_*(v)) \\
&= (R_{p.a})_*^{-۱} \circ (R_p)_*(v) \\
&= (L_{a^{-۱}})_* \circ (R_p)_*^{-۱} \circ (R_p)_*(v) \\
&= (L_{a^{-۱}})_*(v) \\
&= \omega_G(v)
\end{aligned}$$

لذا ویژگی (۲) نیز اثبات می‌شود.

□

۵.۲ مشتق کوواریان

فرض کنید $\mathbb{P} \to M$ یک کلاف اصلی با کانکشن ۱-فرم ω باشد و $E = \mathbb{P} \times_G V$ یک کلاف برداری وابسته به $\mathbb{P}$ باشد که نگاشت هموار $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ را نتیجه می‌دهد. تعریف می‌کنیم

$$\nabla^\omega : \Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E)$$

به طوری که برای $\sigma \in \Omega(M; E)$، یک برش از E، می‌نویسیم $\sigma(m) = [p(m), v(m)]$ که $p : M \to \mathbb{P}$ یک برش است و $v : M \to V$ یک نگاشت هموار است. فرض کنید $x \in T_m M$. سپس فرمول بصورت زیر است:

$$\nabla^\omega(\sigma)(m)(x) = [p(m), \omega_m(p_*(x))(v(m)) + v_*(x)]$$

به توصیف فرمول بالا می‌پردازیم، داریم $\nabla^\omega(\sigma) \in \Omega^1(M, E)$ ، لذا در واقع $\nabla^\omega(\sigma(m))$ باید یک بردار مماس x را بگیرد و یک عنصر از E را تحویل دهد. معمولا بجای $\nabla^\omega(\sigma)(m)(x)$ می‌نویسیم $\nabla^\omega_x(\sigma)(m)$ و آن را **مشتق کوواریان** σ در جهت x در نظر می‌گیریم.

برای مشتق کوواریان σ ، عبارت $\omega_m(p_*(x))(v(m))$ را داریم که $\omega_m(p_*(x))$ یک عنصر از $\mathcal{G}$ است به طوریکه نمایش G روی V به صورت $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ یک نگاشت هموار است، پیش برنده‌ی ρ در عنصر همانی نگاشت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\rho_* : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(V).$$

برای یک عنصر $\omega \in \mathcal{G}$، تصویرش بصورت $\rho_*(\omega) \in \mathrm{End}(V)$ خواهد بود. میتوان $\omega_m(p_*(x))$ را در $v(m)$ ارزیابی کرده و یک عنصر از V را بدست آورد. لازم است نشان داده شود که تعریف ما از مشتق کوواریان در قانون لایپ نیتز برای دیفرانسیل صدق می‌کند، یعنی اگر $f \in C^\infty(M)$ سپس

$$\nabla^\omega_x(f\sigma) = f\nabla^\omega_x(\sigma) + df \otimes \sigma.$$

بدین صورت شروع می‌کنیم که $\sigma(m) = [p(m), v(m)]$ لذا $f\sigma(m) = [p(m), f(m)v(m)]$. بنابراین

$$\nabla^\omega_x(f\sigma)(m) = [p(m), \omega_{p(m)}(p_*(x))(f(m)v(m)) + ((fv)_*)_m(x)]$$

اگرچه $((fv)_*)_m(x) = df_m(x)v(m) + f(m)(v_*)_m(x)$ ولذا

$$\begin{aligned}\nabla^\omega_x(f\sigma)(m) &= [p(m), f(m)\omega_{p(m)}(p_*(x)) + df_m(x)v(m) + f(m)(v_*)_m(x)] \\ &= f(m)\nabla^\omega_x(\sigma)(m) + df_m(x)\sigma(m),\end{aligned}$$

بنابراین

$$\nabla^\omega_x(f\sigma) = f\nabla^\omega_x(\sigma) + df \otimes \sigma.$$

فصل ۳

کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی

۱.۳ کانکشن های جزئی

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید گروه لی G بطور پیوسته روی منیفلد M عمل کند. فرض کنید $L_g : M \to M$ و $R_m : G \to M$ بصورت زیر باشند:

$$R_m(g) := L_g(m) := g \cdot m$$

و $\xi \in \mathcal{G} = T_eG$، ξ_M میدان برداری $\xi_M(m) = dR_m\xi$ را مشخص می‌کند که **مولد بینهایت کوچک** وابسته به ξ نامیده می‌شود.

همانطور که در فصل قبل هم به گونه ای اشاره شد؛ یک کانکشن روی یک کلاف اصلی $\mathbb{P}$ یک دستگاه دیفرانسیلی است که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$T\mathbb{P} = V \oplus \Gamma, \qquad dL_g \cdot \Gamma_p = \Gamma_{g \cdot p},$$

برای همه $p \in \mathbb{P}$ و $g \in G$.

در اینجا V دستگاه دیفرانسیلی از فضاهای مماس به مدارات گروه تعیین می‌کند که:

$$\mathrm{V}|_\mathrm{p} = \mathrm{T_p(G \cdot p)} = \mathrm{range}\ \mathrm{d_eR_p}.$$

توجه کنید که کانکشن Γ یک ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار اکوواریان ω تعیین می‌کند که **کانکشن فرم** نامیده می‌شود و برای همه $\xi \in \mathcal{G}$ داریم:

$$\omega \circ d_eR_p = id, \qquad i.e. \qquad \omega_p(\xi_p(p)) = \xi,$$

و برای همه $p \in \mathbb{P}$؛ $\omega_p = \omega|T_p\mathbb{P}$، تحدید ω به تار روی $\mathbb{P}$.

در فصل قبل نشان دادیم که برای همه $g \in G$، $\omega \circ dL_g = \mathrm{Ad}_g \circ \omega$. کانکشن Γ و کانکشن فرم ω بصورت $\ker\omega = \Gamma$ ، $\ker\omega_p = \Gamma|_p$ برای همه $p \in \mathbb{P}$ به هم مرتبط هستند.

زیرگروه $G_m = \{g \in G : g \cdot m = m\}$ زیرگروه ایزوتروپی نقطه‌ی m و جبر آن بصورت $\mathcal{G}_m := \ker[d_eR_m]$ است، و فضای مماس $V_m := \mathrm{range}[d_eR_m]$ می‌باشد.

گزاره ۲.۱.۳. *یک ۱-فرم-$\mathcal{G}$-مقدار ω داده شده است، نگاشت $\mathbb{P}_\omega := dR\circ\omega : TM \to V$ که $\mathbb{P}_\omega|T_mM = dR_m \circ \omega_m$ و $V := \bigcup V_m$ را تعریف می‌کنیم. $\mathbb{P}_\omega$ یک تصویر اکوواریان بروی V است اگر و تنها اگر $\omega(\eta_M(m)) = \eta$ به پیمانه‌ی $\mathcal{G}_m$ که برای همه $m \in M$:*

$$\mathrm{range}\ (\mathbb{I} - \omega \circ d_eR_m) \subseteq \mathcal{G}_m \tag{۱.۳}$$

و ω اکوواریان به پیمانه ایزوتروپی است که برای همه $g \in G$ و $m \in M$:

$$L_g^* \circ \omega_m = \mathrm{Ad}_g \circ \omega_m \qquad \mathrm{mod} \qquad \mathcal{G}_{g.m}. \tag{۲.۳}$$

هر ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار که در رابطه (۱.۳) صدق می‌کند در نقاط تکین M ناپیوسته است.

برهان. [۲] □

تعریف ۳.۱.۳. اگر (M,g) و $(\tilde{M},\tilde{g})$ منیفلدهای ریمانی باشند، یک دیفئومورفیسم $\varphi:(M,g)\to(\tilde{M},\tilde{g})$ یک **ایزومتری** نامیده می‌شود اگر $g=\varphi^*\tilde{g}$. (M,g) و $(\tilde{M},\tilde{g})$ ایزومتریک هستند اگر بین آنها یک ایزومتری وجود داشته باشد.

ترکیب ایزومتری‌ها و وارون یک ایزومتری، ایزومتری است لذا مجموعه‌ی ایزومتری‌های M یک گروه است که گروه ایزومتری M نامیده می‌شود.

فرض کنید M یک منیفلد ریمانی و G یک زیرگروه از گروه ایزومتری‌های (موضعی) M باشد. مولفه متعامد $V^{\perp}$ نسبت به V در TM نمونه اولیه از یک کانکشن جزئی است. توجه کنید که $V^{\perp}=\ker\mu$.

اگر G بطور آزاد و سره عمل کند و M یک کلاف اصلی باشد، کانکشن فرم وابسته بعنوان یک **کانکشن فرم مکانیکی ساده** شناخته می‌شود و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mu(v).\xi:=\langle v,\xi_M(m)\rangle_m,$$

که در آن μ یک، ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار اکوواریان و $v\in T_mM$ است.

فرم μ نگاشت اندازه حرکت وابسته به عمل G و لاگرانژی $L(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2$ است. **تانسور لختی قفل شده‌ی** $\chi:M\to\mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ بصورت زیر مفروض است:

$$(\chi(m)\xi).\eta=\langle\xi_M(m),\eta_M(m)\rangle_m.$$

تانسور لختی قفل شده دقیقا در نقاطی با ایزوتروپی پیوسته ، تکین است. بنابراین اگر M یک کلاف اصلی باشد، $\chi(m)$ برای همه mها وارون‌پذیر است و $\omega_m=\chi(m)^{-1}\circ\mu_m$ ، کانکشن فرم مکانیکی ساده است.

بخاطر بسپارید که ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار ω ،بوسیله ی ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار μ و نگاشت مربوطه χ تعریف می‌شود، بنابراین فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار نسبت به فرم$\mathcal{G}$-مقدار پیوندی مستقیم تر به عمل‌گروه و هندسه دارد.در یک نقطه m با ایزوتروپی پیوسته، رابطه $\chi(m)(\omega_m)=\mu_m$، منحصرا ω_m را تعیین نمی‌کند اما هر ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار که در $\mu=\chi(\omega)$ صدق می‌کند در رابطه $V^{\perp}|_m=\omega_m^{-1}(\mathcal{G}_m)$ صدق خواهد کرد از اینرو یک کانکشن فرم تعمیم یافته را توصیف خواهد کرد. در برخی مواقع بهتر است با نگاشت‌های μ و χ کار کنیم زیرا هر دو هموارند در حالی که ω درنقاطی که پرشهایی در ایزوتروپی وجود دارد، دارای تکین‌هایی خواهد بود. برای درک بهتر مطالب فوق به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴.۱.۳. عمل $SO(3)$ روی $\mathbb{R}^3$

موقعیت توصیف شده در بالا را به حالت خاص $M = \mathbb{R}^3$ و $G = SO(3)$، گروه دوران‌های $\mathbb{R}^3$ اختصاص می‌دهیم. این عمل آزاد نیست:

هر بردار غیر صفر m توسط یک دایره از دوران‌ها حول m ثابت شده است در حالی که مبدا توسط گروه $SO(3)$ ثابت شده است. گروه مداری $G.m$ از m، کره‌ای با شعاع $\|m\|$ است که در مبدا متمرکز شده است؛ $V|_m = \{\xi \times m : \xi \in \mathbb{R}^3\}$ فضای دوران‌های بینهایت کوچک m است. مولفه‌های متعامد نسبت به V به صورت زیر است:

$$V^\perp|_m = \begin{cases} \text{span}[m] & m \neq 0 \\ \mathbb{R}^3 & m = 0 \end{cases}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای می‌تواند بعنوان یک ۱-فرم-$so(3)^*$ ، $\mu(v) = m \times v$ برای هر $v \in T_m\mathbb{R}^3$ با $\ker\mu = V^\perp$ مورد توجه قرار گیرد. در حالت کلی‌تر هر تابع هموار $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که روی $\mathbb{R}^+$، اکیدا مثبت است، داده شده است:

$$\mu^q(v) := q(\|m\|^2) m \times v, \tag{۳.۳}$$

برای همه $v \in T_mM$؛ همچنین $\ker\mu^q = V^\perp$.

تانسورهای لختی وابسته $\chi^q(m) := \mu^q \, o \, d_eR_m \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ که:

$$\chi^q(m)\xi = \begin{cases} q(\|m\|^2)\|m\|^2 \mathbb{P}_\perp \xi & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

که $\mathbb{P}_\perp T_mM$ تصویر متعامد بروی $\text{span}[m]^\perp$ را تعیین می‌کند. هر تابع هموار $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ یک ۱-فرم $\mathbb{R}^3$-مقدار

$$\omega(v) = \begin{cases} \|m\|^{-2} m \times v + f(m)\langle m, v\rangle m & v \in T_m\mathbb{R}^3 \quad m \neq 0 \\ 0 & v \in T_0\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{۴.۳}$$

تعیین می‌کند که در چرخش، یک تصویر اکوواریان $\mathbb{P}_\omega$ با هسته‌ی $\ker\mathbb{P}_\omega = V^\perp$ مشخص می‌کند. توجه کنید که ω در مبدا برای هر f ناپیوسته است درحالی که اندازه حرکت زاویه‌ای تعمیم یافته‌ی $\mu^q = \chi^q(\omega)$ همه جا هموار است.

گزاره ۵.۱.۳. *هر ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار اکوواریان μ در رابطه $TM = V \oplus \ker\mu$ صدق می‌کند اگر وتنها اگر نگاشت اکوواریان وابسته $\chi : M \to \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ که به صورت زیر است:*

$$\chi(m) := \mu \circ d_eR_m, \tag{۵.۳}$$

برای همه $m \in M$ در روابط زیر صدق کند،

$$\ker\chi(m) = \mathcal{G}_m \quad , \quad \mathrm{range}(\chi(m)) = \mathrm{range}\mu_m. \tag{۶.۳}$$

برای هر $m \in M$ ، میتوانیم ایزومورفیسم $\gamma(m) := \mathrm{range}(\chi(m)) \to V$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\gamma(m)(\nu) = \xi_M(m) \tag{۷.۳}$$

برای هر $\xi \in \mathcal{G}$ صادق در $\nu = \chi(m)(\xi)$ و تصویر اکوواریان $\mathbb{P}_\mu := \gamma \circ \mu : TM \to V$.

برهان. اکوواریانی μ ایجاب می‌کند که $\ker\mu_{g\cdot m} = dL_g(\ker\mu_m)$ و برای همه $m \in M$ و $g \in G$:

$$\chi(g \cdot m) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ \chi(m) \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$$

اگر μ در $TM = V \oplus \ker\mu$ صدق کند،

$$\ker\chi(m) = \ker\mu \circ d_eR_m = \ker d_eR_m = \mathcal{G}_m$$

و برای همه $m \in M$ داریم:

$$\mathrm{range}\mu_m = \mathrm{range}(\mu|V)|_m = \mathrm{range}\chi(m).$$

از طرف دیگر اگر χ مفروض در (۵.۳)، در(۶.۳)صدق کند ، شرط $\ker\chi(m) = \mathcal{G}_m$ ایجاب می‌کند که $\mu|_V$ یک به یک باشد، درحالی که $\mathrm{range}\chi(m) = \mathrm{range}\mu_m$ ایجاب می‌کند که برای هر $m \in M$ و $v \in T_mM$، $\xi \in \mathcal{G}$ وجود دارد که :

$$\begin{aligned}
0 &= \mu(v) - \chi(m)(\xi) = \mu(v) - \mu(d_eR_m(\xi))\\
&= \mu(v) - \mu(\xi_M(m)) = \mu(v - \xi_M(m))\\
&\Rightarrow \quad v - \xi_M(m) \in \ker\mu\\
&\Rightarrow \quad TM \subseteq V + \ker\mu
\end{aligned}$$

می‌دانیم $(V + \ker\mu) \subseteq TM$ و $V \cap \ker\mu = \{0\}$ بنابراین $TM = V \oplus \ker\mu$.

نگاشت γ خوش‌تعریف است، چون $\ker\chi(m) = \ker d_eR_m$ و اکوواریان است. اکوواریانی $\mathbb{P}_\mu$ از اکوواریانی μ پیروی می‌کند. برای هر $m \in M$،

$$\mathbb{P}_\mu \circ d_eR_m = \gamma(m) \circ \mu \circ d_eR_m = \gamma(m) \circ \chi(m) = d_eR_m,$$

لذا $\mathbb{P}_\mu|_V = \mathbb{I}$. از اینکه $\mathbb{P}_\mu|\ker\mu = 0$ و $TM = V \oplus \ker\mu$؛ $\mathbb{P}_\mu$ یک تصویر بروی V است.

□

تعریف ۶.۱.۳. یک **کانکشن جزئی اکوواریان** یک دستگاه دیفرانسیلی اکوواریان Γ است که:

$$TM = V \oplus \Gamma$$

که Γ هموار است و نیز برای هر ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار هموار μ، $\Gamma = \ker\mu$.

یک **کانکشن فرم دوگان اکوواریان**، یک، ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار اکوواریان هموار μ روی M است که برای همه $m \in M$:

$$T_mM = V \oplus \ker\mu_m.$$

فرض کنید γ_m وارون چپ μ_m را مشخص می‌کند به طوری که:

$$\gamma_m \circ \mu_m|_{V_m} = id,$$

$\mathbb{P}_\mu := \gamma \circ \mu : TM \to V$ یک **تصویر اکوواریان** است.

یک **کانکشن فرم جزئی اکوواریان** یک ،۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار ω روی M است که نگاشت $\mathbb{P}_\omega = dR \circ \omega$ یک تصویر اکوواریان بروی V است و $\Gamma := \ker\mathbb{P}_\omega$ یک کانکشن جزئی اکوواریان تعیین می‌کند.

یک **فاکتور لختی اکوواریان**، یک نگاشت اکوواریان $\chi : M \to \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ است که برای همه $m \in M$، $\ker\chi(m) = V|_m$.

از این به بعد صفت اکوواریان را حذف می‌کنیم و برای راحتی از کانکشن جزئی، کانکشن فرمهای دوگان و... استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر M دارای بعد متناهی، m یک نقطه منظم از M و Γ یک کانکشن جزئی باشد سپس یک همسایگی $\mathcal{U}$ از m هست که $\Gamma|_\mathcal{U}$ یک دستگاه دیفرانسیلی هموار است.(۱-فرم هموار μ وجود دارد که $\Gamma = \ker\mu$؛ رتبه μ و لذا بعد Γ روی یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از یک نقطه منظم، ثابت است.)

قضیه ۷.۱.۳. ۱. *یک کانکشن فرم دوگان μ؛ یک کانکشن جزئی $\Gamma = \ker\mu$ و یک فاکتور لختی $\chi = \mu \circ d_eR$ تعیین میکند.*

۲. *یک دستگاه دیفرانسیلی اکوواریان Γ که در رابطه‌ی $TM = V \oplus \Gamma$ صدق می‌کند، یک کانکشن جزئی است اگر فاکتور لختی χ موجود باشد به طوری که ۱-فرم $\mathcal{G}^*$-مقدار اکوواریان μ مفروض است بدین صورت که برای همه $m \in M$،*

$$\mu|\Gamma := ۰, \qquad \mu \circ d_eR_m := \chi(m) \tag{۸.۳}$$

هموار است و بنابراین یک کانکشن فرم دوگان است.

۳. *یک ۱-فرم $\mathcal{G}$-مقدار ω یک کانکشن فرم جزئی است اگر یک فاکتور لختی χ موجود باشد که $\mu = \chi(\omega)$ یک کانکشن فرم دوگان با فاکتور لختی χ باشد.*

برهان. ۱. اکوواریانی μ ایجاب می‌کند که Γ یک دستگاه دیفرانسیلی اکوواریان باشد؛ بنابراین Γ یک کانکشن جزئی است.

۲. برای همه $m \in M$، $\ker(\mu \circ d_eR_m) = \ker\chi(m) = \mathcal{G}_m$ ایجاب می‌کند که $\mu|V$ یک به یک است و لذا $\ker\mu = \Gamma$. بنابراین Γ یک کانکشن جزئی است. هر بردار مماس $v \in T_mM$ برای $\xi \in \mathcal{G}$ و $u \in \Gamma|_m$ در رابطه $v = \xi_M(m) + u$ صدق می‌کند. اکوواریانی Γ ایجاب می‌کند که $dL_gu \in \Gamma|_{g.m}$، درحالی که

$$d_e(L_g \circ R_m) = dR_{g.m} \circ \mathrm{Ad}_g$$

و فرمول ۸.۳ ایجاب می‌کنند که برای همه $g \in G$:

$$\begin{aligned}
L_g^*\mu(v) &= \mu(dL_g(v)) = \mu(dL_g(\xi_M(m) + u)) = \mu(dL_g(dR_m\xi + u)) \\
&= \mu(dL_g(dR_m\xi)) + \mu(dL_g(u)) = \mu(dL_g(dR_m\xi)) \\
&= \mu(d_e(L_g \circ R_m)(\xi)) = \mu((dR_{g.m} \circ \mathrm{Ad}_g)(\xi)) \\
&= (\mu \circ dR_{g.m})(\mathrm{Ad}_g)(\xi) = \chi(g \cdot m)(\mathrm{Ad}_g(\xi)) \\
&= (\mathrm{Ad}^*_{g^{-۱}} \circ \chi(m) \circ \mathrm{Ad}_{g^{-۱}})(\mathrm{Ad}_g(\xi)) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-۱}} \circ \chi(m)(\xi) \\
&= \mathrm{Ad}^*_{g^{-۱}} \circ \mu(v)
\end{aligned}$$

بنابراین μ اکوواریان است و لذا اگر هموار باشد یک کانکشن فرم دوگان است.

۳. اگر $\mu = \chi(\omega)$ یک کانکشن فرم دوگان با فاکتور لختی χ باشد، می‌توان نوشت :

$$\chi(m) = \mu \circ d_e R_m = \chi(m) \circ \omega \circ d_e R_m$$

رابطه‌ی بالا و $\ker\chi(m) = \mathcal{G}_m$ ایجاب می‌کنند که:

$$\begin{aligned}
\chi(m)(\mathbb{I} - \omega \circ d_e R_m) &= 0 \\
&\Rightarrow \mathbb{I} - \omega \circ d_e R_m \in \ker\chi(m) = \mathcal{G}_m \\
&\Rightarrow \mathrm{range}(\mathbb{I} - \omega \circ d_e R_m) \subseteq \mathcal{G}_m
\end{aligned}$$

بنابراین ω در رابطه‌ی ۱.۳ صدق می‌کند. اکوواریانی μ و χ ایجاب می‌کند که :

$$\begin{aligned}
\chi \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_g^*(\omega) &= \chi(\mathrm{Ad}_g^{-1} \circ L_g^*(\omega)) = \mathrm{Ad}_g^{-1}(\chi \circ L_g^*(\omega)) \\
&= \mathrm{Ad}_g^{-1}(L_g^*(\chi(\omega)) = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ L_g^*(\mu) \\
&= \mathrm{Ad}_g^{-1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*(\mu)) = \mu \\
&= \chi(\omega)
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\chi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_g^*(\omega) - \omega) &= 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_g^*(\omega) - \omega \in \ker\chi \\
&\Rightarrow \mathrm{range}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_g^*(\omega) - \omega)_m \subseteq \ker\chi(m) = \mathcal{G}_m,
\end{aligned}$$

به طوری که ω به پیمانه‌ی ایزوتروپی، اکوواریان است. بنابراین گزاره (۳.۱.۳) ایجاب می‌کند که ω یک کانکشن فرم جزئی است.

□

ملاحظه ۸.۱.۳. *توجه کنید که در مقایسه کانکشن فرمهای کلاسیک، یک کانکشن فرم جزئی نیاز نیست که در رابطه $\ker\mathbb{P}_\omega|T_m M = \ker\omega_m$ صدق کند. برای مثال ۱-فرم (۴.۳) روی $\mathbb{R}^3$ در رابطه*

$$\mathrm{range}\ \omega_m \cap \mathcal{G}_m = \{0\} \qquad (۹.۳)$$

صدق می‌کند اگر و تنها اگر $f \equiv 0$.

هرچند ω یک کانکشن فرم جزئی دلخواه است، اما می‌توانیم یک کانکشن فرم جزئی بسازیم که در (۹.۳) صدق کند و همان کانکشن جزئی ω را تعیین کند. در حالت خاص داریم: $\bar{\omega} := \omega \circ \mathbb{P}_\omega$. برای همه $m \in M$، با توجه به ساختار $\mathbb{P}_{\bar{\omega}} = \mathbb{P}_\omega$.

۲.۳ خمیدگی

در این بخش، خمیدگی یک کانکشن روی یک کلاف اصلی را تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۳ خمیدگی روی یک کانکشن

تصویر افقی

یک کانکشن $\Gamma \subset T\mathbb{P}$ داده شده است، **تصویر افقی** $h : T\mathbb{P} \to T\mathbb{P}$ مجموعه ای از نگاشت‌های خطی $h_p : T_p\mathbb{P} \to T_p\mathbb{P}$ برای هر $p \in \mathbb{P}$ می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_p(v) = \begin{cases} v & v \in \Gamma_p \\ 0 & v \in V_p \end{cases} \tag{۱۰.۳}$$

از طرف دیگر $\mathrm{Im}h = \Gamma$ و $\ker h = V$. از اینکه Γ و V تحت عمل گروه G ناوردا هستند، تصویر افقی اکوواریان است:

$$h \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ h.$$

فرض می‌کنیم $h^* : T^*\mathbb{P} \to T^*\mathbb{P}$ نگاشت دوگان را مشخص کند، اگر $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{P})$ یک ۱-فرم باشد، داریم $h^*\alpha = \alpha \circ h$. در حالت کلی‌تر، اگر $\beta \in \Omega^k(\mathbb{P})$؛

$$(h^*\beta)(v_1, \cdots v_k) = \beta(h(v_1), \cdots h(v_k)).$$

قبل از اینکه بخش بعدی را آغاز کنیم به اثبات یک لم می‌پردازیم.

لم ۱.۲.۳. *مشتق خارجی یک ۱-فرم*

برای هر ۱-فرم هموار ω و میدان‌های برداری هموار X و Y؛

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{۱۱.۳}$$

برهان. برای توابع هموار u و v فرض می‌کنیم $\omega = udv$ و X و Y میدان‌های برداری هموار باشند؛ سمت چپ رابطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} d(udv)(X,Y) &= du \wedge dv(X,Y) \\ &= du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y) \\ &= Xu \cdot Yv - Xv \cdot Yu \end{aligned}$$

سمت راست رابطه نیز بدین صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} X(udv(Y) - Y(udv(X)) - udv([X,Y]) &= X(uYv) - Y(uXv) - u[X,Y]v \\ &= (Xu \cdot Yv + uX \cdot Yv) - (Yu \cdot Xv + uY \cdot Xv) - u(X \cdot Yv - Y \cdot Xv \\ &= Xu \cdot Yv - Yu \cdot Xv \end{aligned}$$

لذا تساوی دوطرف رابطه برقرار است. □

۲-فرم خمیدگی

فرض کنید $\omega \in \Omega^{۱}(\mathbb{P};\mathcal{G})$ ، یک کانکشن ۱-فرم برای کانکشن $\Gamma \subset T\mathbb{P}$ باشد. ۲-فرم $\Omega := h^{*}d\omega \in \Omega^{۲}(\mathbb{P};\mathcal{G})$، (۲-فرم) **خمیدگی** کانکشن نامیده می‌شود.
با استفاده از تعریف،

$$\begin{aligned} \Omega(u,v) &= d\omega(h(u),h(v)) \\ &= (h(u))\omega(h(v)) - (h(v))\omega(h(u)) - \omega([h(u),h(v)]), \quad \left(h^{*}(\omega) = ۰\right) \\ &= -\omega([h(u),h(v)]) \end{aligned}$$

بنابراین $\Omega(u,v) = ۰$ اگر وتنها اگر $[h(u),h(v)] = ۰$ افقی باشد.

ملاحظه ۲.۲.۳. *فرض کنید G یک گروه لی باشد که از راست روی $\mathbb{P}$ عمل می‌کند، برای هر $p \in \mathbb{P}$ و هر $X \in \mathcal{G}$ ؛ $\left(p \cdot \exp(tX)\right)$ یک خم هموار در $\mathbb{P}$ است، تعریف می‌کنیم:*

$$\sigma_p(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=۰}(p \cdot \exp(tX)) = X,$$

*که $\sigma(X)$ را **میدان برداری اساسی** وابسته به X می‌نامند.*

گزاره ۳.۲.۳. ***معادلات ساختاری***

$$\Omega = d\omega + \frac{۱}{۲}[\omega,\omega]$$

که $[-,-]$ ضرب دوخطی پادمتقارن است که عبارت است از کروشه‌ی لی روی جبرلی $\mathcal{G}$ و ضرب وج یک-فرمها.

برهان. نشان می‌دهیم برای همه‌ی میدان‌های برداری u, v :

$$d\omega(h(u),h(v)) = d\omega(u,v) + [\omega(u),\omega(v)]. \qquad (۱۲.۳)$$

حالت‌های مختلف را برای آن بررسی می‌کنیم:

۱. فرض کنید u, v افقی باشند، چون $\omega(u) = \omega(v) = ۰$ و لذا $h(u) = u$، $h(v) = v$، بنابراین تساوی برقرار است.

۲. فرض کنید u, v عمودی باشند، می‌توان $u = \sigma(X), v = \sigma(Y)$ برای هر $X, Y \in \mathrm{G}$ در نظر گرفت. معادله ی۱۲.۳ بصورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
۰ &= d\omega(\sigma(X), \sigma(Y)) + [\omega(\sigma(X)), \omega(\sigma(Y))] \\
&= \sigma(X)\omega(\sigma(Y)) - \sigma(Y)\omega(\sigma(X)) - \omega([\sigma(X), \sigma(Y)]) + [X, Y], \qquad \big(\omega(\sigma(X)) = X\big) \\
&= \sigma(X)Y - \sigma(Y)X - \omega([\sigma(X), \sigma(Y)]) + [X, Y] \\
&= -\omega([\sigma(X), \sigma(Y)]) + [X, Y] \\
&= -\omega(\sigma[X, Y]) + [X, Y] \\
&= -\omega(\sigma(X)Y - \sigma(Y)X) + [X, Y],
\end{aligned}$$

که بوضوح رابطه برقرار است.

۳. در نهایت فرض کنید u افقی و $v = \sigma(X)$ عمودی باشد، معادله‌ی۱۲.۳ بصورت زیر خواهد بود:

$$d\omega(h(u), \sigma(X)) = ۰,$$

وبنابراین با ساده کردن و با توجه به لم مشتق خارجی ۱-فرم:

$$\omega[h(u), \sigma(X)] = ۰$$

کروشه‌ی لی یک میدان برداری افقی و یک میدان برداری عمودی دوباره یک میدان برداری افقی است، بنابراین تساوی برقرار و گزاره اثبات می شود.

□

گزاره ۳.۲.۴. ***اتحاد بیانچی***

$$h^*d\Omega = ۰$$

برهان. به سادگی با استفاده از معادله‌ی ساختاری قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} h^*d\Omega &= h^*d(d\omega + \frac{۱}{۲}[\omega, \omega]) \\ &= h^*(\frac{۱}{۲}[d\omega, \omega] - \frac{۱}{۲}[\omega, d\omega]) \\ &= h^*[d\omega, \omega] \\ &= [h^*d\omega, h^*\omega] \\ &= ۰ \end{aligned}$$

□

مراجع

[1] Bryannt, Robert L.(1- DUKE) *An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry.* Geometry and quantum field theory (Park City , UT , 1991) , 5-181 , IAS/Park City Math. Ser., 1, Amer. Math. Soc., Providence , RI , 1995.

[2] Debra Lewis, Nilima Nigam, Peter J.Olver. *Connection for General Group Actions.* February 1, 2008.

[3] Joseph Harris , Phillip Griffths , *Principles of Algebraic Geometry,* Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1994.

[4] Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi *Foundation of Differential Geometry* . Vol. I. Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley- Interscience Publication. John Wiley and sons, Inc., New York, 1996.

[5] Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi *Foundation of Differential Geometry* . Vol. II. Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley- Interscience Publication. John Wiley and sons, Inc., New York, 1996.

[6] Lee, Jeffry M., *Manifolas and Differential Geometry.* Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, 1956.

[7] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds,* Springer, Washington, 2002.

[8] Lee, John M. *Riemannian manifolds. An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997. xvi+224 pp. ISBN: 0-387-98271-X (Reviewer: Man Chun Leung)

[9] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* vol .1. Publish or Perish, Inc, Houston, Texas 1999.

[10] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* vol .2. Publish or Perish, Inc, Houston, Texas 1999.

[11] Morgan, John W. *An Introduction to Gauge Theory.* Gauge theory and the topology of four-manifolds (Park City, UT, 1994), 51143, IAS/Park City Math. Ser., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[12] N. Steenrod. *Topology of Fiber Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[13] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1986.

[14] Rupert Way, *Introduction to Connections on Principal Fibre Bundles,* Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford GU2 7XH UK, 2010.

[15] R. W. Sharpe., *Differential Geometry*, volume 166 of Graduate Texts in Mathematics. Springer- Verlag, New York, 1997. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, With a foreword by S. S. Chern.

[16] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Vol. 1, volume 35 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزاد	Free
اطلس	Atlas
اکوواریان	Equivariant
افقی	Horizontal
بدیهی	Trivial
بدیهی‌سازی موضعی	Local Trivialization
برش	Section
بعد	Dimension
بیشین	Maximal
پوچساز	Annihilator
پیوسته	Continuous
تانسور تاب	Torsion Tensor
تانسور لختی قفل شده	Locked Inertia Tensor
تکین	Singular
توزیع	Distribution
چنبره	Torus
خطی	Linear

خم	Curve
خم قطعه‌ای	Piecewise Curve
خمیدگی	Curvature
خوشتعریف	Well-Defined
دوخطی	Bilinear
دوگان	Dual
دستگاه دیفرانسیلی	Differential System
رتبه	Rank
رتبه ثابت	Constant Rank
زوج کانکشن جزئی	Partial Connection Pair
زیرفضای عمودی	Vertical Subspace
ساختار هموار	Smooth Structure
سره	Proper
ضرب هوک(درونی)	Interior Multiplication
ضرب وج	Wedge Product
عمل گروه	Group Action
غیربدیهی	Nontrivial
فاکتور لختی	Inertia Factor
فرم دیفرانسیلی	Differential Form
فضای دوگان	Dual Space
فضای کامل	Total Space
فضای مماس	Tangent Space
فضای هم بردارها	Covectors Space

فضای هم مماس .... Cotangent Space

کانکشن .... Connection

کانکشن جزئی .... Partial Connection

کانکشن خطی .... Linear Connection

کانکشن ریمانی .... Riemannian Connection

کانکشن فرم جزئی .... Partial Connection Form

کانکشن فرم مکانیکی ساده .... Simple Mechanical Connection Form

کروشه لی .... Lie Bracket

کلاف اصلی .... Principal Bundle

کلاف بدیهی .... Trivial Bundle

کلاف پس کشنده .... Pullback Bundle

کلاف تانسوری .... Tensor Bundle

کلاف تاری .... Fiber Bundle

کلاف حاصل‌ضرب .... Product Bundle

کلاف خطی .... Line Bundle

کلاف هم‌مماس .... Cotangent Bundle

کمین .... Minimal

کنج .... Frame

کنج خطی .... Linear Frame

کنج فراگیر .... Global Frame

کنج متحرک .... Moving Frame

کنج موضعی .... Local Frame

گروه لی .... Lie Group

متریک ریمانی .... Riemannian Metric

متعامد .... Orthognal

متعدی .... Transitive

متقارن .... Symmetric

متمم .... Complementary

مدار .... Orbit

مستقل خطی .... Linear Independent

مشتق خارجی .... Exterior Derivative

مشتق کوواریان .... Covariant Derivative

مطیع .... Docile

منیفلد ریمانی .... Riemannian Manifold

منظم .... Regular

موثر .... Effective

مورر-کارتان .... Maurer-Cartan

موضعی .... Local

مولد بینهایت کوچک .... Infinitesimal generator

میدان برداری .... Vector Field

میدان تانسوری .... Tensor Field

نرمالساز .... Normalizer

نشاننده .... Embedding

نگاشت الحاقی .... Adjoint Map

نگاشت پس کشنده .... Pullback Map

نگاشت گذر .... Transition Map

نگاشت نمایی .... Exponential Map

نقطه منظم .... Regular Point

نیم منظم .... Semi Regular

هموار سازگار .... Smoothly Compatible

یک به یک .... Injective

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint Map	نگاشت الحاقی
Annihilator	پوچساز
Atlas	اطلس
Bilinear	دوخطی
Complementary	متمم
Connection	کانکشن
Constant Rank	رتبه ثابت
Continuous	پیوسته
Covariant Derivative	مشتق کوواریان
Covectors Space	فضای هم بردارها
Cotangent Bundle	کلاف هم‌مماس
Cotangent Space	فضای هم مماس
Curvature	خمیدگی
Curve	خم
Differential Form	فرم دیفرانسیلی
Differential System	دستگاه دیفرانسیلی
Dimension	بعد

Distribution .... توزیع
Dual .... دوگان
Dual Space .... فضای دوگان
Effective .... موثر
Embedding .... نشاننده
Equivariant .... اکوواریان
Exponential Map .... نگاشت نمایی
Exterior Derivative .... مشتق خارجی
Fiber Bundle .... کلاف تاری
Frame .... کنج
Free .... آزاد
Global Frame .... کنج فراگیر
Group Action .... عمل گروه
Horizontal .... افقی
Interior Multiplicaion .... ضرب هوک(درونی)
Inertia Factor .... فاکتور لختی
Infinitesimal Generator .... مولد بینهایت کوچک
Injective .... یک به یک
Lie Bracket .... کروشه لی
Lie Group .... گروه لی
Line Bundle .... کلاف خطی
Linear .... خطی
Linear Connection .... کانکشن خطی

Linear Independent .... مستقل خطی

Linear Frame .... کنج خطی

Local .... موضعی

Local Frame .... کنج موضعی

Local Trivialization .... بدیهی‌سازی موضعی

Locked Inertia Tensor .... تانسور لختی قفل شده

Maurer-Cartan .... مورر- کارتان

Maximal .... بیشین

Minimal .... کمین

Moving Frame .... کنج متحرک

Nontrivial .... غیر بدیهی

Normalizer .... نرمالساز

Orbit .... مدار

Orthognal .... متعامد

Partial Connection .... کانکشن جزئی

Partial Connection Form .... کانکشن فرم جزئی

Partial Connection Pair .... زوج کانکشن جزئی

Piecewise Curve .... خم قطعه‌ای

Principal Bundle .... کلاف اصلی

Product Bundle .... کلاف حاصل‌ضرب

Proper .... سره

Pullback Bundle .... کلاف پس کشنده

Pullback Map .... نگاشت پس کشنده

Rank	رتبه
Regular	منظم
Regular Point	نقطه منظم
Reimannian Connection	کانکشن ریمانی
Reimannian Manifold	منیفلد ریمانی
Section	برش
Semi Regular	نیمه منظم
Simple Mechanical Connection Form	کانکشن فرم مکانیکی ساده
Singular	تکین
Smooth Structure	ساختار هموار
Smoothly Compatible	هموار سازگار
Symmetric	متقارن
Tangent Space	فضای مماس
Tensor Bundle	کلاف تانسوری
Tensor Field	میدان تانسوری
Torsion Tensor	تانسور تاب
Torus	چنبره
Total Space	فضای کامل
Transition Map	نگاشت گذر
Transitive	متعدی
Trivial	بدیهی
Trivial Bundle	کلاف بدیهی
Vector Field	میدان برداری

زیرفضای عمودی .... Vertical Subspace

ضرب وج .... Wedge Product

خوش تعریف .... Well-Defined

Surname: Hadiloo

Name: Azam

Title: Lie Group Actions and Related Connections

Supervisor: Dr. Reza Hejazi

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Differential Geometry

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 1392/6/25

Number of pages: 64

Keywords: Connections, Connection Form, Principal Bundles, Connections on Principal Bundles

Abstract

In classical theory of connections, it is necessary that the manifold is a principal bundle and group must acts freely. This thesis introduces the principal bundles and focus more on them . Chapter 1 is about fundamental concepts and theorems along with examples that they are necessary for next chapters. Chapter 2 is about the principal bundles and their examples and theorems. Bundles discussed in this chapter are the frame bundles, the associate bundles and the pullback bundles . In Chapter 3 we will introduce the partial connections and we must focus on connections that they are used to define the connections on principal bundles . In another part of this chapter we define curvature for connections on principal bundles.

دانشگاه صنعتی شاهرود

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Lie Group Actions and Related Connections

Supervisor

Dr. Reza Hejazi

by

Azam Hadiloo

1392/6/25