دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

استفاده از تکنیک‌های چندمعیاره در داده‌های بازه‌ای جهت اولویت‌بندی گزینه‌ها

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر رضا شیخ

پژوهشگر

نرجس شیخ کبیر

شهریورماه ۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شیخ‌کبیر نام: نرجس

عنوان: استفاده از تکنیک‌های چندمعیاره در داده‌های بازه‌ای جهت اولویت‌بندی گزینه‌ها

استاد راهنما: دکتر جعفر فتحعلی
استاد مشاور: دکتر رضا شیخ

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریورماه ۹۲ تعداد صفحات: ۸۵

واژگان کلیدی: تصمیم‌گیری چندشاخصه- روش‌های AHP، TOPSIS و ARAS -داده‌های بازه‌ای- رتبه‌بندی کتب درسی

چکیده

در سالهای اخیر توجه بسیاری از محققین به علوم تصمیم‌گیری جذب شده و تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته‌است. همچنین مدیران به جهت افزایش بهره‌وری وکیفیت سازمان، نیازمند استفاده از ابزارهای مفید تصمیم‌گیری هستند. در بسیاری از موارد در دنیای واقعی تصمیم‌گیرنده با داده‌هایی روبرو است که یا بطور ذاتی ماهیت بازه‌ای دارند یا به جهت بالابردن دقت کار داده‌ها را بصورت بازه‌ای اعلام می‌کند در چنین مواردی نیاز به توسعه و گسترش یکی از روشهای تصمیم‌گیری است. از میان روش‌های تصمیم‌گیری به توسعه سه روش AHP، TOPSIS و ARAS برای داده‌های بازه‌ای پرداخته و از آنجاییکه یکی از دغدغه‌های اصلی مدیران و مسئولان آموزش و پرورش ارزیابی کتاب‌های درسی به‌طور جامع و کامل می‌باشد، مطالعه موردی را اولویت‌بندی کتب ریاضی در مقطع دبیرستان قرار داده‌ایم.

تقدیم به

روان پاک پدرم

مادر دلسوز

همسر مهربان

و عزیزترین‌ها

نگار و نغمه

خدایا!

به اتکای تو گام برمی‌دارم، با نام تو و باور همراهی تو.

در کنارم دیدنت چه با شکوه است و حمایتت را حس کردن چه دلپذیر.

به شکر موهبت امیدی که در دلم به ودیعه گذاشتی می‌توانم جسارت یاری جستن از تو را پاس دارم.

با توکل به تو و امید به لطف تو، قدم در این راه گذاشتم و اگر عنایت و الطاف بی‌کران تو نبود هر آینه از ادامه راه باز مانده بودم.

بارالها!

عطر حضورت را از مشام مشتاق جانم حتی برای لحظه‌ای دریغ مدار که بودنت و هر لحظه دیدنت سعادتیست وصف ناشدنی.

کمک کن با تو عهدی بندم، استوار.

تو اما تعهدی را بر من بخش، ماندگار.

از تو می‌خواهم، شکیبایی متین در اوج بی‌تابی و بی‌قراری را.

از تو بیش از هر چیز تو را می‌خواهم.

سپاس گزاری...

شکر بی‌پایان بر آفرینشگر آسمان و یگانه دانای علم آفرین، که با یاری‌ها، برکات و تاییدات او موفق به تحصیل علم و تنظیم این پایان‌نامه گشتم.

به مصداق آیه شریفه‌ی(من لم یشکرالمخلوق، لم یشکرالخالق) وظیفه خود می‌دانم مراتب قدردانی و سپاس قلبی خود را به جناب آقای دکتر فتحعلی که در طول تحصیل و تحقیق مرا از راهنمایی‌های عالمانه خویش برخوردار ساختند، تقدیم نمایم. از استاد ارجمند جناب آقای دکتر شیخ که مشاوره این پژوهش را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم. همچنین سپاسگزار کلیه اساتیدی هستم که در طول تحصیل از دانش آنها بهره‌مند گشتم.

از تمامی دوستانم که در طول این دوره مرا یاری دادند خالصانه قدردانی می‌کنم.

نرجس شیخ کبیر

شهریورماه ۹۲

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. رتبه‌بندی کتب ریاضی دبیرستانی با روش‌های TOPSIS و ARAS برای داده‌های بازه‌ای، مجله مدیریت و تحقیق، دانشگاه اصفهان.

۲. اولویت‌بندی کتب ریاضی با استفاده از روش AHP بازه‌ای، ششمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

۳. مقایسه روش‌های TOPSIS و ARAS با داده‌های بازه‌ای، ششمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

مدل‌های بهینه‌سازی از دوران نهضت صنعتی در جهان مورد توجه ریاضیدانان و دست‌اندرکاران صنعت بوده است. مدیران و تصمیم‌گیران همواره براساس نتایج تصمیماتی که اتخاذ می‌کنند مورد قضاوت قرار می‌گیرند و بنابراین به منظور پاسخ‌گویی به شرایط پویای بازارهای امروزی و اتخاذ تصمیمات مؤثر، نیازمند افزایش قابلیت و دقت مدل‌های مورد استفاده جهت تصمیم‌گیری هستند. علاوه بر این، رشد سریع اقتصادی و فناوری در چند دهه اخیر، زندگی بشر را به شدت متحول کرده و جوامع مدرن را با مسائل پیچیده تصمیم‌گیری مواجه نموده است که مشخصه اساسی اینگونه مسائل وجود معیارها و یا اهداف غیرهمگون و ناسازگار مانند هزینه، قابلیت اطمینان، عملکرد، ایمنی و بهره‌وری می‌باشد. تصمیم‌گیری چند معیاره یکی از رویکردهایی است که می‌تواند در حل مسائل پیچیده، در حوزه‌های مختلف فعالیت انسان، از علوم مهندسی گرفته تا علوم اجتماعی، اقتصاد و مدیریت مورد استفاده قرار گیرد [۲۸] .

تاکید اصلی بر مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی، داشتن یک تابع هدف بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\max(\min) \quad f(x) \qquad\qquad f: E^n \longrightarrow E^1 \\ &s.t \quad g_i(x)(\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =)0 \quad i=1,\cdots,m, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که مدل مذکور می‌تواند به‌صورت خطی، غیرخطی یا مخلوط باشد. اما توجه محققین در دهه‌های اخیر معطوف به مدل‌های چندمعیاره [۱](MCDM) برای تصمیم‌گیری‌های پیچیده گردیده است. در این حالت به‌جای استفاده از یک معیار سنجش بهینگی از چندین معیار سنجش ممکن استفاده می‌گردد.

این نوع مدل‌های تصمیم‌گیری به دو دسته عمده تقسیم می‌گردند: مدل‌های چندهدفه [۲](MODM) و مدل‌های چندشاخصه [۳](MADM)، به‌طوری‌که مدل‌های چندهدفه به منظور طراحی و مدل‌های چندشاخصه

[۱] multiple criteria decision making
[۲] multiple objective decision making
[۳] multiple attribute decision making

برای انتخاب گزینه برتر استفاده می‌گردند.

مدل‌های چندهدفه (MODM) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \max(\min): \quad & \{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_k(x)\} = F(x) \\ s.t \quad & g_i(x)(\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =)۰ \qquad\qquad i = ۱, \cdots, m. \\ & x \in E^n. \end{aligned}$$

مدل چندشاخصه (MADM) بصورت ماتریس تصمیم‌گیری زیر بیان می‌شود:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & C_۱ & C_۲ & ... & C_m \\ \hline A_۱ & a_{۱۱} & a_{۱۲} & ... & a_{۱m} \\ A_۲ & a_{۲۱} & a_{۲۲} & ... & a_{۲m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & a_{n۱} & a_{n۲} & ... & a_{nm} \end{array}$$

در ماتریس تصمیم‌گیری A نماد $A_۱, \ldots, A_n$ n گزینه[۴] و $C_۱, \ldots, C_m$ نشانه‌ی m شاخص (معیار)[۵] بوده و نهایتا a_{ij} بیانگر ارزش شاخص زام برای گزینه‌ی iام است.

بهترین گزینه در یک مدل MADM گزینه‌ای است که ارجح‌ترین ارزش یا مطلوبیت از هر معیار موجود را تامین نماید [۱].

در این پایان‌نامه به بررسی چند مدل خاص از مدل‌های MADM یعنی AHP ، TOPSIS و ARAS پرداخته می‌شود.

روش TOPSIS[۶] توسط هوانگ و یون (۱۹۸۱) پیشنهاد شد [۱۲]. در این روش n گزینه بوسیله m شاخص ارزیابی می‌شوند. منطق اصولی این مدل جواب ایده‌آل (مثبت) و جواب ایده‌آل منفی را تعریف می‌کند. جواب ایده آل (مثبت) جوابی است که معیار سود را افزایش و معیار هزینه را کاهش می‌دهد. گزینه بهینه، گزینه‌ای است که کمترین فاصله از جواب ایده‌آل و در عین حال دورترین فاصله را از جواب ایده‌آل منفی دارد. به عبارتی در رتبه‌بندی گزینه‌ها به روش TOPSIS گزینه‌هایی که بیشترین تشابه را با جواب ایده‌آل داشته باشند، رتبه بالاتری کسب می‌کنند.

---
[۴] alternative
[۵] attribute
[۶] Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

روش AHP[۷] براساس تحلیل مغز انسان برای مسائل پیچیده و فازی پیشنهاد گردیده است. روش توسط محققی به‌نام توماس ال ساعتی[۸] در سال ۱۹۷۰ پیشنهاد گردید [۱]. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی منعکس‌کننده رفتار طبیعی و تفکر انسانی است. این تکنیک، مسائل پیچیده را براساس آثار متقابل آنها مورد بررسی قرار می‌دهد و آنها را به شکلی ساده تبدیل کرده به حل آن می‌پردازد.

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی در هنگامی که عمل تصمیم‌گیری با چند گزینه رقیب و معیار تصمیم‌گیری روبروست می‌تواند استفاده گردد. معیارهای مطرح شده می‌تواند کمی و کیفی باشند. اساس این روش تصمیم‌گیری بر مبنای مقایسات زوجی است. تصمیم‌گیرنده کار را با فراهم آوردن درخت سلسله مراتبی تصمیم آغاز می‌کند. درخت سلسله مراتبی تصمیم، عوامل مورد مقایسه و گزینه‌های رقیب مورد ارزیابی در تصمیم را نشان می‌دهد. سپس یك سری مقایسات زوجی انجام می‌گیرد. این مقایسات، وزن هر یك از فاکتورها را در راستای گزینه‌های رقیب مورد ارزیابی در تصمیم، نشان می‌دهد. در نهایت منطق فرآیند تحلیل سلسله مراتبی به گونه‌ای ماتریس‌های حاصل از مقایسات زوجی را با یکدیگر تلفیق می‌سازد که تصمیم بهینه حاصل آید.

روش ARAS[۹] یکی از تکنیك‌های تصمیم‌گیری چند معیاره است که به منظور رتبه‌بندی، با استفاده از یک تابع مطلوبیت مجموع، میزان کارائی نسبی گزینه‌ها را بر حسب میزان تاثیرگذاری نسبی و وزن معیارها مشخص می‌کند. با وجود تحقیقات بسیار انجام شده، در ایران در خصوص رتبه‌بندی عملکرد، تا به حال هیچ تحقیقی با استفاده از روش ARAS در سطح پایان نامه و یا حتی به صورت تحقیقات متفرقه انجام نشده است. (حتی در هیچ یک از مجلات علمی حوزه مدیریت ایران نیز تعریفی از ARAS ارائه نشده است) این روش اولین بار در سال ۲۰۱۰ توسط زاوادسکاس و تورسکیس[۱۰] معرفی شد [۳۳].

قبل از ارزیابی و بررسی مدلها، لازم است به چگونگی ارزش‌گذاریها و مقیاس اندازه‌گیری توجه شود.

۱.۱ مقیاس اندازه‌گیری شاخص‌ها

گزینه A_i در MADM ممکن است توسط دو نوع شاخص C_j توصیف شود:

شاخص کمی (مانند هزینه، ظرفیت، سرعت و غیره)

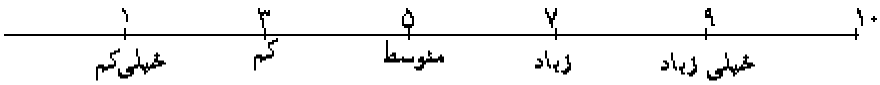
شاخص کیفی (مانند راحتی، زیبایی، انعطاف‌پذیری و غیره).

مقیاس اندازه‌گیری شاخص‌های کمی می‌تواند با یکدیگر متفاوت باشد(مانند هزینه به ریال در مقابل وزن به کیلوگرم) و به همین دلیل انجام عملیات اصلی ریاضی قبل از بی‌مقیاس کردن یا یکسان سازی مقیاس‌ها

[۷] Analytic hierarchy process
[۸] T.L.Saaty
[۹] Additive Ratio Assessment
[۱۰] Zavadskas and Turskis

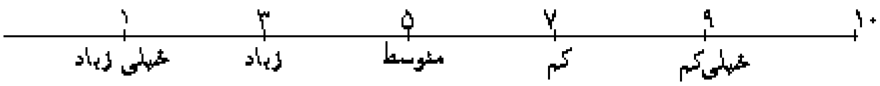
مجاز نیست.

در اندازه‌گیری یک مقیاس کیفی ممکن است از مقیاس‌های فاصله‌ای و رتبه‌ای استفاده شود. یک روش عمومی در اندازه‌گیری یک شاخص کیفی با مقیاس فاصله‌ای استفاده از مقیاس دو قطبی[۱۱] فاصله‌ای به‌صورت زیراست:



این اندازه‌گیری (برای شاخص‌های با جنبه مثبت) بر اساس یک مقیاس دو نقطه‌ای می‌باشد به‌طوری‌که صفر مشخص کننده می‌نیمم ارزش ممکن و ده نشان‌دهنده ماکزیمم ارزش ممکن از شاخص مورد نظر است. همچنین نقطه وسط نقطه‌ی شکست مقیاس بین مساعدها و نامساعدها است.

این مقیاس اندازه‌گیری به‌طور مشابه برای شاخص‌های منفی به‌منظور هماهنگی در محاسبات به‌صورت زیر تنظیم می‌گردد:



در ضمن ارزش‌های ۲ ، ۴ ، ۶ و ۸ را می‌توان به‌عنوان ارزش‌های واسطه از مقیاس فوق به‌کار برد.

۲.۱ بی مقیاس کردن

برای قابل مقایسه شدن مقیاس‌های مختلف اندازه‌گیری، به‌ازای شاخص‌های گوناگون باید از بی‌مقیاس کردن استفاده کرد که بدین طریق عناصر شاخص‌های تبدیل‌شده a_{ij} بدون بعد اندازه‌گیری می‌شوند [۱].

۱.۲.۱ روش‌های بی‌مقیاس کردن

۱. بی‌مقیاس کردن با استفاده از نرم

هر عنصر a_{ij} از ماتریس تصمیم‌گیری بر نرم موجود از ستون jام (به‌ازای شاخص C_j) تقسیم می‌گردد [۱۹] . یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2}}}. \qquad (1.1)$$

[۱۱] bipolar scale

۲. بی‌مقیاس کردن خطی

هر ارزش a_{ij} به ماکزیمم موجود از ستون jام (به‌ازای جنبه‌های مثبت کلیه شاخص‌ها) تقسیم می‌شود. یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^*}, \qquad a_j^* = \max_i a_{ij} \quad \text{بطوریکه} \tag{۲.۱}$$

وچنانچه شاخصC_j (به‌ازای همه jها) جنبه منفی داشته باشد خواهیم داشت:

$$n_{ij} = ۱ - \frac{a_{ij}}{a_j^*}, \tag{۳.۱}$$

و در نهایت در صورتی‌که شاخص‌ها با جنبه مثبت ومنفی بطور مخلوط با یکدیگر بکار گرفته شده باشند، جنبه منفی با معکوس کردن به جنبه مثبت تبدیل می‌گردد.

$$n_{ij} = \frac{\frac{۱}{a_{ij}}}{\max_i(\frac{۱}{a_{ij}})} = \frac{\min_i a_{ij}}{a_{ij}} = \frac{a_j^{\min}}{a_{ij}}. \tag{۴.۱}$$

۳. بی‌مقیاس کردن فازی

بی‌مقیاس کردن فازی برای شاخص C_j با جنبه مثبت عبارت است از

$$n_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^* - a_j^{\min}}, \tag{۵.۱}$$

وبرای شاخص با جنبه منفی

$$n_{ij} = \frac{a_j^* - a_{ij}}{a_j^* - a_j^{\min}}. \tag{۶.۱}$$

نکته ۱.۲.۱. در تمامی روش‌های بی‌مقیاس کردن اعداد بدست آمده بین صفر و یک قرار دارند که صفر برای بدترین و یک برای بهترین نتیجه است.

شاخص موجود در یک MADM ممکن است بصورتی نباشد که بتوان ارزش‌گذاری قطعی برای آن کرد. نوع داده‌ای که تصمیم‌گیرنده با توجه به شاخص‌ها به هر گزینه می‌دهد باعث تغییراتی در نوع محاسبات روش‌های مختلف می‌شود. در این قسمت به اختصار دو نوع داده‌ی قطعی و بازه‌ای معرفی و سپس سه روش AHP و TOPSIS و ARAS را برای داده‌های بازه‌ای بیان خواهیم کرد.

۳.۱ انواع داده‌ها

۱.۳.۱ داده‌های قطعی

در صورتی‌که ارزش هر گزینه تحت معیار مورد نظر با یک عدد حقیقی نمایش داده شده باشد داده‌ی مورد نظر از نوع قطعی می‌باشد.

۲.۳.۱ داده‌های بازه‌ای (اعداد خاکستری)

عموماً، اطلاعات مربوط به ترجیحات تصمیم‌گیرندگان در مورد معیارها و به دلایل مختلف براساس قضاوت کیفی آن‌ها، بیان می‌شود و همچنین در عمل نیز، قضاوت تصمیم‌گیرندگان اغلب نامطمئن بوده و به‌وسیله مقادیر عددی دقیق قابل بیان نیستند. بنابراین برای مواجهه با پیچیدگیهای این گونه مسایل تصمیم‌گیری، استفاده از رویکردهای جدید و بین رشته‌ای، امری ضروری است. داده‌های بازه‌ای (اعداد خاکستری) برای مطالعه عدم اطمینان و ناکامل بودن اطلاعات به کار می‌رود و استفاده از آن در تحلیل ریاضی سیستم‌های با اطلاعات ناقص، روند رو به رشدی را دارد[۲۸].

در دنیای واقعی سیستم‌های گوناگون و فراوانی وجود دارند که هر يك از آن‌ها، اجزا و زیرسیستم‌های خاص خود را دارد و برای شناخت آن‌ها باید علاوه‌بر شناخت این اجزا، روابط بین آن‌ها و همچنین ساختار سیستم نیز معلوم شود.

اگر اطلاعات واضح و شفاف يك سیستم با رنگ سفید و اطلاعات کاملاً ناشناخته يك سیستم با رنگ سیاه تجسم شود، در این صورت اطلاعات مربوط به بیشتر سیستم‌های موجود در طبیعت اطلاعات سفید (کاملاً شناخته شده) و یا سیاه(کاملا ناشناخته) نیستند، بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به‌رنگ خاکستری هستند. این‌گونه سیستم‌ها را سیستم‌های خاکستری و به داده‌هایی که بدین فرم ارائه می‌شود داده‌های بازه‌ای (خاکستری) گویند. اصلی‌ترین مشخصه این داده‌ها، کامل نبودن اطلاعات مربوط به آن سیستم است[۸]، که در آن خاکستری بودن به معنای کمبود و نقص اطلاعات و عدم اطمینان است.

عدد خاکستری می‌تواند به عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. مثلاً رتبه معیارها در يك تصمیم‌گیری، به صورت متغیرهای زبانی بیان می‌شوند که می‌توان آن‌ها را با بازه‌های عددی بیان نمود. این بازه‌های عددی شامل اطلاعات نامطمئن خواهند بود[۹]. همچنین می‌توان گفت که عدد خاکستری به عددی اطلاق می شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در بر می‌گیرد شناخته شده است.

هر چند به نظر می‌رسد که اعداد خاکستری مشابه با اعداد فازی هستند اما تفاوت اساسی بین اعداد خاکستری با اعداد فازی در تعیین تابع عضویت در کران بالا وپایین بازه است. همین تفاوت ظریف بین

عدد خاکستری و عدد فازی موجب می‌شود که محاسبات با اعداد خاکستری از سادگی بیشتری نسبت به اعداد فازی برخوردار باشد، زیرا تعیین تابع عضویت برای یك عدد فازی همراه با پیچیدگی‌ها و عملیات محاسباتی است.

برای آشنایی بیشتر با داده‌های بازه‌ای به تعاریف زیر توجه کنید[۳۰].

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $a = [a^l, a^u] = \{x \mid 0 < a^l \leq x \leq a^u\}$، در این صورت a را یک بازه‌ی عددی نامنفی می‌نامند، که a^l و a^u به‌ترتیب کران پایین و بالای بازه‌ی عددی است. همچنین a یک عدد حقیقی نامنفی است اگر $a^l = a^u$.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $a = [a^l, a^u]$ بازه عددی باشد مقدار مرکز و عرض یک بازه‌ی عددی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m(a) = \frac{1}{2}(a^l + a^u),$$
$$w(a) = \frac{1}{2}(a^u - a^l).$$

تعریف ۳.۳.۱. [۳۱][۳۲] فرض کنید $a = [a^l, a^u]$ و $b = [b^l, b^u]$ بازه‌های عددی باشند و $\lambda \geq 0$ آنگاه:

۱. $a = b \Longleftrightarrow a^l = b^l, a^u = b^u$

۲. $a + b = [a^l, a^u] + [b^l, b^u] = [a^l + b^l, a^u + b^u]$

۳. $\lambda a = \lambda[a^l, a^u] = [\lambda a^l, \lambda a^u]$.

تعریف ۴.۳.۱. [۱۲] فرض کنید $a_j = [a_j^l, a_j^u]$ برای $j = 1, \cdots, n$ بازه‌های عددی هستند یک عملگر (تابع) وزن برای $\{a_j \mid j = 1, \cdots, n\}$ یک نگاشت به‌صورت زیر است:

$$wA : \Omega^n \longrightarrow \Omega$$
$$wA(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j a_j,$$

که Ω مجموعه همه آرگومانهای بازه و $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ وزن بردار $\{a_j \mid j = 1, \cdots, n\}$ است که $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $a = [a^l, a^u]$ و $b = [b^l, b^u]$ بازه‌های عددی باشند عملگر $\otimes$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \otimes b = [a^l, a^u] \otimes [b^l, b^u] = [a^l b^l, a^u b^u], \quad a^l, b^l \geq 0.$$

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $a=[a^l,a^u]$ و $b=[b^l,b^u]$ بازه‌های عددی باشند فاصله بین a و b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a,b)=\sqrt{(a^l-b^l)^2+(a^u-b^u)^2}$$

تعریف ۷.۳.۱. اولویت بندی بازه‌ها [۳۴]

۱. فرض کنید $a=[a^l,a^u]$ و $b=[b^l,b^u]$ بازه‌های عددی باشند. رابطه‌ی $\preceq$ بین a و b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\preceq b \Longleftrightarrow b^l\geq a^l, b^u\geq a^u$$

۲. در مواردی که $a\subseteq b$ یا $b\subseteq a$، بازه‌ی $a=[a^l,a^u]$ بر $b=[b^l,b^u]$ مقدم است اگر وتنها اگر

$$a^l+a^u\geq b^l+b^u \quad , \quad a^u-a^l\leq b^u-b^l$$

که نشان می‌دهد مرکز a بزرگتر از b و عرض a کمتر از عرض b است.

۳. فرض کنید $a=[a^l,a^u]$ و $b=[b^l,b^u]$ بازه‌های عددی باشند و $l_a=a^u-a^l$ و $l_b=b^u-b^l$. درجه وضعیت $a\geq b$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(a\geq b)=\max\{1-\max(\frac{b^u-a^l}{l_a+l_b},0),0\}$$

می‌توان نتایج ساده زیر را از رابطه‌ی فوق بدست آورد.

$$\begin{aligned}
&0\leq p(a\geq b)\leq 1,\\
&p(a\geq b)=1\Longleftrightarrow b^u\leq a^u,\\
&p(a\geq b)=0\Longleftrightarrow a^u\leq b^u,\\
&p(a\geq a)=\frac{1}{2},\\
&p(a\geq b)+p(b\geq a)=1.
\end{aligned}$$

بنابراین در رتبه‌بندی بازه‌های $a_j=[a_j^l,a_j^u]$ برای $j=1,\cdots,n$ ، هر $a_i=[a_i^l,a_i^u]$ با همه‌ی $a_j=[a_j^l,a_j^u]$ با استفاده از رابطه‌ی فوق مقایسه می‌شود. برای نمونه $p_{ij}=p$ با $a_i\geq a_j$ را در نظر بگیرید ماتریس تکمیلی P را می‌توان به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$P=(p_{ij})_{n\times n}$$

که

$$p_{ij} \geq ۰, \quad p_{ij} + p_{ji} = ۱, \quad p_{ii} = \frac{۱}{۲}, \quad i, j = ۱, \cdots, n$$

از مجموع همه عناصر در هر سطر ماتریس P داریم:

$$p_i = \sum_{j=۱}^{n} p_{ij} \quad i = ۱, \cdots, n.$$

در نتیجه می‌توان آرگومانهای بازه‌ی $a_j = [a_j^l, a_j^u]$ را با توجه به مقدار p_j بصورت نزولی مرتب کرد.

فصل ۲
روش‌های $MADM$ برای داده‌های قطعی

۱.۲ روش AHP

در یک مساله تصمیم‌گیری هدف چگونگی انتخاب کردن یك گزینه از میان چندین گزینه موجود است که می‌بایست با توجه به معیارهایی که برای انتخاب مطرح است صورت پذیرد. حتی درصورتی هم که انتخاب کردن مورد نظر نباشد ممکن است دانستن اولویت گزینه‌ها نسبت به یکدیگر لازم باشد. در این قبیل مسائل به هر گزینه با توجه به امتیازهای تخصیص یافته در مقایسه با هم و نیز با توجه به امتیاز شاخص‌ها نسبت به هم، امتیازی داده می‌شود که نشان‌دهنده قابلیت بهتر آن گزینه با توجه به معیارهای تعریف شده است. اما تعیین امتیازها به‌طور مستقیم کار ساده‌ای نیست و ممکن است در نتایج نهایی انحراف ایجاد کند لذا لزوم داشتن یك راهکار یا فرآیند تحلیل سلسله (AHP) روشمند برای امتیازدهی احساس می‌شود.

روش تحلیل سلسله مراتبی (AHP) بیش از سایر روش‌ها در علم مدیریت مورد استفاده قرار گرفته است. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی یکی از معروف‌ترین فنون تصمیم‌گیری چندمنظوره است که اولین بار توسط توماس ال. ساعتی عراقی الاصل در دهه ۱۹۷۰ ابداع گردید[۱].

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی منعکس‌کننده رفتار طبیعی و تفکر انسانی است. این تکنیك، مسائل پیچیده را بر اساس آثار متقابل آنها مورد بررسی قرار می‌دهد و آنها را به شکلی ساده تبدیل کرده، به حل آن‌ها می‌پردازد. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی در هنگامی که عمل تصمیم‌گیری با چند گزینه رقیب و معیار تصمیم‌گیری روبروست می‌تواند استفاده گردد. معیارهای مطرح شده می‌تواند کمی یا کیفی باشند.

اساس این روش تصمیم‌گیری بر مقایسات زوجی بنا گردیده است. تصمیم‌گیرنده با فرآهم آوردن درخت سلسله مراتبی مراحل کار را آغاز می‌کند. درخت سلسله مراتب تصمیم، عوامل مورد مقایسه و گزینه‌های رقیب مورد ارزیابی در تصمیم را نشان می‌دهد. سپس یك سری مقایسات زوجی انجام می‌گیرد. این مقایسات وزن هر یك از فاکتورها را در راستای گزینه‌های رقیب مورد ارزیابی، نشان می‌دهد. در نهایت منطق فرآیند

تحلیل سلسله مراتبی به گونه‌ای ماتریس‌های حاصل از مقایسات زوجی را با یکدیگر تلفیق می‌سازد که تصمیم بهینه حاصل آید.

۱.۱.۲ اصول فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

توماس ساعتی چهار اصل زیر را به عنوان اصول فرآیند تحلیل سلسله مراتبی بیان نموده و کلیه محاسبات، قوانین و مقررات را بر این اصول بنا نهاده است. این اصول عبارتند از:

- شرط معکوسی

اگر ترجیح عنصر A بر عنصر B برابر n باشد، ترجیح عنصر B بر عنصر A برابر $\frac{1}{n}$ خواهد بود.

- اصل همگنی:

عنصر A با عنصر B باید همگن و قابل مقایسه باشد. به بیان دیگر برتری عنصر A بر عنصر B نمی‌تواند بی‌نهایت یا صفر باشد.

- وابستگی:

هر عنصر سلسله مراتبی به عنصر سطح بالاتر خود می‌تواند وابسته باشد و به‌صورت خطی این وابستگی تا بالاترین سطح می‌تواند ادامه داشته باشد.

- انتظارات[۱]

هرگاه تغییری در ساختمان سلسله مراتبی رخ دهد روند ارزیابی باید مجدداً انجام گیرد [۳].

۲.۱.۲ مدل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

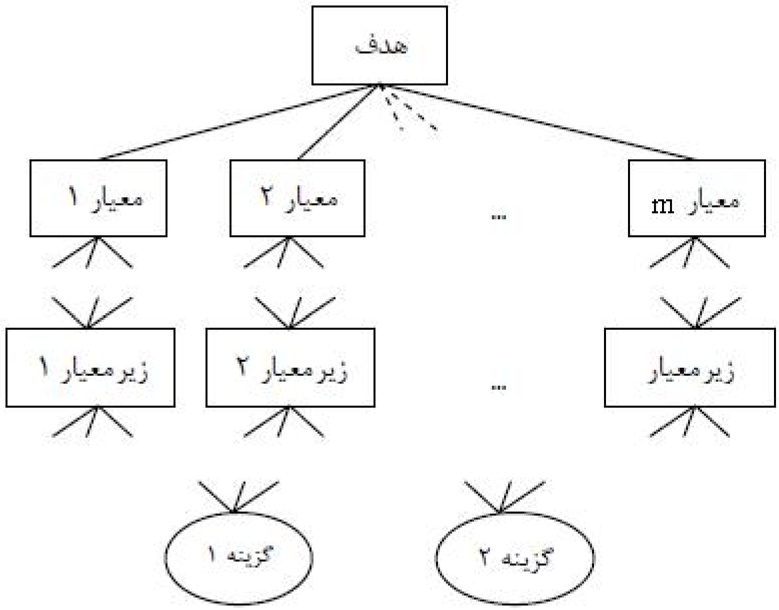
بکارگیری این روش مستلزم چهار گام عمده زیر می‌باشد:

- مدل سازی

در این گام، مسأله و هدف تصمیم‌گیری به‌صورت سلسله مراتبی از عناصر تصمیم، که با هم در ارتباط می‌باشند، تبدیل می‌شود. عناصر تصمیم شامل «معیارهای تصمیم‌گیری» و «گزینه‌های تصمیم» می‌باشد. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی نیازمند شکستن یك مساله با چندین معیار به سلسله مراتبی از سطوح است. سطح بالا بیانگر هدف اصلی فرآیند تصمیم گیری است. سطح دوم، نشان دهنده شاخص‌های عمده و اساسی (که ممکن است به شاخص‌های فرعی و جزئی‌تر در سطح بعدی شکسته

[۱] expectations

شود) می‌باشد. سطح آخر گزینه‌های تصمیم را ارائه می‌کند. شکل ۱.۲ سلسله مراتب یك مساله تصمیم نشان داده شده است [۳].



شکل ۱.۲: نمودار سلسله مراتبی

- مقایسات زوجی(قضاوت ترجیحی)

انجام مقایسات بین گزینه‌های مختلف تصمیم، بر اساس هر معیار و قضاوت در مورد اهمیت شاخص تصمیم با انجام مقایسات دوبه‌دو، بعد از طراحی مراتب مساله تصمیم را مقایسات زوجی روش AHP گویند. تصمیم‌گیرنده می‌بایست مجموعه ماتریس‌هایی را تشکیل دهد که به‌طور عددی اهمیت یا ارجحیت نسبی شاخص‌ها را نسبت به یکدیگر و هر گزینه تصمیم را با توجه به شاخص‌ها نسبت به سایر گزینه‌ها اندازه‌گیری نماید. این کار با انجام مقایسات دو به دو بین عناصر تصمیم (مقایسه زوجی) و از طریق تخصیص امتیازات عددی که نشان دهنده ارجحیت یا اهمیت بین دو عنصر تصمیم است، صورت می‌گیرد.

برای انجام این‌کار معمولا از مقایسه گزینه یا معیار iام نسبت به گزینه یا شاخص jام استفاده می‌شود که در جدول ۱.۲ نحوه ارزش گذاری شاخص‌ها نسبت به هم نشان داده شده است.

درجه اهمیت نسبی	مقایسه نسبی شاخص i با j
۱	اهمیت مساوی
۳	اهمیت ضعیف i بر j
۵	اهمیت قوی i برj
۷	اهمیت خیلی قوی i بر j
۹	اهمیت مطلق i بر j

(۱.۲)

نکته قابل توجه این‌است که اگر اهمیت عنصر i بر j برابر n باشد اهمیت j بر i برابر با $\frac{1}{n}$ است و با توجه به این نکته کافی است در ماتریس فقط مقادیر بالای قطر اصلی پر شود. مقادیر زیر قطر اصلی معکوس مقادیر بالای قطر خواهد بود به عبارت دیگر $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$.

- محاسبات وزن‌های نسبی

تعیین وزن «عناصر تصمیم» نسبت به هم از طریق مجموعه‌ای از محاسبات عددی، گام بعدی در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی است که با انجام محاسبات لازم برای تعیین اولویت هر یك از عناصر تصمیم با استفاده از اطلاعات ماتریس‌های مقایسات زوجی صورت می‌پذیرد.

با توجه به اینکه ماتریس تصمیم‌گیری ممکن است سازگار یا ناسازگار باشد طریقه بدست آوردن وزنها متفاوت است که در ادامه به محاسبه آن پرداخته می‌شود.

- ادغام وزنهای نسبی

به منظور رتبه‌بندی گزینه‌های تصمیم، در این مرحله وزن نسبی هرعنصر را در وزن معیارهای بالاتر ضرب کرد، تا وزن نهایی آن بدست آید. با انجام این مرحله برای هر گزینه، مقدار وزن نهایی بدست می‌آید.

۳.۱.۲ سازگاری در قضاوت‌ها

تقریباً تمامی محاسبات مربوط به فرآیند تحلیل سلسله مراتبی بر اساس قضاوت اولیه تصمیم‌گیرنده که در قالب ماتریس مقایسات زوجی ظاهر می‌شود، صورت می‌پذیرد و هر گونه خطا و ناسازگاری در مقایسه و تعیین اهمیت بین گزینه‌ها و شاخص‌ها نتیجه نهایی به دست آمده از محاسبات را مخدوش می‌سازد. نرخ ناسازگاری[۲] که در ادامه با نحوه محاسبه آن آشنا خواهیم شد، وسیله‌ای است که سازگاری

[۲] inconsistency ratio(I.R)

را مشخص ساخته و نشان می‌دهد که تا چه حد می‌توان به اولویتهای حاصل از مقایسات اعتماد کرد. برای مثال اگر گزینه A نسبت به B مهمتر (ارزش ترجیحی ۵) و B به C نسبتا مهمتر (ارزش ترجیحی ۳) باشد، آنگاه باید انتظار داشت A نسبت به C خیلی مهمتر (ارزش ترجیحی ۷ یا بیشتر) ارزیابی گردد یا اگر ارزش ترجیحی A نسبت به B، ۲ و B نسبت به C، ۳ باشد آنگاه ارزش A نسبت به C باید ارزش ترجیحی ۴ را ارائه کند. شاید مقایسه دو گزینه امری ساده باشد، اما وقتی‌که تعداد مقایسات افزایش یابد اطمینان از سازگاری مقایسات به راحتی میسر نبوده و باید با به کارگیری نرخ سازگاری به این اعتماد دست یافت. تجربه نشان داده است که اگر نرخ ناسازگاری کمتر از ۰/۱ باشد سازگاری مقایسات قابل قبول بوده و در غیر این‌صورت مقایسه‌ها باید تجدید نظر شود.

۴.۱.۲ استخراج وزنها از ماتریس سازگار

فرض کنید A ماتریس تصمیم ناسازگار بصورت زیر باشد.

$$\begin{array}{c|ccc} & A_1 & \cdots & A_n \\ \hline A_1 & 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & a_{n1} & \cdots & 1 \end{array} \tag{۲.۲}$$

فرض کنید وزن واقعی گزینه‌ها $(w_1, \ldots, w_n)$ باشد آنگاه ماتریس تصمیم باید بصورت زیر باشد:

$$\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline A_1 & 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ A_2 & \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{array} \tag{۳.۲}$$

در این حالت بدلیل سازگار بودن ماتریس رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij} \quad , \quad \forall i, j, k = 1, \cdots, n.$$

بنابراین a_{ij} را می‌توان بصورت $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ نشان داد.

برای محاسبه w_i ها می‌توان از نرمالیزه کردن هر یک از ستون‌های ماتریس A استفاده کرد. یعنی:

$$w_i = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}} \quad , \quad \forall i = 1, \cdots, n,$$

که پاسخ حاصل از نرمالیزه کردن هریک از ستونهای jام با یکدیگر برابر خواهند بود.

۵.۱.۲ استخراج وزنها از ماتریس ناسازگار

در این حالت از روش فوق نمی توان برای استخراج وزنها استفاده کرد. چهار روش عمده در محاسبه وزنها در حالت ناسازگاری ماتریس تصمیم موجود است که عبارتند از:

۱. روشهای تقریبی

۲. روش حداقل مربعات (LS)[۳]

۳. روش حداقل مربعات لگاریتمی (LLS)[۴]

۴. روش بردار ویژه (EV)[۵]

روشهای تقریبی

این دسته از روش ها به چهار گروه تقسیم می شوند:

۱. روش مجموع سطری

ابتدا مجموع عناصر هر سطر را محاسبه کرده تا یک بردار ستونی حاصل شود

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

سپس این بردار ستونی را نرمالیزه کنید.

$$w_i = \frac{a'_i}{\sum_{i=1}^{n} a'_i}.$$

۲. روش مجموع ستونی

ابتدا مجموع عناصر هر ستون را محاسبه می‌کنیم تا یک بردار سطری حاصل شود

$$a'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

[۳] least squares
[۴] logarithmic least squares
[۵] eigen vector

عناصر بردار بدست آمده را معکوس و سپس نرمالیزه کنید.

$$w_j = \frac{\frac{1}{a'_j}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a'_j}},$$

۳. روش میانگین حسابی

(آ) مقادیر هر ستون را با هم جمع کنید.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

(ب) هر عنصر در ماتریس را به جمع عناصر ستون خودش تقسیم کرده تا ماتریس نرمالیزه شود.

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}.$$

(ج) میانگین عناصر در هر سطر را محاسبه کنید.

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a'_{ij}.$$

۴. روش میانگین هندسی

(آ) میانگین هندسی عناصر هر سطر را محاسبه کنید.

$$a'_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}.$$

(ب) بردار بدست آمده را نرمالیزه کنید.

$$w_i = \frac{a'_i}{\sum_{i=1}^{n} a'_i}.$$

روش حداقل مربعات

فرض کنید A ماتریس تصمیم ناسازگار بصورت زیر باشد.

$$\begin{array}{c|ccc} & A_1 & \cdots & A_n \\ \hline A_1 & 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & a_{n1} & \cdots & 1 \end{array} \qquad (۴.۲)$$

فرض کنید وزن واقعی گزینه‌ها $(w_1, \ldots, w_n)$ باشد آنگاه ماتریس تصمیم باید بصورت زیر باشد:

$$\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline A_1 & 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ A_2 & \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{array} \tag{5.2}$$

باید w_i را به‌گونه‌ای پیدا کنیم که اختلاف مولفه‌های ماتریس فوق با ماتریس تصمیم A به کمترین مقدار ممکن برسد.

برای این کار مدل زیر را باید اجرا کنیم:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j})^2 \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

محدودیت موجود در این مدل بیان می‌کند که وزن‌ها باید نرمال شده باشند (مجموع وزنها برابر ۱ باشد). می‌توان مدل فوق را با توجه به رابطه‌ی بین درآیه‌های دو ماتریس به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j - w_i)^2 \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \end{aligned} \tag{7.2}$$

و بدین‌ترتیب یك تقریب مناسب از وزنها بدست می‌آید.

به منظور بهینه کردن مدل فوق از تابع لاگرانژ بصورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j - w_i)^2 + \lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$$

مشتق این تابع نسبت به w_l (با توجه بر اینکه عضویت w_l ممکن است از $a_{ij}w_j$ و یا از w_i باشد) منجر به دستگاه معادلات زیر می‌گردد.

$$\frac{\partial L}{\partial w_l} = 2\{\sum_{i=1}^{n}(a_{il}w_l - w_i)a_{il} - \sum_{j=1}^{n}(a_{lj}w_j - w_l)\} + \lambda = 0$$

بنابراین به‌منظور دسترسی به بهینه موجود از مدل فوق باید دستگاه غیر همگن زیر حاوی n+۱ معادله توام با n+۱ متغییر حل گردد.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a_{il}w_l - w_i)a_{il} - \sum_{j=1}^{n}(a_{lj}w_j - w_l) + \lambda = 0, \\ \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{cases} \tag{۸.۲}$$

در ضمن شرط لازم برای نقطه بهینه (با قرار دادن مشتقات نسبی برابر با صفر) از مدل فوق شرط کافی را نیز تامین می‌نماید زیرا مشتمل بر یک برنامه‌ریزی محدب است و از این‌رو نقطه بهینه سراسری نیز حاصل می‌شود.

روش حداقل مربعات لگاریتمی (LLS)

با لگاریتم گرفتن از طرفین مساله (۶.۲) به جای تابع هدف در مدل LS می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد [۱۶][۲۰].

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (\ln a_{ij} + \ln w_j - \ln w_i)^2 \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad w_i > 0. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

روش بردار ویژه

دستگاه معادلات زیر را با توجه به ماتریس تصمیم و بردار وزن در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n &= \lambda w_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n &= \lambda w_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n &= \lambda w_n \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

که در آن a_{ij} ترجیح عنصر i بر jام است و w_i وزن عنصر iام و λ مقدار ثابتی است که مقدار ویژه ماتریس به‌حساب می‌آید. یا

$$Aw = \lambda w.$$

در روش بردار ویژه از تجزیه ماتریس مربع ومعکوس‌پذیر A به بردار ویژه و به ازای ماکزیمم ویژه[۶] آن استفاده می‌شود:

[۶] eigen value

$$Aw = \lambda_{\max} w.$$

بطور کلی در رابطه $A.w = \lambda.I.w$ برای آنکه $w \neq ۰$ باشد باید دترمینان ماتریس ضرائب در دستگاه همگن $(A - \lambda.I)w = ۰$ نیز برابر با صفر شود یعنی $|A - \lambda.I| = ۰$. حل این دترمینان منجر به یافتن ارزش‌های متعددی برای λ می‌گردد که یک بردار ویژه به‌ازای استفاده از هر کدام از آنها نیز حاصل خواهد شد. انحراف کمی[۷] در عناصر ماتریس A موجب تغییرات ناچیزی در مقادیر ویژه (λ) و به‌خصوص $\lambda_{\max}$ می‌گردد، از این‌رو برای محاسبه w (در وضعیت عدم ثبات) از مقدار ویژه $\lambda_{\max}$ استفاده می‌گردد.

$$Aw = \lambda_{\max} w,$$

$$\text{یا} \qquad w_i = \frac{\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} w_j}{\lambda_{\max}} \quad \forall i = ۱, \ldots, n. \qquad (۱۱.۲)$$

یک روش محاسبه تقریبی برای بردار ویژه w ، استفاده از توان افزایشی k برای ماتریس A است و سپس نرمالیزه کردن نتایج حاصل از آن به‌صورت زیر:

$$w = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{e^t A^k e},$$

که e بردار یکه است [۱].

روش بردار ویژه تقریبی را در واقع می‌توان به یک روند میانگین‌گیری ساده تفسیر نمود به‌گونه‌ای که بردار نهایی w از میانگین‌گیری از کلیه طرق ممکن برای مقایسه معیارها با یکدیگر حاصل می‌شود. بنابراین بردار ویژه یک روش طبیعی در محاسبه اوزان است.

محاسبه نرخ ناسازگاری

بردار ویژه یک اندازه‌گیری طبیعی از درجه ناسازگاری اطلاعات موجود ماتریس A را به‌صورت زیر مشخص می‌کند [۱۴]:

$$C.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - ۱} \qquad (۱۲.۲)$$

مقدار $\lambda_{\max}$ برای ماتریس معکوس‌پذیر مقایسات زوجی A همیشه بزرگتر یا مساوی با بعد ماتریس است و در صورتی‌که ماتریس سازگار باشد این مقدار برابر n خواهد بود از این جهت $\lambda_{\max} - n$ اندازه‌گیری مناسبی برای درجه ناسازگاری یک ماتریس است.

آقای ساعتی شاخص CI را با شاخص تصادفی (R.I)[۸] نیز مقایسه می‌کند.

[۷] perturbation
[۸] random index

R.I به‌ازای ارزش‌های مختلف از n، توسط تولید ماتریس‌های تصادفی A و محاسبه میانگین C.I از آن ماتریس‌ها به‌وجود آمده است. که مقادیر در جدول ۱۳.۲ آورده شده است.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
R.I	۰	۰	۰/۵۸	۰/۹	۱/۱۲	۱/۲۴	۱/۳۲	۱/۴۱	۱/۴۵	۱/۴۹	۱/۵۱	۱/۴۸	۱/۵۶	۱/۵۷	۱/۵۹

(۱۳.۲)

با مفروض بودن R.I نسبت معروف به نرخ سازگاری (C.R)[۹] به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$C.R = \frac{C.I}{R.I}.$$

چنانچه $C.R \leq ۰/۱$ باشد، ماتریس از نوع سازگار خواهد بود.

۲.۲ وزن بازه‌ای AHPبرای داده‌های قطعی

در این بخش چگونگی بدست آوردن وزن بازه‌ای در روش AHP برای داده‌های قطعی بررسی و برخی از خواص آن مورد بحث قرار می‌گیرند[۲۲].

فرض کنید عناصر مقایسات زوجی با a_{ij} برای هر i , j مشخص و برآورد وزن بازه‌ای با $w_i = [\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ نشان داده شود که $\underline{w_i}$ و$\overline{w_i}$ به‌ترتیب کران پایین و بالا برای وزن بازه‌ای w_i است.

ماتریس فاصله برآورد شده وزن را می‌توان به‌فرم زیر تعریف کرد.

$$\forall i, j_{i\neq j} \qquad w_{ij} = [\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}}, \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}},] \tag{۱۴.۲}$$

که ماکزیمم محدوده بدست آمده از برآورد وزن فاصله‌ای است. فرض براین است که

$$\forall \varepsilon > ۰; \quad \underline{w_i} \leq \varepsilon.$$

تعاریف زیر متناظر با حالات وزنهای نرمال معمولی(قراردادی) است [۲۵][۲۴].

تعریف ۱.۲.۲. به یک بردار وزن $(w_۱, \dots, w_n)$ وزن بازه‌ای نرمال گوییم اگروتنهااگر

$$\sum_i \overline{w_i} - \max_j(\overline{w_j} - \underline{w_j}) \geq ۱, \tag{۱۵.۲}$$

$$\sum_i \underline{w_i} + \max_j(\overline{w_j} - \underline{w_j}) \leq ۱. \tag{۱۶.۲}$$

مثال ۲.۲.۲.

[۹] consistency ratio

سه بازه‌ی $w_۱ = [۰/۳, ۰/۶]$ و $w_۲ = [۰/۲, ۰/۴]$ و $w_۳ = [۰/۱, ۰/۲]$ در تعریف ۱.۲.۲ صدق نمی‌کنند اما $w_۱ = [۰/۵, ۰/۶]$ و $w_۲ = [۰/۲, ۰/۴]$ و $w_۳ = [۰/۱, ۰/۲]$ در تعریف فوق صادق هستند.

قضیه ۳.۲.۲. [۲۲]

اگر یک بردار وزن بازه‌ای در شرایط (۱۵.۲) و (۱۶.۲) صدق کند در این‌صورت بردار وزنی بصورت $w = (w_۱, \dots, w_n)$ موجود است که

$$\sum_i w_i = ۱ \qquad \underline{w_i} \leq w_i \leq \overline{w_i} \quad i = ۱, \dots, n.$$

برهان

با توجه به روابط (۱۵.۲) و (۱۶.۲) واضح است که $\sum_i \underline{w_i} \leq ۱, \sum_i \overline{w_i} \geq ۱$ در نتیجه

$$\underline{w_i} \leq w_i \leq \overline{w_i} \quad i = ۱, \dots, n \Longrightarrow \sum_i \underline{w_i} \leq \sum_i w_i \leq \sum_i \overline{w_i} \Longrightarrow \exists i; \sum_i w_i = ۱.$$

نکته ۴.۲.۲. قضیه ۳.۲.۲ رابطه‌ای که در فاصله‌ی نرمال است را نشان می‌دهد. پس می‌توان گفت که نرمال عادی تعمیم بردار نرمال بازه‌ای شرح داده شده در تعریف ۱.۲.۲ است.

با توجه به a_{ij}های ماتریس مقایسات زوجی، مساله ما یافتن وزن‌های w_i با در نظر گرفتن شرایط زیر است.

۱. با توجه به ماتریس مقایسات زوجی، a_{ij}ها باید واقع در وزن بازه‌ای برآورد شده w_{ij} باشند [۲۳] بعبارت دیگر

$$a_{ij} \in w_{ij} \Longleftrightarrow \frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}} \leq a_{ij} \leq \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i}, \\ a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i}. \end{cases} \qquad (۱۷.۲)$$

۲. وزن‌های بازه‌ای برآورد شده $w_i = [\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ باید در وضعیت نرمال شرح داده شده در تعریف ۱.۲.۲ صدق کند.

می‌توان محدودیتهای نرمال بودن مساله را بصورت زیر نوشت:

$$\sum_i \overline{w_i} - \max_j(\overline{w_j} - \underline{w_j}) \geq ۱ \Rightarrow \sum_i \overline{w_i} - (\overline{w_j} - \underline{w_j}) \geq ۱ \Rightarrow \sum_{i \neq j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq ۱,$$
$$\sum_i \underline{w_i} + \max_j(\overline{w_j} - \underline{w_j}) \leq ۱ \Rightarrow \sum_i \underline{w_i} + (\overline{w_j} - \underline{w_j}) \leq ۱ \Rightarrow \sum_{i \neq j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq ۱.$$
(۱۸.۲)

۳. فاصله‌ی وزن‌های بازه‌ای برآورد شده باید تا حد امکان کوچک باشد بنابراین تابع هدف زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\min_{\overline{w_i},\underline{w_i}} \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i})$$

مساله تبدیل به مساله LP زیر می‌شود که به‌صورت PAHPC نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
\min_{\overline{w_i},\underline{w_i}} \quad & J = \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) \\
s.t \quad & a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i} \quad \forall i, j (i \neq j), \\
& a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \quad \forall i, j (i \neq j), \\
& \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq ۱ \quad \forall i, \\
& \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq ۱ \quad \forall i, \\
& \overline{w_i} \geq \underline{w_i} \quad \forall i, \\
& \underline{w_i} \geq \varepsilon \quad \forall i. \\
& \Omega = \{۱, \ldots, n\}
\end{aligned} \qquad (۱۹.۲)$$

قضیه ۵.۲.۲. [۲۲] *مدل $PAHPC$ دارای جواب بهینه است.*

برهان

اگر قرار دهیم $w_1^* = \cdots = w_n^* = [\varepsilon, \frac{۱}{n-۱}]$ این بردار بازه‌ای با انتخاب ε مناسب در محدودیت‌های مساله صدق می‌کند. فضای ایجاد شده در مختصات دکارتی با بازه‌های $w_i = [\varepsilon, \frac{۱}{n-۱}]$ برای $i = ۱, \ldots, n$ یک مجموعه بسته کراندار است پس PAHPC دارای جواب بهینه است. □

وقتی ماتریس مقایسه داده شده باشد می‌توان بردار فاصله بهینه را بدست آورد. سازگاری بین ماتریس داده شده و مدل می‌تواند مقدار تابع هدف J در (۱۹.۲) را نشان دهد. اگر $J = ۰$ می‌توان گفت برای قضیه زیر ماتریس داده شده کاملا سازگار است.

قضیه ۶.۲.۲. [۲۲] *اگر ماتریسی با $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ برای هر i و j داده شود، جوابهای بهینه $\underline{w_i} = \overline{w_i} = w_i$ برای هر i مساله LP را می‌توان از $PAHPC$ بدست آورد. (برای مساله(۱۹.۲))*

برهان

واضح است که قضیه برقرار است زیرا $\underline{w_i} = \overline{w_i} = w_i$ برای هر i با $J = ۰$ در تمام محدودیتها صدق میکند. تابع هدف را میتوان یک شاخص سازگاری در نظر گرفت. مقدار بزرگتر J متناقض با اطلاعات مدل داده شده است.□

اطلاعات نهایی با بازه‌های عددی بدست می‌آید اما تمرکز ما روی یک بردار بازه‌ای مقدم بر سایر بردارهاست. بنابراین یک رابطه تقدم بازه‌ای با ۷.۳.۱ در نظر گرفته می‌شود.

از آنجایی‌که اولویت نهایی با بازه‌ی عددی بدست می‌آید در برخی موارد ممکن است بین گزینه‌ها روابط جزئی‌تری باشد. اگر تصمیم گیرنده می‌خواهد روابط خطی منظم داشته باشد می‌تواند از تعریف دوم یا سومی که در تعریف۷.۳.۱ ارائه داده شده استفاده کند.

در ادامه به منظور بررسی وزن‌های بدست آمده در روش PAHPC ، چهار حالت مختلف ماتریس مقایسات زوجی در قالب مثال بررسی شده و هر حالت با دو روش PAHPC و بردار ویژه EV حل و مقایسه شده است.

مثال ۷.۲.۲. به منظور نشان دادن مدل PAHPC چهار مورد مقایسات زوجی زیر را در نظر بگیرید:

۱. سازگاری کامل

ماتریسی که درآیه‌های آن خاصیت $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ را داشته باشد سازگار کامل است. مانند

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۲ & ۴ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۱ & ۱ \\ \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

وزن‌های بدست آمده با استفاده از مدل PAHPC و مدل بردار ویژه EV در جدول زیر آمده است.

PAHPC	EV	گزینه
۰/۳۴۷۸	۰/۳۴۷۸	w_1
۰/۳۴۷۸	۰/۳۴۷۸	w_2
۰/۱۷۳۹	۰/۱۷۳۹	w_3
۰/۰۸۷۰	۰/۰۸۷۰	w_4
۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۳۵	w_5

چون ماتریس سازگار کامل است همانطور که از محاسبه اوزان مشخص است وزن بدست آمده با دو روش برابرند.

۲. تسلط ردیف

هر دو ردیف از ماتریس رابطه تسلط ردیف بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\forall k \quad a_{ik} \geq a_{jk}$$

مانند

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در نمونه تسلط ردیف با روش‌های بردار ویژه، کمترین مربعات و کمترین مربعات لگاریتمی وزن بدست آمده در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\forall k \quad a_{ik} \geq a_{jk} \Rightarrow w_i \geq w_j$$

در جدول زیر وزنها به دو روش PAHPC و EV داده شده است.

PAHPC	EV	گزینه
۰/۴۵۲۸	۰/۴۶۴۰	w_1
۰/۲۲۶۴	۰/۲۴۱۳	w_2
[۰/۱۰۳۸, ۰/۱۵۰۹]	۰/۱۱۲۰	w_3
[۰/۰۹۰۶, ۰/۱۱۳۲]	۰/۰۹۹۸	w_4
[۰/۰۵۶۶, ۰/۱۰۳۸]	۰/۰۸۲۸	w_5

در مدل فوق وزن‌ها طبق روش‌های EV و LS و LLS از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کنند [۱۷]

$$w_۱ \geq w_۲ \geq w_۳ \geq w_۴ \geq w_۵.$$

نتیجه‌ی بدست آمده توسط روش PAHPC نیز همین رتبه بندی را نشان می‌دهد یعنی داریم:

$$w_۱ \succeq w_۲ \succeq w_۳ \succeq w_۴ \succeq w_۵.$$

۳. تعدی ضعیف

ماتریس زیر مثالی از تعدی ضعیف است که بین گزینه‌های آن رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$a_{ij} \geq ۱, a_{jk} \geq ۱ \Longrightarrow a_{ik} \geq ۱$$

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۲ & ۲ & ۴ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ & ۹ \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۹} & ۱ \end{pmatrix}$$

جدول زیر وزنها را به دو روش PAHPC و EV داده است.

گزینه	EV	PAHPC
$w_۱$	۰/۴۴۶۸	۰/۴۷۳۷
$w_۲$	۰/۲۲۳۱	۰/۲۳۶۸
$w_۳$	۰/۱۱۸۵	[۰/۱۱۸۴, ۰/۱۵۷۹]
$w_۴$	۰/۱۶۶۴	[۰/۰۹۴۷, ۰/۱۱۸۴]
$w_۵$	۰/۰۴۵۲	[۰/۰۱۳۲, ۰/۰۶۷۷]

با توجه به اینکه رابطه تسلط ردیف در بین داده‌ها برقرار نیست، رتبه بندی با حالت قبل متفاوت است و بر طبق روش EV رتبه بندی بصورت زیر است:

$$w_۱ \geq w_۲ \geq w_۴ \geq w_۳ \geq w_۵.$$

که نمی‌توان گفت این رتبه‌بندی مناسب برای داده‌های داده شده است. اما روش PAHPC رتبه بندی زیر را می‌دهد

$$w_۱ \succeq w_۲ \succeq w_۳ \succeq w_۴ \succeq w_۵.$$

۴. غیر متعدی

در این حالت شرایط تعدی ضعیف برقرار نیست. مانند ماتریس زیر:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۲ & ۴ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۲ \\ ۲ & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{pmatrix}$$

جدول زیر وزن‌ها را به دو روش PAHPC و EV داده است.

گزینه	EV	PAHPC
$w_۱$	۰/۲۲۹۹	[۰/۱۳۰۴, ۰/۳۴۷۸]
$w_۲$	۰/۳۷۳۲	۰/۳۴۷۸
$w_۳$	۰/۱۸۶۶	۰/۱۷۳۹
$w_۴$	۰/۰۹۳۳	۰/۰۸۷۰
$w_۵$	۰/۱۱۷۰	[۰/۰۴۳۵, ۰/۲۶۰۹]

در این حالت نتیجه بدست آمده از PAHPC یک حالت نسبی است، در حالیکه نتیجه بدست آمده با EV یک رابطه خطی است و از آنجاییکه پایه PAHPC آنالیز احتمال است همه مقادیر ممکن در بازه‌ها می‌تواند بدست آید. بنابراین رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$w_۲ \succeq w_۳ \succeq w_۴ \quad , \quad w_۲ \succeq w_۱ \succeq w_۵.$$

نهایتا اگر در روش لازم است رتبه برتر را با روابط تسلط ردیف حفظ کند، شرایط زیر را می‌توان به مدل PAHPC اضافه کرد. فرض کنید $a_{ik} \geq a_{jk}$ برای هرk. از شرایط محدودیت (۱۷.۲) خواهیم داشت:

$$a_{ik}\overline{w_k} \geq \underline{w_i}, a_{ik}\underline{w_k} \leq \overline{w_i}$$

با توجه به $a_{ik} \geq a_{jk}$ این امکان برای $\overline{w_j}$ وجود دارد که

$$\overline{w_j} \leq a_{ik}\underline{w_k} \qquad \forall k(k \neq i) \tag{۲۰.۲}$$

زیرا

$$\begin{aligned} \overline{w_j} &\geq a_{jk}\underline{w_k}, \\ a_{ik}\underline{w_k} &\geq a_{jk}\underline{w_k}. \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

و بطور مشابه ممکن است برای $\underline{w_j}$

$$\underline{w_i} \geq a_{jk}\overline{w_k} \qquad \forall k(k \neq j), \tag{۲۲.۲}$$

زیرا

$$\begin{aligned} a_{ik}\overline{w_k} &\geq \underline{w_i}, \\ a_{ik}\overline{w_k} &\geq a_{jk}\overline{w_k}. \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

فرض کنید شرایط محدودیت (۲۰.۲) و (۲۲.۲) را داریم. اگر یک جواب در PAHPC با شرایط (۲۰.۲) و (۲۲.۲) موجود باشد این شرایط منجر به $w_i \succeq w_j$ می‌شود زیرا

$$\overline{w_j} \leq a_{ik}\underline{w_k} \quad , \quad a_{ik}\underline{w_k} \leq \overline{w_i} \Longrightarrow \overline{w_j} \leq \overline{w_i},$$
$$\underline{w_j} \leq a_{jk}\overline{w_k} \quad , \quad a_{jk}\overline{w_k} \leq \underline{w_i} \Longrightarrow \underline{w_j} \leq \underline{w_i}.$$

در نتیجه بنا بر تعریف ۷.۳.۱ $w_i \succeq w_j$ پس می‌توان با توجه به اطلاعات مساله برخی محدودیت‌ها را اضافه کرد به‌عنوان مثال اگر $w_i \succeq w_j$ می‌توان شرایط زیر را به PAHPC اضافه کرد.

$$\overline{w_j} \leq \overline{w_i}, \underline{w_j} \leq \underline{w_i}$$

اگر هیچ مجموعه مجازی پس از حل PAHPCبدست نیاید می‌توان گفت که این اطلاعات خاص با داده‌های داده شده در تناقض است.

۳.۲ محاسبه وزن نهایی در AHP با اوزان بازه‌ای

مساله تصمیم‌گیری در AHP یک ساختار سلسله مراتبی متشکل از معیارها و گزینه‌ها است. یک تصمیم‌گیرنده، ماتریس مقایسات زوجی برای گزینه‌های $A_i(i = ۱, \ldots, n)$ ، تحت هر معیار و همچنین ماتریس مقایسات برای معیارهای $C_k(k = ۱, \ldots, m)$ ، را در اختیار دارد. که با توجه به این اطلاعات وزن نهایی قابل محاسبه است.

اگر وزن به‌صورت قطعی محاسبه شده باشد، وزن نسبی گزینه A_i تحت معیار C_k برابر با w_{ik} و وزن هر یک از معیارهای C_k برابر باP_k است. وزن نهایی گزینه A_i از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$w_i = \sum_k P_k w_{ik}.$$

۱.۳.۲ محاسبه وزن نهایی در AHP بازه‌ای

در AHP بازه‌ای همان‌طور که دیده شد اوزان نسبی به‌صورت بازه‌های عددی بدست می‌آیند در نتیجه وزن نهایی بزرگترین بازه‌ی بدست آمده است [۱۱][۱۰]. بنابراین با استفاده از وزن‌های نسبی بدست آمده می‌توانیم وزن نهایی را بدست آوریم در AHP بازه‌ای وزن نسبی گزینه A_i تحت معیار C_k برابر است با $w_{ik} = [\underline{w_{ik}}, \overline{w_{ik}}]$ و وزن هر یک از معیار C_k برابر است با $P_k = [\underline{P_k}, \overline{P_k}]$. کران بالای بازه‌ای وزن نهایی گزینه A_i از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \overline{w_i} = max \sum_k P_k^{i*} \overline{w_{ik}} \\ s.t \qquad \sum_k P_k^{i*} = ۱, \\ \underline{P_k} \leq P_k^{i*} \leq \overline{P_k}, \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

که P_k^{i*} متغیرهای تصمیم برای وزن معیارهااست که ماکزیمم کران بالای وزن نهایی بازه‌ای گزینه A_i از آن بدست می‌آید. بطور مشابه از مساله زیر کران پایین وزن نهایی بازه‌ای گزینه A_i حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \underline{w_i} = min \sum_k P_{k*}^{i} \underline{w_{ik}} \\ s.t \qquad \sum_k P_{k*}^{i} = ۱, \\ \underline{P_k} \leq P_{k*}^{i} \leq \overline{P_k}. \end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

وزن نهایی بازه‌ای گزینه A_i ، بصورت $w_i = [\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ نشان داده می‌شود کرانها در رابطه‌ی

$$P_k^{i*} \overline{w_{ik}} \geq P_{k*}^{i} \underline{w_{ik}}$$

صدق می‌کنند زیرا آنها به‌ترتیب ماکزیمم و می‌نیمم توابع هدف هستند. وزن نهایی بازه‌ای نشان دهنده ناسازگاری در مقایسات داده شده برای معیارها و گزینه‌های تحت هر معیار است. مدلهای (۲۴.۲) و (۲۵.۲) برای هر گزینه A_i فرمول‌بندی شده‌اند وزن اولویت قطعی در گزینه‌ها وابسته به وزن نسبی گزینه‌های تحت هر معیار است. وزن نهایی بازه‌ای بدست آمده در شرط نرمال بودن صدق می‌کند زیرا در تعریف نرمال بودن وزن‌ها داریم:

$$\begin{cases} \sum_{i \neq j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq ۱, \\ \sum_{i \neq j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq ۱. \end{cases}$$

وزن نهایی بازه‌ای گزینه A_i از رابطه‌ی $w_i = [\sum_k P^i_{k*}\underline{w_{ik}}, \sum_k P^{i*}_k\overline{w_{ik}}]$ بدست می‌آید که در آن P^i_{k*} وP^{i*}_k جواب‌های بهینه مدل‌های (۲۴.۲) و (۲۵.۲) برای هر گزینه هستند. داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}\sum_k P^{i*}_k\overline{w_{ik}} + \sum_k P^j_{k*}\underline{w_{jk}} &\geq \sum_{i\neq j}\sum_k P^i_{k*}\overline{w_{ik}} + \sum_k P^j_{k*}\underline{w_{jk}} \\ = \sum_k P^j_{k*}(\sum_{i\neq j}\overline{w_{ik}} + \underline{w_{jk}}) &\geq \sum P^j_{k*} = ۱.\end{aligned}$$

الف) $P^j_{k*}, k = ۱,\dots,m$ جواب بهینه مدل (۲۵.۲) برای گزینه A_i است که می‌تواند جواب شدنی (۲۴.۲) برای گزینه A_i باشد پس

$$\sum_k P^{i*}_k\overline{w_{ik}} \geq \sum_k p^i_{k*}\overline{w_{ik}}.$$

ب) وزن نسبی $w_{ik} = [\underline{w_{ik}}, \overline{w_{ik}}], k = ۱,\dots,m$ برای هر معیار C_k با توجه به تعریف وزن نرمال در رابطه‌ی $\sum_{i\neq j}\overline{w_{ik}} + \underline{w_{ik}} \geq ۱$ صدق می‌کند.

ج) مجموع وزن‌های اولویت P^j_{k*} نرمال هستند و این یکی از شرایط مدل (۲۴.۲) است. بطور مشابه شرط دوم نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}\sum_k P^i_{k*}\underline{w_{ik}} + \sum_k P^{j*}_k\overline{w_{jk}} &\leq \sum_{i\neq j}\sum_k P^{j*}_k\underline{w_{ik}} + \sum_k P^{j*}_k\overline{w_{kj}} \\ = \sum_k P^{j*}_k(\sum_{i\neq j}\underline{w_{ik}} + \overline{w_{jk}}) &\leq \sum P^{j*}_k = ۱.\end{aligned}$$

وزن بازه‌ای نرمال است یعنی بازه‌ها نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک هستند.

نتیجه ۱.۳.۲. *در یک مساله AHP وزن سراسری با توجه به گزینه‌ها به‌عنوان یک تصمیم نهایی بدست می‌آید. در هر یک از جنبه‌ها از جمله مقایسه معیارها با گزینه‌های تحت هر معیار یک تصمیم‌گیرنده قضاوت خود را به‌عنوان مقایسات زوجی می‌دهد. مقایسات داده شده در هر جنبه ممکن است متفاوت با یکدیگر باشند. از آنجا که وزن سراسری از این جنبه‌ها بدست آمده، وزن نهایی بدست آمده باید منعکس کننده عدم قطعیت و اطمینان در تمام اطلاعات داده شده باشد. وزن سراسری بازه‌ای که در این روش از ماتریس مقایسات زوجی داده شده بدست آمده، مناسب برای اطلاعات نامطمئن است. عرض وزن‌های نهایی بازه‌ای نشان دهنده شاخص ناسازگاری در اطلاعات داده شده است. وزن‌های بازه‌ای بدون اغراق اطلاعات مفیدی برای یک تصمیم نهایی هستند.*

۴.۲ روش $TOPSIS$

فرض کنید $A_1,\dots,A_n$ ، گزینه‌ها و $C_1,\dots,C_m$ ، معیارها و a_{ij} نشان‌دهنده ارزش معیار j ام برای گزینه iام باشد. در این روش فاصله گزینه A_i از نقطه ایده‌آل و ایده‌آل منفی در نظر گرفته می‌شود یعنی گزینه انتخابی باید دارای کمترین فاصله از راه‌حل ایده‌آل و در عین حال دارای دورترین فاصله از راه‌حل ایده‌آل منفی باشد. در روش TOPSIS نکات زیر مدنظر است.

- مطلوبیت هر شاخص باید بطور یکنواخت افزایشی (کاهشی) باشد که بدین صورت بهترین ارزش موجود از یک شاخص نشان‌دهنده ایده‌آل و بدترین ارزش، مشخص کننده ایده‌آل منفی برای آن خواهد بود.

- فاصله یک گزینه از ایده‌آل (ایده‌ال منفی) ممکن است بصورت فاصله اقلیدسی و یا به‌صورت مجموع قدرمطلق از فواصل خطی (معروف به فواصل مستطیلی) محاسبه گردد که این امر بستگی به نرخ تبادل و جایگزینی در بین شاخص‌ها دارد.

  نرخ تبادل در بین دو شاخص برابر با نسبتی از تغییر در یک شاخص است که دقیقا تغییر در شاخص دوم را جبران می‌کند.

الگوریتم روش $TOPSIS$

- گام۱: تبدیل ماتریس تصمیم‌گیری موجود به ماتریس بی‌مقیاس شده با استفاده از روش‌های بی‌مقیاس کردن. به بخش ۱.۲.۱ مراجعه کنید.

- گام۲: ایجاد ماتریس بی‌مقیاس وزین با مفروض بودن بردار وزن $w=\{w_1,\dots,w_m\}$ به‌صورت زیر:

$$v_{ij}=w_in_{ij},$$

که در آن n_{ij} عناصر ماتریسی است که امتیازات شاخص‌ها در آن بی‌مقیاس و قابل مقایسه شده‌اند.

- گام۳: مشخص کردن جواب ایده‌آل و ایده‌آل منفی.

  برای گزینه ایده‌آل A^+ و ایده‌آل منفی A^- را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A^+ &= \{v_1^+,\dots,v_m^+\}=\{\max_i v_{ij}\mid j\in\Omega_b\}\cup\{\min_i v_{ij}\mid j\in\Omega_c\},\\ A^- &= \{v_1^-,\dots,v_m^-\}=\{\min_i v_{ij}\mid j\in\Omega_b\}\cup\{\max_i v_{ij}\mid j\in\Omega_c\}, \end{aligned} \tag{۲۶.۲}$$

  که در آن Ω_b مجموعه معیارهای سود و Ω_c مجموعه معیارهای هزینه هستند.

- گام۴: محاسبه اندازه جدایی(فاصله).

برای محاسبه فاصله از ایده‌آل‌ها از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد.

۱. فاصله گزینه iام با ایده‌آل‌ها با استفاده از روش اقلیدسی به فرم زیر است:

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(v_{ij} - v_j^+)^2} \quad \text{فاصله گزینه } i \text{ از ایده‌آل},$$
$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(v_{ij} - v_j^-)^2} \quad \text{فاصله گزینه } i \text{ از ایده‌آل منفی}. \tag{۲۷.۲}$$

۲. برای محاسبه فاصله گزینه iام از ایده‌آل‌ها می‌توان از فواصل مستطیلی نیز استفاده نمود بطوریکه برای فاصله بین دو گزینه مفروض A_i و A_k داریم

$$D_{ik} = \sum_{j=1}^{m} | v_{ij} - v_{kj} | \quad i, k = 1, \ldots, n \quad i \neq k$$

با استفاده از فواصل مستطیلی می‌توان نشان داد که:

$$D_i^+ + D_i^- = C$$

به‌طوری‌که C یک ثابت مثبت و معلوم است زیرا داریم

$$\sum_{j=1}^{m} | v_{ij} - v_j^+ | + \sum_{j=1}^{m} | v_{ij} - v_j^- | = \sum_{j=1}^{m} v_j^+ - \sum_{j=1}^{m} v_j^- = C$$

این رابطه نشان می‌دهد که گزینه با کوتاهترین فاصله از ایده‌آل دارای بیشترین فاصله از ایده‌آل منفی خواهد بود، در حالی‌که این اصل برای مقیاس اقلیدسی صحت ندارد. استفاده از فواصل مستطیلی برای مواردی مناسب است که نرخ تبادل و جایگزینی در بین شاخص‌ها ثابت و برابر با واحد است. ثابت بودن نرخ تبادل می‌رساند که منحنی‌های بی‌تفاوتی (منحنی که تصمیم‌گیرنده مطلوبیت یا ارجحیت یکسان از انتخاب نقاط واقع بر روی آن خواهد داشت) به‌صورت خط مستقیم و با شیب ۱- خواهند بود. البته توجه کنید که موارد با نرخ تبادل ثابت برای تصمیم‌گیری می‌تواند نادر باشد.

- گام۵: محاسبه نزدیکی نسبی A_i به جواب ایده‌آل.

این نزدیکی نسبی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$RC_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} \quad i = 1, \ldots, n.$$

ملاحظه می‌شود که چنانچه $A_i = A^+$ آنگاه $D_i^+ = \circ$ و خواهیم داشت $RC_i = ۱$ و اگر $A_i = A^-$ آنگاه $D_i^- = \circ$ پس $RC_i = \circ$. بنابراین هر اندازه گزینه A_i به ایده‌آل نزدیکتر باشد ارزش RC_i به واحد نزدیکتر است.

- گام۶: رتبه‌بندی گزینه‌ها.

گزینه‌ها را باتوجه به مقدار RC_i مرتب کنید هر چه مقدار آن به واحد نزدیکتر باشد گزینه به جواب ایده آل نزدیکتر است.

۵.۲ روش $ARAS$

روش ARASبا استفاده از یک تابع مطلوبیت میزان کارایی نسبی گزینه‌ها را بر حسب میزان تاثیرگذاری نسبی و وزن معیارها مشخص می‌کند [۳۳]. فرض کنید $A_1, \ldots, A_n$ ، گزینه‌ها و $C_1, \ldots, C_m$ ، معیارها و a_{ij} نشان‌دهنده ارزش معیار j ام برای گزینه i ام باشد.

- گام۱: ایجاد سطر صفر.

سطر صفر بهینه شامل بهترین حالت ممکن برای هر معیار است. یعنی

$$\begin{aligned} a_{\circ j} &= \max_i a_{ij} \quad \text{برای معیار سود ,} \\ a_{\circ j} &= \min_i a_{ij} \quad \text{برای معیار هزینه .} \end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

البته بهترین حالت ممکن می‌تواند بوسیله تصمیم‌گیرندگان نیز مشخص شود.

- گام۲: نرمال سازی ماتریس تصمیم‌گیری به‌صورت زیر:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=\circ}^{n} a_{ij}^2}} \quad \text{برای معیار سود} \tag{۲۹.۲}$$

و برای معیار هزینه ابتدا داده‌ها را معکوس کرده سپس از رابطه‌ی فوق استفاده می‌کنیم.

- گام۳: ایجاد ماتریس بی‌مقیاس وزین با مفروض بودن بردار وزن $w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ به‌صورت

$$v_{ij} = w_i n_{ij}$$

که در آن n_{ij} عناصر ماتریسی است که امتیازات شاخص‌ها در آن بی‌مقیاس و قابل مقایسه شده‌اند.

- گام۴: تعیین مقدار تابع بهینه برای هر گزینه i با استفاده از مجموع داده‌های هر گزینه به‌صورت زیر

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} v_{ij} \quad i = \circ, \ldots, n$$

- گام۵: تعیین درجه گزینه‌ها با تقسیم مجموع هر گزینه بر مجموع سطر صفر که همان سطر بهینه می‌باشد.

$$K_i = \frac{S_i}{S_0}$$

- گام۶: رتبه‌بندی گزینه‌ها.

با توجه به مقدار K_i که بین ۰ و ۱ است گزینه‌ها را مرتب کنید هر چه مقدار K_i به ۱ نزدیک‌تر باشد گزینه مناسب‌تر است.

فصل ۳

روش‌های $MADM$ برای داده‌های بازه‌ای

در دنیای واقعی با توجه به غیرقابل دسترس بودن یا ناقص بودن اطلاعات، ممکن است تصمیم‌گیرنده نتواند داده‌های دقیقی را با توجه به شرایط مساله ارائه دهد. در این موارد داده‌های ماتریس تصمیم‌گیری بصورت بازه‌ای هستند. بنابراین نیاز به گسترش روش‌های MADM برای داده‌های بازه‌ای است. از این‌رو در این قسمت به بیان سه روش TOPSIS ، ARAS و AHP برای داده‌های بازه‌ای می‌پردازیم[۲۲][۲۷][۱۳].

۱.۳ AHP بازه‌ای برای داده‌های بازه‌ای

در برخی مسائل با ماتریس مقایسات زوجی مواجه می‌شویم که داده‌های آن قطعی نبوده و بدلیل عدم اطمینان تصمیم‌گیرنده داده‌ها به صورت بازه‌ای داده می‌شوند[۲۲].در این موارد ماتریس متقابل نشان داده شده با مقایسات زوجی بصورت $[A_{ij}]$ است که $[A_{ij}] = [a^l_{ij}, a^u_{ij}]$ ودر آن a^l_{ij} وa^u_{ij} بترتیب کرانهای پایین و بالای بازه‌ی $[A_{ij}]$ است و خاصیت متقابل بودن بصورت زیر تعریف می‌شود[۱۸]:

$$a^l_{ij} = \frac{۱}{a^u_{ji}} \quad , \quad a^u_{ij} = \frac{۱}{a^l_{ji}} \quad , \quad a_{ii} = [۱, ۱].$$

در برخورد با داده‌ی بازه‌ای می‌توان دو تقریبی که در شکل ۱.۳ نشان داده شده را در نظر گرفت.

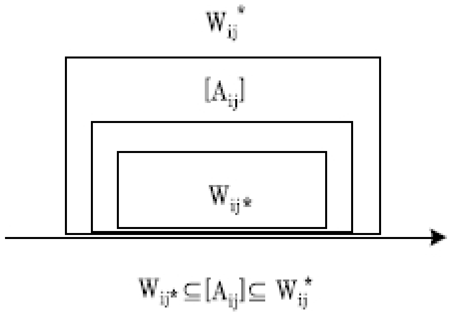
تقریبهای بالا وپایین باید در شرایط زیر صدق کند.

$$w_{ij*} \subseteq [A_{ij}] \quad (\text{تقریب پایین}), \tag{۱.۳}$$

$$w^*_{ij} \supseteq [A_{ij}] \quad (\text{تقریب بالا}), \tag{۲.۳}$$

که w^*_{ij} وw_{ij*} به‌ترتیب تقریب‌های بازه‌ای بالا و پایین نسبتهای مقایسات زوجی هستند.

فرض کنید که وزن‌های بالا و پایین بترتیب با $w_{i*} = [\underline{w_{i*}}, \overline{w_{i*}}]$ و $w^*_i = [\underline{w^*_i}, \overline{w^*_i}]$ نشان داده شوند



شکل ۱.۳: تقریبهای بالا وپایین

پس طبق (۱۴.۲) ،(۱.۳) و (۲.۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_{ij*} \subseteq [A_{ij}] &\Leftrightarrow \left[\frac{\underline{w_{i*}}}{\overline{w_{j*}}}, \frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j*}}}\right] \subseteq [A_{ij}] \\ &\Leftrightarrow a^l_{ij} \le \frac{\underline{w_{i*}}}{\overline{w_{j*}}}, \quad \frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j*}}} \le a^u_{ij} \\ &\Leftrightarrow a^l_{ij}\overline{w_{j*}} \le \underline{w_{i*}}, \quad a^u_{ij}\underline{w_{j*}} \ge \overline{w_{i*}}. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

همچنین

$$\begin{aligned} w^*_{ij} \supseteq [A_{ij}] &\Leftrightarrow \left[\frac{\underline{w^*_i}}{\overline{w^*_j}}, \frac{\overline{w^*_i}}{\underline{w^*_j}}\right] \supseteq [A_{ij}] \\ &\Leftrightarrow a^l_{ij} \ge \frac{\underline{w^*_i}}{\overline{w^*_j}}, \quad \frac{\overline{w^*_i}}{\underline{w^*_j}} \ge a^u_{ij} \\ &\Leftrightarrow a^l_{ij}\overline{w^*_j} \ge \underline{w^*_i}, \quad a^u_{ij}\underline{w_{j^*}} \le \overline{w^*_i}. \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

با استفاده از مفاهیم بزرگترین کران پایین وکوچکترین کران بالا می‌توان مدل‌های پایین و بالا را فرموله کرد. مساله بهینه سازی، ماکزیمم مجموع وزن‌های w_{ij*} است و محدودیت‌های (۳.۳) را می‌توان به مساله LP زیر تغییر داد.

مدل پایین

$$
\begin{aligned}
\max_{\underline{w_{i*}},\overline{w_{i*}}} \quad & J_* = \sum_i (\overline{w_{i*}} - \underline{w_{i*}}) \\
s.t \quad & a_{ij}^l \overline{w_{j*}} \leq \underline{w_{i*}} \quad \forall i,j (i \neq j), \\
& a_{ij}^u \underline{w_{j*}} \geq \overline{w_{i*}} \quad \forall i,j (i \neq j), \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \underline{w_{i*}} + \overline{w_{j*}} \leq ۱ \quad \forall j, \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \overline{w_{i*}} + \underline{w_{j*}} \geq ۱ \quad \forall j, \\
& \underline{w_{i*}} \leq \overline{w_{i*}} \quad \forall i, \\
& \underline{w_{i*}} \geq \varepsilon \quad \forall i.
\end{aligned}
\tag{۵.۳}
$$

بطور مشابه مدل بالای مساله بهینه سازی می‌نیمم مجموع وزن‌های w_{ij}^* با تغییر محدودیت‌های مساله (۴.۳) بصورت زیر خواهد بود.

مدل بالا

$$
\begin{aligned}
\min_{\underline{w_i^*},\overline{w_i^*}} \quad & J^* = \sum_i (\overline{w_i^*} - \underline{w_i^*}) \\
s.t \quad & a_{ij}^l \overline{w_j^*} \geq \underline{w_i^*} \quad \forall i,j (i \neq j), \\
& a_{ij}^u \underline{w_j^*} \leq \overline{w_i^*} \quad \forall i,j (i \neq j), \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \underline{w_i^*} + \overline{w_j^*} \leq ۱ \quad \forall j, \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \overline{w_i^*} + \underline{w_j^*} \geq ۱ \quad \forall j, \\
& \underline{w_i^*} \leq \overline{w_i^*} \quad \forall i, \\
& \underline{w_i^*} \geq \varepsilon \quad \forall i.
\end{aligned}
\tag{۶.۳}
$$

فرض کنید تخمین‌گر وزن‌های اولیه $w_۱^\circ = [\underline{w_۱^\circ}, \overline{w_۱^\circ}], \cdots, [\underline{w_n^\circ}, \overline{w_n^\circ}]$ که در شرایط نرمال صدق می‌کند را داده است . با توجه به ماتریس مقایسات زوجی داریم.

$$
a_{ij}^l = \frac{\underline{w_i^\circ}}{\overline{w_j^\circ}} \quad , \quad a_{ij}^u = \frac{\overline{w_i^\circ}}{\underline{w_j^\circ}}.
$$

اگر اطلاعات فوق داده شده باشد قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱.۱.۳. [۲۲] *جواب‌های بهینه در مدل‌های پایین وبالا با ماتریس مقایسات فوق برابر با وزن اولیه داده شده است، بطوری‌که*

$$
w_* = w^* = w^\circ. \tag{۷.۳}
$$

برهان

قضیه را در حالت پایینی ثابت می‌کنیم.

با استفاده از اطلاعات زیر

$$a^l_{ij} = \frac{\underline{w^\circ_i}}{\overline{w^\circ_j}} \quad , \quad a^u_{ij} = \frac{\overline{w^\circ_i}}{\underline{w^\circ_j}}.$$

محدودیت‌های رابطه‌ی شمول در مدل پایین را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j*}}} \leq \frac{\overline{w^\circ_i}}{\underline{w^\circ_j}}, \quad \frac{\underline{w^\circ_i}}{\overline{w^\circ_j}} \leq \frac{\underline{w_{i*}}}{\overline{w_{j*}}}. \tag{۸.۳}$$

بنابراین $\underline{w_{i*}} = \underline{w^\circ_i}$ و $\overline{w_{i*}} = \overline{w^\circ_i}$ برای هر i جواب‌های شدنی هستند که در همه محدودیت‌ها صدق می‌کنند. اگر قرار دهیم $\underline{w_{i*}} = \underline{w^\circ_i}$ و $\overline{w_{i*}} = \overline{w^\circ_i}$ برای هر i رابطه‌ی (۸.۳) با تساوی برقرار می‌شود.

فرض کنید که جوابهای دیگری مانند $\underline{w'_{i*}}$ و $\overline{w'_{i*}}$ برای هر i باشند که تابع هدف به‌ازای آنها ماکزیمم است. پس

$$\sum_i (\overline{w^\circ_i} - \underline{w^\circ_i}) < \sum_i (\overline{w'_i} - \underline{w'_i}).$$

این بدان معناست که وزن بازه‌ای ای i وجود دارد که

$$\overline{w^\circ_i} - \underline{w^\circ_i} < \overline{w'_i} - \underline{w'_i},$$

که $(\underline{w'_i}, \overline{w'_i})$ در رابطه (۸.۳) صدق نمی‌کند زیرا $\overline{w'_i} \leq \overline{w^\circ_i}$ و $\underline{w^\circ_i} \leq \underline{w'_i}$ در نتیجه

$$\overline{w'_i} - \underline{w'_i} \leq \overline{w^\circ_i} - \underline{w^\circ_i},$$

و این تناقض منتهی به اثبات حکم می‌شود.

حالت $w^* = w^\circ$ بصورت مشابه ثابت می‌شود.$\square$

در اینجا به بررسی شرط لازم وکافی برای وجود جواب بهینه در مدل پایین و بالا می‌پردازیم.

به منظور انجام این امر می‌توان مدل دیگری را به نام مدل ترکیبی به‌صورت زیر معرفی کرد. بنا به (۳.۳) داریم:

$$a^l_{ij} \leq a^u_{ij} \leq \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}} \Rightarrow a^l_{ij} \leq \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}} \Rightarrow a^l_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i},$$

$$a^u_{ij} \geq a^l_{ij} \geq \frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}} \Rightarrow a^u_{ij} \geq \frac{\underline{w_j}}{\overline{w_i}} \Rightarrow a^u_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i}.$$

بنابراین یک مدل ترکیبی می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}
\min_{\overline{w_i},\underline{w_i}} \quad & J_C = \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) \\
s.t \quad & a_{ij}^l \underline{w_j} \le \overline{w_i} \quad \forall i, j (i \neq j), \\
& a_{ij}^u \overline{w_j} \ge \underline{w_i} \quad \forall i, j (i \neq j), \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \overline{w_i} + \underline{w_j} \ge ۱ \quad \forall j, \\
\sum_{i \in \Omega - \{j\}} & \underline{w_i} + \overline{w_j} \le ۱ \quad \forall j, \\
& \underline{w_i} \le \overline{w_i} \quad \forall i, \\
& \underline{w_i}, \overline{w_i} \ge \varepsilon \quad \forall i.
\end{aligned} \tag{۹.۳}$$

با توجه به اینکه اشتراک دو بازه [A،B] و [C،D] هنگامی مخالف $\emptyset$ است که $C \le B$ و $D \ge A$ در نتیجه رابطه بین داده‌های بازه‌ای و بازه‌های تخمینی در مدل فوق بصورت زیر است.

$$[a_{ij}^l, a_{ij}^u] \cap \left[\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}}, \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}}\right] \neq \emptyset$$

قضیه ۲.۱.۳. [۲۲] *(۵.۳) و (۶.۳) دارای یک جواب بهینه است اگر وتنها اگر در مدل ترکیبی* $J_C = ۰$.

برهان

اگر $J_C = ۰$ جواب بهینه $(\underline{w_i^c}, \overline{w_i^c})$ غیر بازه‌ای و مقادیر قطعی به‌صورت $w_i^c = \underline{w_i^c} = \overline{w_i^c}$ هستند. بنابراین بردار وزن $\frac{w_i^c}{w_j^c}$ در مقایسات $[a_{ij}^l, a_{ij}^u]$ موجود است. این بدان معناست که یک مجموعه مجاز در مدل پایین و بالا موجود است. یعنی مدل پایین دارای جواب بهینه است.

بالعکس: اگر مدل پایین و بالا دارای جواب باشند آنگاه $w_{ij} \subseteq [A_{ij}]$ یا $[A_{ij}] \subseteq w_{ij}$بنابراین اشتراک دو بازه تهی نیست پس یک جواب برای مساله ترکیبی وجود دارد یعنی $\overline{w_i} = \underline{w_i}$ در مساله ترکیبی صدق می‌کند که بهترین جواب نیز هست در نتیجه $J_c = ۰$.$\square$

۱.۱.۳ محاسبه وزن نهایی در روش AHP با داده‌های بازه‌ای

با توجه به دو مدل بالا وپایین وزن‌های زیر بدست می‌آید.

بالا : $[\underline{w_i^*}, \overline{w_i^*}]$, **پایین** : $[\underline{w_{i*}}, \overline{w_{i*}}]$

جهت محاسبه وزن نهایی می‌توان دو بازه‌ی مجزای بصورت بالا و پایین یافت. در واقع از آنجاکه کلیه وزن‌ها بصورت نسبی در حالت تقریبی بدست آمده، وزن نهایی را می‌توان به همین نحو محاسبه کرد.

اگر وزن نسبی هر گزینه A_i $(i = 1, \ldots, n)$, تحت معیار C_k $(k = 1, \ldots, m)$, با توجه به مدل‌های مطرح شده را بصورت زیر تعریف کنیم.

$$\textbf{بالا} : W_{ik}^* = [\underline{w_{ik}^*}, \overline{w_{ik}^*}] \quad , \quad \textbf{پایین} : W_{ik*} = [\underline{w_{ik*}}, \overline{w_{ik*}}],$$

و وزن هر یک از معیارهای C_k را بصورت زیر تعریف کنیم.

$$\textbf{بالا} : P_k^* = [\underline{p_k^*}, \overline{p_k^*}] \quad , \quad \textbf{پایین} : P_{k*} = [\underline{p_{k*}}, \overline{p_{k*}}].$$

داریم:

وزن نهایی مدل پایین

$$\begin{aligned} \underline{W_i'} = min \sum_{k=1}^{m} \underline{w_{ik*}} p_{k*\circ}^{i} \\ s.t \quad \sum_{k} p_{k*\circ}^{i} = 1, \\ \underline{p_{k*}} \leq p_{k*\circ}^{i} \leq \overline{p_{k*}} \quad \forall k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

که جواب مدل فوق می‌نیمم کران پایین وزن نهایی پایین است و

$$\begin{aligned} \overline{W_i'} = max \sum_{k=1}^{m} \overline{w_{ik*}} p_{k*}^{i\circ} \\ s.t \quad \sum_{k} p_{k*}^{i\circ} = 1, \\ \underline{p_{k*}} \leq p_{k*}^{i\circ} \leq \overline{p_{k*}} \quad \forall k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

که جواب بدست آمده کران بالای وزن نهایی مدل پایین است. بطور کلی داریم:$W_i' = [\underline{W_i'}, \overline{W_i'}]$

وزن نهایی مدل بالا

$$\begin{aligned} \underline{W_i''} = min \sum_{k=1}^{m} \underline{w_{ik}^*} p_{k\circ}^{i*} \\ s.t \quad \sum_{k} p_{k\circ}^{i*} = 1, \\ \underline{p_k^*} \leq p_{k\circ}^{i*} \leq \overline{p_k^*} \quad \forall k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

که جواب مدل فوق می‌نیمم کران پایین وزن نهایی بالا است و

$$\begin{aligned} \overline{W_i''} = max \sum_{k=1}^{m} \overline{w_{ik}^*} p_{k}^{i*\circ} \\ s.t \quad \sum_{k} p_{k}^{i*\circ} = 1, \\ \underline{p_k^*} \leq p_{k}^{i*\circ} \leq \overline{p_k^*} \quad \forall k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

که جواب بدست آمده کران بالای وزن نهایی مدل بالاست. بطور کلی داریم: $W_i'' = [\underline{W_i''}, \overline{W_i''}]$

از آنجاکه مساله مورد بحث اولویت بندی گزینه‌ها با توجه به وزن نهایی است. می‌توان اولویت‌بندی هر یک از وزنها (پایین وبالا) را با p_j های تعریف سوم ۷.۳.۱ انجام داد و چنانچه بین ترتیب گزینه‌ها در دو حالت وزن بالا وپایین تفاوت بود با میانگین‌گیری بین p_jها رتبه‌بندی یکتا را بدست آورد.

۲.۳ تعمیم روش $TOPSIS$ برای داده‌های بازه‌ای

فرض کنید $A_1, \ldots, A_n$ ، گزینه‌ها و $C_1, \ldots, C_m$ ، معیارها و $a_{ij} = [a_{ij}^l, a_{ij}^u]$ بازه‌ی مربوط به ارزش معیار j ام برای گزینه i ام باشد. مساله MADM با داده بازه‌ای می‌تواند بصورت زیر بیان شود.

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11}^l, a_{11}^u] & [a_{12}^l, a_{12}^u] & \cdots & [a_{1m}^l, a_{1m}^u] \\ [a_{21}^l, a_{21}^u] & [a_{22}^l, a_{22}^u] & \cdots & [a_{2m}^l, a_{2m}^u] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n1}^l, a_{n1}^u] & [a_{n2}^l, a_{n2}^u] & \cdots & [a_{nm}^l, a_{nm}^u] \end{pmatrix}$$

مراحل حل مساله

- گام۱: بی‌مقیاس کردن ماتریس تصمیم‌گیری.

۱. با استفاده از نرم [۱۳]

$$\begin{aligned} n_{ij}^l &= \frac{a_{ij}^l}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{ij}^l)^2 + (a_{ij}^u)^2}}, \\ n_{ij}^u &= \frac{a_{ij}^u}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{ij}^l)^2 + (a_{ij}^u)^2}}. \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

$n_{ij} = [n_{ij}^l, n_{ij}^u]$ بازه عددی نرمال بین $[0, 1]$ است.

۲. با استفاده از روش فازی [۲۶]

برای استفاده از روش فازی ابتداU_j را براساس محدوده همه گزینه‌ها با معیار C_j بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_j = [D_{min}^j - D_1^j, D_{max}^j + D_2^j], \tag{۱۱.۳}$$

که D_1^j و D_2^j دو عدد مناسب مثبت هستند و برای تقریب زدن کران بالا وپایین بازه U_j به اعداد مناسب‌تر برای محاسبات آسان‌تر استفاده می‌شوند. D_{min}^j و D_{max}^j مقدار می‌نیمم و ماکزیمم محدوده همه گزینه‌ها مرتبط با معیار C_j اند.

مقدار بازه‌ای نرمال $n_{ij} = [n_{ij}^l, n_{ij}^u]$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$n_{ij}^l = \frac{a_{ij}^l - (D_{min}^j - D_1^j)}{(D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j)} = 1 - \frac{(D_{max}^j + D_2^j) - a_{ij}^l}{(D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j)},$$
$$n_{ij}^u = \frac{a_{ij}^u - (D_{min}^j - D_1^j)}{(D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j)} = 1 - \frac{(D_{max}^j + D_2^j) - a_{ij}^u}{(D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j)}$$
$$\forall i = 1, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, m. \tag{۱۲.۳}$$

بازه‌ی $[n_{ij}^l, n_{ij}^u] \in [0, 1]$ فرم بی‌مقیاس بازه‌ی a_{ij} است.

اگر D_1^j و D_2^j برابر صفر فرض شوند در این‌صورت داریم:

$$a_{ij}^l = D_{min}^j \quad a_{ij}^u = D_{max}^j \Longrightarrow n_{ij}^l = 0 \quad , \quad n_{ij}^u = 1. \tag{۱۳.۳}$$

بعنوان مثال فرض کنید بازه‌های زیر داده‌های تحت معیار C_j باشند:

[۲۵۵۱،۳۱۱۸] ، [۳۷۴۲،۴۵۷۳] ، [۳۳۱۲, ۴۰۴۹] ، [۵۳۰۹, ۶۴۸۸] ، [۳۷۰۹, ۴۵۳۴] ، [۴۸۸۴،۵۹۶۹]

واضح است که $D_{\min}^j = ۲۵۵۱$ و $D_{\max}^j = ۶۴۸۸$. باید دو مقدار مناسب D_1^j و D_2^j توسط تصمیم‌گیرنده انتخاب شود، نکته کلیدی در انتخاب دو عدد این است که دو رقم آخر D_{min}^j و D_{max}^j صفر شود تا انجام محاسبات عددی ساده‌تر شود. پس بهتر است D_1^j و D_2^j بترتیب ۵۱ و ۱۲ در نظر گرفته شود وبه این ترتیب بازه‌ی [۲۵۰۰, ۶۵۰۰]بدست می‌آید. بنابراین مقدار بازه‌ی نرمال n_{ij} نسبت به معیار C_j تحت ریسک طبیعی[1] بصورت

[۰/۰۱۲۸, ۰/۱۵۴۵] ، [۰/۳۱۰۵, ۰/۵۱۸۳] ، [۰/۲۰۳۰, ۰/۳۸۷۳] ، [۰/۷۰۲۳, ۰/۹۹۷] ، [۰/۳۰۲۳, ۰/۵۰۸۵] ، [۰/۵۹۶, ۰/۸۶۷۳] است.

این داده‌ها با نتایج حاصل از روشهای دیگر متفاوت است. با بالا بردن ریسک نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۳. ریسک

در تئوری تصمیم به احتمال وقوع یک پیشامد نامطلوب ریسک گفته می‌شود و وقوع پیشامدی که بیشترین نتیجه مبهم را داشته باشد بالاترین ریسک را دارد.

بیشتر مطالعات موجود متمرکز بر ارزیابی هدف است و تا حد زیادی عوامل ذهنی که می‌تواند به تفاوت اثرات مختلف از ریسک برای تصمیم‌گیرندگان منجر شود، نادیده گرفته می‌شود.

[1] risk-neutral

از آنجا که تصمیم‌گیرندگان با ریسک‌های متفاوت، درجات مختلفی از تاثیرات را باعث می‌شوند، نیومن و مورگنسترن[۲] [۲۹] تئوری مطلوبیت مورد انتظار تحت پایه‌ی ریسک را براساس منطق دقیق رفتار انسانی پیشنهاد دادند که اصل هدایت تصمیم‌گیرنده تحت ریسک نامیده می‌شود.

نگرش ریسک برای رفتارهای انسانی به سه دسته‌ی ریسک گریز[۳] ، ریسک طبیعی[۴] و ریسک جو[۵] خلاصه شده است. افرادی که از ریسک می‌ترسند یا نسبت به خطر حساسند تابع مطلوبیت مقعر دارند. تابع مطلوبیت محدب نشان دهنده یک جستجوگر مشتاق به درگیر شدن در یک کار چالش برانگیز است[۲۹] و نهایتا ویژگی ریسک طبیعی عدم نگرانی در برابر ریسک بوده وتابع مطلوبیت آن خطی است.

بنابراین می توان یک تابع مطلوبیت برای نشان دادن ریسک تصمیم‌گیرندگان با دیدگاه‌های متفاوت در نظر گرفت. تحت n گزینه‌ی $A_1, \cdots, A_n$ و m معیار تصمیم $C_1, \cdots, C_m$، با توجه به تمایل تصمیم‌گیرنده برای ریسک مقدار فاصله‌ی نرمال n_{ij} در معادلات(۱۲.۳) را با نگرش به ریسکهای مختلف می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} n_{ij}^l &= 1 - \left[\frac{(D_{\max}^j + D_2^j) - a_{ij}^l}{(D_{\max}^j + D_2^j) - (D_{\min}^j - D_1^j)}\right]^k, \\ n_{ij}^u &= 1 - \left[\frac{(D_{\max}^j + D_2^j) - a_{ij}^u}{(D_{\max}^j + D_2^j) - (D_{\min}^j - D_1^j)}\right]^k \\ &\forall i = 1, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, m, \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

که $a_{ij} = [a_{ij}^l, a_{ij}^u]$ ارزش گزینه‌ی A_i تحت معیار C_j است. واضح است که مشتق اول n_{ij}^l و n_{ij}^u مثبت است، مشتق دوم آنها بصورت زیر می‌باشد:

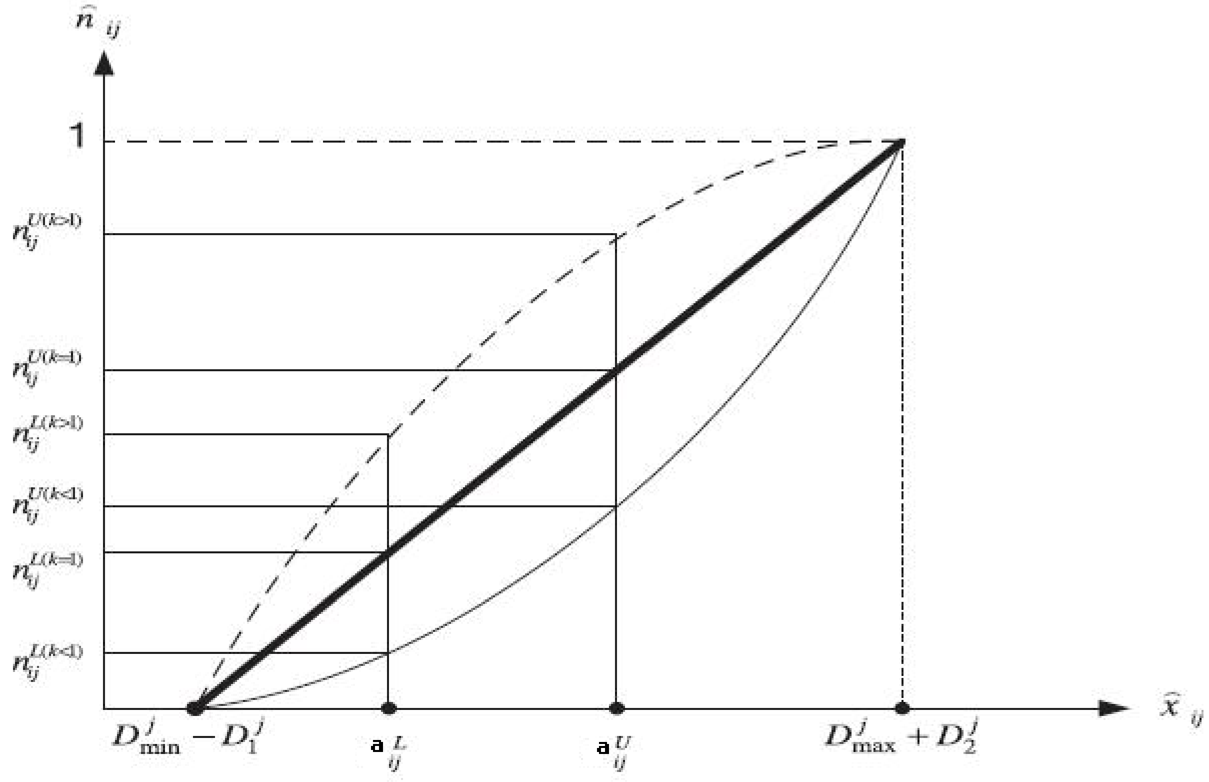
$$\begin{aligned} (n_{ij}^l)'' &= -k(k-1)\left[\frac{((D_{max}^j + D_2^j) - a_{ij}^l)^{k-2}}{((D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j))^k}\right], \\ (n_{ij}^u)'' &= -k(k-1)\left[\frac{((D_{max}^j + D_2^j) - a_{ij}^u)^{k-2}}{((D_{max}^j + D_2^j) - (D_{min}^j - D_1^j))^k}\right] \\ &\forall i = 1, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

همانطور که در شکل ۲.۳ دیده می‌شود معادلات (۱۵.۳) برای مقادیر $k < 1$ محدب، برای مقادیر $k = 1$ خطی و برای $k \geq 1$ مقعر است. تصمیم‌گیرنده‌ای که گرایش ریسک گریزی دارد دارای

[۲] Neumann, Morgenstern
[۳] risk-averse
[۴] risk- nautral
[۵] risk-seeking

مقادیر نرمال کوچکتر و بهمین ترتیب تصمیم‌گیرنده با تمایل به ریسک پذیری دارای مقادیر نرمال بالاتری خواهد بود. تبدیل خطی مقادیر نرمال نیز مناسب برای افراد دارای ریسک طبیعی است. در واقع شکل ۲.۳ نشان می‌دهد که مقادیر نرمال ریسک پذیر بیشتر از ریسک طبیعی و ریسک طبیعی بالاتر از ریسک گریز می‌باشد.

بنابراین مقادیر بازه‌ای ورودی با توجه به گرایش ریسک اختصاص یافته به تصمیم‌گیرنده، مقادیر نرمال بازه‌ای متفاوتی را در یک روند تصمیم تولید می‌کنند.



شکل ۲.۳: مقادیر بازه‌های نرمال با گرایش ریسک متفاوت

- گام۲: محاسبه ماتریس وزین نرمال.

فرض کنید وزن jامین معیار یک بازه‌ی عددی بصورت$[w_j^l, w_j^u]$ $= w_j$ با $w_j^l, w_j^u \geq ۰$ برای $j =$ $۱, \ldots, m$ باشد و عملگر $\otimes$ ضرب بین بازه‌های عددی باشد می‌توان ماتریس تصمیم‌گیری نرمال وزین

را برای تصمیم‌گیری‌های مختلف به فرم زیر محاسبه کرد.

$$V = (v_{ij})_{n\times m},$$

$$v_{ij} = [v_{ij}^l, v_{ij}^u] = w_j \otimes n_{ij} = [w_j^l, w_j^u] \otimes [(n_{ij}^l)^k, (n_{ij}^u)^k] = [w_j^l(n_{ij}^l)^k, w_j^u(n_{ij}^u)^k] \quad (۱۶.۳)$$

$$i = ۱, \dots, n \quad j = ۱, \dots, m.$$

- گام۳:

جواب ایده‌آل

$$A^+ = \{v_۱^+, v_۲^+, \dots, v_m^+\} = \{\max_i v_{ij} \mid j \in \Omega_b\} \cup \{\min_i v_{ij} \mid j \in \Omega_c\},$$

و ایده‌آل منفی

$$A^- = \{v_۱^-, v_۲^-, \dots, v_m^-\} = \{\max_i v_{ij} \mid j \in \Omega_c\} \cup \{\min_i v_{ij} \mid j \in \Omega_b\},$$

که در آن Ω_b مجموعه معیارهای سود و Ω_c مجموعه معیارهای هزینه هستند، را به‌صورت زیر برای داده‌های بازه‌ای می‌نویسیم:

$$v_j^+ = [v_j^{+l}, v_j^{+u}] \quad v_j^- = [v_j^{-l}, v_j^{-u}] \quad j = ۱, \dots, m \quad (۱۷.۳)$$

که فرآیند بدست آوردن مقادیر آن پس از گام‌های روش شرح داده شده است.

- گام۴: محاسبه اندازه جدایی.

با استفاده از روش اقلیدسی $m-$ بعدی با توجه به روابط زیر اندازه جدایی محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned} D_i^+ &= \sqrt{\sum_{j=۱}^m (v_{ij} - v_j^+)^۲} = \sqrt{\sum_{j=۱}^m (v_{ij}^l - v_j^{+l})^۲ + \sum_{j=۱}^m (v_{ij}^u - v_j^{+u})^۲}, \\ D_i^- &= \sqrt{\sum_{j=۱}^m (v_{ij} - v_j^-)^۲} = \sqrt{\sum_{j=۱}^m (v_{ij}^l - v_j^{-l})^۲ + \sum_{j=۱}^m (v_{ij}^u - v_j^{-u})^۲}, \\ &\forall i = ۱, ۲, \dots, n. \end{aligned} \quad (۱۸.۳)$$

- گام۵: محاسبه اندازه نزدیکی.

جهت محاسبه نزدیکی نسبی هر گزینه به جواب ایده‌آل از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$RC_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} \quad (۱۹.۳)$$

- گام۶: رتبه‌بندی گزینه‌ها.

گزینه‌ها باتوجه به مقدار RC_i مرتب می‌شود هر چه مقدار آن به واحد نزدیک‌تر باشد گزینه به جواب ایده آل نزدیک‌تر است.

طریقه محاسبه $v_j^+ = [v_j^{+l}, v_j^{+u}] \quad v_j^- = [v_j^{-l}, v_j^{-u}]$ به شرح زیر است:

۱. محاسبه مرکز و عرض هر مقدار v_{ij} برای $j = ۱, \dots, m$ $\quad i = ۱, \dots, n$ در تصمیم‌گیری وزین نرمال.

مقدار مرکز و عرض برای هر معیار j بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_j(v_{ij}) = \frac{۱}{۲}(v_{ij}^l + v_{ij}^u) \quad w_j(v_{ij}) = \frac{۱}{۲}(v_{ij}^u - v_{ij}^l) \tag{۲۰.۳}$$

۲. رتبه‌بندی مقدار مرکز مقادیر ماتریس وزین نرمال برای معیارها

برای هر معیار j ، (مرتبه)m_j رتبه‌بندی مقادیر مرکز برای هر گزینه است یعنی:

$$m_j(۱) \geq m_j(۲) \geq \cdots \geq m_j(n)$$

۳. یافتن جواب ایده‌آل

فرض کنید $m_t(۱)$ بزرگترین مرکز در مقادیر ماتریس وزین نرمال باشد که کران پایین وبالای آن به‌ترتیب $v_t^l(۱)$ و $v_t^u(۱)$ باشند، برای گزینه‌ها با توجه به معیار $t \in \Omega_b$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max_i v_{it}^l &= \max(v_{۱t}^l, v_{۲t}^l, \cdots, v_{nt}^l), \\ \max_i v_{it}^u &= \max(v_{۱t}^u, v_{۲t}^u, \cdots, v_{nt}^u), \\ \forall i &= ۱, ۲, \dots, n. \end{aligned} \tag{۲۱.۳}$$

پس جواب ایده‌آل مثبت تحت معیار $t \in \Omega_b$ از روابط زیر بدست می‌آید.

$$v_t^{+l} = \begin{cases} v_t^l(۱) & m_t(۱) = \dfrac{\max_i v_{it}^l + \max_i v_{it}^u}{۲}, \\ \max_i v_{it}^l & m_t(۱) < \dfrac{\max_i v_{it}^l + \max_i v_{it}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۲.۳}$$

$$v_t^{+u} = \begin{cases} v_t^u(۱) & m_t(۱) = \dfrac{\max_i v_{it}^l + \max_i v_{it}^u}{۲}, \\ \max_i v_{it}^u & m_t(۱) < \dfrac{\max_i v_{it}^l + \max_i v_{it}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۳.۳}$$

بطور مشابه جواب ایده‌آل مثبت تحت معیار $t \in \Omega_c$ از روابط زیر بدست می‌آید.

$$v_t^{+l} = \begin{cases} v_t^l(n) & m_t(n) = \dfrac{\min_i v_{it}^l + \min_i v_{it}^u}{۲}, \\ \min_i v_{it}^l & m_t(n) > \dfrac{\min_i v_{it}^l + \min_i v_{it}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۴.۳}$$

$$v_t^{+u} = \begin{cases} v_t^u(n) & m_t(n) = \dfrac{\min_i v_{it}^l + \min_i v_{it}^u}{۲}, \\ \min_i v_{it}^u & m_t(n) > \dfrac{\min_i v_{it}^l + \min_i v_{it}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۵.۳}$$

۴. یافتن جواب ایده‌آل منفی

فرض کنید $m_k(n)$ کوچکترین مقدار مرکز در مقادیر وزین نرمال باشد که کران پایین وبالای آن به‌ترتیب $v_k^l(n)$ و $v_k^u(n)$ برای گزینه‌های معیار $k \in \Omega_b$ است، همچنین داریم:

$$\begin{aligned} &\min_i v_{ik}^l = \min(v_{۱k}^l, v_{۲k}^l, \cdots, v_{nk}^l), \\ &\min_i v_{ik}^u = \min(v_{۱k}^u, v_{۲k}^u, \cdots, v_{nk}^u), \\ &\quad \forall i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

جواب ایده‌آل منفی تحت معیار $k \in \Omega_b$ از روابط زیر بدست می‌آید.

$$v_k^{-l} = \begin{cases} v_k^l(n) & m_t(n) = \dfrac{\min_i v_{ik}^l + \min_i v_{ik}^u}{۲}, \\ \min_i v_{ik}^l & m_k(n) > \dfrac{\min_i v_{ik}^l + \min_i v_{ik}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۷.۳}$$

$$v_k^{-u} = \begin{cases} v_k^u(n) & m_k(n) = \dfrac{\min_i v_{ik}^l + \min_i v_{ik}^u}{۲}, \\ \min_i v_{ik}^u & m_k(n) > \dfrac{\min_i v_{ik}^l + \min_i v_{ik}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۸.۳}$$

بطور مشابه جواب ایده‌آل مثبت تحت معیار $k \in \Omega_c$ از روابط زیر بدست می‌آید:

$$v_k^{-l} = \begin{cases} v_k^l(۱) & m_k(۱) = \dfrac{\max_i v_{ik}^l + \max_i v_{ik}^u}{۲}, \\ \max_i v_{ik}^l & m_t(۱) < \dfrac{\max_i v_{ik}^l + \max_i v_{ik}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۲۹.۳}$$

$$v_k^{-u} = \begin{cases} v_k^u(۱) & m_k(۱) = \dfrac{\max_i v_{ik}^l + \max_i v_{ik}^u}{۲}, \\ \max_i v_{ik}^u & m_k(۱) < \dfrac{\max_i v_{ik}^l + \max_i v_{ik}^u}{۲}. \end{cases} \tag{۳۰.۳}$$

۳.۳ تعمیم $ARAS$ برای داده‌های بازه‌ای

فرض کنید $A_۱, \ldots, A_n$ ، گزینه‌ها و $C_۱, \ldots, C_m$ ، معیارها و $a_{ij} = [a_{ij}^l, a_{ij}^u]$ نشان‌دهنده ارزش معیار j ام برای گزینه i ام باشد. مساله MADM با داده بازه‌ای می‌تواند بصورت زیر بیان شود.

$$A = \begin{pmatrix} [a_{۱۱}^l, a_{۱۱}^u] & [a_{۱۲}^l, a_{۱۲}^u] & \cdots & [a_{۱m}^l, a_{۱m}^u] \\ [a_{۲۱}^l, a_{۲۱}^u] & [a_{۲۲}^l, a_{۲۲}^u] & \cdots & [a_{۲m}^l, a_{۲m}^u] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n۱}^l, a_{n۱}^u] & [a_{n۲}^l, a_{n۲}^u] & \cdots & [a_{nm}^l, a_{nm}^u] \end{pmatrix}$$

یا بطور خلاصه $A=[a_{ij}^l,a_{ij}^u]_{n\times m}$

ابتدا باید سطر صفر مقدار بهینه را به ماتریس اضافه کنیم. $a_{\circ j}$ مقدار بهینه معیار j است و به‌صورت زیر بطور قطعی معرفی می‌شود:

$a_{\circ j}=max_i a_{ij}$ برای معیارهای سود،

$a_{\circ j}=min_i a_{ij}$ برای معیارهای ضرر.

میتوان برای تعیین سطر صفر بهینه‌ترین مقدار را با توجه به دیدگاه تصمیم‌گیرندگان نیز تعیین کرد [۲۷].

مراحل روش ARAS به‌صورت زیر است:

- گام۱: نرمال کردن ماتریس تصمیم‌گیری.

جهت نرمال سازی مشابه روش TOPSIS عمل می‌کنیم برای معیارهای سود قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} n_{ij}^l &= \frac{a_{ij}^l}{\sqrt{\sum_{i=\circ}^{n}(a_{ij}^l)^{۲}+(a_{ij}^u)^{۲}}}, \\ n_{ij}^u &= \frac{a_{ij}^u}{\sqrt{\sum_{i=\circ}^{n}(a_{ij}^l)^{۲}+(a_{ij}^u)^{۲}}}, \end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

وبرای معیارهای هزینه ابتدا داده‌ها را معکوس کرده سپس روابط فوق را بکار می‌بریم.

- گام۲: محاسبه ماتریس وزین نرمال.

فرض کنید وزن j امین معیار یک بازه‌ی عددی بصورت $w_j=[w_j^l,w_j^u]$ با $w_j^l,w_j^u\geq \circ$ برای $j=۱,\dots,m$ باشد و عملگر $\otimes$ ضرب بین بازه‌های عددی باشد می‌توان ماتریس تصمیم‌گیری نرمال وزین را برای تصمیم‌گیری‌های مختلف به‌فرم زیر محاسبه کرد.

$$V=(v_{ij})_{n\times m},$$

$$v_{ij}=[v_{ij}^l,v_{ij}^u]=w_j\otimes n_{ij}=[w_j^l,w_j^u]\otimes[n_{ij}^l,n_{ij}^u]=[w_j^l n_{ij}^l,w_j^u n_{ij}^u], \tag{۳۲.۳}$$

$$i=\circ,\dots,n \quad j=۱,\dots,m.$$

- گام۳: تعیین مقدار تابع بهینه برای هر گزینه i

$$\begin{gathered} S_i^l=\sum_{j=۱}^{m} v_{ij}^l \quad , \quad S_i^u=\sum_{j=۱}^{m} v_{ij}^u \quad i=\circ,\dots,n, \\ S_i=\frac{۱}{۲}(S_i^l+S_i^u). \end{gathered} \tag{۳۳.۳}$$

- گام۴: تعیین درجه‌بندی گزینه‌ها.

برای تعیین درجه، مجموع کل هر گزینه را بر گزینه صفر تقسیم می‌کنیم.

$$K_i = \frac{S_i}{S_\circ}.$$

- گام۵: رتبه بندی گزینه‌ها.

جهت رتبه بندی و گرفتن نتیجه نهایی مقدار K_i گام ۴ را بررسی می‌کنیم واضح است که این مقدار عددی بین صفر و یک است، هر چه عدد به یک نزدیک‌تر باشد گزینه مطلوب‌تر است.

فصل ۴
تصمیم‌گیری گروهی

با توجه به محدودیت عقلانی، که هر انسان به تنهایی دچار آن است، شاید همکاری و تشریک مساعی گروهی تنها راه دستیابی به یک سیستم تصمیم‌گیری منطقی، منظم، جامع و کامل باشد. سازمان‌های مدرن امروزی چنان وسیع و پیچیده شده‌اند که مدیریت آنها از عهده یک فرد به تنهایی برنمی‌آید و مدیر مجبور است در تصمیم‌گیری‌ها و اداره امور سازمان ، از دیگران کمک بگیرد.

پیچیدگی تصمیمیات مدیریت باعث خواهد شد که مدیر برای تصمیم‌گیری بهتر، از افراد متعهد و با موقعیت‌های شغلی مختلف و تخصص‌های گوناگون دعوت به‌عمل آورد. در جایی که از نظر پست و مقام، تفاوت‌هایی میان اعضای گروه وجود دارد، احتمال اینکه عضو با نفوذی اعضای دیگر را تحت تسلط و نفوذ خود قرار دهد، بسیار زیاد است. کنش متقابل ارتباطی در یک تصمیم‌گیری گروهی در مقایسه با تصمیم فردی می‌تواند هم موجب افزایش و هم موجب کاهش کیفیت تصمیم گردد.

وقتی اعضای یک گروه رو در روی هم قرار می‌گیرند و به کنش متقابل با هم می‌پردازند، می‌توانند ضمن عیبجویی از همدیگر، دیگران را نیز برای انطباق دادن با خود، تحت فشار قرار دهند. به‌علاوه موقعیت افرادی که از تخصص بالا و یا از سن و تجربه زیاد برخوردارند به افراد کم تجربه و جوان فرصت ارائه نظر نخواهد داد.

از روش‌های متعددی برای موثر کردن تصمیم‌گیری چون توفان مغزی، روش دلفی و تکنیک گروه اسمی استفاده شده است. اگر چه استفاده از این فنون تا حدودی مشکلات تصمیم‌گیری‌های گروهی را حل کرده است ولی بکارگیری آنها به جهت زمان و هزینه، خالی از اشکال نیست. به‌علاوه در دنیای پیچیده و متلاطم امروزی پیچیدگی تصمیمات به حدی است که عملاً استفاده از روش‌های ذکر شده غیرممکن می‌شود و نیاز به یک روش جامع بیش از پیش احساس می‌گردد.

نسخه واحدی که مشکل همه سازمانها را حل کند عملاً وجود ندارد (بخاطر تفاوت در فرهنگ‌های

سازمانی)؛ ولی معمولاً استفاده از تیمی که از نظر پست سازمانی و مسئولیت، در یک سطح باشند، به نتیجه مناسبی می‌انجامد. این تیم می‌تواند با جمع آوری اطلاعات مورد نیاز برای تصمیم‌گیری و ارائه آنها به مدیریت، عملاً نقش موثری در اتخاذ تصمیمات مهم توسط مدیران ارشد بازی کنند. روش‌های MADM تکنیک‌های مناسبی برای این امر می‌باشند که مدل‌های مورد بحث اصلی در این پایان‌نامه را می‌توان از مناسب‌ترین روش‌ها برای تصمیم‌گیری گروهی دانست.

۱.۴ AHP گروهی

AHP در آغاز برای تصمیم‌گیری‌های انفرادی در یک محیط متلاطم و فازی ارائه شد. سپس در دهه هشتاد به چگونگی استفاده از آن در تصمیم‌گیری‌های گروهی پرداخته شد. استفاده از AHP در تصمیم‌گیری‌های گروهی باعث خواهد شد که نه تنها مزایای فنون تصمیم‌گیری گروهی حفظ شود بلکه معایب آنها (همانند سرعت ، هزینه و تک‌فکری) برطرف شود .

برای حل یک مساله AHP گروهی ابتدا باید به ساخت سلسله مراتب زوجی پرداخت برای این امر با برگزاری جلسات مشترک، اخذ آرا حاضرین و تلاش برای ساخت سلسله مراتبی مورد قبول همه و در نهایت با دسته بندی آرا و نشست‌های تکمیلی می‌توان به جمع‌بندی رسید. برخی اوقات رای‌گیری آخرین راه حل است.

در مرحله بعد، مقایسات زوجی جمعی باید تهیه شود که به دو طریق می‌توان این‌کار را انجام داد.

۱. قضاوت به اتفاق آرا

در این شیوه، باید گروه تصمیم‌گیری در مورد هر عنصر ماتریس مقایسه زوجی، به یک توافق برسند. این شیوه ممکن است زمان‌بر، کسل کننده و پرچالش باشد.

۲. قضاوت فردی و تجمیع آرا

در این شیوه هر فرد نظر خود را در مورد هر عنصر اعلام و سپس از میانگین هندسی برای تلفیق آرا استفاده می‌شود. که ما از این روش استفاده خواهیم کرد [۲۱].

فرض کنید $T = \{1, \cdots, t\}$ مجموعه تصمیم‌گیرندگان و ماتریس متقابل نشان داده شده با مقایسات زوجی برای هر تصمیم‌گیرنده بصورت $[A^k_{ij}]$ باشد که $[A^k_{ij}] = [a^{lk}_{ij}, a^{uk}_{ij}]$ برای $k = 1, \cdots, t$.

برای بدست آوردن یک ماتریس واحد از ماتریسهای k تصمیم‌گیرنده از روش میانگین هندسی به‌فرم زیر

می‌توان استفاده کرد:

$$a_{ij}^{l} = \sqrt[k]{\prod_{k=۱}^{t} a_{ij}^{lk}}, \qquad (۱.۴)$$
$$a_{ij}^{u} = \sqrt[k]{\prod_{k=۱}^{t} a_{ij}^{uk}}.$$

با داده‌ی بازه‌ای فوق در ماتریس مقایسات زوجی ادامه کار را می‌توان بصورت روش ذکر شده در ۱.۳ ادامه داد.

۲.۴ TOPSIS گروهی

یکی از روش‌های مناسب برای تصمیم‌گیری گروهی روش TOPSIS است زیرا تصمیم‌گیرنده‌ها ممکن است تصمیمی بگیرند که همچنان که سود را تا حد امکان بالا می‌برد به همان میزان احتمال ریسک را بالا ببرد. در روش توسعه یافته به هر یک از تصمیم‌گیرندگان وزنی اختصاص می‌یابد. به صورت زیر می‌توان روش را برای حالت گروهی تعمیم داد [۳۰].

فرض کنید$M = \{۱, \cdots, m\}, N = \{۱, \cdots, n\}, T = \{۱, \cdots, t\}$. یک مساله MAGDM[۱] را با جزئیات زیر در نظر بگیرید.

فرض کنید $A = \{A_۱, \cdots, A_n\}$ مجموعه‌ی گزینه‌ها، $C = \{C_۱, \cdots, C_m\}$ مجموعه‌ی معیارها، $w = (w_۱, \cdots, w_m)^T$ بردار وزن معیارها باشد که در رابطه‌ی $۱ \le w_j \le ۰$ و $\sum_{j=۱}^{m} w_j = ۱$ صدق کنند. همچنین فرض کنید $D = \{d_۱, \cdots, d_t\}$ گروه تصمیم‌گیرندگان و $\lambda = (\lambda_۱, \cdots, \lambda_t)^T$بردار وزن آن‌ها با شرایط $\lambda_k \ge ۰, \sum_{k=۱}^{t} \lambda_k = ۱$ باشد.

ماتریس‌های تصمیم‌گیری را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$A_k = \begin{pmatrix} [a_{۱۱}^{k(l)}, a_{۱۱}^{k(u)}] & [a_{۱۲}^{k(l)}, a_{۱۲}^{k(u)}] & \cdots & [a_{۱m}^{k(l)}, a_{۱m}^{k(u)}] \\ [a_{۲۱}^{k(l)}, a_{۲۱}^{k(u)}] & [a_{۲۲}^{k(l)}, a_{۲۲}^{k(u)}] & \cdots & [a_{۲m}^{k(l)}, a_{۲m}^{k(u)}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n۱}^{k(l)}, a_{n۱}^{k(u)}] & [a_{n۲}^{k(l)}, a_{n۲}^{k(u)}] & \cdots & [a_{nm}^{k(l)}, a_{nm}^{k(u)}] \end{pmatrix}$$

یا به‌اختصار $A_k = ([a_{ij}^{k(l)}, a_{ij}^{k(u)}])_{n\times m}$ برای $k \in T$ که ماتریس تصمیم‌گیرنده‌ی k ام است. همانطور که در فصل قبل گفته شد داده‌های ماتریس باید نرمال شود. ماتریس نرمال شده به شکل زیر است [۷]:

[۱] multiple attribute group decision making

$$Y_k = \begin{pmatrix} [y_{11}^{k(l)}, y_{11}^{k(u)}] & [y_{12}^{k(l)}, y_{12}^{k(u)}] & \cdots & [y_{1m}^{k(l)}, y_{1m}^{k(u)}] \\ [y_{21}^{k(l)}, y_{21}^{k(u)}] & [y_{22}^{k(l)}, y_{22}^{k(u)}] & \cdots & [y_{2m}^{k(l)}, y_{2m}^{k(u)}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_{n1}^{k(l)}, y_{n1}^{k(u)}] & [y_{n2}^{k(l)}, y_{n2}^{k(u)}] & \cdots & [y_{nm}^{k(l)}, y_{nm}^{k(u)}] \end{pmatrix}$$

یا $Y_k = ([y_{ij}^{k(l)}, y_{ij}^{k(u)}])_{n\times m}$ برای $k \in T$ که برای معیارهای سود داریم:

$$\begin{aligned} y_{ij}^{k(l)} &= \frac{a_{ij}^{k(l)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{k(u)}}, \\ y_{ij}^{k(u)} &= \frac{a_{ij}^{k(u)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{k(l)}}, \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

و برای معیارهای هزینه داریم:

$$\begin{aligned} y_{ij}^{k(l)} &= \frac{\frac{1}{a_{ij}^{k(u)}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ij}^{k(l)}}}, \\ y_{ij}^{k(u)} &= \frac{\frac{1}{a_{ij}^{k(l)}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ij}^{k(u)}}}. \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

روابط فوق ممکن است بعد از نرمال سازی، اطلاعات را در بازه‌ی $[0, 1]$ نشان ندهد. به‌عنوان مثال فرض کنید سه بازه‌ی زیر داده‌های معیار هزینه باشد.

$$a_1 = [0/044, 0/291], a_2 = [0/001, 0/038], a_3 = [0/008, 0/039]$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳.۴) مقادیر نرمال به‌صورت زیر می‌شود:

$$y_1 = [0/003, 0/4103], y_2 = [0/0229, 18/0525], y_3 = [0/0223, 2/2566]$$

که دو مقدار y_2, y_3 در بازه‌ی $[0, 1]$ نیستند. برای برطرف شدن این مشکل ماتریس تصمیم Y_k با روابط زیر

به ماتریس نرمال R_k تبدیل می‌شود:

$$R_k = \begin{pmatrix} [r_{۱۱}^{k(l)}, r_{۱۱}^{k(u)}] & [r_{۱۲}^{k(l)}, r_{۱۲}^{k(u)}] & \cdots & [r_{۱m}^{k(l)}, r_{۱m}^{k(u)}] \\ [r_{۲۱}^{k(l)}, r_{۲۱}^{k(u)}] & [r_{۲۲}^{k(l)}, r_{۲۲}^{k(u)}] & \cdots & [r_{۲m}^{k(l)}, r_{۲m}^{k(u)}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [r_{n۱}^{k(l)}, r_{n۱}^{k(u)}] & [r_{n۲}^{k(l)}, r_{n۲}^{k(u)}] & \cdots & [r_{nm}^{k(l)}, r_{nm}^{k(u)}] \end{pmatrix}$$

یا $R_k = ([r_{ij}^{k(l)}, r_{ij}^{k(u)}])_{n\times m}$ برای $k \in T$ که

$$\begin{aligned} r_{ij}^{k(l)} &= \frac{y_{ij}^{k(l)}}{\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}((y_{ij}^{k(l)})^{۲} + (y_{ij}^{k(u)})^{۲})}}, \\ r_{ij}^{k(u)} &= \frac{y_{ij}^{k(u)}}{\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}((y_{ij}^{k(l)})^{۲} + (y_{ij}^{k(u)})^{۲})}}, \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

پس از نرمال کردن ماتریس همانند روشی که در فصل ۳ برای تاپسیس بازه‌ای شرح داده شد ماتریس با توجه به بردار وزن داده شده برای هر معیار، وزین می‌گردد. داریم:

$$V_k = ([v_{ij}^{k(l)}, v_{ij}^{k(u)}])_{n\times m} = ([w_j r_{ij}^{k(l)}, w_j r_{ij}^{k(u)}])_{n\times m}. \tag{۵.۴}$$

مرحله بعد یافتن ایده‌آل و ایده‌آل منفی است. هر یک از ایده‌آل‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

ایده‌آل $A^{+} = ([v_{ij}^{+(l)}, v_{ij}^{+(u)}])_{n\times m}$ که

$$\begin{aligned} v_{ij}^{+(l)} &= \frac{۱}{t}\sum_{k=۱}^{t} v_{ij}^{k(l)}, \\ v_{ij}^{+(u)} &= \frac{۱}{t}\sum_{k=۱}^{t} v_{ij}^{k(u)}. \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

ایده‌آل منفی $A^{-} = ([v_{ij}^{-(l)}, v_{ij}^{-(u)}])_{n\times m}$ که در آن

$$\begin{aligned} v_{ij}^{-(l)} &= \min_{۱\leq k\leq t} v_{ij}^{k(l)}, \\ v_{ij}^{-(u)} &= \min_{۱\leq k\leq t} v_{ij}^{k(u)}. \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

برای محاسبه جدایی هر تصمیم فردی از فاصله اقلیدسی بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} S_k^{+} &= \sqrt{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}((v_{ij}^{k(l)} - v_{ij}^{+(l)})^{۲} + (v_{ij}^{k(u)} - v_{ij}^{+(u)})^{۲})}, \\ S_k^{-} &= \sqrt{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}((v_{ij}^{k(l)} - v_{ij}^{-(l)})^{۲} + (v_{ij}^{k(u)} - v_{ij}^{-(u)})^{۲})}. \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

نزدیکی نسبی که جهت رتبه‌بندی همه‌ی تصمیم‌گیرندگان است با توجه به S_k^+ و S_k^- هر تصمیم فردی بدست می‌آید.

$$RC_k = \frac{S_k^+}{S_k^+ + S_k^-} \tag{۹.۴}$$

از آنجاکه $S_k^+, S_k^- \geq 0$ واضح است که $RC_k = [0, 1]$ بدیهی است که ماتریس تصمیم‌گیری V_k وقتی RC_k به یک نزدیک باشد، نزدیک به A^+ و دورتر از A^- است. بنابراین با توجه به نسبت نزدیکی می‌توان تصمیم‌گیرندها را رتبه‌بندی کرده و از میان آنها بهترین را انتخاب کرد. λ_k بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_k = \frac{RC_k}{\sum_{k=1}^{t} RC_k} \tag{۱۰.۴}$$

که $\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ و بدین ترتیب وزن هر تصمیم‌گیرنده بدست می‌آید. حال برای یافتن بهترین گزینه ماتریس جمعی V را می‌توان بصورت زیر ایجاد کرد:

$$V = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k V_k = ([v_{ij}^{(l)}, v_{ij}^{(u)}])_{n\times m} \tag{۱۱.۴}$$

سپس داده‌ی مربوط به گزینه‌ی A_i به‌صورت

$$v_i = [v_i^{(l)}, v_i^{(u)}] = \sum_{j=1}^{m} [v_{ij}^{(l)}, v_{ij}^{(u)}] \quad \forall i \in N \tag{۱۲.۴}$$

بدست می‌آید. اکنون می‌توان ماتریس مکمل $P = (p(v_i \geq v_j))_{n\times n} = (p_{ij})_{n\times n}$ را با استفاده از تعریف ۷.۳.۱ تشکیل داد و گزینه‌ها را رتبه‌بندی کرد.

۳.۴ ARAS گروهی

برای تعمیم روش ARAS برای تصمیم‌گیری گروهی کلیه مفروضات روش TOPSIS و حل مساله تا رابطه‌ی (۵.۴) تکرار می‌شود با این تفاوت که هر ماتریس تصمیم‌گیری از k ماتریس موجود دارای سطر صفر می‌باشد که در فصل ۳ بخش ARAS بازه‌ای در مورد چگونگی تولید آن توضیح داده شده است. در ادامه کار با توجه به ارزش هر تصمیم‌گیرنده وزنی به آنها اختصاص داده می‌شود که این وزن می‌تواند با ماتریس مقایسات زوجی روش AHP محاسبه گردد. اگر وزن k امین تصمیم گیرنده با λ_k نمایش داده شود، می‌توان ماتریس کلی تصمیم‌گیری را به‌صورت زیر بدست آورد.

$$V = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k V_k = ([v_{ij}^{(l)}, v_{ij}^{(u)}])_{(n+1)\times m} \tag{۱۳.۴}$$

ادامه‌ی محاسبات همانند گامهای ۳ ، ۴و ۵ روش ARAS بازه‌ای می‌باشد.

فصل ۵

کاربرد مدل‌های MADM در اولویت بندی کتب درسی ریاضی

۱.۵ مقدمه

پس از معرفی روش‌های TOPSIS ، ARAS و AHP برای داده‌های بازه‌ای در این بخش، به پیاده‌سازی روش‌ها در قالب رتبه‌بندی کتب ریاضی دبیرستان می‌پردازیم. بدین نحو که ابتدا این رتبه‌بندی را به روش AHP انجام داده سپس با وزن معیارهای بدست آمده از این روش گزینه‌ها(کتب ریاضی) را با دو روش TOPSIS وARAS رتبه‌بندی و به مقایسه این دو روش می‌پردازیم.

تاکنون تحقیقات و پروژه‌های زیادی مبنی بر ارزیابی گزینه‌ها با روش‌های MADM با داده‌های بازه‌ای و بطور خاص روش‌های فوق‌الذکر انجام گرفته است [۶] [۵][۲][۴]. همچنین در حوزه آموزش و پرورش مطالعات فراوانی در خصوص کتب درسی انجام گرفته، اما هیچ کار علمی در زمینه مقایسه کتب درسی از دید مدرسان انجام نگرفته است.

کتاب درسی به شکلی که واجد آن هستیم، پدیده آموزشی قرن حاضر است که کارکردهای ویژه‌ای را از خود به ظهور رسانده است. از آنجا که در فلسفه آموزش و پرورش حاکم در ایران؛ نقش تربیتی معلم، جایگاه متون آموزشی، حدود رفتار مطلوب فراگیران و دامنه عمل آنان و تاثیر فضای آموزش کمتر به روشنی و صراحت تبیین شده است، لذا در برهه‌های مختلف و در گفتارهای برخی متولیان امر آموزش و پرورش شاهد جهت‌گیری‌های متفاوت "معلم محور، کتاب محور، دانش‌آموز محور و مدرسه محور" بوده‌ایم. لیکن کتاب درسی از آنجا که همواره در دسترس و در معرض قضاوت می‌باشد، به طور مستمر محل بحث اهل نظر بوده و هست و به یکی از حساس‌ترین عملکردهای نظام رسمی آموزش و پرورش تبدیل شده است.

بی آنکه انتظارت از کتاب درسی به وضوح تبیین و طراحی گردد و یا شاخص‌ها و معیارهای کتاب درسی

مطلوب به طور کامل مورد اتفاق نظر قرار گیرد. کتاب درسی که به لحاظ محتوا در گستره‌ای از عرضه صرف داده‌ها و اطلاعات تا تبلیغ، توضیح و ترویج هنجارهای فرهنگی و از ارائه افکار شخصی مولف تا بیان دیدگاه‌های جمعی طراحان و برنامه‌ریزان و گروه مولفان در حال تحول بوده است، هر از چند گاهی بزرگان و فرهیختگانی را در کسوت مولف "که قدر برخی از آنان پوشیده مانده"؛ به خود دیده است و گاهی نیز محفل کسب تجربه و عرضه سلایق شخصی معدودی بوده است.

امروز هزاران کتاب درسی منتشره در طی قریب به یکصد سال اخیر پیش روی صاحب‌نظران و میدان نقد و بررسی و تجربه اندوزی است، و اگر همچنان وجه غالب کتاب‌های درسی ارائه حجمی از اطلاعات باشد، محیط اطلاعاتی پیرامون ما که هزاران بار از آن موثرتر عمل می‌کند. در سال‌های اخیر موضوعاتی چون آموزش برای همه، یادگیری در تمام عمر، یادگیری روش‌های یادگیری، آموزش از راه دور و ورود به دنیای مجازی حاکمیت بلامنازع دهه‌های گذشته کتاب درسی را به چالش می‌خواند و خلاقیت، مقوله‌ای که به تجربه مرزهای کتاب درسی رایج آن را به بند کشیده است.

همچنین اتفاق نظر داریم که ظرف کتاب درسی اندازه‌ای دارد نه آنقدر وسیع که بتوان هر آنچه می‌خواهیم و ضرورت می‌بینیم در آن بریزیم و نه آن میزان محصور که بهانه‌ای برای نفی نوآوری و محدودیت عرضه خلاقانه مفاهیم شود و نیز اهتمام دست‌اندرکاران به انتقال آموزه‌ها و ارزش‌های دینی و اعتقادی از مسیر کتاب‌های درسی حضور بیش از پیش متخصصان آن را در این عرصه طلب می‌نماید. شاید بتوان گفت کتاب درسی مظلوم است و محق آن که به جایگاه شایسته خود برسد.

اینک همه اذعان دارند کتاب درسی نباید صرفا مجموعه‌هایی متراکم از داده‌ها باشد و ظرفیت و ظرافت کتاب درسی را بیش از پیش محل تامل می‌دانند. منطقی است که معلمان فقط مصرف کننده و واسطه انتقال اطلاعات عرضه شده در کتاب‌های درسی نیستند و باید مسیر مشارکت و هم‌فکری فعال آنان در فرآیند تدوین متون آموزشی بیش از گذشته هموار شود.

شاید یکی از روش‌های مناسب برای دخالت دادن مدرسان ریاضی در امر تالیف، انتخاب بهترین کتاب‌های ریاضی تالیف شده باشد. در این‌صورت می‌توان تا حدودی فاکتورهای مثبت موجود در کتاب‌های برتر را در تصحیح سایر کتب اعمال کرد.

برای رتبه‌بندی کتاب‌ها باید ابتدا معیارهای یک کتاب خوب را در نظر گرفت. صاحب‌نظران تعلیم و تربیت در مورد نحوه انتخاب و ارائه محتوا در برنامه‌ریزی درسی برخی اصول اساسی را مطرح می‌کنند که عبارتند از:

۱. رابطه‌ی محتوا و هدف

محتوا باید با هدف‌های درسی و نظام آموزشی مرتبط باشد. برای دستیابی به هر هدف تربیتی فعالیت‌های یادگیری باید چنان انتخاب شوند که به دانش‌آموز فرصت لازم برای انجام رفتار مورد

نظر داده شود. مثلا برای ایجاد و توسعه علاقه به کتاب، فعالیت یادگیری باید مجموعه فرصت‌هایی را برای مطالعه کتاب‌ها توسط دانش‌آموزان فراهم سازد.

۲. رابطه‌ی محتوا و توانایی

محتوا باید با تجارب گذشته یادگیرنده و یا نیازها و علائق او تناسب داشته باشد. فعالیت‌های یادگیری باید چنان تعیین شوند که دانش‌آموز از انجام رفتار، رضایت خاطر به دست آورد و فعالیت‌ها مورد علاقه او و در حد توانایی و دانش او باشد. اگر در گام‌های مختلف برنامه‌ریزی درسی مانند تعیین اهداف، انتخاب و سازمان‌دهی محتوا، تعیین روش‌های یاددهی — یادگیری به ویژگی‌های دانش‌آموزان توجه شده باشد، ملاك توجه به توان دانش‌آموزان، خود به خود رعایت می‌شود .

۳. جلوه‌های بصری

تصاویر، عکس‌ها، نقشه‌ها، جداول و نمودارها باید برانگیزاننده باشند طرح سوالات مناسب در متن درسی، درج تصاویر و جداول متناسب با روحیه دانش‌آموزان راه‌هایی برای جلب توجه و علاقه و مشاهده بهتر می‌باشد.

۴. رابطه‌ی محتوا و زمان

محتوا باید با سرعت و زمان اختصاص یافته سیستم آموزشی هماهنگ شود. تعداد مفاهیم، اصول، تعمیم‌ها و نظریه‌ها در یك واحد یادگیری یا یك کتاب درسی باید با زمانی که صرف خواندن و فهمیدن آن می‌شود متناسب باشد، در واقع زمان مورد نیاز برای خواندن و فهمیدن متن به تعداد مفاهیم بستگی دارد نه به تعداد کلمه‌ها و حجم کلی کتاب درسی. عواملی نظیر تراکم در ارائه نظریات، نسبت اطلاعات مهم به اطلاعات بی‌اهمیت در واحد متن و چگونگی تبیین آن در کاهش یا افزایش زمان مورد نیاز برای خواندن تاثیر دارد.

۵. رابطه‌ی محتوا و سودمندی

محتوای کتاب درسی باید با زندگی روزمره، مسائل و مصادیق آن مرتبط باشد به‌گونه‌ای که برای دانش‌آموز سودمند باشد.

۶. رابطه‌ی محتوا و ارتباط عمودی وافقی

دست‌یابی به اهداف معمولا زمان زیادی را می‌طلبد. بنابراین فرصت‌های یادگیری می‌بایست به طور متوالی به گونه‌ای تهیه شوند که مطالب یاد گرفته شده در طی سال‌های مختلف یکدیگر را پشتیبانی و تقویت کنند. از سوی دیگر توزیع و تقسیم‌بندی فعالیت‌های یادگیری در پایه‌های مختلف به گونه‌ای

باشد که موجب سنگینی مطالب در یك پایه نشود. همچنین محتوای کتاب درسی باید با محتوای سایر کتاب‌های درسی هم پایه هماهنگ باشد و مورد پشتیبانی قرار گیرد. در این حالت ممکن است بعضي از مفاهیم، مهارت‌ها و ارزش‌ها در کتاب‌های درسی یك پایه تحصیلی از ابعاد و جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گیرد. از آنجایی که همه دروس به‌طور همزمان به دانش‌آموزان داده می‌شود باید بین آنها ارتباط و هماهنگی لازم وجود داشته باشد. این ارتباط موجب می‌شود جنبه‌های گوناگون یادگیری همدیگر را تقویت کنند و در مخاطبین ((اندیشه نظام دار)) بوجود آورند.

با در نظر گرفتن نکات فوق برای روش‌های مورد نظر بطور مجزا ماتریس‌های تصمیم توسط ده نفر از دبیران مجرب ریاضی کامل و به‌روش میانگین هندسی ماتریس‌های نهایی محاسبه شده‌اند. در زیر ماتریسها و نتایج حاصل از رتبه‌بندی به سه روش آورده شده است.

۲.۵ رتبه‌بندی کتب ریاضی دبیرستان

۱.۲.۵ رتبه‌بندی به‌روشAHP

برای این منظور ۱۰ کتاب دوره دبیرستان انتخاب شده‌است و برای هر کتاب ۷ معیار در نظر گرفته شده است که به‌ترتیب در جداول (۱.۵) و (۲.۵)آمده‌اند.

جدول گزینه‌ها

نماد	کتاب
A_1	ریاضی۲
A_2	ریاضی۳
A_3	ریاضی عمومی
A_4	حسابان
A_5	حساب دیفرانسیل وانتگرال
A_6	هندسه۱
A_7	هندسه۲
A_8	هندسه تحلیلی
A_9	جبر و احتمال
A_{10}	ریاضیات گسسته

(۱.۵)

جدول معیارها

نماد	معیار
C_1	تناسب محتوا و توانایی دانش‌آموز
C_2	انطباق با اهداف آموزشی
C_3	تناسب محتوا و زمان
C_4	ارتباط عمودی و افقی
C_5	تناسب فعالیتها و تکالیف با متن کتاب
C_6	تناسب محتوا و سودمندی برای کنکور و مقاطع بالاتر
C_7	جذابیت‌های بصری

(۲.۵)

جداول (۳.۵) - (۹.۵) ماتریس مقایسات زوجی روش AHP می‌باشد. در ذیل هر ماتریس جدول وزن‌های پایین وبالای گزینه‌ها نسبت بر هر معیار با استفاده از مدل‌های ذکر شده در (۵.۳)و(۶.۳) و با کمک نرم افزار MATLAB کامل شده است. همچنین جدول (۱۰.۵) ماتریس مقایسات زوجی معیارها، کامل شده توسط تصمیم‌گیرندگان است که وزن هر معیار با توجه به رابطه‌ی (۲۵.۲) در جدول (۱۱.۵) دیده می‌شود. نهایتا وزن‌های نهایی بالا وپایین به کمک روابط ذکر شده در بخش ۱.۱.۳ بدست می‌آید که نتایج در جدول (۱۲.۵) آورده شده است. جداول (۱۴.۵) ،(۱۶.۵) رتبه‌بندی گزینه‌ها با استفاده از قسمت سوم تعریف ۷.۳.۱ است که (۱۳.۵) ، (۱۵.۵)ماتریس‌های P شرح داده شده در تعریف می‌باشند. به‌دلیل این‌که رتبه‌بندی دو حالت وزن بالا و وزن پایین متفاوت است، میانگین و رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها مقادیر داده شده در جدول (۱۷.۵) است.

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار C_1

C_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	۱	۰/۷, ۱/۵	۲/۳, ۴/۵	۲, ۳/۵	۱/۸, ۳/۲	۰/۷, ۱/۲	۱, ۲/۳	۲/۲, ۴	۱, ۲/۳	۳, ۴
A_2		۱	۳, ۴	۲/۸, ۳/۶	۲/۳, ۴	۱, ۱/۷	۱/۸, ۲/۵	۲, ۳/۳	۱/۵, ۲/۴	۲/۸, ۳/۹
A_3			۱	۱/۲, ۲	۱/۳, ۲	۰/۳, ۰/۵	۰/۷, ۱	۰/۸, ۱/۷	۰/۳, ۰/۷	۱, ۲/۱
A_4				۱	۰/۹, ۱/۵	۰/۲, ۰/۸	۰/۲, ۰/۵	۰/۳, ۰/۷	۰/۲, ۰/۶	۱/۳, ۲/۵
A_5					۱	۰/۴, ۰/۷	۰/۴, ۰/۶	۰/۳, ۰/۵	۰/۵, ۰/۸	۱/۲, ۲/۳
A_6						۱	۲, ۳/۵	۲/۳, ۴	۱/۸, ۳/۲	۳/۲, ۵
A_7							۱	۱/۳, ۲/۲	۰/۷, ۱/۵	۳/۲, ۵/۲
A_8								۱	۰/۵, ۰/۷	۲/۴, ۴/۲
A_9									۱	۳, ۴/۸
A_{10}										۱

(۳.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار C_1

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
A_1	۰/۰۲۹۰, ۰/۷۴۰۷	۰/۵۶۶۰, ۰/۶۱۸۹
A_2	۰/۱۳۹۸, ۰/۸۴۵۳	۰/۷۲۳۵, ۰/۷۸۲۰
A_3	۰/۰۱۰۳, ۰/۸۳۲۳	۰/۲۸۷۶, ۰/۳۳۹۲
A_4	۰/۰۰۲۰, ۰/۸۱۰۱	۰/۲۱۲۸, ۰/۲۶۴۵
A_5	۰/۰۲۳۲, ۰/۸۵۲۴	۰/۲۱۴۹, ۰/۲۷۲۱
A_6	۰/۰۸۰۱, ۰/۷۹۳۰	۰/۵۰۱۳, ۰/۵۵۴۲
A_7	۰/۰۱۴۱, ۰/۸۴۱۱	۰/۲۹۱۳, ۰/۳۴۹۰
A_8	۰/۰۳۸۴, ۰/۷۱۵۷	۰/۲۷۶۰, ۰/۳۲۹۷
A_9	۰/۰۱۴۲, ۰/۷۶۵۵	۰/۳۴۵۷, ۰/۳۹۴۸
A_{10}	۰/۰۰۱۲, ۰/۶۹۹۸	۰/۱۵۸۷, ۰/۲۱۶۴

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار C_2

C_2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	۱	۰/۵, ۲/۳	۲, ۴/۵	۱/۷, ۳/۸	۲, ۴/۲	۱/۳, ۲	۲/۴, ۳/۵	۱/۸, ۳/۲	۰/۷, ۳/۳	۲/۸, ۴/۵
A_2		۱	۱/۸, ۳/۵	۲/۲, ۴	۲/۵, ۳/۷	۰/۷, ۱/۲	۱, ۲/۳	۱/۸, ۴/۵	۱/۶, ۲/۲	۳/۵, ۵
A_3			۱	۰/۹, ۱/۲	۱/۵, ۲/۷	۰/۲, ۰/۵	۰/۸, ۱/۵	۰/۷, ۱/۳	۰/۵, ۰/۸	۱, ۱/۵
A_4				۱	۰/۷, ۱	۰/۵, ۰/۷	۰/۳, ۰/۸	۰/۷, ۱/۲	۰/۴, ۰/۷	۱/۵, ۲/۳
A_5					۱	۰/۷, ۱/۳	۰/۸, ۱/۵	۱, ۱/۷	۰/۸, ۱/۵	۲, ۳/۵
A_6						۱	۱, ۲/۳	۲, ۳/۴	۱/۵, ۳/۲	۲, ۳/۳
A_7							۱	۱/۴, ۳	۰/۸, ۱/۵	۱, ۱/۵
A_8								۱	۰/۵, ۱	۱/۲, ۲/۶
A_9									۱	۱, ۲/۵
A_{10}										۱

(۴.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار C_2

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
A_1	۰/۰۷۲۰, ۰/۵۱۰۲	۰/۳۴۴۸, ۰/۳۶۹۴
A_2	۰/۰۴۵۶, ۰/۵۲۱۳	۰/۲۳۷۷, ۰/۲۶۳۵
A_3	۰/۰۱۷۶, ۰/۳۹۷۶	۰/۱۱۴۱, ۰/۱۳۹۵
A_4	۰/۰۱۴۸, ۰/۳۸۱۶	۰/۱۱۲۰, ۰/۱۳۸۸
A_5	۰/۰۰۴۳, ۰/۵۵۴۵	۰/۱۱۱۶, ۰/۱۳۹۵
A_6	۰/۱۲۶۵, ۰/۳۶۹۰	۰/۱۶۰۶, ۰/۱۸۹۸
A_7	۰/۰۲۵۱, ۰/۴۳۱۹	۰/۱۳۹۷, ۰/۱۶۶۴
A_8	۰/۰۳۷۹, ۰/۳۴۳۰	۰/۱۱۲۰, ۰/۱۳۸۹
A_9	۰/۰۲۱۸, ۰/۴۱۷۷	۰/۱۳۸۹, ۰/۱۴۰۴
A_{10}	۰/۰۰۱۳, ۰/۳۸۷۸	۰/۰۷۷۴, ۰/۱۰۵۸

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار $C_{۳}$

$C_{۳}$	$A_{۱}$	$A_{۲}$	$A_{۳}$	$A_{۴}$	$A_{۵}$	$A_{۶}$	$A_{۷}$	$A_{۸}$	$A_{۹}$	$A_{۱۰}$
$A_{۱}$	۱	۰/۷, ۲/۵	۲/۱, ۳/۲	۲/۷, ۴/۵	۴/۷, ۷/۳	۰/۷, ۲/۵	۰/۵, ۳/۵	۱/۸, ۲/۷	۱/۵, ۲/۵	۴/۷, ۶
$A_{۲}$		۱	۲/۳, ۳/۵	۱/۷, ۴/۲	۳/۲, ۵	۰/۳, ۰/۵	۰/۷, ۱/۵	۲, ۲/۸	۰/۵, ۱	۲/۲, ۳/۵
$A_{۳}$			۱	۰/۳, ۰/۵	۱/۷, ۲/۵	۰/۲, ۰/۵	۰/۲, ۱	۰/۵, ۱/۷	۰/۳, ۱	۱/۷, ۲/۵
$A_{۴}$				۱	۱, ۲/۷	۰/۲, ۰/۵	۰/۵, ۰/۸	۰/۵, ۱	۰/۳, ۱/۵	۰/۵, ۱/۲
$A_{۵}$					۱	۰/۴, ۰/۷	۰/۳, ۰/۶	۰/۳, ۱	۰/۲, ۰/۷	۰/۶, ۱/۴
$A_{۶}$						۱	۳/۲, ۳/۷	۱, ۳/۵	۱/۲, ۲/۷	۲/۸, ۴/۵
$A_{۷}$							۱	۱/۳, ۲/۵	۲/۷, ۴/۵	۳/۲, ۴/۸
$A_{۸}$								۱	۰/۳, ۱	۱/۳, ۲/۵
$A_{۹}$									۱	۲/۷, ۴/۵
$A_{۱۰}$										۱

(۵.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار $C_{۳}$

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
$A_{۱}$	۰/۰۳۶۸, ۰/۱۱۵۳	۰/۱۷۱۹, ۰/۱۹۶۹
$A_{۲}$	۰/۰۲۱۸, ۰/۰۸۱۷۷	۰/۱۱۱۵, ۰/۱۳۴۲
$A_{۳}$	۰/۰۰۰۱, ۰/۰۸۴۰	۰/۰۶۹۳, ۰/۰۹۵۹
$A_{۴}$	۰/۰۰۴۴, ۰/۰۶۴۷۸	۰/۰۸۲۳, ۰/۱۰۸۷
$A_{۵}$	۰/۰۰۳۵, ۰/۰۷۴۷	۰/۰۷۰۱, ۰/۱۰۳۰
$A_{۶}$	۰/۰۳۶۵, ۰/۱۰۳۷	۰/۲۳۸۳, ۰/۲۵۸۷
$A_{۷}$	۰/۰۱۵۴, ۰/۱۰۲۱	۰/۱۳۲۸, ۰/۱۵۸۷
$A_{۸}$	۰/۰۱۳۵, ۰/۰۶۲۵	۰/۰۸۰۷, ۰/۱۰۹۶
$A_{۹}$	۰/۰۱۱۸, ۰/۰۷۳۳	۰/۰۸۴۴, ۰/۱۱۶۱
$A_{۱۰}$	۰/۰۰۰۵, ۰/۰۵۵۳	۰/۰۵۸۲, ۰/۰۸۶۵

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار C_4

C_4	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	۱	۰/۳, ۰/۵	۲/۲, ۳/۱	۱/۸, ۳/۷	۳/۲, ۴/۵	۱, ۲/۵	۱/۷, ۵/۲	۲/۸, ۴/۳	۱/۸, ۳/۲	۳/۷, ۵/۵
A_2		۱	۲/۸, ۵/۳	۳/۸, ۵/۵	۵/۲, ۶	۱/۷, ۳/۵	۲/۶, ۴/۵	۵/۳, ۶	۱/۸, ۳/۵	۳/۲, ۴
A_3			۱	۰/۳, ۰/۵	۰/۵, ۱	۰/۲, ۰/۵	۱/۷, ۴/۲	۲/۸, ۴/۲	۱, ۲/۲	۲/۳, ۳/۸
A_4				۱	۲/۳, ۳	۰/۷, ۱	۲/۳, ۳/۷	۳, ۴/۵	۱, ۲/۳	۲/۵, ۳/۷
A_5					۱	۰/۵, ۰/۹	۲/۲, ۳/۵	۳/۲, ۴/۷	۰/۸, ۲/۵	۱/۵, ۳/۴
A_6						۱	۱/۸, ۲/۵	۳/۵, ۴/۶	۲/۵, ۴	۱/۸, ۳/۷
A_7							۱	۱/۷, ۲/۵	۰/۲, ۰/۷	۰/۲, ۰/۷
A_8								۱	۰/۷, ۱	۰/۴, ۱
A_9									۱	۱/۵, ۳
A_{10}										۱

(۶.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار C_4

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
A_1	۰/۰۰۶۸, ۰/۲۰۳۷	۰/۰۶۲۰, ۰/۰۷۰۴
A_2	۰/۰۰۵۲, ۰/۲۱۵۳	۰/۱۰۸۸, ۰/۱۱۵۲
A_3	۰/۰۱۰۳, ۰/۱۵۹۱	۰/۰۲۹۸, ۰/۰۳۸۶
A_4	۰/۰۱۶۴, ۰/۱۶۴۰	۰/۰۳۷۴, ۰/۰۴۶۶
A_5	۰/۰۱۱۸, ۰/۱۹۷۳	۰/۰۲۶۱, ۰/۰۳۴۹
A_6	۰/۰۱۴۹, ۰/۱۷۵۲	۰/۰۶۱۷, ۰/۰۷۰۱
A_7	۰/۰۰۴۹, ۰/۱۵۵۹	۰/۰۲۳۴, ۰/۰۳۲۴
A_8	۰/۰۱۲۴, ۰/۱۳۸۵	۰/۰۱۷۵, ۰/۰۲۶۳
A_9	۰/۰۰۸۳, ۰/۱۸۳۴	۰/۰۳۰۷, ۰/۰۳۹۴
A_{10}	۰/۰۰۰۹, ۰/۱۷۰۱	۰/۰۲۴۲, ۰/۰۳۳۱

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار $C_۵$

$C_۵$	$A_۱$	$A_۲$	$A_۳$	$A_۴$	$A_۵$	$A_۶$	$A_۷$	$A_۸$	$A_۹$	$A_{۱۰}$
$A_۱$	۱	۰/۵, ۰/۸	۳/۲, ۴/۶	۳/۸, ۵/۶	۳/۷, ۵/۹	۰/۷, ۲/۵	۰/۹, ۳/۲	۳/۳, ۵/۲	۳/۶, ۶/۲	۴/۲, ۵/۳
$A_۲$		۱	۴/۲, ۶/۴	۳/۷, ۵/۸	۴/۲, ۶/۵	۱/۴, ۲/۲	۲/۷, ۵/۳	۲/۳, ۳/۴	۲/۳, ۳/۵	۴/۵, ۶/۷
$A_۳$			۱	۰/۷, ۱	۰/۲, ۰/۴	۰/۵, ۱/۳	۰/۴, ۱	۲/۲, ۳/۷	۰/۳, ۰/۵	۲/۵, ۳/۷
$A_۴$				۱	۰/۸, ۲/۳	۰/۴, ۰/۵	۰/۳, ۰/۷	۰/۴, ۱	۰/۲, ۰/۷	۲/۱, ۳/۸
$A_۵$					۱	۰/۳, ۰/۵	۰/۴, ۰/۶	۲/۵, ۳/۴	۰/۲, ۰/۵	۱/۸, ۳/۵
$A_۶$						۱	۲/۵, ۳/۴	۳/۲, ۵/۳	۱/۷, ۴/۳	۳/۸, ۶/۴
$A_۷$							۱	۱/۸, ۳/۲	۱, ۲/۵	۲/۷, ۵/۳
$A_۸$								۱	۰/۳, ۰/۵	۲/۲, ۳/۵
$A_۹$									۱	۴/۵, ۶/۳
$A_{۱۰}$										۱

(۷.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار $C_۵$

وزن پایین	وزن بالا	گزینه
۰/۷۱۴۱, ۰/۸۱۸۷	۰/۰۳۱۴, ۰/۱۱۲۸	$A_۱$
۰/۸۳۲۹, ۰/۹۵۱۲	۰/۰۷۲۰, ۰/۱۲۷۵	$A_۲$
۰/۲۲۸۶, ۰/۳۴۷۹	۰/۰۰۳۰, ۰/۰۹۴۳	$A_۳$
۰/۲۵۸۸, ۰/۳۶۲۰	۰/۰۰۴۰, ۰/۰۹۵۱	$A_۴$
۰/۲۶۱۴, ۰/۳۷۳۹	۰/۰۰۴۲, ۰/۱۰۳۰	$A_۵$
۰/۵۲۶۴, ۰/۶۲۸۸	۰/۰۰۰۱, ۰/۱۱۳۲	$A_۶$
۰/۳۲۹۶, ۰/۴۳۴۲	۰/۰۱۷۱, ۰/۰۹۱۰	$A_۷$
۰/۲۰۶۴, ۰/۳۲۵۲	۰/۰۰۸۴, ۰/۰۸۸۳	$A_۸$
۰/۳۲۲۲, ۰/۴۴۳۳	۰/۰۰۹۶, ۰/۱۰۰۵	$A_۹$
۰/۱۶۴۴, ۰/۲۷۸۶	۰/۰۰۰۶, ۰/۰۹۴۶	$A_{۱۰}$

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار C_6

C_6	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	۱	۰/۳, ۰/۵	۰/۵, ۱	۰/۳, ۰/۵	۰/۲, ۰/۳	۲/۳, ۳/۷	۱/۲, ۲/۶	۱/۸, ۴	۰/۵, ۰/۸	۱/۸, ۳/۵
A_2		۱	۱/۲, ۲/۵	۱/۸, ۳/۲	۰/۹, ۲/۵	۲/۷, ۳/۵	۴, ۵/۲	۲/۸, ۴/۵	۳, ۴/۶	۱/۷, ۳
A_3			۱	۰/۷, ۱/۹	۰/۸, ۲/۷	۱/۸, ۳	۲/۷, ۴	۲/۵, ۳/۷	۱/۸, ۳	۲/۵, ۳/۷
A_4				۱	۱, ۲/۵	۱/۸, ۴	۲/۷, ۴	۲/۵, ۴/۸	۱/۷, ۳	۲/۳, ۵
A_5					۱	۲/۷, ۳/۵	۱/۷, ۳	۲/۵, ۳/۸	۲/۳, ۳	۲/۸, ۴/۲
A_6						۱	۰/۳, ۰/۵	۰/۳, ۰/۶	۰/۵, ۱	۰/۴, ۰/۵
A_7							۱	۱, ۲	۰/۳, ۰/۵	۰/۲, ۰/۶
A_8								۱	۰/۲, ۰/۴	۰/۳, ۱
A_9									۱	۰/۷, ۳
A_{10}										۱

(۸.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار C_6

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
A_1	۰/۰۱۱۸, ۰/۴۷۹۲	۰/۰۲۳۶, ۰/۱۱۷۳
A_2	۰/۳۴۳۶, ۰/۷۳۳۳	۰/۱۲۷۷, ۰/۲۱۴۹
A_3	۰/۲۷۸۴, ۰/۶۵۷۶	۰/۰۸۸۰, ۰/۱۷۶۴
A_4	۰/۱۴۲۳, ۰/۵۲۸۸	۰/۰۸۷۱, ۰/۱۶۲۳
A_5	۰/۰۵۱۸, ۰/۹۵۶۰	۰/۰۳۲۰, ۰/۱۱۹۰
A_6	۰/۰۳۶۰, ۰/۲۶۴۲	۰/۰۸۲۶, ۰/۱۸۳۲
A_7	۰/۰۳۱۵, ۰/۴۰۷۵	۰/۰۶۱۷, ۰/۱۶۷۵
A_8	۰/۰۴۰۸, ۰/۴۰۹۶	۰/۰۵۲۸, ۰/۱۵۶۳
A_9	۰/۰۷۵۰, ۰/۴۵۶۴	۰/۰۷۲۱, ۰/۱۸۰۱
A_{10}	۰/۰۰۰۱, ۰/۳۱۱۳	۰/۰۷۱۸, ۰/۱۶۵۰

جدول مقایسه گزینه‌ها نسبت به معیار C_7

C_7	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	۱	۲/۷,۴	۱/۵,۲/۷	۰/۷,۲/۵	۱/۸,۲/۸	۱/۶,۳/۵	۱/۲,۳	۳/۲,۴/۵	۱/۷,۴/۵	۳/۵,۴/۷
A_2		۱	۰/۳,۰/۵	۰/۲,۰/۴	۰/۷,۱/۴	۰/۵,۱	۰/۵,۰/۸	۰/۳,۰/۵	۰/۵,۱	۱/۲,۲/۳
A_3			۱	۱,۲	۰/۷,۱/۵	۱/۸,۲/۷	۱/۵,۲/۶	۱/۲,۲	۰/۷,۲/۶	۰/۷,۱/۵
A_4				۱	۱/۷,۲/۵	۰/۷,۱/۳	۱/۸,۲/۵	۱/۷,۲/۶	۲/۵,۳/۷	۲/۸,۳/۷
A_5					۱	۰/۸,۲/۵	۰/۶,۳	۱/۶,۲/۸	۲/۷,۳/۹	۳,۴/۵
A_6						۱	۱,۲/۲	۱,۱/۷	۲,۲/۶	۲/۷,۴
A_7							۱	۱,۱/۵	۳/۲,۴	۲/۵,۳/۷
A_8								۱	۲/۵,۳/۴	۲,۳/۷
A_9									۱	۰/۷,۱/۸
A_{10}										۱

(۹.۵)

جدول وزن بالا وپایین گزینه‌ها نسبت به معیار C_7

گزینه	وزن بالا	وزن پایین
A_1	۰/۰۱۴۲, ۰/۲۱۱۹	۰/۲۲۹۶, ۰/۳۰۴۵
A_2	۰/۰۰۲۰, ۰/۲۳۱۳	۰/۱۰۶۰, ۰/۱۷۷۱
A_3	۰/۰۱۶۱, ۰/۱۸۷۹	۰/۲۱۵۲, ۰/۲۶۶۹
A_4	۰/۰۰۵۳, ۰/۲۱۳۰	۰/۲۰۳۲, ۰/۲۷۸۱
A_5	۰/۰۰۷۲, ۰/۲۷۶۶	۰/۱۷۷۳, ۰/۲۵۵۹
A_6	۰/۰۰۲۳, ۰/۱۰۱۸	۰/۰۹۸۳, ۰/۱۷۵۱
A_7	۰/۰۰۴۴, ۰/۲۲۷۸	۰/۱۴۰۶, ۰/۲۱۶۷
A_8	۰/۰۱۵۵, ۰/۱۸۱۴	۰/۱۲۱۰, ۰/۱۹۱۹
A_9	۰/۰۰۲۶, ۰/۲۲۵۱	۰/۱۰۳۲, ۰/۱۷۳۸
A_{10}	۰/۰۰۰۵, ۰/۲۰۵۹	۰/۰۶۷۵, ۰/۱۴۹۷

جدول مقایسه زوجی معیارها برای بدست آوردن وزن

	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$	$C_۷$
$C_۱$	۱	۰/۷	۲/۷	۰/۴	۳/۴	۳/۲	۰/۲۷
$C_۲$		۱	۳/۴۵	۰/۴۲	۳/۲	۰/۳۷	۰/۱۷
$C_۳$			۱	۲/۵	۲/۴	۰/۴	۰/۲۷
$C_۴$				۱	۳/۲	۱/۴	۰/۲۶
$C_۵$					۱	۰/۳۸	۰/۲۵
$C_۶$						۱	۰/۱۷
$C_۷$							۱

(۱۰.۵)

وزن معیارها

$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$	$C_۷$
۰/۰۶, ۰/۱۸۴	۰/۰۶۳, ۰/۱۷۲	۰/۰۲, ۰/۱۶	۰/۰۵۶, ۰/۲۱۳	۰/۰۰۷, ۰/۲۰۸	۰/۰۴۷, ۰/۲۹	۰/۰۱, ۰/۰۵

(۱۱.۵)

جدول وزن‌ها

گزینه	وزن نهایی پایین	وزن نهایی بالا
$A_۱$	۰/۱۸۴۵, ۰/۴۱۸۳	۰/۰۲۱۸, ۰/۴۲۷۵
$A_۲$	۰/۲۰۸۲, ۰/۴۷۰۱	۰/۰۶۴۶, ۰/۵۲۶۰
$A_۳$	۰/۱۰۳۲, ۰/۲۲۹۳	۰/۰۲۱۰, ۰/۳۶۳۹
$A_۴$	۰/۱۰۰۶, ۰/۲۱۲۹	۰/۰۰۸۰, ۰/۴۲۱۷
$A_۵$	۰/۰۷۹۲, ۰/۲۰۵۲	۰/۰۰۱۱۰, ۰/۳۹۴۱
$A_۶$	۰/۱۶۵۶, ۰/۳۵۰۹	۰/۰۳۰۸, ۰/۴۳۹۱
$A_۷$	۰/۱۰۹۰, ۰/۲۵۰۷	۰/۰۱۴۸, ۰/۴۰۱۰
$A_۸$	۰/۰۸۵۲, ۰/۲۱۳۰	۰/۰۲۱۴, ۰/۳۵۵۹
$A_۹$	۰/۱۰۸۵, ۰/۲۵۶۸	۰/۰۱۴۹, ۰/۴۰۴۰
$A_{۱۰}$	۰/۰۷۰۳, ۰/۱۷۶۶	۰/۰۰۰۵, ۰/۳۴۰۱

(۱۲.۵)

$$P = \begin{vmatrix} ۰/۵ & ۰/۴۲۳ & ۰/۸۷۵ & ۰/۹۱۸ & ۰/۹۴۲ & ۰/۶۰۳ & ۰/۸۲۴ & ۰/۹۲۲ & ۰/۸۱۱ & ۱ \\ ۰/۵۷۶ & ۰/۵ & ۰/۹۵۶ & ۰/۹۸۷ & ۱ & ۰/۶۸۱ & ۰/۸۹۵ & ۰/۹۸۷ & ۰/۸۸۱ & ۱ \\ ۰/۱۲۴ & ۰/۵۴۴ & ۰/۵ & ۰/۵۳۹ & ۰/۵۹۵ & ۰/۲۰۴ & ۰/۴۴۹ & ۰/۵۶۷ & ۰/۴۴۰ & ۰/۶۵۲ \\ ۰/۰۸۲ & ۰/۱۲۵ & ۰/۴۶۰ & ۰/۵ & ۰/۵۶۱ & ۰/۱۵۹ & ۰/۴۰۹ & ۰/۵۳۲ & ۰/۴۰۱ & ۰/۶۵۲ \\ ۰/۰۵۷ & ۰ & ۰/۴۰۵ & ۰/۴۳۹ & ۰/۵ & ۰/۱۲۷ & ۰/۳۵۹ & ۰/۴۷۲ & ۰/۳۵۲ & ۰/۵۸۱ \\ ۰/۳۹۷ & ۰/۳۱۹ & ۰/۷۹۵ & ۰/۸۴۱ & ۰/۸۷۳ & ۰/۵ & ۰/۷۳۹ & ۰/۸۴۸ & ۰/۷۲۶ & ۰/۹۶۲ \\ ۰/۱۷۶ & ۰/۱۰۵ & ۰/۵۵۱ & ۰/۵۹۱ & ۰/۶۴۱ & ۰/۲۶۰ & ۰/۵ & ۰/۶۱۴ & ۰/۴۹۰ & ۰/۷۲۷ \\ ۰/۰۷۹ & ۰/۰۱۲ & ۰/۴۳۲ & ۰/۴۶۸ & ۰/۵۲۷ & ۰/۱۵۱ & ۰/۳۸۶ & ۰/۵ & ۰/۳۷۸ & ۰/۶۰۹ \\ ۰/۱۸۹ & ۰/۱۱۸ & ۰/۵۵۹ & ۰/۵۹۹ & ۰/۶۴۷ & ۰/۲۷۳ & ۰/۵۰۹ & ۰/۶۲۱ & ۰/۵ & ۰/۷۳۲ \\ ۰ & ۰ & ۰/۳۱۶ & ۰/۳۴۷ & ۰/۴۱۹ & ۰/۰۳۷ & ۰/۲۷۳ & ۰/۳۹۰ & ۰/۲۶۷ & ۰/۵ \end{vmatrix} \tag{۱۳.۵}$$

جدول محاسبه‌ی P_i^l و رتبه‌بندی وزن پایین

(۱۴.۵)

گزینه	P_i^l	رتبه‌بندی
$A_۱$	۶/۴۸۵	$A_۲$
$A_۲$	۷/۲۳۷	$A_۱$
$A_۳$	۴/۴۴۲	$A_۶$
$A_۴$	۴/۳۹۸	$A_۹$
$A_۵$	۴/۰۵۱	$A_۷$
$A_۶$	۶/۱۴۲	$A_۳$
$A_۷$	۴/۷۹۷	$A_۴$
$A_۸$	۴/۱۰۶	$A_۸$
$A_۹$	۴/۸۵۵	$A_۵$
$A_{۱۰}$	۳/۴۸۵	$A_{۱۰}$

$$P = \begin{vmatrix} ۰/۵ & ۰/۴۱۴ & ۰/۵۴۳ & ۰/۵۱۲ & ۰/۵۳۴ & ۰/۴۸۷ & ۰/۵۲۱ & ۰/۵۴۸ & ۰/۵۱۹ & ۰/۵۷۳ \\ ۰/۵۸۶ & ۰/۵ & ۰/۶۳۲ & ۰/۵۹۶ & ۰/۶۱۹ & ۰/۵۷۴ & ۰/۶۰۷ & ۰/۶۳۸ & ۰/۶۰۵ & ۰/۶۶۰ \\ ۰/۴۵۷ & ۰/۳۶۷ & ۰/۵ & ۰/۴۷۰ & ۰/۴۹۳ & ۰/۴۴۳ & ۰/۴۷۹ & ۰/۵۰۵ & ۰/۴۷۶ & ۰/۵۳۲ \\ ۰/۴۸۸ & ۰/۴۰۳ & ۰/۵۲۰ & ۰/۵ & ۰/۵۲۱ & ۰/۴۷۵ & ۰/۵۰۸ & ۰/۵۳۵ & ۰/۵۰۶ & ۰/۵۵۹ \\ ۰/۴۶۶ & ۰/۳۸۱ & ۰/۵۰۷ & ۰/۴۷۸ & ۰/۵ & ۰/۴۵۳ & ۰/۴۸۷ & ۰/۵۱۲ & ۰/۴۸۵ & ۰/۵۳۷ \\ ۰/۵۱۳ & ۰/۴۲۶ & ۰/۵۵۶ & ۰/۵۲۴ & ۰/۵۴۶ & ۰/۵ & ۰/۵۳۴ & ۰/۵۶۲ & ۰/۵۳۲ & ۰/۵۸۶ \\ ۰/۴۷۹ & ۰/۳۹۲ & ۰/۵۲۱ & ۰/۴۹۱ & ۰/۵۱۳ & ۰/۴۶۶ & ۰/۵ & ۰/۵۲۶ & ۰/۴۹۸ & ۰/۵۵۲ \\ ۰/۴۵۱ & ۰/۳۶۱ & ۰/۴۹۴ & ۰/۴۶۵ & ۰/۴۸۸ & ۰/۴۳۸ & ۰/۴۷۳ & ۰/۵ & ۰/۴۷۱ & ۰/۵۲۷ \\ ۰/۴۸۱ & ۰/۳۹۴ & ۰/۵۲۳ & ۰/۴۹۳ & ۰/۵۱۵ & ۰/۴۶۸ & ۰/۵۰۲ & ۰/۵۲۸ & ۰/۵ & ۰/۵۵۴ \\ ۰/۴۲۷ & ۰/۳۳۹ & ۰/۴۶۷ & ۰/۴۴۱ & ۰/۴۶۳ & ۰/۴۱۳ & ۰/۴۴۸ & ۰/۴۷۳ & ۰/۴۴۶ & ۰/۵ \end{vmatrix} \tag{۱۵.۵}$$

جدول محاسبه‌ی P_i^u و رتبه‌بندی وزن بالای

گزینه	P_i^u	رتبه‌بندی
A_1	۵/۱۵۲	A_2
A_2	۶/۰۲۰	A_6
A_3	۴/۷۲۵	A_1
A_4	۵/۰۲۷	A_4
A_5	۴/۸۰۷	A_9
A_6	۵/۲۸۱	A_7
A_7	۴/۹۳۹	A_5
A_8	۴/۶۶۹	A_3
A_9	۴/۹۵۹	A_8
A_{10}	۴/۴۱۸	A_{10}

(۱۶.۵)

جدول میانگین P_i و رتبه‌بندی نهایی

گزینه	P_i	رتبه‌بندی
A_1	۵/۸۱۸	A_2
A_2	۶/۶۲۸	A_1
A_3	۴/۵۸۳	A_6
A_4	۴/۷۱۳	A_9
A_5	۴/۴۲۹	A_7
A_6	۵/۷۱۱	A_4
A_7	۴/۸۶۸	A_3
A_8	۴/۳۸۸	A_5
A_9	۴/۹۰۷	A_8
A_{10}	۳/۷۵۲	A_{10}

(۱۷.۵)

۲.۲.۵ رتبه‌بندی به‌روش TOPSIS ، ARAS

جدول گزینه‌ها

نماد	کتاب
$A_{۱}$	ریاضی۲
$A_{۲}$	ریاضی۳
$A_{۳}$	ریاضی عمومی
$A_{۴}$	حسابان
$A_{۵}$	حساب دیفرانسیل وانتگرال
$A_{۶}$	هندسه۱
$A_{۷}$	هندسه۲
$A_{۸}$	هندسه تحلیلی
$A_{۹}$	جبر و احتمال
$A_{۱۰}$	ریاضیات گسسته

(۱۸.۵)

جدول معیارها

نماد	معیار
$C_۱$	تناسب محتوا و توانایی دانش‌آموز
$C_۲$	انطباق با اهداف آموزشی
$C_۳$	بالا بودن حجم نسبت به زمان (معیار هزینه)
$C_۴$	ارتباط عمودی و افقی
$C_۵$	تناسب فعالیتها و تکالیف با متن کتاب
$C_۶$	ناکارآمدی محتوا برای مقاطع بالاتر و کنکور (معیار هزینه)
$C_۷$	جذابیت‌های بصری

(۱۹.۵)

۳.۲.۵ رتبه‌بندی بروش TOPSIS

جدول (۲۰.۵) ماتریس تصمیم‌گیری است که با میانگین هندسی از ماتریس‌های تصمیم ارائه شده توسط دبیران حاصل شده است. با استفاده از نرم داده‌های ماتریس نرمال شده‌اند. که در جدول (۲۱.۵) دیده می‌شود. جدول(۲۲.۵) ماتریس نرمال وزین است وزن هر معیار با توجه به داده‌های جدول (۱۱.۵) که از روش AHP بدست آمده در نظر گرفته شده است و فاصله از ایده‌آل‌ها و رتبه‌بندی در جدول (۲۳.۵) مشاهده می‌شود.

ماتریس تصمیم

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_1	[۷/۳،۸/۴]	[۷/۲،۸/۱]	[۴/۸،۵/۷]	[۴/۵،۵/۶]	[۵/۴،۷/۱]	[۵/۳،۶/۷]	[۶/۵،۷/۳]
A_2	[۶/۵،۷/۸]	[۷/۵،۸/۳]	[۴/۵،۵/۲]	[۷/۲،۸/۴]	[۶/۳،۷/۵]	[۳/۲،۴/۵]	[۴،۵/۲]
A_3	[۳/۷،۶/۲]	[۴/۲،۵/۸]	[۷/۸،۹]	[۳/۳،۵/۴]	[۴/۲،۶/۳]	[۷/۲،۸]	[۶،۷/۴]
A_4	[۴/۸،۶/۵]	[۴،۶/۲]	[۷/۲،۸/۳]	[۳/۵،۴/۷]	[۳/۲،۴/۸]	[۴/۸،۵/۵]	[۶/۵،۷/۳]
A_5	[۵،۶/۳]	[۳/۸،۵/۷]	[۸/۶،۹/۳]	[۴،۵/۳]	[۳،۴/۳]	[۴،۶/۲]	[۵/۳،۶/۶]
A_6	[۷/۸،۹]	[۷/۵،۸/۲]	[۶/۲،۸/۴]	[۶/۲،۸/۵]	[۵/۳،۶/۴]	[۵/۳،۷]	[۴/۷،۵/۲]
A_7	[۵/۴،۶/۸]	[۶/۲،۷]	[۴/۸،۷]	[۵/۴،۷/۳]	[۴/۷،۶]	[۵/۵،۶/۸]	[۴،۶/۷]
A_8	[۵/۸،۷/۲]	[۶،۷/۳]	[۶/۵،۸/۳]	[۴/۷،۵/۶]	[۷/۳،۸]	[۶/۸،۸/۲]	[۴/۶،۵/۴]
A_9	[۵/۹،۸]	[۵/۶،۷/۳]	[۴/۷،۶/۲]	[۳/۸،۵/۷]	[۷/۵،۸/۲]	[۶/۵،۷/۳]	[۴/۵،۶/۲]
A_{10}	[۴/۳،۵/۷]	[۵/۴،۶/۵]	[۷/۳،۸/۴]	[۵،۶/۳]	[۳/۴،۵/۲]	[۷/۲،۸/۵]	[۳/۲،۴/۷]

(۲۰.۵)

ماتریس بی‌مقیاس

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_1	۰/۲۴۸, ۰/۲۸۶	۰/۲۴۶, ۰/۲۷۷	۰/۱۳۲, ۰/۱۵۷	۰/۱۷۶, ۰/۲۱۹	۰/۲۰۴, ۰/۲۶۸	۰/۱۸۶, ۰/۲۳۵	۰/۲۵۵, ۰/۲۸۶
A_2	۰/۲۲۱, ۰/۲۶۶	۰/۲۵۷, ۰/۲۸۴	۰/۱۲۴, ۰/۱۴۳	۰/۲۸۲, ۰/۳۲۹	۰/۲۳۸, ۰/۲۸۳	۰/۱۱۲, ۰/۱۵۸	۰/۱۵۷, ۰/۲۰۴
A_3	۰/۱۲۶, ۰/۲۱۱	۰/۱۴۴, ۰/۱۹۸	۰/۲۱۵, ۰/۲۴۸	۰/۱۲۹, ۰/۲۱۲	۰/۱۵۸, ۰/۲۳۸	۰/۲۵۲, ۰/۲۸۱	۰/۲۳۸, ۰/۲۹۱
A_4	۰/۱۶۴, ۰/۲۲۱	۰/۱۳۷, ۰/۲۱۲	۰/۱۹۸, ۰/۲۲۹	۰/۱۳۷, ۰/۱۸۴	۰/۱۲۱, ۰/۱۸۱	۰/۱۶۸, ۰/۱۹۳	۰/۲۵۵, ۰/۲۸۷
A_5	۰/۱۷۰, ۰/۲۱۵	۰/۱۳۰, ۰/۱۹۵	۰/۲۳۷, ۰/۲۵۷	۰/۱۵۷, ۰/۲۰۸	۰/۱۱۳, ۰/۱۶۳	۰/۱۴۰, ۰/۲۱۷	۰/۲۰۸, ۰/۲۵۹
A_6	۰/۲۶۶, ۰/۳۰۷	۰/۲۵۷, ۰/۲۸۴	۰/۱۷۱, ۰/۲۳۲	۰/۲۴۳, ۰/۳۳۳	۰/۲۰۰, ۰/۲۴۲	۰/۱۸۶, ۰/۲۴۵	۰/۱۸۵, ۰/۲۰۴
A_7	۰/۱۸۴, ۰/۲۳۲	۰/۲۱۲, ۰/۲۳۹	۰/۱۳۲, ۰/۱۵۷	۰/۲۱۲, ۰/۲۸۶	۰/۱۷۷, ۰/۲۲۷	۰/۱۹۳, ۰/۲۳۸	۰/۱۸۱, ۰/۲۶۳
A_8	۰/۱۹۷, ۰/۲۴۵	۰/۲۰۵, ۰/۲۴۹	۰/۱۷۹, ۰/۲۲۹	۰/۱۸۴, ۰/۲۱۹	۰/۲۷۶۴, ۰/۳۰۲	۰/۲۳۸, ۰/۲۸۷	۰/۱۸۱, ۰/۲۱۲
A_9	۰/۲۰۱, ۰/۲۷۳	۰/۱۹۲, ۰/۲۴۹	۰/۱۲۹, ۰/۱۷۱	۰/۱۴۹, ۰/۲۲۳	۰/۲۸۳, ۰/۳۱۰	۰/۲۲۲۷, ۰/۲۵۶	۰/۱۷۶, ۰/۲۴۴
A_{10}	۰/۱۴۶, ۰/۱۹۴	۰/۱۸۵, ۰/۲۲۳	۰/۲۰۱, ۰/۲۳۲	۰/۱۹۶, ۰/۲۴۷	۰/۱۲۸, ۰/۱۹۶	۰/۲۵۲, ۰/۲۹۸	۰/۱۲۶, ۰/۱۸۶

(۲۱.۵)

ماتریس بی‌مقیاس وزین

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_1	۰/۰۱۴۹, ۰/۰۵۲۶	۰/۰۱۵۵, ۰/۰۴۷۷	۰/۰۰۲۶, ۰/۰۲۵۲	۰/۰۰۹۹, ۰/۰۴۶۸	۰/۰۰۱۴, ۰/۰۵۵۸	۰/۰۰۸۷, ۰/۰۶۸۱	۰/۰۰۲۶, ۰/۱۴۳
A_2	۰/۰۱۳۳, ۰/۰۴۸۹	۰/۰۱۶۲, ۰/۰۴۸۸	۰/۰۰۲۵, ۰/۰۲۲۹	۰/۰۱۶, ۰/۰۷	۰/۰۰۱۷, ۰/۰۵۹	۰/۰۰۵۳, ۰/۰۴۵۷	۰/۰۰۱۶, ۰/۰۱۰۲
A_3	۰/۰۰۷۵, ۰/۰۳۸۸	۰/۰۰۹, ۰/۰۳۴	۰/۰۰۴۳, ۰/۰۴	۰/۰۰۷۲, ۰/۰۴۵۱	۰/۰۰۱۱, ۰/۰۴۹۵	۰/۰۱۱۹, ۰/۰۸۱۳	۰/۰۰۲۴, ۰/۰۱۴۵
A_4	۰/۰۰۹۸, ۰/۰۴۰۷	۰/۰۰۸۶, ۰/۰۳۶۵	۰/۰۰۴, ۰/۰۳۶۶	۰/۰۰۷۷, ۰/۰۳۹۲	۰/۰۰۰۸, ۰/۰۳۸	۰/۰۰۷۹, ۰/۰۵۶	۰/۰۰۲۶, ۰/۰۱۴۳
A_5	۰/۰۱, ۰/۰۳۹۵	۰/۰۰۸۲, ۰/۰۳۳۵	۰/۰۰۴۷, ۰/۰۴۱	۰/۰۰۴۴, ۰/۰۰۸	۰/۰۰۰۸, ۰/۰۳۴	۰/۰۰۶۶, ۰/۰۶۳	۰/۰۰۲۱, ۰/۰۱۳
A_6	۰/۰۱۶, ۰/۰۵۶۴	۰/۰۱۶, ۰/۰۴۹	۰/۰۰۳۴, ۰/۰۳۷	۰/۰۱۳۶, ۰/۰۷۱	۰/۰۰۱۴, ۰/۰۵۰۳	۰/۰۰۸۷, ۰/۰۷۱۲	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۱۰۲
A_7	۰/۰۱۱, ۰/۰۴۲۶	۰/۰۱۳, ۰/۰۴۱۲	۰/۰۰۲۶, ۰/۰۲۷۴	۰/۰۱۲, ۰/۰۶۱	۰/۰۰۱۲, ۰/۰۴۷۲	۰/۰۰۹۱, ۰/۰۶۹	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۱۳۲
A_8	۰/۰۱۹, ۰/۰۴۵	۰/۰۱۳, ۰/۰۴۳	۰/۰۰۳۶, ۰/۰۳۶۶	۰/۰۱۰۳, ۰/۰۴۷	۰/۰۰۲, ۰/۰۶۳	۰/۰۱۱۲, ۰/۰۸۳۴	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۱
A_9	۰/۰۱۲, ۰/۰۵	۰/۰۱۲, ۰/۰۴۳	۰/۰۰۲۶, ۰/۰۲۷۴	۰/۰۰۸۳, ۰/۰۴۷۶	۰/۰۰۲, ۰/۰۶۴۵	۰/۰۱۰۷, ۰/۰۷۴	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۱۲۲
A_{10}	۰/۰۰۸۸, ۰/۰۳۵۷	۰/۰۱۷, ۰/۰۳۸	۰/۰۰۴, ۰/۰۳۷	۰/۰۱۱, ۰/۰۵۲۶	۰/۰۰۰۹, ۰/۰۴۱	۰/۰۱۲, ۰/۰۸۶۴	۰/۰۰۱۳, ۰/۰۰۹۲

(۲۲.۵)

اندازه جدایی و رتبه‌بندی

	D_i^+	D_i^-	RC_i	رتبه‌بندی
A_1	۰/۰۳۹	۰/۰۴	۰/۵۰۸۲	A_2
A_2	۰/۰۱	۰/۰۶۲	۰/۸۶۱۱	A_6
A_3	۰/۰۵۶	۰/۰۱۷۶	۰/۲۳۹۱	A_1
A_4	۰/۰۵	۰/۰۳۳	۰/۳۹۲۶	A_9
A_5	۰/۰۵۴	۰/۰۲۴۵	۰/۳۱۲۵	A_7
A_6	۰/۰۳۳	۰/۰۴۳۸	۰/۵۷۱۱	A_8
A_7	۰/۰۳۵	۰/۰۳	۰/۴۸۹۱	A_4
A_8	۰/۰۵	۰/۰۳۲۵	۰/۳۹۳۹	A_5
A_9	۰/۰۳۹	۰/۰۴	۰/۵۰۶۳	A_{10}
A_{10}	۰/۰۴۸۵	۰/۰۱۵۴	۰/۲۴۱۰	A_3

(۲۳.۵)

۴.۲.۵ رتبه‌بندی به‌روش ARAS

ماتریس تصمیم‌گیری همان ماتریس روش TOPSIS است که سطر صفر بهینه به آن اضافه گردیده است ((۲۴.۵)). در ماتریس جدول (۲۴.۵) داده‌هایی که مربوط به معیارهای ضرر است را معکوس و مراحل را با جدول (۲۵.۵) ادامه می‌دهیم. جدول (۲۶.۵) نمایش‌گر داده‌های نرمال شده می‌باشد و با توجه به بردار وزنی که از روش AHP حاصل شده‌است ماتریس وزین نرمال بدست می‌آید که نتیجه محاسبات انجام شده در جدول (۲۷.۵) آمده است. از طریق گامهای ۳ و ۴و ۵ مراحل روش ARAS کامل می‌گردد که نتایج آن در جدول (۲۸.۵) ملاحظه می‌گردد.

ماتریس تصمیم

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_0	۹	۸/۳	۴/۵	۸/۵	۸/۲	۳/۲	۷/۴
A_1	[۷/۳،۸/۴]	[۷/۲،۸/۱]	[۴/۸،۵/۷]	[۴/۵،۵/۶]	[۵/۴،۷/۱]	[۵/۳،۶/۷]	[۶/۵،۷/۳]
A_2	[۶/۵،۷/۸]	[۷/۵،۸/۳]	[۴/۵،۵/۲]	[۷/۲،۸/۴]	[۶/۳،۷/۵]	[۳/۲،۴/۵]	[۴،۵/۲]
A_3	[۳/۷،۶/۲]	[۴/۲،۵/۸]	[۷/۸،۹]	[۳/۳،۵/۴]	[۴/۲،۶/۳]	[۷/۲،۸]	[۶،۷/۴]
A_4	[۴/۸،۶/۵]	[۴،۶/۲]	[۷/۲،۸/۳]	[۳/۵،۴/۷]	[۳/۲،۴/۸]	[۴/۸،۵/۵]	[۶/۵،۷/۳]
A_5	[۵،۶/۳]	[۳/۸،۵/۷]	[۸/۶،۹/۳]	[۴،۵/۳]	[۳،۴/۳]	[۴،۶/۲]	[۵/۳،۶/۶]
A_6	[۷/۸،۹]	[۷/۵،۸/۲]	[۶/۲،۸/۴]	[۶/۲،۸/۵]	[۵/۳،۶/۴]	[۵/۳،۷]	[۴/۷،۵/۲]
A_7	[۵/۴،۶/۸]	[۶/۲،۷]	[۴/۸،۷]	[۵/۴،۷/۳]	[۴/۷،۶]	[۵/۵،۶/۸]	[۴،۶/۷]
A_8	[۵/۸،۷/۲]	[۶،۷/۳]	[۶/۵،۸/۳]	[۴/۷،۵/۶]	[۷/۳،۸]	[۶/۸،۸/۲]	[۴/۶،۵/۴]
A_9	[۵/۹،۸]	[۵/۶،۷/۳]	[۴/۷،۶/۲]	[۳/۸،۵/۷]	[۷/۵،۸/۲]	[۶/۵،۷/۳]	[۴/۵،۶/۲]
A_{10}	[۴/۳،۵/۷]	[۵/۴،۶/۵]	[۷/۳،۸/۴]	[۵،۶/۳]	[۳/۴،۵/۲]	[۷/۲،۸/۵]	[۳/۲،۴/۷]

(۲۴.۵)

ماتریس تصمیم

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_0	۹	۸/۳	۰/۲۲۲	۸/۵	۸/۲	۰/۳۱۳	۷/۴
A_1	[۷/۳،۸/۴]	[۷/۲،۸/۱]	[۰/۱۷۵, ۰/۲۰۸]	[۴/۵،۵/۶]	[۵/۴،۷/۱]	[۰/۱۴۹, ۰/۱۸۸]	[۶/۵،۷/۳]
A_2	[۶/۵،۷/۸]	[۷/۵،۸/۳]	[۰/۱۹۲, ۰/۲۲۲]	[۷/۲،۸/۴]	[۶/۳،۷/۵]	[۰/۲۲۲, ۰/۳۱۳]	[۴،۵/۲]
A_3	[۳/۷،۶/۲]	[۴/۲،۵/۸]	[۰/۱۱۱, ۰/۱۲۸]	[۳/۳،۵/۴]	[۴/۲،۶/۳]	[۰/۱۲۵, ۰/۱۳۹]	[۶،۷/۴]
A_4	[۴/۸،۶/۵]	[۴،۶/۲]	[۰/۱۲۱, ۰/۱۳۹]	[۳/۵،۴/۷]	[۳/۲،۴/۸]	[۰/۱۸۲, ۰/۲۰۸]	[۶/۵،۷/۳]
A_5	[۵،۶/۳]	[۳/۸،۵/۷]	[۰/۱۰۷, ۰/۱۱۶]	[۴،۵/۳]	[۳،۴/۳]	[۰/۱۶۱, ۰/۲۵۰]	[۵/۳،۶/۶]
A_6	[۷/۸،۹]	[۷/۵،۸/۲]	[۰/۱۱۹, ۰/۱۶۱]	[۶/۲،۸/۵]	[۵/۳،۶/۴]	[۰/۱۴۳, ۰/۱۸۹]	[۴/۷،۵/۲]
A_7	[۵/۴،۶/۸]	[۶/۲،۷]	[۰/۱۷۵, ۰/۲۰۸]	[۵/۴،۷/۳]	[۴/۷،۶]	[۰/۱۴۷, ۰/۱۸۲]	[۴،۶/۷]
A_8	[۵/۸،۷/۲]	[۶،۷/۳]	[۰/۱۲۱, ۰/۱۵۴]	[۴/۷،۵/۶]	[۷/۳،۸]	[۰/۱۲۲, ۰/۱۴۷]	[۴/۶،۵/۴]
A_9	[۵/۹،۸]	[۵/۶،۷/۳]	[۰/۱۶۱, ۰/۲۱۳]	[۳/۸،۵/۷]	[۷/۵،۸/۲]	[۰/۱۳۷, ۰/۱۵۴]	[۴/۵،۶/۲]
A_{10}	[۴/۳،۵/۷]	[۵/۴،۶/۵]	[۰/۱۱۹, ۰/۱۳۷]	[۵،۶/۳]	[۳/۴،۵/۲]	[۰/۱۱۸, ۰/۱۳۹]	[۳/۲،۴/۷]

(۲۵.۵)

ماتریس بی‌مقیاس

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_0	۰/۲۸۹	۰/۲۷۰	۰/۲۹۵	۰/۳۰۶	۰/۲۹۵	۰/۳۴۹	۰/۲۷۵
A_1	۰/۲۳۴, ۰/۲۷۰	۰/۲۴۰, ۰/۲۶۳	۰/۲۳۳, ۰/۲۷۷	۰/۱۶۲, ۰/۲۰۲	۰/۱۹۴, ۰/۲۵۵	۰/۱۶۷, ۰/۲۱۱	۰/۲۴۱, ۰/۲۷۱
A_2	۰/۲۰۸, ۰/۲۵۰	۰/۲۴۴, ۰/۲۶۹	۰/۲۵۵, ۰/۲۹۵	۰/۲۵۹, ۰/۳۰۳	۰/۲۲۷, ۰/۲۷۰	۰/۲۴۸, ۰/۳۴۹	۰/۱۴۸, ۰/۱۹۳
A_3	۰/۱۱۸, ۰/۱۹۹	۰/۱۳۶, ۰/۱۸۸	۰/۱۴۸, ۰/۱۷۰	۰/۱۱۹, ۰/۱۹۵	۰/۱۵۱, ۰/۲۲۷	۰/۱۴۰, ۰/۱۵۵	۰/۲۲۳, ۰/۲۷۵
A_4	۰/۱۵۴, ۰/۲۰۸	۰/۱۳۰, ۰/۲۰۲	۰/۱۶۰, ۰/۱۸۴	۰/۱۲۶, ۰/۱۶۹	۰/۱۱۵, ۰/۱۷۳	۰/۲۰۳, ۰/۲۳۳	۰/۲۴۱, ۰/۲۷۱
A_5	۰/۱۶۰, ۰/۲۰۲	۰/۱۲۳, ۰/۱۸۵	۰/۱۴۳, ۰/۱۵۴	۰/۱۴۴, ۰/۱۹۱	۰/۱۰۸, ۰/۱۵۵	۰/۱۸۱, ۰/۲۷۹	۰/۱۹۷, ۰/۲۴۵
A_6	۰/۲۳۵, ۰/۲۸۸	۰/۲۴۴, ۰/۲۶۹	۰/۱۵۸, ۰/۲۱۴	۰/۲۲۳, ۰/۳۰۶	۰/۱۹۱, ۰/۲۳۰	۰/۱۶۰, ۰/۲۱۱	۰/۱۷۴, ۰/۱۹۳
A_7	۰/۱۷۳, ۰/۲۱۸	۰/۲۰۱, ۰/۲۲۷	۰/۲۳۳, ۰/۲۷۷	۰/۱۹۵, ۰/۲۶۳	۰/۱۶۹, ۰/۲۱۶	۰/۱۶۴, ۰/۲۰۳	۰/۱۴۸, ۰/۲۴۹
A_8	۰/۱۸۶, ۰/۲۳۱	۰/۱۹۴, ۰/۲۳۷	۰/۱۶۰, ۰/۲۰۴	۰/۱۶۹, ۰/۲۰۲	۰/۲۶۳, ۰/۲۸۸	۰/۱۳۶, ۰/۱۶۴	۰/۱۷۱, ۰/۲۰۰
A_9	۰/۱۸۹, ۰/۲۵۶	۰/۱۸۲, ۰/۲۳۷	۰/۲۱۴, ۰/۲۸۳	۰/۱۳۷, ۰/۲۰۵	۰/۲۷۰, ۰/۲۹۵	۰/۱۵۳, ۰/۱۷۲	۰/۱۶۷, ۰/۲۳۰
A_{10}	۰/۱۳۸, ۰/۱۸۲	۰/۱۷۵, ۰/۲۱۱	۰/۱۵۸, ۰/۱۸۲	۰/۱۸۰, ۰/۲۲۷	۰/۱۲۲, ۰/۱۸۷	۰/۱۳۱, ۰/۱۵۵	۰/۱۱۹, ۰/۱۷۴

(۲۶.۵)

بی‌مقیاس وزین تصمیم

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_0	۰/۰۱۷, ۰/۰۵۳	۰/۰۱۷, ۰/۰۴۶	۰/۰۰۶, ۰/۰۴۷	۰/۰۱۷, ۰/۰۶۵	۰/۰۰۲, ۰/۰۶۱	۰/۰۱۶, ۰/۱	۰/۰۰۳, ۰/۰۱۴
A_1	۰/۰۱۲۵, ۰/۰۴۶	۰/۰۱۴۷, ۰/۰۴۶۴	۰/۰۰۵, ۰/۰۴۴	۰/۰۰۹, ۰/۰۴۳	۰/۰۰۱, ۰/۰۵۳	۰/۰۰۸, ۰/۶۱	۰/۰۰۱, ۰/۰۱۴
A_2	۰/۰۱, ۰/۰۴۶	۰/۰۱۵۴, ۰/۰۴۶۴	۰/۰۰۲, ۰/۰۴۷	۰/۰۱۵, ۰/۰۶۴	۰/۰۰۱, ۰/۰۵۶	۰/۰۱۲, ۰/۱	۰/۰۰۱, ۰/۰۱
A_3	۰/۰۰۷, ۰/۰۳۶۶	۰/۰۰۸۶, ۰/۰۳۲۴	۰/۰۰۳, ۰/۰۲۷	۰/۰۰۷, ۰/۰۴۱	۰/۰۰۱, ۰/۰۴۷	۰/۰۰۷, ۰/۰۴۵	۰/۰۰۲, ۰/۰۱۴
A_4	۰/۰۰۹, ۰/۰۳۸۳	۰/۰۰۸, ۰/۰۳۴۷	۰/۰۰۳, ۰/۰۲۹۵	۰/۰۰۷, ۰/۰۳۶	۰/۰۰۰۸, ۰/۰۳۶	۰/۰۱, ۰/۰۶۸	۰/۰۰۲, ۰/۰۱۴
A_5	۰/۰۰۹۶, ۰/۰۳۷	۰/۰۰۷۸, ۰/۰۳۲	۰/۰۰۳, ۰/۰۲۴۷	۰/۰۰۸, ۰/۰۴۱	۰/۰۰۰۷۶, ۰/۰۳۲	۰/۰۰۸, ۰/۰۸۱	۰/۰۰۲, ۰/۰۱۲
A_6	۰/۰۱۵, ۰/۰۵۳	۰/۰۱۵۴, ۰/۰۴۶۴	۰/۰۰۳, ۰/۰۳۴۳	۰/۰۱۳, ۰/۰۶۵	۰/۰۰۱۳, ۰/۰۴۸	۰/۰۰۸, ۰/۰۶۱	۰/۰۰۲, ۰/۰۱
A_7	۰/۰۱, ۰/۰۴	۰/۰۱۲۷, ۰/۰۳۹۱	۰/۰۰۵, ۰/۰۴۴	۰/۰۱۱, ۰/۰۵۶	۰/۰۰۳۶, ۰/۰۲۱۳	۰/۰۰۸, ۰/۰۵۹	۰/۰۰۱, ۰/۰۱۲
A_8	۰/۰۱۱۲, ۰/۰۴۲۴	۰/۰۱۲۳, ۰/۰۴۱	۰/۰۰۳, ۰/۰۳۲۶	۰/۰۰۹, ۰/۰۴۳	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۶	۰/۰۰۶, ۰/۰۴۸	۰/۰۰۲, ۰/۰۱
A_9	۰/۰۱۱۳, ۰/۰۴۷	۰/۰۱۱, ۰/۰۴۰۸	۰/۰۰۴, ۰/۰۴۵	۰/۰۰۸, ۰/۰۴۴	۰/۰۰۱۸, ۰/۰۶۱	۰/۰۰۷, ۰/۰۵	۰/۰۰۲, ۰/۰۱۲
A_{10}	۰/۰۰۸۳, ۰/۰۳۳۶	۰/۰۱۱, ۰/۰۳۶۳	۰/۰۰۳, ۰/۰۳	۰/۰۱, ۰/۰۴۸	۰/۰۰۰۸۶, ۰/۰۳۹	۰/۰۰۶, ۰/۰۴۵	۰/۰۰۱, ۰/۰۰۹

(۲۷.۵)

جدول مجموع و رتبه بندی

S_0	۰/۲۳۳۴			رتبه‌بندی
S_1	۰/۱۸۲۱	K_1	۰/۷۷۹۷	A_2
S_2	۰/۲۱۴۹	K_2	۰/۹۲۰۵	A_6
S_3	۰/۱۳۹۴	K_3	۰/۵۹۷۰	A_1
S_4	۰/۱۴۸۰	K_4	۰/۶۳۴۰	A_9
S_5	۰/۱۴۹۷	K_5	۰/۶۴۱۲	A_7
S_6	۰/۱۸۷۱	K_6	۰/۸۰۱۷	A_8
S_7	۰/۱۷۲۴	K_7	۰/۷۳۸۶	A_5
S_8	۰/۱۶۱۳	K_8	۰/۶۹۰۹	A_4
S_9	۰/۱۷۲۶	K_9	۰/۷۳۹۴	A_{10}
S_{10}	۰/۱۴۰۴	K_{10}	۰/۶۰۱۶	A_3

(۲۸.۵)

۳.۵ بحث ونتیجه‌گیری

اگر بخواهیم روش‌های مطرح شده را با یگدیگر مقایسه کنیم، روش AHP به جهت مقایسات زوجی که بین همه گزینه‌ها انجام می‌شود دقیق‌تر و نتیجه رتبه‌بندی به واقعیت نزدیک‌تر است. با مقایسات دو به دو انجام شده می‌توان میزان برتری هر گزینه نسبت به گزینه‌های دیگر را در تک تک معیارها مورد بررسی قرار داد و گزینه‌ها را نسبت به آن شاخص ارتقا داد.

اولویت‌بندی بدست آمده از داده‌های بازه‌ای به‌دلیل عدم قطعیت در داده‌ها در دو نوع وزن نهایی نشان داده شده که رتبه‌بندی در دوحالت بهم نزدیک، اما دقیقا مانند یکدیگر نیستند، البته با استفاده از میانگین حسابی (هندسی) می‌توان این نقیصه را جبران کرد. پر کردن ماتریس‌های مقایسات زوجی توسط تصمیم‌گیرندگان کاری وقت‌گیر و بعضا خسته‌کننده است که همین امر ممکن است در میزان دقت داده‌های مندرج تاثیرگذار باشد. همچنین حجم بالای محاسبات در روش AHP بازه‌ای را می‌توان از معایب آن دانست.

برای مسائلی که دارای داده‌های از پیش تهیه شده علمی هستند، روش AHP روش مناسبی نیست. چون ساخت ماتریس مقایسات زوجی از روی داده‌های مشخص که ارزش هر گزینه را نسبت به معیار نشان می‌دهد کار دشواری است. دو روش دیگر در این‌گونه موارد مناسب‌تر عمل می‌کنند.

اما بطور کلی نتیجه‌ای که از روش AHP بدست می‌آید دقیق‌تر از دو روش دیگر است.

نتیجه رتبه‌بندی روش AHP را نمی‌توان با دو روش دیگر مقایسه کرد چرا که نوع ماتریس تصمیم‌گیری که در محاسبات از آن استفاده می‌شود در این روش متفاوت است. به‌همین جهت تنها به مقایسه نتایج در دو روش TOPSIS و ARAS بسنده می‌کنیم.

با توجه به رتبه‌بندی بدست آمده در هر دو روش مشاهده می‌شود که ترتیب گزینه‌ها تقریبا مانند یکدیگر است. در واقع با در نظر گرفتن روش حل دو مدل مشخص می‌شود که با توجه به اینکه در روش TOPSIS به فاصله‌ی گزینه‌ها از ایده‌آل‌ها توجه می‌شود جزئیات بیشتری از گزینه‌ها مورد توجه قرار گرفته و نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود اما در روش ARAS اگر گزینه‌ای تحت یک معیار خاص برتری فاحشی نسبت به دیگر گزینه‌ها داشته باشد، از آنجایی‌که مجموع محاسبه می‌گردد بدون در نظر گرفتن نوسانات سایر معیارها، مسیر رتبه‌بندی را تغییر می‌دهد. به‌عنوان مثال اگر داده‌ی بازه‌ای [۸,۹] جایگزین [۴/۳,۵/۷] (ارزش A_{10} تحت معیار C_1) شود، مقدار RC_{10} در مدل TOPSIS از ۰/۲۴۱ به ۰/۲۵۵۷ تغییر می‌کند که رتبه‌بندی را جابه جا نمی‌کند. در حالیکه در روش ARAS مقدار K_{10} از ۰/۶۰۱۶ به ۰/۶۵۸۵ تغییر می‌کند و این عدد گزینه‌یA_{10} را از رتبه‌ی نهم به رتبه‌ی هفتم ارتقا می‌دهد.

با این همه روش ARAS بدلیل سادگی محاسبات نسبت به روش TOPSIS می‌تواند در مواردی که اختلاف بین عناصر ماتریس تصمیم‌گیری زیاد نیست مورد استفاده قرار گیرد.

۴.۵ آینده نگری

تصمیم‌گیری چند معیاره از جمله دانش‌هایی است که زمینه کار فراوان به سبب تنوع روش‌ها و استفاده از آنها در رتبه‌بندی‌های مختلف دارد. از جمله:

۱. با توجه به تعدد روش‌های MADM هر یک از روش‌ها را به‌صورت بازه‌ای تعمیم داد.

۲. روش‌های مختلف را بصورت بازه‌ای با یکدیگر مقایسه و روش‌های برتر را انتخاب کرد.

۳. با توجه به جدید بودن روش ARAS گسترش و کاربرد آن در حوزه‌های مختلف را مد نظر قرار داد.

۴. به مقایسه روش‌های مختلف به دو حالت بازه‌ای و فازی پرداخت.

۵. رتبه‌بندی را در مورد سایر کتب، مجلات، مراکز آموزشی، دبیران و ... در سطوح مختلف آموزشی مدنظر قرار داد.

مراجع

[۱] محمد جواد اصغرپور، ۱۳۷۷، تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره، چاپ هشتم، ، انتشارات دانشگاه تهران.

[۲] علی پهلوانی، اولویت بندی سرمایه گذاری با استفاده از روش تصمیمگیری سلسله مراتبی در محیط فازی TOPSIS گروهی، نشریه مدیریت صنعتی، دوره ۱، شماره ۲، بهار و تابستان ۱۳۸۸ ، ۳۵ تا ۵۴.

[۳] حسن قدسی‌پور، فرایند تحلیل سلسله مراتبی، چاپ دهم، انتشارات دانشگاه امیرکبیر.

[۴] علی محمدی ، نبی مولایی، کاربرد تصمیم گیری چند معیاره خاکستری در ارزیابی عملکرد شرکت ها، مدیریت صنعتی دانشکده مدیریت دانشگاه تهران دوره ۲، شماره ۴ بهار و تابستان ۱۳۸۹، ۱۲۵ تا ۱۴۲

[۵] حجت میان‌آبادی، عباس افشار، تصمیم‌گیری گروهی فازی ، محاسبه وزن نسبی تصمیم‌گیران؛ مطالعه کاربردی: انتخاب دانشجویان مقطع دکتری، فصلنامه آموزش مهندسی ایران، شماره ۳۵، سال نهم، ۳۱ تا ۵۳

[۶] مصطفی نشاسته‌گر، کاربرد روش تلفیق تصمیم‌گیری چندمعیاره در جانمایی تصفیه‌خانه‌های غیرمتمرکز فاضلاب در کلان شهرها، پایان‌نامه کارشناسی ارشد

[7] Aghajani Bazzazi. A, Osanloo. M, Karimi. B, Deriving preference order of open pit mines equipment through MADM methods: Application of modified VIKOR method. Expert Systems with Applications: An International Journal, 38(3), (2011), 2550–2556.

[8] David. K, Grey system and grey relational model, ACM SIGCE Bulletin, 20, (1994), 1-9.

[9] Dong. G, Yamaguchi. D and M. Nagai ,A grey-based decisionmaking approach to the supplier selection problem, Mathematical and Computer Modeling, 46, (2006), 573-581.

[10] Entani.T, Tanaka.H, Interval estimations of global weights in AHP by upper approximation, Fuzzy Sets and Systems, 158, (2007), 1913 – 1921.

[11] Ghazinoory. S , Aliahmadi. A , Namdarzangeneh. S , Ghodsypour. S. H, Using AHP and L.P. for choosing the best alternatives based the gap analysis, Applied Mathematics and Computation, 184, (2007), 316–321.

[12] Hwang. C, Yoon. K, Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. Berlin, Springer-Verlag.(1981)

[13] Jahanshahloo. G.R, Hosseinzadeh Lotfi. F, Izadikhah. M, An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data, Applied Mathematics and Computation, 175, (2006), 1375–1384.

[14] perez- Vaga. S, Peter.S , Salmeron- Ochoa. I, A.nieva-da la Hidalga , P.N.Sharratt , AHP for the selection of solvents in early stages of pharmaceutical process development , prosess safety and environmental protection, 89, (2011), 261-267.

[15] Peiyue. L, Jianhua. W , Hui. Q , Groundwater guality assessment based on entropy weighted osculating value method , international journal of environmental sciences ,1 , 2010.

[16] Ramanathan. R , Stochastic dicision making using multiplicative AHP,European Journal of Operational Research, 97, (1997), 543–549 .

[17] Saaty. T. L, Vergas. L.G, Inconsistency and rank preservation, Journal of Mathematical Psychology, 28, (1984), 205–214.

[18] Saaty. T. L, Vergas. L.G, Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research, 32, (1987), 107–117.

[19] Shih. H.S,Shyur. H.J , Lee. E.S , An extension of TOPSIS for group decision making, Mathematical and Computer Modelling, 45, (2007), 801–813.

[20] Srdjevic.B , Srdjevic. Z,Bi-criteria evolution strategy in estimating weights from the AHP ratio-scale matrices,Applied Mathematics and Computation, 218, (2011), 1254–1266.

[21] Srdjevic.B , Srdjevic. Z, Synthesis of individual best local priority vectors in AHP-group decision making, Applied Soft Computing, (2012).

[22] Sugihara.K , Ishii.H , Interval priorities in AHP by interval regression analysis, European Journal of Operational Research, 158, (2004), 745–754. .

[23] Tanaka. H, Guo. P, Possibilistic Data Analysis for Operation Research, Physica-Verlag, A Springer Verlag Company, 1999.

[24] Tanaka. H, Sugihara.K, Maeda. , Proceedings of International Workshop on Rough Set Theory and Granular Computing, 2001, 63–67

[25] Tanaka. H, Sugihara. K, Maedab. Y, Non-additive measures by interval probability functions, Information Sciences, 164, (2004), 209–227.

[26] Tsaur. R.C, Decision risk analysis for an interval TOPSIS method, Applied Mathematics and Computation, 218, (2011), 4295–4304.

[27] Turskis. Z, Zavadskas. K, A novel method for multiple criteria Analysis: grey additive ratio assessment (ARAS-G) method, Informatica, 21(4), (2010), 597–610.

[28] Wiecek. M, Ehrgott. M, Fadel. G , Multiple criteria decision making for engineering Omega, 36, (2005), 337-339.

[29] Wang. H. F, Hsu. F .C, An integrated operation module for individual risk management, European Journal of Operational Research, 198, (2009), 610–617.

[30] Yue. Z , An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers,Knowledge-Based Systems, 24, (2011), 146–153.

[31] Xu. Z, Dependent uncertain ordered weighted aggregation operators. Information Fusion, 9(2), (2008), 310–316.

[32] Xu. Z, On method for uncertain multiple attribute decision making problems with uncertain multiplicative preference information on alternatives. Fuzzy Optimization and Decision Making, 4(2), (2005), 131–139.

[33] Zavadskas. E. K and Turskis. Z, A new additive ratio assessment (ARAS) method In multicriteria decision-making, Technological and Economic Development of Economy, 16(2), (2010), 159–172.

[34] Zhang. J, Wu. D, Olson. D. L, The method of grey related analysis to multiple attribute decision making problems with interval numbers, Mathematical and Computer Modelling, 42, (2005), 991–998.

Surname: Sheikh kabir | Name: Narges

Title: The use of multi-criteria methods for interval data to prioritize options

---

Supervisor: Dr. Jafar Fathali

Advisor: Dr. Reza Sheikh

Degree: Master of Science | Subject: Applied Mathematics

Field: Operation Research

Shahrood University of Technology

Date: September 2013 | Number of pages: 85

Keywords: Multi-Attribute Decision Making - ARAS , TOPSIS and AHP Method- Interval data - Ranking textbooks

---

Abstract

In recent years, many researchers has attracted in the decision sciences. Also, management the use of appropriate tools that could decide the result is increased productivity. In before times decision makers are faced with data since it could not be determined exactly. In these cases, the need to develop a decision-making procedures. We develop the method of ARAS, TOPSIS, AHP for the data bases.One of the main concerns of managers and staff of education textbooks is a comprehensive evaluation of these books. Case Study of prioritizing the math' books in course high school.

Shahrood University of Technology

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

The use of multi-criteria methods for interval data to prioritize options

Supervisor

Dr. Jafar Fathali

Advisor

Dr. Reza Sheikh

by

Narges Sheikh kabir

September 2013