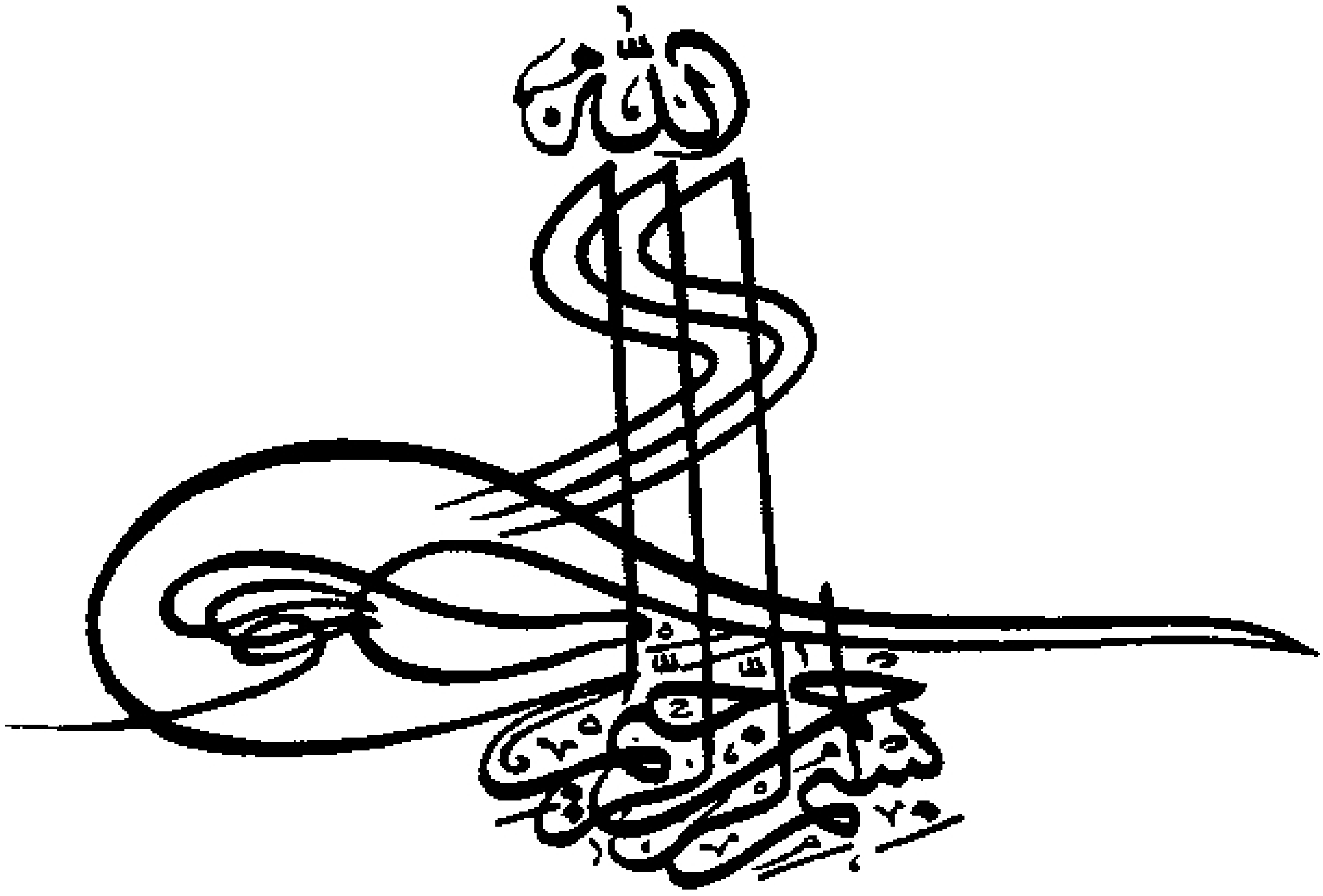

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گراف جابجایی گروه‌های متناهی

استاد راهنما

سید حیدر جعفری

استاد مشاور

نادر جعفری راد

پژوهشگر

زیبا توشمالانی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: توشمالانی نام: زیبا

عنوان: گراف جابجایی گروه‌های متناهی

استاد راهنما: سید حیدر جعفری

استاد مشاور: نادر جعفری راد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: عدد استقلال، عدد خوشه، عدد رنگی، قطر گراف، گراف جابجایی، گراف دو مؤلفه‌ای، گروه دووجهی، گروه کواترنیون تعمیم یافته، گروه متقارن.

چکیده

در این پایان‌نامه، که از مراجع [۶]، [۱۵]، [۱۸] و [۱۹] تهیه شده است، ابتدا مفهوم گراف جابجایی گروه‌های متناهی را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی گراف جابجایی گروه‌های D_{2n}،Q_n و S_n می‌پردازیم. با بیان ویژگی‌های معینی از گراف جابجایی گروه‌های دووجهی و کواترنیون تعمیم یافته،عدد خوشه، عدد استقلال و عدد پوششی این گراف‌ها را به دست می‌آوریم.

در پایان هر قسمت با استفاده از قضایا و نتایجی که همبند یا ناهمبند بودن گراف جابجایی گروه‌های D_{2n}،Q_n و S_n را مشخص می‌کنند، قطر (یا کرانی از قطر) گراف جابجایی روی زیر مجموعه‌های معینی از گروه‌های مذکور را به دست می‌آوریم.

جانی که من گرفتم تا درس را بخوانم

از روح پاک مادر رفته در استخوانم

صبر و دعای او تا همراه من روان شد

عقل و خرد بتازد بر ذهن و بر زبانم

روح کلام خود را از مهر تو گرفتم

بی کوه استواری چون تو پدر نمانم

این تکه های کاغذ محصول عمر من شد

ناقابل است تقدیم بر تکه های جانم

گر قطره قطره بوده افکار کوچک من

استاد ره نمایاند دریای بی کرانم

تقدیم می نمایم بر زحمت دو سالی

که علم بی دریغش بخشید رایگانم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر جعفری راد که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

زیبا توشمالانی

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

گراف جابجایی گروه متناهی G، که آن را با $\mathcal{C}(G,X)$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود که رأس‌های این گراف زیرمجموعه‌ی X از G است و دو رأس متمایز x و y به هم وصل می‌شوند اگر $xy=yx$.

مفهوم گراف جابجایی برای رده‌ی وسیعی از گروه‌ها و زیر مجموعه‌های متنوعی از آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. به ویژه بررسی گراف جابجایی گروه متقارن، زمانی که X یک رده‌ی تزویج از G است، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب نموده است. براور و همکاران [۱] (۱۹۵۵)، به بررسی گراف جابجایی گروه‌هایی از مرتبه‌ی عددی زوج پرداختند. فیشر [۲] و برند [۳] (۱۹۷۱)، گراف جابجایی گروه‌های متناهی تولید شده به وسیله‌ی حاصل ضرب سه ترانهش را معرفی کردند و به مطالعه آن‌ها پرداختند. سگو و همکاران [۴] (۲۰۰۲)، گراف جابجایی گروه‌های متناهی ساده و گروه‌های نا ایزوتروپ از نوع A_n را بررسی کردند. بیت و همکاران [۵] (۲۰۰۳)، (۲۰۰۴) و (۲۰۰۷)، کار فیشر را ادامه داده و حالت‌های کلی‌تر این گراف‌ها، گراف اینولوشن، را مورد بررسی قرار دادند. اکبری [۶] و عبداللهی [۷] (۲۰۰۶)، گراف جابجایی گروه‌های خطی خاص و عام را مورد مطالعه قرار دادند. باندی [۸] (۲۰۰۶)، همبندی گراف جابجایی گروه متقارن را به طور کامل مورد مطالعه قرار داده و قضایای مربوط به آن را بیان و اثبات نموده است، که در این پایان‌نامه با استفاده از آن قطر گراف‌های همبند از S_n را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعاریف و قضایای (مربوط به گراف) به کار رفته در این قسمت از مرجع [۷]، گرفته شده‌اند.

گراف Γ، یک سه‌تایی مرتب $(V(\Gamma),E(\Gamma),\psi(\Gamma))$ است که تشکیل شده از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(\Gamma)$ از رأس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(\Gamma)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع $\psi(\Gamma)$ که به هر یال Γ، یک زوج نامرتب از رأس‌های Γ را نسبت می‌دهد.

---
[۱] Brauer
[۲] Fischer
[۳] Bernd
[۴] Segev
[۵] Bate
[۶] Akbari
[۷] Abdollahi
[۸] Bundy

تعریف ۱.۱.۱. یک گراف، ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد.

از این به بعد گراف‌ها را ساده و بدون جهت در نظر می‌گیریم.برای هر گراف دلخواه Γ مجموعه‌ی رئوس و یال‌های Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. درجه رأس v در Γ، $d_\Gamma(v)$، برابر تعداد یال‌های واقع بر v است. کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های Γ را به ترتیب با $\delta(\Gamma)$ و $\Delta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. مرتبه Γ تعداد رأس‌های Γ است و با $|V(\Gamma)|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. گراف‌های $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، یکریخت نامیده می‌شوند (و نوشته می‌شود $\Gamma_۱ \cong \Gamma_۲$)، اگر نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(\Gamma_۱) \longrightarrow V(\Gamma_۲)$ و $\phi : E(\Gamma_۱) \longrightarrow E(\Gamma_۲)$ وجود داشته باشند، به طوری که داشته باشیم: $\psi_{\Gamma_۱}(e) = uv$، اگر و تنها اگر $\psi_{\Gamma_۲}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. که یال e رأس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است.

تعریف ۳.۱.۱. می‌گوئیم گراف Λ، زیر گراف Γ است (نوشته می‌شود $\Lambda \subseteq \Gamma$)، اگر $V(\Lambda) \subseteq V(\Gamma)$، $E(\Lambda) \subseteq E(\Gamma)$ و $\psi(\Lambda)$ از محدود کردن $\psi(\Gamma)$ به $E(\Lambda)$ حاصل شده باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید V'، یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. زیر گرافی از Γ که مجموعه‌ی رأس‌های آن V' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از Γ باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیر گراف القا شده توسط V' نامیده شده و با $\Gamma[V']$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوئیم $\Gamma[V']$ یک زیر گراف القایی Γ است.

تعریف ۵.۱.۱. دنباله‌ی ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲\ldots e_kv_k$ که جمله‌های آن به طور متناوب رأس‌ها و یال‌ها هستند را یک مسیر گوئیم هرگاه یال‌های $e_۱$، ...، e_k و رأس‌های $v_۰$، ...، v_k متمایز باشند. که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. رأس‌های $v_۰$ و v_k را به ترتیب مبدأ و انتهای W و $v_۱$، ...، $v_{k-۱}$ را رأس‌های داخلی آن می‌نامند. عدد صحیح k طول W است و یک مسیر به طول k را با P_k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. گراف Γ را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس دلخواه u و v از Γ، مسیری در Γ موجود باشد. درغیراین‌صورت Γ را ناهمبند نامند.

تعریف ۷.۱.۱. اگر u و v در Γ همبند باشند، فاصله‌ی بین u و v در Γ، که با $d_\Gamma(u,v)$ نشان می‌دهیم،طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v در Γ است. بیشترین فاصله‌ی بین دو رأس Γ، را قطر Γ نامیم و با $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر $x \in V(\Gamma)$ و هر $i \in \mathbb{N}$، $\Delta_i(x) = \{y \in V(\Gamma) : d(y,x) = i\}$، را i امین دیسک x می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. مسیری که دارای طول مثبت بوده و مبدأ و انتهای آن یکی باشد را یک دور گوئیم و دوری به طول k را با C_k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشد را گراف کامل گوئیم. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف Γ را n –منتظم می‌نامیم هر گاه درجه تمام رئوس آن برابر n باشد و گراف یک منتظم با n رأس، که به صورت کپی‌هایی از K_2 باشد را با $\frac{n}{2}K_2$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم Γ یک گراف باشد زیر مجموعه Λ از رئوس Γ را یک خوشه گوئیم هر گاه زیر گراف القایی از Λ یک گراف کامل باشد و مجموعه‌ی رئوس Λ، $V(\Lambda)$، را یک مجموعه‌ی کامل می‌نامیم. ماکزیمم اندازه یک خوشه در Γ، را عدد خوشه‌ای Γ نامیم و با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف Γ را $k-$ رنگ پذیر گوئیم، در صورتی که بتوان هر یک از k رنگ را به یکی از رئوس آن تخصیص داد، بطوریکه هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند. اگر Γ با کمتر از k رنگ قابل رنگ آمیزی نباشد، Γ را $k-$ رنگی می‌گوئیم، یا بطور معادل گوئیم عدد رنگی Γ یعنی $\chi(\Gamma)$ برابر k است.

تعریف ۱۴.۱.۱. زیر مجموعه S از $V(\Gamma)$ را یک مجموعه‌ی مستقل می‌نامیم هر گاه هیچ دو رأسی از S در Γ مجاور نباشند. ماکزیمم اندازه از S را عدد استقلال Γ گوییم و با $\alpha(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. گراف Γ را دومؤلفه‌ای گوئیم هر گاه افرازی مانند $V = S + K$ از مجموعه‌ی رئوس Γ وجود داشته باشد بطوریکه، S مجموعه‌ای مستقل و K مجموعه‌ای کامل باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. زیر مجموعه‌ی M از $E(\Gamma)$ را یک تطابق می‌نامیم اگر هیچ دو یال پیوندی (یالی که دو رأس متمایز را به هم وصل می‌کند)، در آن رأس مشترک نداشته باشند. تطابق M را کامل گوئیم اگر هر رأس Γ بر یالی از M واقع باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. گراف Γ را دو بخشی گوئیم، هرگاه مجموعه رئوس آن را بتوان به دو قسمت X و Y افراز کرد بطوریکه هر یال یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد. چنانچه هر رأس از X به هر رأس از Y وصل باشد Γ را گراف کامل دو بخشی نامیم و معمولا با $K_{r,s}$ نشان می‌دهیم، که در آن r و s به ترتیب تعداد رئوس در X و Y است.

تعریف ۱.۱.۱۸. یک پوشش گراف Γ زیر مجموعه‌ی K از $V(\Gamma)$ است، به طوریکه هر یال Γ دارای حداقل یک انتها در K باشد. تعداد رأس‌ها در مینیمم پوشش Γ را عدد پوششی Γ نامیم و با $\beta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. ضرب حلقوی گراف‌های Γ_1 و Γ_2 که با $\Gamma_1[\Gamma_2]$ نشان می‌دهیم، دارای مجموعه رأس‌های $\{(x,y)|x \in V(\Gamma_1), y \in V(\Gamma_2)\}$ ومجموعه یال‌های

$$\{\{(x_1,y_1),(x_1,y_2)\} \mid \{y_1,y_2\} \in E(\Gamma_2)\} \cup \{\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\} \mid \{x_1,x_2\} \in E(\Gamma_1)\}$$

است.

لم ۱.۱.۲۰. فرض کنیم $S \subseteq V(\Gamma)$. در این صورت S مستقل است، اگر وتنها اگر $V \setminus S$ یک پوشش از Γ باشد.

برهان. بنابر تعریف، S یک مجموعه مستقل از Γ است اگر و تنها اگر هر دو انتهای هیچ یالی از Γ در S نباشد و یا هم ارز آن، اگر و تنها اگر هر یال دارای حداقل یک انتها در $V \setminus S$ باشد. اما این مطلب درست است اگر و تنها اگر $V \setminus S$ پوشش Γ باشد. $\square$

لم ۲۱.۱.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. در این صورت $\alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)=n(\Gamma)$.

برهان. فرض کنید S مجموعه مستقل ماکسیمم و K پوشش مینیمم Γ باشد. در این‌صورت بنابر لم قبل، $V\setminus K$ یک مجموعه مستقل و $V\setminus S$ یک پوشش برای Γ است، لذا $n(\Gamma)-\beta(\Gamma)=|V\setminus K|\leq\alpha(\Gamma)$ همچنین،

$$n(\Gamma)-\alpha(\Gamma)=|V\setminus S|\geq\beta(\Gamma)\Rightarrow n(\Gamma)-\beta(\Gamma)\geq\alpha(\Gamma)\Rightarrow n(\Gamma)-\beta(\Gamma)=\alpha(\Gamma)\Rightarrow$$

$$\alpha(\Gamma)+\beta(\Gamma)=n(\Gamma).$$

□

تعریف ۲۲.۱.۱. برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی Ω از گروه G، مرکز ساز Ω در G مجموعه‌ای از عناصر G است که با هر عضو Ω جابجا می‌شوند و با $C_G(\Omega)$ نشان می‌دهیم. همچنین مرکز گروه G را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر یک n- ضلعی منتظم را در یک صفحه در نظر بگیریم، آنگاه توسط n دوران حول مرکز n- ضلعی به اندازه $\frac{۲k\pi}{n}$ رادیان، برای $k\in\{۱,۲,\ldots,n\}$، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n- ضلعی، می‌توان n- ضلعی را بر خودش منطبق نمود. مجموعه‌ی تمام این دوران‌ها و انعکاس‌ها همراه با عمل ترکیب توابع، تشکیل یک گروه به نام گروه تقارن‌های یک n- ضلعی منتظم می‌دهد که با $D_{۲n}$ نمایش می‌دهیم. $D_{۲n}$ را n- امین گروه دووجهی نیز می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید H یک زیرگروه G باشد. زیر مجموعه‌ی T از G را یک تراگرد راست H در G می‌نامیم در صورتی که T فقط یک عضو از هر همدسته راست H را شامل باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $G=Sym(\Omega)$ که $\Omega=\{۱,۲,\ldots,n\}$، در این صورت G را گروه متقارن روی n حرف می‌نامیم و برای هر $g\in G$، ساپورت (محمل) g، مجموعه‌ی نقاطی از Ω است که به وسیله‌ی g ثابت نگه داشته نشوند و با $supp(g)$ نمایش می‌دهیم. $Fix(g)$ مجموعه نقاطی از Ω است که به وسیله‌ی g ثابت نگه داشته می‌شوند.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم σ یک جایگشت مجموعه‌ی $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ باشد. رده‌ی هم ارزی در Ω معین شده با رابطه‌ی هم ارزی

$$\forall \quad a, b \in \Omega \qquad a \sim b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad s.t \quad b = \sigma^n(a).$$

مدارهای σ هستند و می‌نویسم $orb_\sigma(a) = \{\sigma^n(a) : n \in \mathbb{Z}\}$.

تعریف ۲۷.۱.۱. جایگشت $\sigma \in S_n$ را یک دور می‌نامیم اگر دارای حداکثر یک مدار شامل بیش از یک عنصر باشد. طول یک دور تعداد عناصر در بزرگترین مدار آن است. یک دور به طول r را با $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. گروه G و مجموعه‌ی ناتهی X را درنظر بگیرید. فرض کنید به‌ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) به‌ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$، و

(۲) به‌ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، $(x \bullet g_1) \bullet g_2 = x \bullet (g_1 g_2)$.

دراین‌صورت گوئیم G بر X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل G بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به‌جای $x \bullet g$ از xg استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوئیم g عضو (یا نقطه‌ی) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی اعضایی از G که هر عضو X را ثابت نگه‌می‌دارند را هسته‌ی عمل می‌نامند.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$، دراین‌صورت مجموعه‌ی $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامند و با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ درصورتی‌که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است.

هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک G-مدار، می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم‌ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $Orb_G(x)$ (یا مختصرا با $Orb(x)$) نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق، $Orb_G(x) = \{xg \mid g \in G\}$. در صورتی که $Orb_G(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در G می‌نامیم.

قضیه ۳۲.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. برای هر g از G، تابع $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $x\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $\varphi_g \in S_x$ و نگاشت $\varphi : G \longrightarrow S_x$ با ضابطه‌ی $g \longmapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.

قضیه ۳۳.۱.۱. **(مدار-پایدارساز)** فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. دراین‌صورت، تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های راست $St(x)$ در G وجود دارد. بالاخص اگر $Orb(x)$ متناهی باشد آنگاه $|Orb(x)| = |G : St(x)|$.

فصل ۲

گراف جابجایی گروه‌های $D_{۲n}$ و Q_n

۱.۲ مقدمه

این فصل شامل دو بخش است، که در آن به معرفی گراف جابجایی گروه‌های $D_{۲n}$ و Q_n، می‌پردازیم و قضایا و نتایجی را در مورد این مفهوم بیان و اثبات می‌نمائیم. در بخش اول، ساختار گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G, G-Z(G))$، که در آن G یکی از گروه‌های مذکور است، را مورد مطالعه قرار داده و عدد استقلال، عدد خوشه و عدد پوششی آن را به دست می‌آوریم. در بخش دوم، به بررسی گراف جابجایی $\mathfrak{C}(D_{۲n}, \Omega)$، به صورت کلی‌تر می‌پردازیم. سپس پارامترهایی مانند عدد خوشه، عدد رنگی، قطر و ... را برای این گراف‌ها به دست می‌آوریم.

۲.۲ خواص اساسی گراف جابجایی با مجموعه‌ی رئوس $G-Z(G)$

در این بخش، که از مرجع [۱۹] آورده‌ایم، گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G, X)$، دارای مجموعه‌ی رئوس $X = G-Z(G)$ است. دو رأس متمایز x و y با یک یال به هم وصل می‌شوند، هرگاه $xy = yx$. $\mathfrak{C}(G, X)$ را با $\Gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. گروه دووجهی و گروه کواترنیون تعمیم یافته را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{۲n} =< a, b|a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} >$$

و

$$Q_n =< c, d|d^۴ = c^{۲^{n-۱}} = ۱, d^۲ = c^{۲^{n-۲}}, d^{-۱}cd = c^{-۱} > .$$

فرض کنید $[G : Z(G)] = m$، $m \geq ۴$، و $T = \{۱, x_۱, x_۲, \ldots, x_{m-۱}\}$ یک تراگرد $Z(G)$ در G باشد. به وضوح هر دو عنصر از همدست $x_iZ(G)$، $۱ \leq i \leq m-۱$، با هم جابجا می‌شوند.بنابراین هر دو عنصر از این همدست به هم متصل می‌شوند. زیرگراف القایی $\Gamma^u(G)$ از گراف جابجایی $\Gamma(G)$ را طوری در نظر می‌گیریم، که مجموعه رأس‌های آن $T-۱ = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_{m-۱}\}$ باشد.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گروه ناآبلی باشد. در این صورت $\Gamma(G) \cong \Gamma^u(G)\,[K_l]$، که در آن $l = |Z(G)|$.

برهان. فرض کنیم $Z(G) = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_l\}$، و $T = \{۱, x_۱, x_۲, \ldots, x_{m-۱}\}$ یک تراگرد از $Z(G)$ در G باشد، در این صورت $G = \cup_{i=۱}^{m-۱} x_iZ(G) \cup Z(G)$. بنابر تعریف $V(\Gamma(G)) = G-Z(G)$، لذا

$V(\Gamma(G))=\cup_{i=1}^{m-1}x_iZ(G)$، که در آن برای هر i، $1\leq i\leq m-1$، $x_iZ(G)=\{x_ia_1,x_ia_2,\dots,x_ia_l\}$. قرار می‌دهیم $V(K_l)=\{1,2,\dots,l\}$. برای هر i و j، که $1\leq i\leq m-1$ و $1\leq j\leq l$، نگاشت φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi:V(\Gamma(G))\longrightarrow V(\Gamma^u(G)\,[K_l])$$

$$x_ia_j\longmapsto(x_i,j)$$

φ خوش تعریف است زیرا

$$x_ia_j=x_ka_t\Longrightarrow x_ia_j,x_ka_t\in x_iZ(G)\Longrightarrow x_i=x_k\Longrightarrow a_j=a_t$$

$$\Longrightarrow j=t\Longrightarrow(x_i,j)=(x_k,t)\Longrightarrow\varphi(x_ia_j)=\varphi(x_ka_t).$$

اگر $\varphi(x_ia_j)=\varphi(x_ka_t)$، آنگاه $(x_i,j)=(x_k,t)$. لذا $x_i=x_k$ و $j=t$. در نتیجه $x_ia_j=x_ka_t$. بنابراین φ یک به یک است.

به ازای هر $(x_i,j)\in V(\Gamma^u(G)\,[K_l])$، $a_j\in Z(G)$ وجود دارد که $\varphi(x_ia_j)=(x_i,j)$، لذا φ پوشا نیز هست. بنابراین φ دو سویی است.

به ازای هر $x_ia_j,x_ka_t\in V(\Gamma(G))$، اگر x_ia_j و x_ka_t متعلق به یک همدست باشند، آنگاه $x_i=x_k$، و چون K_l گراف کامل است پس $j,t\in E(K_l)$. بنابراین

$$\{x_ia_j,x_ka_t\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow\{(x_i,j),(x_k,t)\}\in E(\Gamma^u(G)\,[K_l]).$$

حال فرض کنیم x_ia_j و x_ka_t در دو همدسته‌ی متمایز باشند. در این صورت

$$\{x_ia_j,x_ka_t\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow x_ia_jx_ka_t=x_ka_tx_ia_j\Longleftrightarrow$$

$$x_ix_ka_ja_t=x_kx_ia_ja_t\Longleftrightarrow x_ix_k=x_kx_i\Longleftrightarrow$$

$$\{x_i,x_k\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow\{(x_i,j),(x_k,t)\}\in E(\Gamma^u(G)\,[K_l]).$$

بنابراین $\Gamma(G)\cong\Gamma^u(G)\,[K_l]$. $\square$

لم ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این صورت $\omega(\Gamma(G)) = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|$.

برهان. فرض می‌کنیم A خوشه‌ای برای $\Gamma^u(G)$ باشد که $|A| = \omega(\Gamma^u(G))$. در این صورت برای هر دو همدست $xZ(G)$ و $yZ(G)$ که $x, y \in A$، اگر $a \in xZ(G)$ و $b \in yZ(G)$ باشد آنگاه $ab = ba$. لذا a و b در $\Gamma(G)$ مجاورند. بنابراین $X = \cup_{x\in A} xZ(G)$ خوشه‌ای از $\Gamma(G)$ است. در نتیجه

$$\omega(\Gamma(G)) \geq |X| = |A||Z(G)| = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)| \tag{۱.۲}$$

حال فرض می‌کنیم A' خوشه‌ای برای $\Gamma(G)$ باشد که $|A'| = \omega(\Gamma(G))$. برای هر i، $1 \leq i \leq m-1$، اگر $A' \cap x_iZ(G) \neq \emptyset$ آنگاه $x \in A' \cap x_iZ(G)$ وجود دارد که $x = x_ia_j$، $a_j \in Z(G)$، و برای هر $b \in A'$، $xb = bx$. لذا

$$x_ia_jb = bx_ia_j \Longrightarrow a_jx_ib = a_jbx_i \Longrightarrow x_ib = bx_i \tag{۲.۲}$$

اکنون برای هر $y \in x_iZ(G)$، $a \in Z(G)$ یی وجود دارد که $y = x_ia$، لذا با استفاده از (۲.۲)، داریم:

$$\forall b \in A' \quad yb = x_iab = x_iba = bx_ia = by \Longrightarrow y \in A' \Longrightarrow x_iZ(G) \subseteq A'.$$

در نتیجه $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in T \setminus \{1\}$ وجود دارند که

$$A' = \cup_{j=1}^{k} x_{ij}Z(G) \Rightarrow |A'| = k|Z(G)|$$

همچنین، $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ خوشه‌ای از $\Gamma^u(G)$ است. بنابراین $\omega(\Gamma^u(G)) \geq k$ در نتیجه

$$\omega(\Gamma(G)) = |A'| = k|Z(G)| \leq \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|$$

بنابراین از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\omega(\Gamma(G)) = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|.$$

□

لم ۳.۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این صورت $\alpha(\Gamma(G)) = \alpha(\Gamma^u(G))$.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای مستقل برای $\Gamma(G)$ باشد که $|A| = \alpha(\Gamma(G))$. در این صورت، چون هر دو عنصر از همدست $x_iZ(G)$، $x_i \in T \setminus \{۱\}$، به هم متصل‌اند، بنابراین $|A \cap x_iZ(G)| \leq ۱$. اکنون مجموعه‌ی مستقل A' از $\Gamma^u(G)$ را شامل x_i هایی از $T \setminus \{۱\}$ در نظر می‌گیریم که $|A \cap x_iZ(G)| \neq \emptyset$. چون $|A \cap x_iZ(G)| \leq ۱$ بنابراین $|A| = |A'|$. لذا

$$\alpha(\Gamma(G)) = |A| = |A'| \leq \alpha(\Gamma^u(G)) \qquad (۳.۲)$$

از طرفی چون $\Gamma^u(G)$ یک زیرگراف القایی از $\Gamma(G)$ است. بنابراین

$$\alpha(\Gamma^u(G)) \leq \alpha(\Gamma(G)) \qquad (۴.۲)$$

لذا بنابر (۳.۲) و (۴.۲) داریم

$$\alpha(\Gamma(G)) = \alpha(\Gamma^u(G)).$$

□

لم ۴.۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این صورت

$$\beta(\Gamma(G)) = \beta(\Gamma^u(G)) + (m - ۱)(|Z(G)| - ۱).$$

برهان. با استفاده از قضیه‌ی (۱.۲.۲) و لم‌های (۲۱.۱.۱) و (۳.۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}\beta(\Gamma(G)) &= n(\Gamma(G)) - \alpha(\Gamma(G))\\ &= n(\Gamma^u(G)\,[K_l]) - \alpha(\Gamma^u(G))\\ &= (m-1)|Z(G)| - (n(\Gamma^u(G)) - \beta(\Gamma^u(G)))\\ &= (m-1)|Z(G)| - (m-1-\beta(\Gamma^u(G)))\\ &= (m-1)|Z(G)| + \beta(\Gamma^u(G)) - (m-1)\\ &= \beta(\Gamma^u(G)) + (m-1)(|Z(G)|-1).\end{aligned}$$

لذا حکم ثابت می شود. $\square$

ویژگی‌های گراف جابجایی $\mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n} - Z(D_{2n}))$

در این قسمت با توجه به آنچه که در بخش قبل گفتیم قضایا و نتایجی را در رابطه با گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G,X)$، که در آن $G = D_{2n}$ و $X = D_{2n} - Z(D_{2n})$، بیان و اثبات می‌نمائیم. برای هر عدد طبیعی n، $n \geq 3$، گروه دووجهی را به صورت زیر تعریف کردیم

$$D_{2n} = < r, s | r^n = s^2 = 1, s^{-1}rs = r^{-1} > .$$

بنابراین $D_{2n} = \{r, r^2, \ldots, r^n, sr, sr^2, \ldots, sr^n\}$. قرار می‌دهیم $\Omega_1 = \{r, r^2, \ldots, r^n\}$ و $\Omega_2 = \{sr, sr^2, \ldots, sr^n\}$.

لم ۵.۲.۲. اگر n زوج باشد آنگاه برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{e, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^{\frac{n}{2}+i}\}$.

برهان. برای هر j،

$$sr^isr^j=sr^jsr^i \Longleftrightarrow s(r^isr^i)r^{j-i}=sr^{j-i}(r^isr^i) \Longleftrightarrow ssr^{j-i}=sr^{j-i}s$$

$$\Longleftrightarrow r^{j-i}=sr^{j-i}s \Longleftrightarrow r^{j-i}=r^{i-j}ss \Longleftrightarrow r^{j-i}=r^{i-j}$$

$$\Longleftrightarrow j-i\equiv i-j(mod \quad n) \Longleftrightarrow 2j-2i\equiv 0(mod \quad n)$$

$$\Longleftrightarrow 2(j-i)=nk \Longleftrightarrow (j-i)=\frac{nk}{2} \quad k\in\mathbb{Z}$$

حال به ترتیب برای $k=0$ و $k=1$، داریم $j=i$ و $j=i+\frac{n}{2}$، و برای سایر kها ، j به طور تناوبی این دو مقدار را اختیار می‌کند. همچنین برای هر j،

$$sr^ir^j=r^jsr^i=r^{j-i}(r^isr^i)=r^{j-i}s \Longleftrightarrow sr^{j+i}=r^{j-i}s=sr^{i-j}$$

$$\Longleftrightarrow r^{j+i}=r^{i-j} \Longleftrightarrow j+i\equiv i-j(mod \quad n)$$

$$\Longleftrightarrow 2j\equiv 0(mod \quad n) \Longleftrightarrow 2j=nk \Longleftrightarrow j=\frac{nk}{2} \quad k\in\mathbb{Z}$$

مشابه حالت قبل اگر $k=0$ و $k=1$، آنگاه به ترتیب $j=0$ و $j=\frac{n}{2}$، و برای سایر kها ، j به طور تناوبی این دو مقدار را اختیار می‌کند. لذا $C_{D_{2n}}(sr^i)=\{e, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^{i+\frac{n}{2}}\}$. □

لم ۶.۲.۲. اگر n فرد باشد، آنگاه برای هر i، $1\leq i\leq n$، $C_{D_{2n}}(sr^i)=\{e, sr^i\}$.

برهان. مشابه لم قبل برای هر j،

$$sr^isr^j=sr^jsr^i \Longleftrightarrow r^{i-j}=r^{j-i}$$

$$\Longleftrightarrow 2(i-j)\equiv 0(mod \quad n) \Longleftrightarrow 2(i-j)=nk \quad k\in\mathbb{Z}$$

چون n فرد است، پس k زوج است. بنابراین $i\equiv j(mod \quad n)$. در نتیجه برای هر j، $sr^j=sr^i$. همچنین برای هر j،

$$sr^ir^j=r^jsr^i \Longleftrightarrow r^{j+i}=r^{i-j} \Longleftrightarrow 2j=nk \quad k\in\mathbb{Z}$$

چون n فرد است، پس k باید زوج باشد. بنابراین $r^j = r^n = e$. درنتیجه $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{e, sr^i\}$. □

لم ۷.۲.۲. [۱۷] برای هر عدد طبیعی فرد n، گراف‌های $\Gamma(D_{2n})$ و $\Gamma^u(D_{2(2n)})$ ایزومورف هستند.

قضیه ۸.۲.۲. برای هر عدد طبیعی زوج n عبارات زیر برقرارند:

الف) $\omega(\Gamma^u(D_{2n})) = \frac{n}{2} - 1$

ب) $\alpha(\Gamma^u(D_{2n})) = \frac{n}{2} + 1$

ج) $\beta(\Gamma^u(D_{2n})) = \frac{n}{2} - 2$.

برهان. الف) با توجه به لم‌های (۵.۲.۲) و (۶.۲.۲)، $Z(D_{2n}) = \{1, a^{\frac{n}{2}}\}$. لذا $[D_{2n} : Z(D_{2n})] = n$. بنابراین $T = \{1, a, a^2, \ldots, a^{\frac{n}{2}-1}, b, ba, \ldots, ba^{\frac{n}{2}-1}\}$ یک تراگرد از $Z(D_{2n})$ در D_{2n} است. لذا $n(\Gamma^u(D_{2n})) = |T \setminus \{1\}| = \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} = n - 1$. مجموعه‌ی $A = \{a^i : 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$ یک خوشه از $\Gamma^u(D_{2n})$ است، و درجه‌ی رأس‌هایی که در A نیستند صفر است. لذا A یک خوشه‌ی ماکزیمم $\Gamma^u(D_{2n})$ است. بنابراین اگر B یک خوشه از $\Gamma^u(D_{2n})$ باشد، آنگاه $B \subseteq A$. لذا

$$\omega(\Gamma^u(D_{2n})) = |A| = \frac{n}{2} - 1.$$

ب) برای هر j، $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$، $A_j = \{a^j, b, ba, \ldots, ba^{\frac{n}{2}-1}\}$ مجموعه‌ای مستقل برای $\Gamma^u(D_{2n})$ است. چون هر دو عضو $\{a^i : 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$ به هم متصل‌اند، بنابراین

$$\alpha(\Gamma^u(D_{2n})) = |A_j| = \frac{n}{2} + 1.$$

ج) با استفاده از قضیه‌ی (۲۱.۱.۱) داریم

$$\alpha(\Gamma^u(D_{2n})) + \beta(\Gamma^u(D_{2n})) = n(\Gamma^u(D_{2n})) \Longrightarrow \frac{n}{2} + 1 + \beta(\Gamma^u(D_{2n})) = n - 1$$

$$\Longrightarrow \beta(\Gamma^u(D_{2n})) = n - 1 - \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 2.$$

$\square$

قضیه ۹.۲.۲. برای هر عدد طبیعی n، عبارات زیر برقرارند:

۱) اگر n زوج باشد، آنگاه

الف) $\omega(\Gamma(D_{2n})) = n - 2$.

ب) $\alpha(\Gamma(D_{2n})) = \frac{n}{2} + 1$.

ج) $\beta(\Gamma(D_{2n})) = \frac{3n}{2} - 1$.

۲) اگر n فرد باشد، آنگاه

الف) $\omega(\Gamma(D_{2n})) = n - 1$.

ب) $\alpha(\Gamma(D_{2n})) = n + 1$.

ج) $\beta(\Gamma(D_{2n})) = n - 2$.

برهان. ۱)

الف) بنابر لم (۲.۲.۲) داریم

$$\omega(\Gamma(D_{2n})) = \omega(\Gamma^u(D_{2n}))|Z(D_{2n})| = 2(\frac{n}{2} - 1) = n - 2.$$

ب) بنابر لم (۳.۲.۲) داریم

$$\alpha(\Gamma(D_{2n})) = \alpha(\Gamma^u(D_{2n})) = \frac{n}{2} + 1.$$

ج) با استفاده از لم (۴.۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}\beta(\Gamma(D_{2n})) &= \beta(\Gamma^u(D_{2n})) + (m-1)(|Z(G)|-1)\\ &= \frac{n}{2} - 1 + (n-1)(2-1)\\ &= \frac{n}{2} - 2 + n - 1 = 3\frac{n}{2} - 3.\end{aligned}$$

۲)

الف) چون $2n$ زوج است، لذا قضیه‌ی (۸.۲.۲) در مورد $\Gamma^u(D_{2(2n)})$ برقرار است. درنتیجه

$$\omega(\Gamma^u(D_{2(2n)})) = \frac{2n}{2} - 1 = n - 1.$$

بنابر لم (۷.۲.۲)، $\omega(\Gamma(D_{2n})) = \omega(\Gamma^u(D_{2(2n)})) = n - 1$.

ب) با استدلالی مشابه قسمت(الف) داریم: $\alpha(\Gamma(D_{2n})) = \alpha(\Gamma^u(D_{2(2n)})) = \frac{2n}{2} + 1 = n + 1$

ج) با استدلالی مشابه قسمت قبل، $\beta(\Gamma(D_{2n})) = \beta(\Gamma^u(D_{2(2n)})) = \frac{2n}{2} - 2 = n - 2$.

□

ویژگی‌های گراف جابجایی $\mathfrak{C}(Q_n, Q_n - Z(Q_n))$

در این قسمت با توجه به آنچه که در بخش (۲.۲)، گفتیم قضایا و نتایجی را در رابطه با گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G, X)$، که در آن $G = Q_n$ و $X = Q_n - Z(Q_n)$، بیان و اثبات می‌نمائیم.

لم ۱۰.۲.۲. فرض کنید $n \geq 4$، در این صورت

الف) $C_{Q_n}(dc^i) = \{1, c^{2^{n-2}}, dc^i, dc^{i+2^{n-2}}\}$.

ب) $Z(Q_n) = \{1, c^{2^{n-2}}\}$.

برهان. الف) برای هر j،

$$dc^ic^j = c^jdc^i \iff dc^{i+j} = c^{j-i}(c^idc^i) \iff dc^{i+j} = c^{j-i}d = dc^{i-j} \iff c^{i+j} = c^{j-i} \iff$$

$$۲j \equiv ۰ (mod \quad ۲^{n-۱}) \Longleftrightarrow ۲j = ۲^{n-۱}k \Longleftrightarrow j = ۲^{n-۲}k.$$

اگر $k = ۰$ آنگاه $c^j = e$، اگر $k = ۱$ آنگاه $c^j = c^{۲^{n-۲}}$، و برای سایر k ها c^j به طور تناوبی این دو مقدار را اختیار می‌کند. همچنین برای هر j،

$$dc^i dc^j = dc^j dc^i \Longleftrightarrow d(c^i dc^i)c^{j-i} = dc^{j-i}(c^i dc^i) \Longleftrightarrow d^۲ c^{j-i} = dc^{j-i}d = ddc^{i-j} \Longleftrightarrow$$

$$c^{j-i} = c^{i-j} \Longleftrightarrow ۲(i-j) \equiv ۰ (mod \quad ۲^{n-۱}) \Longleftrightarrow i - j = ۲^{n-۲}k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

اگر $k = ۰$ آنگاه $j = i$، اگر $k = ۱$ آنگاه $j = i + ۲^{n-۲}$، و برای سایر k ها نیز j این دو مقدار را اختیار می‌کند. بنابراین $C_{Q_n}(dc^i) = \{۱, c^{۲^{n-۲}}, dc^i, dc^{i+۲^{n-۲}}\}$.

ب) با توجه به قسمت (الف)، داریم $Z(Q_n) = \{۱, c^{۲^{n-۲}}\}$.

$\square$

قضیه ۱۱.۲.۲. برای $n \geq ۴$ عبارات زیر برقرارند:

الف) $\omega(\Gamma^u(Q_n)) = ۲^{n-۲} - ۱$.

ب) $\alpha(\Gamma^u(Q_n)) = ۲^{n-۲} + ۱$.

ج) $\beta(\Gamma^u(Q_n)) = ۲^{n-۲} - ۲$.

برهان. الف) چون $Z(Q_n) = \{۱, c^{۲^{n-۲}}\}$. بنابراین $T = \{۱, c, c^۲, \ldots, c^{۲^{n-۲}-۱}, d, dc, \ldots, dc^{۲^{n-۲}-۱}\}$ یک تراگرد از $Z(Q_n)$ در Q_n است. زیر مجموعه‌ی $A = \{c^i | ۱ \leq i \leq ۲^{n-۲} - ۱\}$ از T، یک خوشه برای $\Gamma^u(Q_n)$ است.چون با توجه به لم (۱۰.۲.۲) درجه‌ی رأس‌هایی که در A نیستند صفر است. بنابراین اگر B یک خوشه در $\Gamma^u(Q_n)$ باشد آنگاه $A \subseteq B$. لذا $\omega(\Gamma^u(Q_n)) = |A| = ۲^{n-۲} - ۱$.

ب) بنابر لم (۱۰.۲.۲) برای هر j، $1 \leq j \leq 2^{n-2} - 1$، $A_j = \{c^j, d, dc, \dots, dc^{2^{n-2}-1}\}$ یک مجموعه‌ی مستقل برای $\Gamma^u(Q_n)$ است. چون هر دو عنصر از مجموعه‌ی $\{c^i | 1 \leq i \leq 2^{n-2} - 1\}$ به هم متصل هستند، پس $\alpha(\Gamma^u(Q_n)) = |A_j| = 2^{n-2} + 1$.

ج) با استفاده از لم (۲۱.۱.۱) داریم:

$$\beta(\Gamma^u(Q_n)) = n(\Gamma^u(Q_n)) - \alpha(\Gamma^u(Q_n)) = 2^{n-1} - 1 - (2^{n-2} + 1) =$$

$$2 \cdot 2^{n-2} - 1 - 2^{n-2} - 1 = 2^{n-2} - 2.$$

□

قضیه ۱۲.۲.۲. برای $n \geq 4$ عبارات زیر برقرارند:

الف) $\omega(\Gamma(Q_n)) = 2^{n-1} - 2$.

ب) $\alpha(\Gamma(Q_n)) = 2^{n-2} + 1$.

ج) $\beta(\Gamma(Q_n)) = 3 \cdot 2^{n-2} - 3$.

برهان. الف) بنابر لم (۲.۲.۲)، داریم:

$$\omega(\Gamma(Q_n)) = \omega(\Gamma^u(Q_n))|Z(Q_n)| = 2(2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 2.$$

ب) با استفاده از لم (۳.۲.۲)، $\alpha(\Gamma(Q_n)) = \alpha(\Gamma^u(Q_n)) = 2^{n-2} + 1$.

ج) با توجه به لم (۴.۲.۲)، داریم:

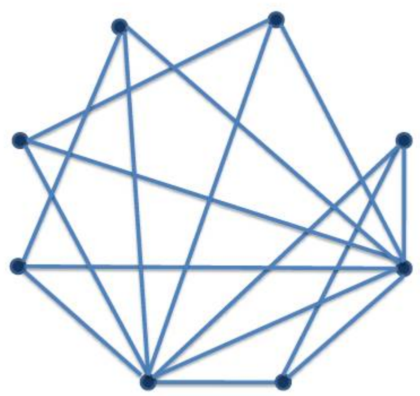
$$\begin{aligned}\beta(\Gamma(Q_n)) &= \beta(\Gamma^u(Q_n)) + (m-1)(|Z(Q_n)| - 1)\\ &= 2^{n-2} - 2 + (2 \cdot 2^{n-1})(2 - 1)\\ &= 3 \cdot 2^{n-2} - 3.\end{aligned}$$

□

۳.۲ ساختار کلی گراف جابجایی $D_{۲n}$ و ویژگی‌های اساسی آن

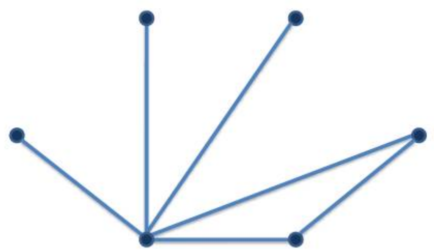
در این بخش، که از مرجع [۱۸] آورده‌ایم، گراف جابجایی $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{۲n}, \Omega)$، دارای مجموعه ی رئوس Ω می‌باشد که Ω زیر مجموعه‌ی دلخواهی از $D_{۲n}$ است و دو رأس متمایز در Ω زمانی به هم متصل می‌شوند که در $D_{۲n}$ با هم جابجا شوند.

مثال ۱.۳.۲. برای $n = ۴$، و $\Omega = D_۸$ گراف $\Gamma = \mathfrak{C}(D_۸, D_۸)$ به صورت زیر است:



شکل ۱.۲: گراف جابجایی روی $D_۸$.

مثال ۲.۳.۲. قرار می‌دهیم، $n = 3$، $\Omega = D_6$ در این صورت گراف، $\Gamma = \mathfrak{C}(D_6, D_6)$ به شکل زیر است:



شکل ۲.۲: گراف جابجایی روی D_6.

لم ۳.۳.۲. فرض کنید $\Omega \subseteq D_{2n}$ و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$. در این صورت به ازای هر $a \in \Omega$،

$$deg_\Gamma(a) = |C_\Omega(a)| - 1.$$

برهان. به ازای هر $a \in \Omega$، $a \in C_\Omega(a)$. چون $C_\Omega(a)$ مجموعه‌ی عناصری است که با a جابجا می‌شوند، بنابراین $deg_\Gamma(a) = |C_\Omega(a)| - 1$. □

لم ۴.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح زوج باشد و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n})$. در این صورت برای هر i، $1 \leq i \leq n$،

الف) $deg_\Gamma(sr^i) = 3$.

ب)

$$deg_\Gamma(r^i) = \begin{cases} 2n - 1 & i = n, \frac{n}{2} \\ n - 1 & i \neq n, \frac{n}{2} \end{cases}$$

برهان. از لم‌های (۳.۳.۲) و (۵.۲.۲) نتیجه می‌شود. □

لم ۵.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح فرد باشد و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n})$. در این صورت برای هر i، $1 \leq i \leq n$،

الف) $deg_\Gamma(sr^i) = 1$.

ب)

$$deg_{\Gamma}(r^i) = \begin{cases} 2n-1 & i=n \\ n-1 & i \neq n \end{cases}$$

برهان. از لم‌های (۲.۳.۳) و (۲.۲.۶) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۲.۳.۶. فرض کنید $n \geq 3$، $\Omega \subseteq D_{2n}$ و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$. در این صورت عبارات زیر برقرارند:

الف) اگر Ω یک زیر گروه آبلی از D_{2n} باشد، آنگاه $diam(\Gamma) = 1$.

ب) اگر Ω یک زیر گروه غیر آبلی از D_{2n} باشد، آنگاه $diam(\Gamma) = 2$.

ج) اگر $\Omega = D_{2n} - Z(D_{2n})$، آنگاه $diam(\Gamma) = \infty$.

برهان. الف) اگر Ω یک زیر گروه آبلی از D_{2n} باشد، آنگاه برای هر $a, b \in \Omega$ داریم $ab = ba$. بنابراین درجه هر رأس $|\Omega| - 1$ است، لذا $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$ یک گراف کامل است. بنابراین $diam(\Gamma) = 1$.

ب) فرض کنید Ω یک زیر گروه ناآبلی از D_{2n} باشد. چون $\Omega \leq D_{2n}$ پس $e \in \Omega$. لذا Γ همبند است. چون Ω آبلی نیست پس $x, y \in \Omega$ وجود دارد که $xy \neq yx$، بنابراین $diam(\Gamma) \geq 2$. همچنین چون $e \in \Omega$، بنابراین برای هر $x, y \in \Omega$، $x - e - y$ یک مسیر به طول ۲ است، لذا $diam(\Gamma) \leq 2$. در نتیجه $diam(\Gamma) = 2$.

ج) فرض می‌کنیم $\Omega = D_{2n} - Z(D_{2n})$ و n زوج باشد. در این صورت بنابر لم (۲.۲.۵)، $Z(D_{2n}) = \{e, r^{\frac{n}{2}}\}$. در نتیجه $\Omega = D_{2n} - \{e, r^{\frac{n}{2}}\}$. لذا برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $C_{\Omega}(sr^i) = \{sr^i, sr^{i+\frac{n}{2}}\}$ و $C_{\Omega}(r^i) = \{r^i; 1 \leq i \leq n, i \neq n, \frac{n}{2}\}$. بنابراین روی Ω هیچ r^i یی با هیچ sr^i یی جابه‌جا نمی‌شود. لذا گراف Γ حداقل دومولفه‌ی همبندی دارد و در نتیجه Γ ناهمبند است. حال اگر n فرد باشد، آنگاه بنابر لم (۲.۲.۶)، $Z(D_{2n}) = \{e\}$. در نتیجه

$$\Omega = D_{2n} - \{e\} \Rightarrow C(sr^i) = \{sr^i\} \Longrightarrow deg(sr^i) = 0.$$

لذا در این حالت نیز Γ ناهمبند است. بنابراین $diam(\Gamma)=\infty$.

□

نتیجه ۲.۳.۷. فرض کنید $\Gamma=\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$ که $\Omega\subseteq D_{2n}$. در این صورت

الف) اگر n فرد باشد و $\Omega=\{r^i,sr^j:1\leq i\leq n-1,1\leq j\leq n\}$. آنگاه $diam(\Gamma)=\infty$.

ب) اگر n زوج باشد و $\Omega=\{r^i,sr^j:i\neq\frac{n}{2},1\leq i\leq n-1,1\leq j\leq n\}$. آنگاه $diam(\Gamma)=\infty$.

برهان. الف) اگر n فرد باشد آنگاه با توجه به لم (۲.۲.۶)، $Z(D_{2n})=\{r^n\}$. بنابراین

$$\Omega=\{r^i,sr^j:1\leq i<n,1\leq j\leq n\}=D_{2n}-Z(D_{2n}).$$

لذا با توجه به قضیه‌ی قبل $diam(\Gamma)=\infty$.

ب) اگر n زوج باشد آنگاه بنابر لم (۲.۲.۵)، $Z(D_{2n})=\{r^n,r^{\frac{n}{2}}\}$. در نتیجه

$$\Omega=\{r^i,sr^j:i\neq\frac{n}{2},1\leq i\leq n-1,1\leq j\leq n\}=D_{2n}-Z(D_{2n}).$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی قبل $diam(\Gamma)=\infty$.

□

قضیه ۲.۳.۸. فرض کنید n یک عدد صحیح باشد که $n\geq 3$ و $n\neq 4$، همچنین $\Omega\subseteq D_{2n}$ و $\Gamma=\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$. در این صورت $\Gamma=K_n$ اگر و تنها اگر $\Omega=\Omega_1$.

برهان. فرض کنیم $\Omega=\Omega_1=\{r^i:1\leq i\leq n\}$. در این صورت Ω یک زیرگروه دوری از D_{2n} است. چون Ω دارای مرتبه‌ی n است، پس Γ گراف کامل روی n رأس است، لذا $\Gamma=K_n$.

حال برعکس فرض کنیم $\Gamma=K_n$، یعنی Γ گراف کامل روی n رأس باشد. لذا $\Gamma=\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$ که $\Omega\subseteq D_{2n}$ و $|\Omega|=n$. بنابراین برای هر $g\in\Omega$، $deg(g)=n-1$. حال اگر n زوج باشد، آنگاه بنابر لم (۲.۲.۵)، برای هر $sr^i\in D_{2n}$، $deg(sr^i)=3$. از طرفی $n\neq 4$ و $n\geq 3$ بنابراین

$$n \geq 6 \Longrightarrow n-1 \geq 5 \Longrightarrow g \neq sr^i \Longrightarrow g \notin \Omega_2 \Longrightarrow g \in \Omega_1 \Longrightarrow \Omega \subseteq \Omega_1.$$

چون $|\Omega| = |\Omega_1| = n$، لذا $\Omega = \Omega_1$. اگر n فرد باشد با استفاده از لم (۶.۲.۲)، $deg(sr^i) = 1$. چون برای هر $g \in \Omega$، $deg(g) = n-1$، پس $g \neq sr^i$ و درنتیجه $g \in \Omega_1$. بنابراین $\Omega \subseteq \Omega_1$ و با استدلالی مشابه $\Omega = \Omega_1$. □

تذکر ۹.۳.۲. با توجه به مثال (۱.۳.۲)، برای $n = 4$، زیر مجموعه‌ی $\Omega \subseteq D_{2n}$ وجود دارد که $\Omega \neq \Omega_1$ و $\mathfrak{C}(D_8, \Omega) = K_4$.

نتیجه ۱۰.۳.۲. اگر $n \geq 3$، آنگاه هیچ زیر مجموعه‌ای مانند Ω از D_{2n} وجود ندارد که $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$، $n-$ منتظم باشد.

برهان. فرض کنیم $\Omega \subseteq D_{2n}$ وجود داشته باشد که $\mathfrak{C}(D_{2n}\Omega)$، $n-$ منتظم باشد. در این صورت $|\Omega| \geq n+1$. بنابراین حداقل یک عنصر مانند g از Ω_2 وجود دارد که $g \in \Omega$. اگر n فرد باشد آنگاه $n = deg(g) = 1$، که تناقض است. اگر n زوج باشد آنگاه $4 \leq n = deg(g) = 3$، باز هم تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و درنتیجه حکم برقرار است. □

قضیه ۱۱.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$، یک عدد صحیح فرد باشد، $\Omega = \{e, sr^1, sr^2, \ldots, sr^n\} \subseteq D_{2n}$ و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$. در این صورت $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega) = K_{1,n}$.

برهان. فرض کنیم $\Omega = \{e, sr^1, ..., sr^n\}$. در این صورت بنابر لم (۶.۲.۲)، چون n فرد است، $C(sr^i) = \{e, sr^i\}$. همچنین $C_\Omega(e) = \Omega$. بنابراین $deg(e) = |\Omega| - 1 = n$ و $deg(sr^i) = 1$. لذا $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega) = K_{1,n}$. □

قضیه ۱۲.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح فرد باشد و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n})$. در این صورت Γ گراف دومؤلفه‌ای است.

برهان. چون $D_{2n} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ و $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. بنابراین $V(\Gamma) = D_{2n} = \Omega_1 + \Omega_2$. چون n فرد است بنابراین با توجه به قضیه‌ی (۸.۳.۲)، Ω_1 یک مجموعه‌ی کامل است. بنابر قضیه‌ی (۱۱.۳.۲)، $\Omega_2 = \Omega - e$ یک مجموعه‌ی مستقل است،لذا Γ یک گراف دومولفه‌ای است. $\square$

قضیه ۱۳.۳.۲. فرض کنید $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n})$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq 3$، تعداد یال‌های Γ که با $\in(\Gamma)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر می‌باشد:

$$\epsilon(\Gamma) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{n(n+4)}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

برهان. با توجه به این که $D_{2n} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ و $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت۱) اگر n زوج باشد؛ آنگاه با توجه به قضیه‌ی (۸.۳.۲)، زیرگراف القایی به وسیله Ω_1 کامل است. بنابر لم (۵.۲.۲)، $C_{\Omega_2}(sr^i) = \left\{sr^i, sr^{i+\frac{n}{2}}\right\}$. بنابراین زیرگراف القایی به وسیله Ω_2، $\frac{n}{2}k_2$ است. لذا تعداد یال‌ها در Γ، مجموع تعداد یال‌ها در $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_1)$، تعداد یال‌ها در $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_2)$ و تعداد یال‌ها از r^n و $r^{\frac{n}{2}}$ به مجموعه رأس‌های Ω_2 است.بنابراین

$$\in(\Gamma) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} + 2n = \frac{n^2 - n + n + 4n}{2} = \frac{n(n+4)}{2}.$$

حالت۲) اگر n فرد باشد؛ آنگاه مشابه استدلال بالا زیرگراف القایی از Ω_1 کامل است. بنابر لم (۶.۲.۲)، زیرگراف القایی به وسیله Ω_2 هیچ یالی ندارد؛ بنابراین تعداد یال‌ها در Γ مجموع تعداد یال‌ها در $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_1)$ و تعداد یال‌ها از r^n به مجموعه رأس‌های Ω_2 است. لذا

$$\in(\Gamma) = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\square$

قضیه ۱۴.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$، یک عدد صحیح باشد. در این صورت هیچ زیر مجموعه‌ای مانند Ω از D_{2n} وجود ندارد که $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega) = C_4$.

برهان. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی Ω از D_{2n} وجود داشته باشد به طوری که $\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega) = C_4$. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر n فرد باشد، چون در C_4 همه رأس‌ها از درجه ۲اند، پس برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $sr^i \notin \Omega$. بنابراین $\Omega \subset \Omega_1$. چون $\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$ یک زیرگراف القایی از گراف کامل $\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega_1)$ است. بنابراین $\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$ کامل است و این یک تناقض است.

حالت دوم: اگر n زوج باشد. آنگاه Ω شامل حداقل دو رأس از Ω_2 است، زیرا در غیر این‌صورت شامل حداقل ۳ رأس از Ω_1 است و این رأس‌ها حداقل K_3 را تولید می‌کنند که این یک تناقض است.اگر $\Omega \subset \Omega_2$، آنگاه هر رأس $\mathfrak{C}(D_{2n},\Omega)$ حداکثر از درجه ۱ می‌شود که تناقض است. اگر Ω شامل ۳ رأس از Ω_2 باشد، آنگاه Ω شامل ۱ رأس از Ω_1 است که می‌تواند e یا $r^{\frac{n}{2}}$ باشد و یا هیچکدام از این دو نباشد. در دو حالت اول درجه رأس انتخاب شده ۳ است. بنابراین به تناقض می‌رسیم. اگر هیچکدام از آن دو نباشد رأس انتخاب شده به هیچ رأسی از Ω_2 متصل نیست. لذا Ω یک نقطه‌ی تنها دارد. بنابراین Ω شامل دو رأس از Ω_2 و دو رأس دیگر از Ω_1 است. لذا $\Omega = \{e, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j : i \neq j\}$ و چون $deg_\Gamma(e) = deg_\Gamma(r^{\frac{n}{2}}) = 3$ پس به تناقض می‌رسیم. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۱۵.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت هیچ زیر مجموعه‌ای مانند Ω از D_{2n} وجود ندارد که $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n},\Omega) = P_4$.

برهان. فرض کنیم زیر مجموعه‌ی Ω از D_{2n} وجود داشته باشد که $\Gamma(D_{2n},\Omega) = P_4$. در این صورت $|\Omega| = 5$ که دو رأس آن از درجه ۱ و سه رأس از درجه ۲ می‌باشد.

اگر n فرد باشد، آنگاه با توجه به لم (۶.۲.۲)، Ω حداقل شامل ۳ رأس از Ω_1 است. لذا Γ حداقل شامل K_3 است که تناقض است.

اگر n زوج باشد آنگاه بنابر لم (۵.۲.۲)، Ω شامل حداقل ۳ رأس از Ω_2 است؛ که اگر $\Omega \subseteq \Omega_2$ آنگاه تمام رأس‌های Ω حداکثر از درجه یک‌اند که تناقض است. اگر Ω شامل ۴ رأس از Ω_2 باشد. آنگاه رأس باقیمانده اگر

r^n یا $r^{\frac{n}{2}}$ باشد از درجه ۴ است که تناقض است. در غیر این‌صورت یک رأس تنهاست که باز هم تناقض است. بنابراین Ω شامل ۲ رأس از Ω_1 است. اگر Ω شامل حداقل یکی از دو رأس $\{r^{\frac{n}{2}}, e\}$ باشد. آنگاه Γ شامل رأس از درجه ۴ است که تناقض است. اگر Ω شامل هیچ یک از دو رأس $\{e, r^{\frac{n}{2}}\}$ نباشد. آنگاه Γ ناهمبند است که با فرض تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۶.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد و $\Gamma = \mathfrak{C}(D_{2n}, D_{2n})$. در این صورت

$$\omega(\Gamma) = \chi(\Gamma) = n.$$

برهان. $\Omega_1 = \{r^1, ..., r^n\} \subseteq D_{2n}$ را در نظر می‌گیریم بنابر قضیه‌ی (۸.۳.۲) و نتیجه‌ی (۱۰.۳.۲)، $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_1)$ یک زیرگراف کامل ماکسیمال از Γ است. درنتیجه $\omega(\Gamma) = n$. برای محاسبه $\chi(\Gamma)$ دو حالت داریم:

حالت اول: اگر n زوج باشد، آنگاه حداقل n رنگ برای رنگ آمیزی $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_1)$ نیاز داریم. بنابراین $\chi(\Gamma) \geq n$. با توجه به لم (۵.۲.۲)، فقط e و $r^{\frac{n}{2}}$ از رأس‌های Ω_1 با همه‌ی رأس‌های Ω_2 مجاورند. پس رنگ‌های تخصیص داده شده به این رأس‌ها نمی‌توانند به هیچ رأس دیگری تخصیص داده شوند. لذا $n - 2$ رأس در Ω_1 باقی می‌مانند که با هیچ یک از رأس‌های باقی‌مانده در $\Omega_2 = V(\Gamma) - \Omega_1$ مجاور نیستند. چون $C_{\Omega_2}(sr^i) = \left\{sr^i, sr^{i+\frac{n}{2}}\right\}$؛ بنابراین درجه‌ی هر رأس در Ω_2، یک است. لذا رأس‌های Ω_2 را می‌توان با $n - 2$ رنگ باقی‌مانده رنگ آمیزی کرد. بنابراین $\chi(\Gamma) \leq n$. در نتیجه $\chi(\Gamma) = n$.

حالت دوم: اگر n فرد باشد، آنگاه حداقل n رنگ برای رنگ آمیزی $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega_1)$ نیاز داریم. بنایراین $\chi(\Gamma) \geq n$. با توجه به لم (۶.۲.۲)، فقط رأس e از Ω_1 با همه‌ی رأس‌های Ω_2 مجاور است. پس رنگ‌های تخصیص داده شده به این رأس نمی‌تواند به هیچ رأس دیگری تخصیص داده شود. لذا $n - 1$ رأس در Ω_1 باقی می‌مانند که با هیچ یک از رأس‌های باقی‌مانده در $\Omega_2 = V(\Gamma) - \Omega_1$ مجاور نیستند. چون $C_{\Omega_2}(sr^i) = \{sr^i\}$. بنابراین درجه‌ی هر رأس در Ω_2، صفر است. لذا رأس‌های Ω_2 را می‌توان با $n - 1$ رنگ باقی‌مانده رنگ آمیزی کرد. بنابراین $\chi(\Gamma) \leq n$. در نتیجه $\chi(\Gamma) = n$. □

قضیه ۱۷.۳.۲. فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح زوج باشد. در این صورت $\Gamma = \mathsf{C}(D_{2n}, D_{2n})$، دارای یک تطابق کامل است.

برهان. همان طور که در اثبات قضیه‌ی (۱۳.۳.۲)، مشاهده کردیم $\mathsf{C}(D_{2n}, \Omega_1) = K_n$ و $\mathsf{C}(D_{2n}, \Omega_2) = \frac{n}{2}k_2$، که $\Omega_1 = \{r^1, r^2 ..., r^n\}$ و $\Omega_2 = \{sr^1, ..., sr^n\}$. چون n زوج است پس $\mathsf{C}(D_{2n}, \Omega_2)$ و $\mathsf{C}(D_{2n}, \Omega_1)$ دارای تطابق کامل هستند. بنابراین Γ دارای یک تطابق کامل است. $\square$

فصل ۳

گراف جابجایی گروه متقارن

۱.۳ مقدمه

این فصل شامل دو بخش است، که در آن به معرفی گراف جابجایی روی رده‌ی تزویج عناصری با ساختار دوری معین در S_n می‌پردازیم و قضایا و نتایجی را به اثبات می‌رسانیم که با استفاده از آن‌ها می‌توان قطر و یا کرانی از قطر این گراف‌ها را به دست آورد.

۲.۳ قطر گراف جابجایی روی رده‌ی تزویج عناصری با ساختار دوری معین

در این بخش، که از مرجع [۶] آورده‌ایم، قطر و ساختار دیسک گراف جابجایی $\mathcal{C}(G,X)$ را بررسی می‌کنیم که G گروه متقارن و X یک رده‌ی تزویج از G است. همه‌ی گراف‌های جابجایی معرفی شده در این قسمت بنابر [۹]، همبند هستند.

فرض کنیم $G = Sym(n)(= Sym(\Omega))$ که $\Omega = \{۱,۲,\dots,n\}$. $a \in G$ را به صورت حاصل ضرب دورهای دو به دو مجزا می‌نویسیم، فرض می‌کنیم m ماکزیمم طول دورها در این تجزیه باشد. قرار می‌دهیم $a = \tilde{a}a^*$ که $\tilde{a}$ دوری به طول m و a^* حاصل ضرب تمام دورهای مجزای باقی‌مانده است. همچنین فرض می‌کنیم $G^* = Sym(Fix(\tilde{a}))$. در این صورت $G^* \leq G$ و $a^* \in Sym(Fix(\tilde{a})) = G^*$. رده‌ی تزویج a^* در G^* را با $X^* = {a^*}^{G^*}$ نشان می‌دهیم.

اگر $q \in \mathbb{Q}$، آنگاه $\lceil q \rceil$، کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی q است. همان طور که قبلا گفتیم برای هر $x \in X$ و $i \in \mathbb{N}$، i امین دیسک x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta_i(x) = \{y \in X : d(y,x) = i\}.$$

برای هر i، $i \geq ۳$، اگر i فرد باشد قرار می‌دهیم

$$\Sigma_i(a) = \left\{x \in X : \tfrac{(i-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \tfrac{(i-۱)r}{۲}\right\}$$

و اگر i زوج باشد قرار می‌دهیم

$$\Sigma_i(a) = \left\{x \in X : m - \tfrac{ir}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \tfrac{(i-۲)r}{۲} - ۱\right\}.$$

لم ۳.۲.۱. فرض کنید $\alpha = (1, 2, \ldots, k)$ عضوی از S_n باشد. برای $\sigma \in S_n$، $[\alpha, \sigma] = 1$ اگر و تنها اگر σ به صورت $\alpha^i\beta$ باشد که در آن، $0 \leq i \leq k-1$ و β جایگشتی است که هر یک از عناصر ۱، ۲، ...، k را ثابت نگه می‌دارد.

برهان. فرض کنیم $K = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i, 1 \leq i \leq k\}$ و $H =< \alpha >$. در این صورت $|K| = (n-k)!$، $|H| = k$ و $H \cap K = 1$. S_n با تزویج روی خودش عمل می‌کند. لذا بنابر قضیه‌ی مدار-پایدار ساز داریم:

$$|S_n : St_{S_n}(\alpha)| = |orb_{S_n}(\alpha)|$$

که

$$St_{S_n}(\alpha) = \{\sigma \in S_n : \sigma^{-1}\alpha\sigma = \alpha\} = \{\sigma \in S_n : \alpha\sigma = \sigma\alpha\} = C_{S_n}(\alpha)$$

و

$$orb_{S_n}(\alpha) = \{\sigma^{-1}\alpha\sigma : \sigma \in S_n\} = Cl_{S_n}(\alpha).$$

بنابراین $|S_n : C_{S_n}(\alpha)| = |Cl_{S_n}(\alpha)|$. در نتیجه

$$|C_{S_n}(\alpha)| = \frac{|S_n|}{|Cl_{S_n}(\alpha)|}$$

و چون کلاس هم ارزی α روی S_n مجموعه عناصری از S_n است که دارای ساختار دوری یکسان با α هستند. بنابراین

$$|C_{S_n}(\alpha)| = \frac{n!}{\frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{k}} = k(n-k)!.$$

از طرفی داریم:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{k(n-k)!}{1} = k(n-k)!.$$

در نتیجه $|C_{S_n}(\alpha)| = |HK|$. چون $H, K \trianglelefteq C_{S_n}(\alpha)$، لذا $HK \leqslant C_{S_n}(\alpha)$ و بنابراین $C_{S_n}(\alpha) = HK$. همچنین $H \cap K = 1$، لذا $C_{S_n}(\alpha) = H \times K$ و این حکم را ثابت می‌کند. □

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $m \geq ۲$ و $r \geq ۱$. همچنین فرض کنید $a = (۱ \dots m)(= \tilde{a})$. در این‌صورت، $\Delta_۱(a) = \{x \in X : supp(x) \cap supp(a) = \emptyset\} \cup (< a > \cap X) \setminus \{a\}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\Delta_۱(a) \subseteq \{x \in X : supp(x) \cap supp(a) = \emptyset\} \cup (< a > \cap X) \setminus \{a\}$. مطابق با تعریف، $\Delta_۱(a) = \{x \in X : d(x, a) = ۱\}$، بنابراین برای هر $x \in \Delta_۱(a)$، $ax = xa$ و $x \neq a$. لذا بنابر لم (۱.۲.۳)، $x = a^j\beta$ که در آن $۰ \leq j \leq m - ۱$ و β جایگشتی است که هر یک از عناصر $\{۱, \dots, m\}$ را ثابت نگه می‌دارد.

اگر $j = ۰$ آنگاه $x = \beta$. بنابراین $supp(x) \cap supp(a) = \emptyset$. در غیر این‌صورت چون x دارای ساختار دوری $m^۱۱^{m+r}$ است و برای هر j، $۱ \leq j \leq m - ۱$، $a^j \neq ۱$. بنابراین $\beta = ۱$ و $a^j \in X$. لذا $x \in < a > \cap X$.

درنتیجه،

$$x \in \{x \in X : supp(x) \cap supp(a) = \emptyset\} \cup (< a > \cap X) \setminus \{a\}$$

از طرفی داریم

$$\{x \in X : supp(x) \cap supp(a) = \emptyset\} \cup (< a > \cap X) \setminus \{a\} \subseteq \Delta_۱(a).$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $m \geq ۲$ و $r \geq ۱$. همچنین فرض کنید $a = (۱ \dots m)(= \tilde{a})$. در این‌صورت، $\Delta_۲(a) = \{x \in X : m - r \leq |spp(x) \cap supp(a)|\} \setminus (\Delta_۱(a) \cup \{a\})$.

برهان. برای هر x، $x \in \Delta_۲(a) = \{x \in X : d(x, a) = ۲\}$، $y \in \Delta_۱(a)$ وجود دارد که $x \in \Delta_۱(y)$. چون $x \in \Delta_۲(a)$ بنابراین $x \notin \Delta_۱(a)$. نشان می‌دهیم $y \notin < a >$ و $x \notin < y >$.

اگر $x \in < y >$ آنگاه $x = y^i$ و چون $y \in \Delta_۱(a)$ لذا $ay = ya$ و بنابراین $ax = xa$. درنتیجه $x \in \Delta_۱(a)$ که تناقض است، بنابراین $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

اگر $y \in< a > \cap X$ آنگاه y به صورت توانی از a است که دارای ساختار دوری یکسان با a می‌باشد. لذا $supp(y) = supp(a)$، بنابراین $supp(x) \cap supp(a) = \emptyset$. درنتیجه $x \in \Delta_۱(a)$ که باز هم تناقض است. بنابراین $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset = supp(y) \cap supp(a)$.

از طرفی $a, x, y \in X$ دارای ساختار دوری یکسان $m^{۱}۱^{m+r}$ هستند و چون $supp(y)$ دارای اشتراک تهی با $supp(x)$ و $supp(a)$ است. بنابراین a و x اعضای خود را از $n - m = m + r$ عضو باقی مانده Ω اختیار می‌کنند. چون $a = (۱, ۲ \ldots m)$، لذا x حداقل $m - r$ عضو از $supp(a)$ را اختیار می‌کند. بنابراین $|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - r$. لذا داریم:

$$x \in \{x \in X : m - r \leq |supp(x) \cap supp(a)|\} \setminus (\Delta_۱(a) \cup \{a\}) \Rightarrow$$

$$\Delta_۲(a) \subseteq \{x \in X : m - r \leq |supp(x) \cap supp(a)|\} \setminus (\Delta_۱(a) \cup \{a\}) .$$

حال برعکس، فرض می‌کنیم

$$x \in \{x \in X : m - r \leq |upp(x) \cap supp(a)|\} \setminus (\Delta_۱(a) \cup \{a\})$$

در این صورت $|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - r$. لذا

$$|supp(x) \cup supp(a)| = |supp(x)| + |supp(a)| - |supp(x) \cap supp(a)|$$

$$= m + m - |supp(x) \cap supp(a)| \leq ۲m - (m - r) = m + r$$

بنابراین حداقل m نقطه داریم که توسط a و x ثابت نگه داشته می‌شود. لذا $y \in X$ وجود دارد که با a و x جابه‌جا می‌شود. در این‌صورت $d(x, a) \leq ۲$. چون $x \notin \Delta_۱(a) \cup \{a\}$، بنابراین $d(x, a) \geq ۲$. درنتیجه $d(x, a) = ۲$ و لذا $x \in \Delta_۲(a)$. بنابراین

$$\{x \in X : m - r \leq |supp(x) \cap supp(a)|\} \setminus \Delta_۱(a) \cup \{a\} \subseteq \Delta_۲(a).$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $m \geq ۲$ و $r \geq ۱$. همچنین فرض کنید $a = (۱ \dots m)(= \tilde{a})$. در این‌صورت، برای هر i، $۳ \leq i \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil$، که $۳ \geq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil$، $\Delta_i(a) = \sum_i(a)$.

برهان. اگر $r \geq m-۱$، آنگاه $n = ۲m+r \geq ۳m-۱$. برای هر $x \in X$، اگر $|supp(x) \cap supp(a)| = ۰$، آنگاه $d(a,x) = ۱$. در غیر این صورت $|supp(x) \cap supp(a)| \neq ۰$، لذا $|supp(x) \cap supp(a)| \geq ۱$. بنابراین

$$|supp(x) \cup supp(a)| = |supp(x)| + |supp(a)| - |supp(x) \cap supp(a)|$$

$$\leq m + m - ۱ = ۲m - ۱.$$

در نتیجه a و x حداقل m عنصر را ثابت نگه می‌دارند. لذا $y \in X$ وجود دارد که با a و x جابه‌جا می‌شود. بنابراین $d(a,x) \leq ۲$. در نتیجه $x \in \Delta_۱(a) \cup \Delta_۲(a)$.

فرض کنیم $r < m-۱$، در این‌صورت به استقرا روی i، $۳ \leq i \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil$، ثابت می‌کنیم برای هر i فرد،

$$\Delta_i(a) = \{x \in X : \frac{(i-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۱)r}{۲}\}$$

و برای هر i زوج،

$$\Delta_i(a) = \{x \in X : m - \frac{ir}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱\}.$$

ابتدا حالت $i = ۳$ که پایه‌ی استقرا است را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x \in \Delta_۳(a)$ در این صورت $y \in X$ وجود دارد که $y \in \Delta_۱(x) \cap \Delta_۲(a)$.

اگر $y \in < x > \cap X$ آنگاه عدد صحیحی مانند t وجود دارد که $y = x^t$. چون x و y دارای ساختار دوری یکسان $m^{۱}۱^{m+r}$ هستند، بنابراین $supp(x) = supp(y)$. از این که $y \in \Delta_۲(a)$ بنا به قضیه‌ی (۳.۲.۳) داریم:

$$|supp(x) \cap supp(a)| = |supp(y) \cap supp(a)| \geq m - r$$

در این صورت $x \in \Delta_۲(a) \cup \Delta_۱(a)$ که با $x \in \Delta_۳(a)$ در تناقض است. بنابراین از قضیه‌ی (۲.۲.۳) نتیجه می‌شود که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$. لذا حداقل $m-r$ تا از عناصر $supp(x)$ با عناصر $supp(a)$ متفاوتند.

در نتیجه a وx حداکثر r عضو مشترک را جابه‌جا می‌کنند. بنابراین $|supp(x) \cap supp(a)| \leq r$.

از طرفی چون $x \in \Delta_{۳}(a)$ ، $d(x,a) \not\leq ۱$ بنابراین a و x نمی‌توانند مجزا باشند. پس ساپورتشان حداقل یک عضو مشترک دارد. درنتیجه $|supp(x) \cap supp(a)| \geq ۱$. بنابراین

$$x \in \{x \in X : ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq r\} = \sum_{۳}(a).$$

حال برعکس، فرض می‌کنیم $x \in \sum_{۳}(a)$، در این صورت $۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq r$. بنابراین $y \in X$ وجود دارد که ساپورتش دارای حداقل $m-r$ عضو مشترک با $supp(a)$ است و $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$. لذا $m - r \leq |supp(y) \cap supp(a)|$ و $y \in \Delta_{۱}(x)$.

اگر $y \in \Delta_{۱}(a)$، چون $supp(y) \cap supp(a) \neq \emptyset$، لذا $y \in < a > \cap X$. بنابراین $supp(y) = supp(a)$. درنتیجه $supp(x) \cap supp(a) = supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ که تناقض است. بنابراین $y \notin \Delta_{۱}(a)$. لذا $y \in \Delta_{۲}(a) \cap \Delta_{۱}(x)$. پس $x \in \Delta_{۳}(a)$ و این حکم را در حالت $i = ۳$ نتیجه می‌دهد.

حال به استقرا روی i فرض می‌کنیم حکم برای $۳ \leq i \leq k$ برقرار باشد. یعنی برای هر i زوج یا فرد، $۳ \leq i \leq k$، $\Delta_i(a) = \sum_i(a)$. نشان می‌دهیم حکم برای $k + ۱$ نیز برقرار است.

ابتدا فرض می‌کنیم $x \in \Delta_{k+۱}(a)$. در این صورت $y \in X$ وجود دارد که $y \in \Delta_{۱}(x) \cap \Delta_k(a)$. اگر $y \in < x > \cap X$، آنگاه $supp(y) = supp(x)$. درنتیجه،

$$|supp(x) \cap supp(a)| = |supp(y) \cap supp(a)|$$

از فرض استقرا و $y \in \Delta_k(a)$ نتیجه می‌گیریم، $x \in \Delta_k(a)$ که تناقض است. بنابراین $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

حالت اول: اگر k فرد باشد آنگاه از فرض استقرا داریم:

$$\frac{(k-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(k-۱)r}{۲}.$$

بنابراین

$$|supp(y) \cup supp(a)| = |supp(y)| + |supp(a)| - |supp(y) \cap supp(a)|$$

$$= m + m - |supp(y) \cap supp(a)| \geq ۲m - \frac{(k-۱)r}{۲}.$$

لذا حداکثر $۲m + r - (۲m - \frac{(k-۱)r}{۲}) = r + \frac{(k-۲)r}{۲}$ نقطه وجود دارد که به وسیله a و y ثابت نگه داشته می‌شوند. از طرفی $sup(x) \cap supp(y) = \emptyset$، بنابراین $supp(x)$ می‌تواند حداکثر $r + \frac{(k-۱)r}{r}$ نقطه داشته باشد که نه در $supp(a)$ هست و نه در $supp(y)$. لذا $supp(x)$ می‌تواند حداقل $m - r - \frac{(k-۱)r}{۲}$ نقطه‌ی مشترک با $supp(a)$ داشته باشد. یعنی؛ $|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - r - \frac{(k-۱)r}{۲}$. اما زمانی که $|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - \frac{(k-۱)r}{۲}$ باشد برای $k = ۳$ داریم:

$$|suppx(\cap supp(a)| \geq m - \frac{(۳-۱)r}{۲} = m - r.$$

در نتیجه $x \in \Delta_۲(a)$ که تناقض است. اگر $k > ۳$ باشد چون

$$\frac{(k-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(y) \cap supp(a)|.$$

لذا $supp(a)$ و $supp(y)$ حداقل $۱ + \frac{(k-۳)r}{۲}$ عضو مشترک دارند. از این که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ نتیجه می‌گیریم که $supp(x)$ حداکثر دارای $m - \frac{(k-۳)r}{۲} - ۱$ عضو مشترک با $supp(a)$ است. لذا

$$m - \frac{(k-۱)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-۳)r}{۲} - ۱.$$

چون $k - ۱$ زوج است، بنابر فرض استقرا $x \in \Delta_{k-۱}(a)$ که تناقض است. بنابراین

$$|supp(x) \cap supp(a)| < m - \frac{(k-۱)r}{۲} \Longrightarrow$$

$$m - r - \frac{(k-۱)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-۱)r}{۲} - ۱ \quad s.t$$

$$m - r - \frac{(k-۱)r}{۲} = m + \frac{-۲r - kr + r}{۲} = m - \frac{(k+۱)r}{۲} \Longrightarrow$$

$$m - \frac{(k+۱)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-۱)r}{۲} - ۱.$$

چون $k+1$ زوج است، لذا $x \in \sum_{k+1}(a)$.

حال برعکس،فرض می‌کنیم $x \in \sum_{k+1}(a)$. آنگاه چون $k+1$ زوج است داریم:

$$m - \frac{(k+1)r}{2} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-1)r}{2} - 1. \tag{۱.۳}$$

حال فرض می‌کنیم $i < k$ وجود داشته باشد که i زوج باشد و $x \in \Delta_i(a)$. با استفاده از فرض استقرا داریم

$$m - \frac{ir}{2} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-2)r}{2} - 1. \tag{۲.۳}$$

نشان می‌دهیم (۱.۳) با (۲.۳) در تناقض است. برای این کار کافی است ثابت کنیم $m - \frac{(k-1)r}{2} - 1 < m - \frac{ir}{2}$. از آنجایی که $i < k$ و i زوج است، داریم

$$k+1-i \geq 2 \Longrightarrow (k+1-i)r \geq 2r \Longrightarrow kr + r - ir - 2r \geq 0 \Longrightarrow$$

$$(k-1)r - ir \geq 0 \Longrightarrow ir \leq (k-1)r \Longrightarrow \frac{ir}{2} \leq \frac{(k-1)r}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{ir}{2} < \frac{(k-1)r}{2} + 1 \Longrightarrow m - \frac{ir}{2} > m - \frac{(k-1)r}{2} - 1.$$

درنتیجه چنین i یی وجود ندارد. چون $k \leq \frac{m-1}{r}$، لذا

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - \frac{(k+1)r}{2} \geq m - \frac{(\frac{m-1}{r}+1)r}{2} = m - \frac{m-1+r}{2}$$

$$= \frac{m+1-r}{2} > \frac{m-1-r}{2} = \frac{(\frac{m-1}{r}-1)r}{2} = \frac{(k-1)r}{2}.$$

بنابراین

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq \frac{(k-1)r}{2} \tag{۳.۳}$$

از طرفی با استفاده از فرض استقرا برای هر $i \leq k$ که i فرد باشد، اگر $x \in \Delta_i(a)$ آنگاه

$$\frac{(i-3)r}{2} + 1 \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-1)r}{2} \tag{۴.۳}$$

چون

$$i \leq k \Rightarrow i-۱ \leq k-۱ \Rightarrow (i-۱)r \leq (k-۱)r \Rightarrow \frac{(i-۱)r}{۲} \leq \frac{(k-۱)r}{۲}.$$

بنابراین (۳.۳) و (۴.۳) با هم در تناقض هستند. لذا برای هر $i \leq k$ داریم $x \notin \Delta_i(a)$. درنتیجه $d(x,a) \geq k+۱$.

اکنون با استفاده از رابطه (۱.۳) داریم $|supp(x) \cap supp(a)| \geq m-r-\frac{(k-۱)r}{۲}$، یعنی $supp(a)$ و $supp(x)$ حداقل دارای $m-(r+\frac{(k-۱)r}{۲})$ عضو مشترک هستند. بنابراین حداکثر $r+\frac{(k-۱)r}{۲}$ نقطه داریم که در $supp(x)$ هست و در $supp(a)$ نیست. لذا $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ و حداکثر $r+\frac{(k-۱)r}{۲}$ نقطه داریم که نه در $supp(a)$ هست و نه در $supp(y)$. بنابراین در $supp(y) \cup supp(a)$ هم نیست. لذا

$$|supp(y) \cup supp(a)| \geq (۲m+r)-(r+\frac{(k-۱)r}{۲}) = ۲m-\frac{(k-۱)r}{۲}.$$

درنتیجه $|supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(k-۱)r}{۲}$.

همچنین با استفاده از (۱.۳)، $|supp(x) \cap supp(a)| \leq m-\frac{(k-۱)r}{۲}-۱$. بنابراین حداقل $۱+\frac{(k-۱)r}{۲}$ نقطه هست که در $supp(x)$ هست و در $supp(a)$ نیست. پس حداقل $\frac{(k-۱)r}{۲}+۱$ نقطه داریم که نه در $supp(a)$ هست و نه در $supp(y)$. بنابراین $supp(y) \cup supp(a)$ حداکثر دارای $۲m+r-(\frac{(k-۱)r}{۲}+۱)$ نقطه است. لذا

$$|supp(y) \cup supp(a)| \leq ۲m+r-\frac{(k-۱)r}{۲}-۱ = ۲m-(\frac{(k-۳)r}{۲}+۱) \Rightarrow$$

$$|supp(y) \cap supp(a)| \geq ۲m-(۲m-(\frac{(k-۳)r}{۲}+۱)) = \frac{(k-۳)r}{۲}+۱.$$

بنابراین

$$\frac{(k-۳)r}{۲}+۱ \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(k-۱)r}{۲}.$$

لذا از فرض استقرا $y \in \Delta_۱(x) \cap \Delta_k(a)$. درنتیجه $d(x,a) \leq k+۱$. بنابراین $x \in \Delta_{k+۱}(a)$ و این استقرا را در حالتی که k فرد است کامل می‌کند.

حالت دوم: فرض کنیم k زوج باشد و $x \in \Delta_{k+1}(a)$. در این صورت $y \in X$ وجود دارد که $y \in \Delta_1(x) \cap \Delta_k(a)$. مشابه استدلال حالت قبل $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$. همچنین با استفاده از فرض استقرا داریم

$$m - \frac{kr}{2} \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-2)r}{2} - 1.$$

بنابراین حداکثر $\frac{kr}{2}$ از نقاط $supp(a)$ و $supp(x)$ می‌توانند مشترک باشند. لذا $|supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{kr}{2}$. حال اگر $|supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(k-2)r}{2}$. آنگاه با استفاده از فرض استقرا $d(x,a) \leq k-1$، که با $x \in \Delta_{k+1}(a)$ در تناقض است. بنابراین

$$|supp(x) \cap supp(a)| > \frac{(k-2)r}{2} \Rightarrow |supp(x) \cap supp(a)| \geq \frac{(k-2)r}{2} - 1.$$

لذا خواهیم داشت

$$\frac{(k-2)}{2} - 1 \leq |supp(x) \cap supp(y)| \leq \frac{kr}{2}.$$

بنابراین $x \in \sum_{k+1}(a)$.

حال برعکس، فرض می‌کنیم $x \in \sum_{k+1}(a)$. در این‌صورت چون $k+1$ فرد است پس

$$\frac{(k-2)r}{2} + 1 \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{kr}{2}. \tag{۵.۳}$$

فرض می‌کنیم $i < k$ وجود داشته باشد که i فرد باشد و $x \in \Delta_i(a)$. با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\frac{(i-3)r}{2} + 1 \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-3)r}{2} \tag{۶.۳}$$

نشان می‌دهیم (۵.۳) با (۶.۳) در تناقض است و درنتیجه چنین i یی وجود ندارد. برای این کار کافی است ثابت کنیم $\frac{(i-1)r}{2} < \frac{(k-2)r}{2} + 1$ و این رابطه برقرار است زیرا:

$$i < k \Longrightarrow i+1 \leq k \Longrightarrow i-1 \leq k-2 \Longrightarrow \frac{(i-1)r}{2} < \frac{(k-2)r}{2} + 1$$

$$(i-1)r \leq (k-2)r \Longrightarrow \frac{(i-1)r}{2} \leq \frac{(k-2)r}{2} \Longrightarrow \frac{(i-1)r}{2} < \frac{(k-2)r}{2} + 1.$$

اکنون نشان می‌دهیم برای هر i که $i \leq k$ و i زوج باشد نیز $x \notin \Delta_i(a)$. فرض کنیم چنین نباشد. بنابر فرض استقرا داریم:

$$m - \frac{ir}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱.$$

چون $k \leq \frac{m-۱}{r}$، بنابراین

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - \frac{ir}{۲} = (\frac{m-۱}{r})r + ۱ - \frac{ir}{۲} \geq kr + ۱ - \frac{ir}{۲}.$$

از طرفی داریم:

$$i \leq k \Longrightarrow ir \leq kr \Longrightarrow \frac{ir}{۲} \leq \frac{kr}{۲} \Longrightarrow \frac{kr}{۲} - \frac{ir}{۲} \geq ۰ \Longrightarrow$$

$$kr - \frac{ir}{۲} \geq \frac{kr}{۲} \Longrightarrow kr + ۱ - \frac{ir}{۲} > \frac{kr}{۲}.$$

بنابراین $|supp(x) \cap supp(a)| > \frac{kr}{۲}$ که با رابطه (۵.۳) در تناقض است. لذا $i \leq k$ وجود ندارد که $x \in \Delta_i(a)$.

بنابراین $d(a,x) \geq k+۱$.

حال با توجه به رابطه (۵.۳)، $supp(a)$ و $supp(x)$ حداکثر $\frac{kr}{۲}$ عضو مشترک دارند. لذا $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ و $supp(y)$ می‌تواند حداقل $m - \frac{kr}{۲}$ عضو مشترک با $supp(a)$ داشته باشد.

بنابراین $|supp(y) \cap supp(a)| \geq m - \frac{kr}{۲}$. همچنین از رابطه (۵.۳) داریم

$$\frac{(k-۲)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)|.$$

لذا $supp(y)$ حداکثر دارای $m - \frac{(k-۲)r}{۲} - ۱$ عضو مشترک با $supp(a)$ است. بنابراین

$$m - \frac{kr}{۲} \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(k-۲)r}{۲} - ۱.$$

لذا $y \in \Delta_۱(x) \cap \Delta_k(a)$. بنابراین $d(a,x) \leq k+۱$. درنتیجه $x \in \Delta_{k+۱}(a)$. و این حکم را برای حالتی که k زوج است ثابت می‌کند. بنابراین برای هر i، $۳ \leq i \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil$، $\sum_i(a) = \Delta_i(a)$. $\square$

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $m \geq ۲$ و $r \geq ۱$. همچنین فرض کنید $a = (۱ \dots m)(= \tilde{a})$. در این‌صورت، برای $i = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱$، که $\lceil \frac{m-۱}{r} \rceil \geq ۲$، $\Delta_i(a) \subseteq \sum_i(a) \subseteq \Delta_i(a) \cup \Delta_{i-۱}(a)$.

برهان. ابتدا فرض کنیم i فرد باشد و $x \in \Delta_i(a)$. در این‌صورت $y \in X$ وجود دارد که $y \in \Delta_۱(x) \cap \Delta_{i-۱}(a)$. همانطور که در قضیه‌ی (۴.۲.۳) دیدیم $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ و برای هر j، $۳ \leq j \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil$، $\Delta_j(a) = \Sigma_j(a)$. لذا

$$m - \frac{(i-۱)r}{۲} \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۳)r}{۲} - ۱.$$

بنابراین $supp(a)$ و $supp(y)$ حداقل $m - \frac{(i-۱)r}{۲}$ عضو مشترک دارند. لذا حداکثر $\frac{(i-۱)r}{۲}$ نقطه در $supp(a)$ باقی می‌ماند که می‌تواند با $supp(x)$ مشترک باشد. بنابراین، $|supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۱)r}{۲}$. حال فرض کنیم $|supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۳)r}{۲}$. در این صورت از قضیه‌ی (۴.۲.۳) نتیجه می‌گیریم، $d(x,a) \leq i-۲$ که با فرض $x \in \Delta_i(a)$ در تناقض است. لذا

$$\frac{(i-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۱)r}{۲}.$$

بنابراین $x \in \Sigma_i(a)$.

حال اگر i زوج باشد و $x \in \Delta_i(a)$، آنگاه همان‌طور که گفتیم، $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ و $y \in \Delta_{i-۱}(a)$. لذا بنابر قضیه‌ی (۴.۲.۳)، داریم:

$$\frac{(i-۴)r}{۲} + ۱ \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۲)r}{۲}.$$

درنتیجه

$$|supp(y) \cup supp(a)| = ۲m - |supp(y) \cap supp(a)| \geq ۲m - \frac{(i-۲)r}{۲}.$$

بنابراین حداکثر $r + \frac{(i-۲)r}{۲}$ نقطه توسط a و y ثابت نگه داشته می‌شوند. چون $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ پس حداکثر $r + \frac{(i-۲)r}{۲}$ نقطه در $supp(x)$ هست که در $supp(a)$ و $supp(y)$ نیست. لذا حداقل $m - r - \frac{(i-۲)r}{۲}$

عضو از اعضای $supp(a)$ و $supp(x)$ مشترک‌اند. بنابراین

$$m - r - \frac{(i-۲)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \tag{۷.۳}$$

از طرفی اگر

$$m - \frac{(i-۲)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)|.$$

آنگاه، چون $supp(a)$ و $supp(y)$ حداقل $۱ + \frac{(i-۴)r}{۲}$ عضو مشترک دارند، پس $supp(a)$ حداکثر می‌تواند $m - \frac{(i-۴)r}{۲} - ۱$ عضو مشترک با $supp(x)$ داشته باشد. لذا

$$m - \frac{(i-۲)r}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۴)r}{۲} - ۱.$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی (۴.۲.۳)، $x \in \Delta_{i-۲}(a)$ که با $x \in \Delta_i(a)$ درتناقض است. لذا

$$|supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱.$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۷.۳) داریم:

$$m - \frac{ir}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱.$$

درنتیجه $x \in \Sigma_i(a)$ و لذا $\Delta_i(a) \subseteq \Sigma_i(a)$.

حال فرض کنیم $x \in \Sigma_i(a)$ و i زوج باشد، داریم:

$$m - \frac{ir}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱. \tag{۸.۳}$$

فرض کنیم $t < i - ۱$ وجود داشته باشد که t زوج باشد و $x \in \Delta_t(a)$. از قضیه‌ی (۴.۲.۳) داریم:

$$m - \frac{tr}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(t-۲)r}{۲} - ۱. \tag{۹.۳}$$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی (۸.۳) با رابطه‌ی (۹.۳) درتناقض است و درنتیجه چنین t یی وجود ندارد. برای این کار کافی است ثابت کنیم $m - \frac{tr}{۲} > m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱$. چون $t < i - ۱$، و t و i زوج هستند، لذا $i - t \geq ۲$.

بنابراین داریم:

$$(i-t)r \geq ۲r \Longrightarrow ir - tr \geq ۲r \Longrightarrow ir - ۲r \geq tr \Longrightarrow (i-۲)r \geq tr \Longrightarrow$$

$$\frac{(i-۲)r}{۲} \geq \frac{tr}{۲} \Longrightarrow \frac{(i-۲)r}{۲} + ۱ > \frac{tr}{۲} \Longrightarrow m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱ < m - \frac{tr}{۲}.$$

لذا هیچ $t < i - ۱$ وجود ندارد که t زوج باشد و $x \in \Delta_t(a)$.

چون

$$i - ۲ = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱ - ۲ = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil - ۱ \leq \frac{m-۱}{۲} \Longrightarrow i \leq \frac{m-۱}{۲} + ۲.$$

پس

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - \frac{ir}{۲} \geq m - \frac{(\frac{m-۱}{r} + ۲)r}{۲} =$$

$$m - \frac{m - ۱ + ۲r}{۲} = \frac{۲m - m + ۱ - ۲r}{۲} = \frac{(\frac{m-۱}{r} + ۲)r - ۲r + ۲ - ۲r}{۲}$$

$$\geq \frac{ir + ۲ - ۴r}{۲} = ۱ + \frac{(i-۴)r}{۲}.$$

لذا

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq \frac{(i-۴)r}{۲} + ۱. \qquad (۱۰.۳)$$

حال فرض کنیم $t < i - ۲$ وجود داشته باشد که t فرد باشد و $x \in \Delta_t(a)$. بنابر قضیه‌ی (۴.۲.۳) داریم:

$$\frac{(t-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(t-۱)r}{۲}. \qquad (۱۱.۳)$$

همچنین داریم

$$t < i - ۲ \Longrightarrow t \leq i - ۳ \Longrightarrow t - ۱ \leq i - ۴$$
$$\Longrightarrow \frac{(t-۱)r}{۲} \leq \frac{(i-۴)r}{۲} \Longrightarrow \frac{(t-۱)r}{۲} < \frac{(i-۴)r}{۲} + ۱.$$

بنابراین رابطه‌ی (۱۰.۳) با رابطه‌ی (۱۱.۳) تناقض دارد. لذا t یی وجود ندارد که $t \leq i - ۲$ و $x \in \Delta_t(a)$.
بنابراین $d(x,a) \geq i - ۱$. با استفاده از رابطه‌ی (۸.۳) داریم:

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq m - \frac{ir}{۲}.$$

لذا $supp(a)$ و $supp(x)$ حداقل دارای $m - \frac{ir}{۲}$ عضو مشترک هستند. بنابراین حداکثر $\frac{ir}{۲}$ نقطه در $supp(x)$ هست که در $supp(a)$ نیست. لذا $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$. پس حداکثر $\frac{ir}{۲}$ نقطه داریم که نه در $supp(a)$ هست و نه در $supp(y)$ و لذا در $supp(y) \cup supp(a)$ نیز نیست. بنابراین

$$|supp(y) \cup supp(a)| \geq ۲m + r - \frac{ir}{۲} \Rightarrow |supp(y) \cap supp(a)| =$$

$$|supp(y)| + |supp(a)| - |supp(y) \cup supp(a)| \leq m + m - (۲m + r - \frac{ir}{۲}) =$$

$$۲m - ۲m - r + \frac{ir}{۲} = \frac{(i-۲)r}{۲} \Rightarrow |supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۲)r}{۲}.$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی (۸.۳)، $|supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱$. بنابراین حداقل $\frac{(i-۲)r}{۲} + ۱$ نقطه در $supp(x)$ هست که در $supp(a)$ نیست. لذا حداقل $\frac{(i-۲)r}{۲} + ۱$ نقطه داریم که نه در $supp(a)$ هست و نه در $supp(y)$. بنابراین در $supp(y) \cup supp(a)$ هم نیست. در نتیجه

$$|supp(y) \cup supp(a)| \leq ۲m + r - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱ \Longrightarrow$$

$$|supp(y) \cap supp(a)| = |supp(y)| + |supp(a)| - |supp(y) \cup supp(a)| \geq$$

$$۲m - (۲m + r - \frac{(i-۲)r}{۲} - ۱) = \frac{(i-۲)r}{۲} + ۱ - r = \frac{(i-۴)r}{۲} + ۱.$$

بنابراین

$$\frac{(i-۴)r}{۲} + ۱ \leq |supp(y) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-۲)r}{۲}$$

و $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$. لذا $y \in \Delta_۱(x) \cap \Delta_{i-۱}(a)$، و در نتیجه $d(a,x) \leq i$. بنابراین $i - ۱ \leq d(a,x) \leq i$. پس $x \in \Delta_i(a) \cup \Delta_{i-۱}(a)$ و در نتیجه

$$\Sigma_i(a) \leq \Delta_i(a) \cup \Delta_{i-۱}(a).$$

اکنون فرض می‌کنیم i عددی فرد باشد و $x \in \Sigma_i(a)$. در این صورت

$$\frac{(i-3)r}{2}+1 \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(i-1)r}{2}. \qquad (۱۲.۳)$$

فرض کنیم عدد فرد t وجود داشته باشد که $t \leq i-2$ و $x \in \Delta_t(a)$. با استفاده از قضیه‌ی (۴.۲.۳) داریم:

$$\frac{(t-3)r}{2}+1 \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(t-1)r}{2}. \qquad (۱۳.۳)$$

چون

$$t \leq i-2 \Longrightarrow t-1 \leq i-3 \Longrightarrow \frac{(t-1)r}{2} \leq \frac{(i-3)r}{2} \Longrightarrow \frac{(t-1)r}{2} < \frac{(i-3)r}{2}+1.$$

پس رابطه‌ی (۱۲.۳) با رابطه (۱۳.۳) در تناقض است و درنتیجه چنین t یی وجود ندارد.

حال فرض کنیم عدد زوج t موجود باشد که $t < i-2$ و $x \in \Delta_t(a)$. بنابر قضیه‌ی (۴.۲.۳) داریم:

$$m-\frac{tr}{2} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m-\frac{(t-2)r}{2}-1. \qquad (۱۴.۳)$$

همچنین داریم:

$$t < i-2 \Rightarrow t \leq i-3 \Rightarrow \frac{tr}{2} \leq \frac{(i-3)r}{2} \Rightarrow \frac{tr}{2} < \frac{(i-3)r}{2}+1.$$

چون $i-2 \leq \frac{m-1}{r}$، پس

$$|supp(x) \cap supp(a)| \geq m-\frac{tr}{2} = (\frac{m-1}{r})r+1-\frac{tr}{2} \geq (i-2)r+1-\frac{tr}{2} >$$

$$(i-2)r+1-\frac{(i-3)r}{2}-1 = \frac{2(i-2)r-(i-3)r}{2} = \frac{(2i-4-i+3)r}{2} = \frac{(i-1)r}{2}.$$

بنابراین $\frac{(i-1)r}{2} \leq |supp(x) \cap supp(a)|$. و این با رابطه ی (۱۲.۳) در تناقض است. لذا $t \leq i-2$ وجود ندارد که $x \in \Delta_t(a)$. بنابراین $d(a,x) \geq i-1$. با توجه به رابطه‌ی (۱۲.۳)، $supp(a)$ و $supp(x)$ حداقل $\frac{(i-3)r}{2}+1$ عضو مشترک دارند. لذا حداکثر $m-\frac{(i-3)r}{2}-1$ نقطه در $supp(a)$ داریم که در $supp(x)$ نیست. بنابراین $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$، و $supp(a)$ و $supp(y)$ حداکثر $m-\frac{(i-3)r}{2}-1$ عضو مشترک دارند. در نتیجه $|supp(y) \cap supp(a)| \leq m-\frac{(i-3)r}{2}-1$. لذا بنابر قضیه‌ی

(۴.۲.۳)، $d(a,y) \leq i-۱$. بنابراین $d(a,x) \leq i$. در نتیجه برای i فرد نیز $i-۱ \leq d(a,x) \leq i$. لذا $x \in \Delta_i(a) \cup \Delta_{i-۱}(a)$. بنابراین برای $i = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱$، داریم $\Delta_i(a) \subseteq \Sigma_i(a) \subseteq \Delta_i(a) \cup \Delta_{i-۱}(a)$. $\square$

توجه کنید که در قضیه‌ی (۵.۲.۳) برای $i = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱$، ممکن است $\Sigma_i(a) \cap \Delta_{i-۱}(a)$ ناتهی باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۶.۲.۳. فرض کنید $m = ۴$ و $r = ۲$، در این صورت

$$i = \lceil \tfrac{m-۱}{r} \rceil + ۱ = \lceil \tfrac{۴-۱}{۲} \rceil + ۱ = \lceil \tfrac{۳}{۲} \rceil + ۱ = ۲ + ۱ = ۳.$$

لذا

$$\Sigma_i(a) = \Sigma_۳(a) = \{x \in X | \tfrac{(۳-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \tfrac{(۳-۱)r}{۲}\}$$

$$= \{x \in X | ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq r = ۲\}$$

و

$$\Delta_{i-۱}(a) = \Delta_۲(a) = \{x \in X | ۴ - ۲ \leq |supp(x) \cap supp(a)|\}$$

$$= \{x \in X | ۲ \leq |supp(x) \cap supp(a)|\}.$$

بنابراین $\Delta_۲(a) \cap \Sigma_۳(a) \neq \emptyset$.

نتیجه ۷.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $r \geq ۱$ و $m \geq ۲$. همچنین فرض کنید $a = (۱۲\ldots m)(= \tilde{a})$. در این صورت $X = \{a\} \cup \Delta_۱(a) \cup \Delta_۲(a) \cup \ldots \cup \Delta_{\lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱}(a)$.

برهان. فرض کنیم $k \geq ۲$ یک عدد صحیح باشد. اگر $i = ۲k - ۱$ آنگاه

$$\Sigma_i(a) = \{x \in X : \tfrac{(i-۳)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \tfrac{(i-۱)r}{۲}\}.$$

لذا برای مقادیر مختلف k داریم:

$$\begin{aligned}
k=۲ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۳}(a)=\{x\in X: ۱\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq r\}\\
k=۳ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۵}(a)=\{x\in X: r+۱\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq ۲r\}\\
k=۴ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۷}(a)=\{x\in X: ۲r+۱\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq ۳r\}\\
& \vdots
\end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

همچنین اگر $i=۲k$ آنگاه

$$\Sigma_i(a)=\{x\in X: m-\frac{ir}{۲}\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq m-\frac{(i-۲)r}{۲}-۱\}.$$

در این صورت به ازای مقادیر مختلف k داریم:

$$\begin{aligned}
& \vdots\\
k=۴ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۸}(a)=\{x\in X: m-۴r\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq m-۳r-۱\}\\
k=۳ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۶}(a)=\{x\in X: m-۳r\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq m-۲r-۱\}\\
k=۲ \Longrightarrow \quad & \Sigma_{۴}(a)=\{x\in X: m-۲r\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq m-r-۱\}.
\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

با توجه به روابط (۱۵.۳) و (۱۶.۳) برای $i\geq ۳$، داریم

$$۱\leq |supp(x)\cap supp(a)|\leq m-r-۱.$$

چون هر دو مجموعه‌ی دلخواه در (۱۵.۳) و (۱۶.۳) دارای اشتراک تهی هستند و اشتراک ساپورت‌ها تمام اعداد بین ۱ تا $m-r-۱$ را شامل می‌شوند. بنابراین کران‌های بالا در (۱۵.۳) در جایی به کران‌های پایین در (۱۶.۳)

می‌رسند، لذا برای k یی خواهیم داشت:

$$(m-\frac{۲kr}{۲})-(\frac{((۲k-۱)-۱)r}{۲})=۱$$
$$\Longrightarrow m-۱=kr+(k-۱)r$$
$$\Longrightarrow m-۱=(۲k-۱)r\Longrightarrow \frac{m-۱}{r}=۲k-۱.$$

حال اگر $i=۲k-۱$، آنگاه

$$۲k-۱=\tfrac{m-۱}{r}\Longrightarrow i=\tfrac{m-۱}{r}\Longrightarrow i\leq\lceil\tfrac{m-۱}{r}\rceil.$$

اگر $i=۲k$، آنگاه

$$۲k-۱=\frac{m-۱}{r}\Longrightarrow i-۱=\frac{m-۱}{r}$$
$$\Longrightarrow i-۱\leq\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil\Longrightarrow i\leq\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil+۱.$$

لذا داریم

$$\cup_{i=۳}^{\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil+۱}\Sigma_i(a)=\{x\in X:۱\leq|supp(x)\cap supp(a)|\leq m-r-۱\}.$$

همچنین داریم

$$X=\{a\}\cup\{x\in X:supp(x)\cap supp(a)=\emptyset\}\cup\{x\in X:|supp(x)\cap supp(a)|\geq m-r\}\cup$$
$$\{x\in X:۱\leq|supp(x)\cap supp(a)|\leq m-r-۱\}.$$

بنابراین

$$X=\{a\}\cup\{x\in X:supp(x)\cap supp(a)=\emptyset\}\cup$$
$$\{x\in X:|supp(x)\cap supp(a)|\geq m-r\}\cup_{i=۳}^{\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil+۱}\Sigma_i(a).$$

در نتیجه بنابر قضایای (۲.۲.۳)، (۳.۲.۳)، (۴.۲.۳) و (۵.۲.۳) داریم:

$$X = \{a\} \cup \Delta_۱(a) \cup \Delta_۲(a) \cup \ldots \cup \Delta_{\lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱}(a).$$

$\square$

نتیجه ۸.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + r$ که $r \geq ۱$ و $m \geq ۲$. همچنین فرض کنید $a = (۱۲\ldots m)(= \tilde{a})$. در این صورت $\Delta_{\lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱}(a) \neq \emptyset$.

برهان. قرار می‌دهیم $t = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱$. فرض می‌کنیم $\Delta_t(a) = \emptyset$. در این صورت بنابر قضیه‌ی (۵.۲.۳)، داریم:

$$\Sigma_t(a) \subseteq \emptyset \cup \Delta_{t-۱}(a) = \Delta_{t-۱}(a).$$

لذا با استفاده از قضیه‌ی (۴.۲.۳)،

$$\Sigma_t(a) \subseteq \Sigma_{t-۱}(a). \tag{۱۷.۳}$$

اگر t زوج باشد. آنگاه با توجه به رابطه‌ی (۱۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} &\left\{ x \in X : m - \frac{tr}{۲} \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq m - \frac{(t-۲)r}{۲} - ۱ \right\} \\ &\subseteq \left\{ x \in X : \frac{(t-۴)r}{۲} + ۱ \leq |supp(x) \cap supp(a)| \leq \frac{(t-۲)r}{۲} \right\}. \end{aligned}$$

بنابراین $m - \frac{(t-۲)r}{۲} - ۱ \leq \frac{(t-۲)r}{۲}$ و $\frac{(t-۴)r}{۲} + ۱ \leq m - \frac{tr}{۲}$. در نتیجه $m \leq \frac{tr}{۲} - ۲r + \frac{tr}{۲} + ۱$ و $m \geq \frac{tr}{۲} - ۲r + \frac{tr}{۲} + ۱$. لذا

$$\begin{aligned} m = tr - ۲r + ۱ &\Longrightarrow m = (t-۲)r + ۱ \Longrightarrow \frac{m-۱}{r} = t - ۲ \\ &\Longrightarrow \frac{m-۱}{r} = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱ - ۲ = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil - ۱ \\ &\Longrightarrow \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil - \frac{m-۱}{r} = ۱. \end{aligned}$$

که با $۰ \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil - \frac{m-۱}{r} < ۱$ در تناقض است.

اگر t فرد باشد آنگاه با استفاده از رابطه‌ی (۱۷.۳)، داریم

$$\left\{x\in X:\frac{(t-۳)r}{۲}+۱\leq|supp(x)\cap supp(a)|\leq\frac{(t-۱)r}{۲}\right\}\subseteq$$
$$\left\{x\in X:m-\frac{(t-۱)r}{۲}\leq|supp(x)\cap supp(a)|\leq m-\frac{(t-۳)r}{۲}-۱\right\}.$$

بنابراین $\frac{(t-۳)r}{۲}+۱\leq\frac{(t-۱)r}{۲}\leq m-\frac{(t-۱)r}{۲}$ و $m-\frac{(t-۳)r}{۲}-۱\geq\frac{(t-۱)r}{۲}$. در نتیجه $m\leq\frac{(t-۳)r}{۲}+\frac{(t-۱)r}{۲}+۱$ و $m\geq\frac{(t-۳)r}{۲}+\frac{(t-۱)r}{۲}+۱$. لذا

$$\begin{aligned}m&=\frac{(t-۳)r}{۲}+\frac{(t-۱)r}{۲}+۱\\&\Longrightarrow m-۱=\frac{(۲t-۴)r}{۲}=(t-۲)r\\&\Longrightarrow\frac{m-۱}{r}=t-۲=\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil+۱-۲=\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil-۱\\&\Longrightarrow\lceil\frac{m-۱}{r}\rceil-\frac{m-۱}{r}=۱.\end{aligned}$$

که باز هم تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه $\Delta_t(a)\neq\emptyset$. □

نتیجه ۹.۲.۳. فرض کنید $n=۲m+r$ که $r\geq۱$ و $m\geq۲$. همچنین فرض کنید $a=(۱۲\ldots m)(=\tilde{a})$. در این صورت $diam\mathfrak{C}(G,X)=\left[\frac{m-۱}{r}\right]+۱$.

برهان. با استفاده از (۷.۲.۳) و (۸.۲.۳) داریم $X=\{a\}\cup\Delta_۱(a)\cup\Delta_۲(a)\cup\Sigma_۳(a)\cup\ldots\cup\Delta_{[\frac{m-۱}{r}]+۱}$ و $\Delta_{[\frac{m-۱}{r}]+۱}\neq\emptyset$. بنابراین $diam\mathfrak{C}(G,X)=\left[\frac{m-۱}{r}\right]+۱$. □

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید $|Fix(a)|\geq m+۱$، $m\geq۲$. در این صورت

$$diam\mathfrak{C}(G,X)\leq m+۲diam\mathfrak{C}(G^*,X^*).$$

برهان. فرض کنیم $x(=\tilde{x}x^*)\in X$. قرار می‌دهیم $\{j_۱,\ldots,j_k\}=supp(\tilde{a})\setminus supp(\tilde{x})$. $y\in X$ را طوری در نظر می‌گیریم که $y=\tilde{x}y^*$ و $\{j_۱,\ldots,j_k\}\subseteq Fix(y^*)$ (چنین y یی حتما وجود دارد. برای مثال قرار دهید $y=\tilde{x}a^*$). حال فرض کنیم $\Omega_۱=Fix(\tilde{x})$. در این صورت $x^*,y^*\in Sym(\Omega_۱)=G^*$. لذا

$d(x^*,y^*) \leq diam\mathfrak{C}(G^*,X^*)$ که $X^*=x^{*^{G^*}}$. از طرفی تمامی عناصر X^* با $\tilde{x}$ مجزا هستند. بنابراین اگر $\{x^*,t_1^*,\ldots,t_l^*,y^*\}$ یک مسیر در X^*، از x^* به y^* باشد. آنگاه؛ چون برای هر i، $1\leq i\leq l$، $t_i^*\in X^*$ بنابراین $g_i^*\in G^*$ وجود دارد که $t_i{}^*=x^{*g_i{}^*}$ لذا $\tilde{x}t_i{}^*=\tilde{x}x^{*g_i{}^*}$ و چون $x^{*g_i{}^*}$ و x^* دارای ساختار دوری یکسان هستند، پس $\tilde{x}t_i^*\in X$. لذا $\{\tilde{x}x^*,\tilde{x}t_1^*,\ldots,\tilde{x}t_l^*,\tilde{x}y^*\}$ یک مسیر از x به y در X است. در نتیجه $d(x,y)\leq d(x^*,y^*)$. بنابراین

$$d(x,y)\leq diam\mathfrak{C}(G^*,X^*). \tag{۱۸.۳}$$

فرض کنیم $\Omega_2=Fix(y^*)$. در این صورت

$$supp(\tilde{a})\subseteq\{j_1,\ldots,j_k\}\cup supp(\tilde{x})\subseteq Fix(y^*)=\Omega_2 \Longrightarrow \tilde{a}\in Sym(\Omega_2).$$

قرار می‌دهیم $\tilde{G}=Sym(\Omega_2)$ و $\tilde{X}=\tilde{a}^{\tilde{G}}$. داریم

$$|\Omega_2|=|Fix(y^*)|=|Fix(y)|+|supp(\tilde{x})|=m+|Fix(y)|\geq m+m+1=2m+1.$$

بنابراین $|\Omega_2|=2m+r$ که $r\geq 1$. لذا با استفاده از نتیجه‌ی (۹.۲.۳)، $diam\mathfrak{C}(\tilde{G},\tilde{X})=\lceil\frac{m-1}{r}\rceil+1$. درنتیجه $d(\tilde{a},\tilde{x})$ در $\mathfrak{C}(\tilde{G},\tilde{X})$ حداکثر m است. چون هر عضو $\tilde{X}$ با y^* مجزاست، پس مشابه استدلال بالا

$$d(\tilde{a}y^*,\tilde{x}y^*)\leq d(\tilde{a},\tilde{x})\leq m. \tag{۱۹.۳}$$

اکنون قرار می‌دهیم $\Omega_3=Fix(\tilde{a})$. در این صورت $G^*=Sym(Fix(\tilde{a}))$ و $X^*=a^{*^{G^*}}$. چون $a^*,y^*\in G^*$ پس $d(a^*,y^*)\leq diam\mathfrak{C}(G^*,X^*)$. همچنین تمام اعضای X^* با $\tilde{a}$ مجزا هستند. لذا مشابه استدلال بالا

$$d(\tilde{a}y^*,\tilde{a}a^*)\leq d(a^*,y^*)\leq diam\mathfrak{C}(G^*,X^*). \tag{۲۰.۳}$$

اکنون با استفاده از روابط (۱۸.۳)، (۱۹.۳) و (۲۰.۳) داریم

$$d(x,a)\leq d(x,y)+d(y,a)\leq d(x,y)+d(y,\tilde{a}y^*)+d(\tilde{a}y^*,a)\leq m+2diam\mathfrak{C}(G^*X^*)$$

چون $X \ni x$ دلخواه بود. بنابراین $diam\mathfrak{C}(G,X) \leq m + ۲diam\mathfrak{C}(G^*,X^*)$. □

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنید $n = ۲m + ۲ + r$ که $m \geq ۳$ و $r \geq ۱$. همچنین فرض کنید $a = (۱,۲,\ldots,m)(m+۱,m+۲)(=\tilde{a}(m+۱,m+۲))$، در این صورت

$$diam\mathfrak{C}(G,X) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳.$$

برهان. فرض کنیم $X \ni x$ دارای دور $\tilde{x}$ به طول m باشد. قرار می‌دهیم $s = |supp(\tilde{a}) \cap supp(\tilde{x})|$ و $x = \tilde{x}(\gamma,\delta)$. در این صورت $|supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x})| = ۲m - s$. لذا

$$|Fix(\tilde{x}) \cap Fix(\tilde{a})| = (۲m + ۲ + r) - (۲m - s) = ۲ + r + s \geq s + ۳.$$

برای مقادیر مختلف s حکم را ثابت می‌کنیم:

۱. اگر $s = ۰$، آنگاه α و β را طوری در نظر می‌گیریم که $\alpha,\beta \notin supp(\tilde{x}) \cup supp(\tilde{a})$، همچنین $\{\alpha,\beta\} \cap \{m+۱,m+۲\} = \emptyset$ یا $(\alpha,\beta) = (m+۱,m+۲)$. قرار می‌دهیم $y = (۱,۲,\ldots,m)(\alpha,\beta)$. چون

$$|\Omega \setminus supp(\tilde{x}) \cup supp(\tilde{a})| = (۲m + ۲ + r) - (۲m - s) = ۲ + r + s \geq ۳.$$

پس حداقل یکی از این دو حالت ممکن است. حال فرض می‌کنیم $z = \tilde{x}(\alpha,\beta)$. چون $y = \tilde{a}(\alpha,\beta)$، بنابراین $[y,z] = [a,y] = ۱$. از طرفی بنابر نتیجه‌ی (۹.۲.۳)،

$$d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) \leq diam(Sym(Fix(\tilde{x})),(\gamma,\delta)^{Sym(Fix(\tilde{x}))}) = \lceil \frac{۲-۱}{r} \rceil + ۱ = ۲.$$

چون (γ,δ) و (α,β) از $\tilde{x}$ مجزا هستند. لذا مشابه استدلال قضیه‌ی قبل، داریم

$$d(z,x) \leq d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) \leq ۲.$$

بنابراین

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,z) + d(z,x) \leq ۱ + ۱ + ۲ = ۴ \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳.$$

۲. حالت اول: فرض می‌کنیم $s = ۱$ و $\{m+۱, m+۲\} \cap supp(\tilde{x}) \neq \emptyset$. در این صورت اگر

$$\{m+۱, m+۲\} \subseteq supp(\tilde{x})$$

آنگاه α و β را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\{\alpha, \beta\} \cap (supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x}) \cup \{\gamma, \delta\}) = \emptyset.$$

چون

$$\begin{aligned} |\Omega \setminus (supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x}) \cup \{\gamma, \delta\})| &= ۲m + ۲ + r - (m + m + ۲) \\ &+ |supp(\tilde{a}) \cap supp(\tilde{x}| + |supp(\tilde{a} \cap \{\gamma, \delta\}| + |supp(\tilde{x}) \cup \{\gamma, \delta\}| \\ &- |supp(\tilde{a}) \cap supp(\tilde{x}) \cap \{\gamma, \delta\}| \\ &= ۲m + ۲ + r - (۲m + ۲) + (۱ + |supp(\tilde{a} \cap \{\gamma, \delta\}| + ۰) + ۰ \\ &= r + ۱ + |supp(\tilde{a} \cap \{\gamma, \delta\}| \geq ۲. \end{aligned}$$

لذا چنین α و β یی وجود دارد. اگر $|\{m+۱, m+۲\} \cap supp(\tilde{x})| = ۱$. آنگاه زمانی که $\{\gamma, \delta\} \cap (supp(\tilde{a}) \cup \{m+۱, m+۲\}) = \emptyset$، قرار می‌دهیم $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$. در غیر این صورت α و β را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\{\alpha, \beta\} \cap [(\{\gamma, \delta, m+۱, m+۲\}) \cup supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x})] = \emptyset.$$

چون

$$|\Omega \setminus (supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x}) \cup \{m+۱, m+۲\})|$$

$$= 2m + 2 + r - (m + m + 2 - (1 + 0 + 1) + 0) = r + 2 \geq 3.$$

لذا حداقل یکی از دو حالت فوق ممکن است. قرار می‌دهیم $y = \tilde{a}(\alpha, \beta)$. چون

$$\{\alpha, \beta\} \cap \{m + 1, m + 2\} = \emptyset.$$

لذا $[a, y] = 1$. حال فرض می‌کنیم $z = \tilde{x}(\alpha, \beta)$. در این صورت چون $(\alpha, \beta) \in Sym(Fix(\tilde{a}))$، لذا مشابه استدلال قضیه‌ی قبل و بنابر نتیجه‌ی (۹.۲.۳)، داریم:

$$d(z, y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{a}) \leq \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 1.$$

همچنین $\{\gamma, \delta\} = \{\alpha, \beta\}$ یا $\{\gamma, \delta\} \cap \{\alpha, \beta\} = \emptyset$، بنابراین $[z, x] = 1$. در نتیجه

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 1 + \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 1 + 1 = \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 3.$$

حالت دوم: فرض کنیم $s = 1$ و $\{m + 1, m + 2\} \cap supp(\tilde{x}) = \emptyset$. در این صورت قرار می‌دهیم $y = \tilde{x}(m + 1, m + 2)$. لذا با استدلال مشابه و بنابر نتیجه‌ی (۹.۲.۳)، داریم

$$d(a, y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{a}) \leq \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 1$$

و

$$d(y, x) \leq d((m + 1, m + 2), (\gamma, \delta)) \leq \lceil \frac{2-1}{r} \rceil + 1 = 2.$$

بنابراین

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x) \leq \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 1 + 2 = \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 3.$$

۳. حالت اول: فرض کنیم $s \geq 2$ و $\{m + 1, m + 2\} \cap supp(\tilde{x}) \neq \emptyset$. در این صورت داریم

$$|\Omega \setminus (supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x}) \cup \{m+۱, m+۲\})| \geq$$

$$۲m+۲+r-(m+m+۲-(s+۰|supp(\tilde{x}) \cap \{m+۱, m+۲\}|)+۰)$$

$$= ۲m+۲+r-(۲m+۲-s-|supp(\tilde{x}) \cap \{m+۱, m+۲\}|)$$

$$= r+s+|supp(\tilde{x}) \cap \{m+۱, m+۲\}| \geq ۲+s \geq ۴.$$

لذا می‌توانیم α و β را طوری در نظر بگیریم که

$$\{\alpha, \beta\} \subseteq \Omega \setminus (supp(\tilde{a}) \cup supp(\tilde{x})) \cup \{m+۱, m+۲, \gamma, \delta\}.$$

قرار می‌دهیم $y = \tilde{a}(\alpha\beta)$ و $z = \tilde{x}(\alpha\beta)$. لذا داریم $[z,x] = [a,y] = ۱$. با استدلال مشابه و بنابر نتیجه‌ی (۹.۲.۳)، $d(y,z) \leq d(\tilde{x}, \tilde{a}) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱$. بنابراین

$$d(a,x) \leq d(a,y)+d(y,z)+d(z,x) \leq ۱+\lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱ + ۱ = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳.$$

حالت دوم: فرض کنیم $s \geq ۲$ و $\{m+۱, m+۲\} \cap supp(\tilde{x}) = \emptyset$. قرار می‌دهیم

$$y = \tilde{x}(m+۱, m+۲).$$

با استدلال مشابه و بنابر نتیجه‌ی (۹.۲.۳)،

$$d(a,y) \leq d(\tilde{a}, \tilde{x}) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱.$$

و

$$d(y,x) \leq d((m+۱m+۲), (\gamma\delta)) \leq \lceil \frac{۲-۱}{r} \rceil + ۱ = ۲.$$

لذا

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۱ + ۲ = \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳.$$

بنابراین برای هر $x \in X$، $d(a,x) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳$. در نتیجه $diam\mathsf{C}(G,X) \leq \lceil \frac{m-۱}{r} \rceil + ۳$ و حکم ثابت شد.

□

مثال ۱۲.۲.۳. فرض کنید $a = (۱,۲,۳)(۴,۵)$ و $n = ۹$. در این صورت

$$n = ۲m + r + ۲ \Longrightarrow ۹ = ۶ + r + ۲ \Longrightarrow r = ۱.$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی (۱۱.۲.۳)، داریم

$$diam\mathsf{C}(G,X) \leq \left[\frac{۳-۱}{۱}\right] + ۳ = ۲ + ۳ = ۵.$$

همان طور که در جدول (۱.۳) می‌بینیم، $diam\mathsf{C}(G,X) = ۵$. لذا نتایج به دست آمده از برنامه نویسی مگما [۱] در قضیه‌ی (۱۱.۲.۳) صدق می‌کند.

۳.۳ قطر گراف جابجایی روی رده‌ی تزویج عناصر مرتبه‌ی ۳

در این بخش، که از مرجع [۱۵] آورده‌ایم، قطر گراف جابجایی $\mathsf{C}(G,X)$ را بررسی می‌کنیم که G گروه متقارن و X رده‌ی تزویج عناصر مرتبه‌ی ۳ در G است.

فرض می‌کنیم $G = Sym(\Omega)$ که $\Omega = \{۱,۲,\ldots,n\}$. G به طور طبیعی روی Ω عمل می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم $t = (۱,۲,۳)(۴,۵,۶)\ldots(۳r-۲,۳r-۱,۳r)$. لذا t دارای مرتبه‌ی ۳ و ساختار دوری $۱^{n-۳r}۳^{r}$ است. قرار می‌دهیم $X = t^G$. بنابر قضیه‌ی ۲ در [۹]، گراف جابجایی $\mathsf{C}(G,X)$ همبند است.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید $n \geq ۸r$، در این صورت $diam\mathsf{C}(G,X) = ۲$.

[۱] MAGMA.

برهان. فرض کنیم $x \in X$، $\Lambda = supp(t) \cup supp(x)$ و $s = |supp(x) \cap supp(t)|$ باشد. در این صورت

$$|\Lambda| = |supp(t) \cup supp(x)| = |supp(t)| + |supp(x)| - |supp(x) \cap supp(t)|$$
$$= ۳r + ۳r - s = ۶r - s.$$

اگر $s \geq r$، آنگاه $|\Lambda| \leq ۵r$ و درنتیجه $|\Omega \setminus supp(t) \cup supp(x)| \geq ۳r$. بنابراین $y \in X$ وجود دارد که $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset = supp(t) \cap supp(y)$. لذا $\{t, y, x\}$ یک مسیر در $\mathcal{C}(G, X)$ است. بنابراین

$$d(t, x) \leq d(t, y) + d(y, x) = ۱ + ۱ = ۲.$$

حال فرض می‌کنیم $s < r$ و قرار می‌دهیم $e = r - s$. چون $supp(t) = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳r - ۲, ۳r - ۱, ۳r\}$ و $supp(t) \cap supp(x) \subseteq supp(t)$، s دور را بدون از دست رفتن کلیت، از $۳s$ عنصر اول انتخاب می‌کنیم. لذا

$$supp(t) \cap supp(x) \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots, ۳s - ۲, ۳s - ۱, ۳s\}.$$

قرار می‌دهیم

$$y_۱ = (۳s + ۱, ۳s + ۲, ۳s + ۳) \ldots (۳r - ۲, ۳r - ۱, ۳r).$$

بنابراین $y_۱$ به‌صورت حاصلضرب e دور آخر t است که هرکدام به طول ۳ هستند. لذا $supp(x) \cap supp(y_۱) = \emptyset$. چون $r > s$ داریم:

$$|\Omega \setminus \Lambda| = |\Omega| - |\Lambda| \geq ۸r - ۶r + s = ۲r + s > ۳s.$$

بنابراین می‌توانیم $y_۲$ را طوری انتخاب کنیم که $supp(y_۲) \subseteq \Omega \setminus \Lambda$ و $y_۲$ حاصلضرب s دور دو به دو مجزا به طول ۳ باشد. درنتیجه $y_۱y_۲$ حاصلضرب $r = s + r - s$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ است. لذا $y = y_۱y_۲ \in X$، $ty = ty_۱y_۲ = y_۱ty_۲ = y_۱y_۲t = yt$ و $xy = xy_۱y_۲ = y_۱xy_۲ = y_۱y_۲x = yx$. بنابراین

$$d(t, x) \leq d(t, y) + d(y, x) = ۱ + ۱ = ۲.$$

لذا $diam\mathfrak{C}(G,X) \leq ۲$. از طرفی X ناآبلی است پس $diam\mathfrak{C}(G,X) \geq ۲$. درنتیجه $diam\mathfrak{C}(G,X) = ۲$. □

مثال ۲.۳.۳. همان طور که در جدول (۲.۳) می‌بینیم. اگر $r = ۱$ باشد، آنگاه برای $n = ۸$ و $n = ۹$، داریم $diam\mathfrak{C}(G,X) = ۲$. همچنین اگر $r = ۲$ باشد، آنگاه برای $n = ۱۶$ نیز $diam\mathfrak{C}(G,X) = ۲$. لذا نتایج به دست آمده از برنامه نویسی مگما در قضیه‌ی (۱.۳.۳) صدق می‌کند.

فرض می‌کنیم $|\Omega| \geq ۶r$. برای $x \in X$، فرض کنیم $\{\nu_i(x)\}_{i=۱,\ldots,r}$ مجموعه‌ی مدارهای $< x >$ روی Ω باشد. لذا هر مدار دارای اندازه‌ی ۳ است و $supp(x) = \cup_{i=۱}^{r}\nu_i(x)$. قرار می‌دهیم $t = t_۱t_۲\ldots t_r$ که $t_i = (۳i-۲, ۳i-۱, ۳i)$. بنابراین $\nu(t_i) = \nu_i(t) = \{۳i-۲, ۳i-۱, ۳i\}$. حاصلضرب t_i هایی که $\nu_i(t) \cap supp(x) = \emptyset$ را با $\tau_۰$ و حاصلضرب t_i هایی که $\nu_i(t) \subseteq supp(x)$ را با $\tau_۳$ نشان می‌دهیم. $\tau_۱$ را حاصلضرب $r_۱$ دور از t_i ها در نظر می‌گیریم که $r_۱$ بزرگترین عددی باشد که $۳|r_۱$ و $|\nu_i(t) \cap supp(x)| = ۱$ و $\tau_۲$ حاصلضرب $r_۲$ دور از t_i ها است که $r_۲$ بزرگترین عددی است که $۳|r_۲$ و $|\nu_i(t) \cap supp(x)| = ۲$. قرار می‌دهیم $\tau_* = t\tau_۰^{-۱}\tau_۱^{-۱}\tau_۲^{-۱}\tau_۳^{-۱}$ لذا $t = \tau_*\tau_۰\tau_۱\tau_۲\tau_۳$. حال فرض کنیم r_* تعداد t_i ها در τ_*، $r_۰$ تعداد t_i ها در $\tau_۰$ و $r_۳$ تعداد t_i ها در $\tau_۳$ باشد. چون $r_۱$ و $r_۲$ هر دو ماکزیمم هستند و بر ۳ بخش پذیرند. لذا حداکثر دو دور مانند $t_{i_۱}$ و $t_{i_۲}$ داریم که در $\tau_۱$ نیستند و $|\nu_{i_۱}(t) \cap supp(x)| = |\nu_{i_۲}(t) \cap supp(x)| = ۱$. همچنین حداکثر دو دور مانند $t_{j_۱}$ و $t_{j_۲}$ داریم که در $\tau_۲$ نیستند و $|\nu_{j_۱}(t) \cap supp(x)| = |\nu_{j_۲}(t) \cap supp(x)| = ۱$. بنابراین $r_* \leq ۴$. لذا $r = r_* + r_۰ + r_۱ + r_۲ + r_۳$. چون

$$|supp(x) \cap supp(\tau_۰)| = ۰ = ۰r_۰$$

$$|supp(x) \cap supp(\tau_۱)| = r_۱ = ۱r_۱$$

$$|supp(x) \cap supp(\tau_۲)| = ۲ \times r_۲ = ۲r_۲$$

$$|supp(x) \cap supp(\tau_۳)| = ۳ \times r_۳ = ۳r_۳.$$

بنابراین، برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$، $|supp(x) \cap supp(\tau_i)| = ir_i$. فرض کنیم $s_* = |supp(t) \cap supp(\tau_*)|$.
چون τ_* و τ_i ها همگی مجزا هستند لذا،

$$|supp(t) \cap supp(x)| = |supp(\tau_* \tau_۰ \tau_۱ \tau_۲ \tau_۳) \cap supp(x)| =$$

$$| \left(\cup_{i=۱}^{۳} supp(\tau_i) \cap supp(x) \right) \cup (supp(\tau_*) \cap supp(x)) | =$$

$$\Sigma_{i=۱}^{۳} |supp(\tau_i) \cap supp(x)| + |supp(\tau_*) \cap supp(x)| = r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳ + s_*.$$

قرار می‌دهیم $\Lambda = \Omega \setminus (supp(t) \cup supp(x))$. چون

$$|supp(t) \cup supp(x)| = |supp(t)| + |supp(x)| - |supp(t) \cap supp(x)| =$$

$$۳r + ۳r - (s_* + r_۱ ۲r_۲ + ۳r_۳) = ۶r - (s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳).$$

لذا

$$|\Lambda| = |\Omega| - |supp(t) \cup supp(x)| = n - (۶r - (s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳)).$$

اگر $n = ۶r$ آنگاه، $|\Lambda| = s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳$. اگر $n > ۶r$، آنگاه

$$|\Lambda| = |\Omega| - |supp(t) \cup supp(x)| > s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳$$

$$\Longrightarrow |\Lambda| \geq ۱ + s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳.$$

چون $۳|r_۱$، پس می‌توانیم $\tau_۱$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\tau_۱ = \Pi \mu_{i_۱ i_۲ i_۳}$$

که $\mu_{i_۱ i_۲ i_۳} = t_{i_۱} t_{i_۲} t_{i_۳}$ و $t_{i_۱}$، $t_{i_۲}$، $t_{i_۳}$ دورهای دو به دو مجزا به طول ۳ هستند. به ازای هر $\mu_{i_۱ i_۲ i_۳}$، داریم

$$\mu_{i_۱ i_۲ i_۳} = t_{i_۱} t_{i_۲} t_{i_۳} = (۳i_۱ - ۲, ۳i_۱ - ۱, ۳i_۱)(۳i_۲ - ۲, ۳i_۲ - ۱, ۳i_۲)(۳i_۳ - ۲, ۳i_۳ - ۱, ۳i_۳).$$

لذا بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم

$$supp(\mu_{i_1i_2i_3}) \cap supp(x) = \{3i_1 - 2, 3i_2 - 2, 3i_3 - 2\}. \qquad (۲۱.۳)$$

قرار می‌دهیم

$$\lambda_{i_1i_2i_3} = (3i_1 - 2, 3i_2 - 2, 3i_3 - 2)(3i_1 - 1, 3i_2 - 1, 3i_3 - 1)(3i_1, 3i_2, 3i_3).$$

در این صورت $supp(\mu_{i_1i_2i_3}) = supp(\lambda_{i_1i_2i_3})$ و

$$\mu_{i_1i_2i_3}\lambda_{i_1i_2i_3} = (3i_1-2, 3i_2-1, 3i_3)(3i_3-2, 3i_1-1, 3i_2)(3i_2-2, 3i_3-1, 3i_1) = \lambda_{i_1i_2i_3}\mu_{i_1i_2i_3}.$$

حال اگر قرار دهیم

$$\rho_1 = \Pi\lambda_{i_1i_2i_3}.$$

آنگاه ρ_1 با τ_1 جابه‌جا می‌شود و $supp(\rho_1) = supp(\tau_1)$. بنابراین ρ_1 با t جابه‌جا می‌شود و به‌صورت حاصلضرب r_1 دور دو به دو مجزا به طول ۳ است. لذا با استفاده از رابطه‌ی (۲۱.۳)، $\frac{r_1}{3}$ از دورهای به طول ۳ در ρ_1 ساپورتشان مشمول در $supp(x)$ و $\frac{2r_1}{3}$ دورهای به طول ۳ در ρ_1 ساپورتشان دارای اشتراک تهی با $supp(x)$ است.

به طور مشابه چون $3|r_2$، پس می‌توانیم τ_2 را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\tau_2 = \Pi\eta_{j_1j_2j_3}$$

که $\eta_{j_1j_2j_3} = t_{j_1}t_{j_2}t_{j_3}$ و t_{j_1}، t_{j_2}، t_{j_3} دورهای دو به دو مجزا به طول ۳ هستند. برای هر $\eta_{j_1j_2j_3}$، داریم

$$\eta_{j_1j_2j_3} = (3j_1 - 2, 3j_1 - 1, 3j_1)(3j_2 - 2, 3j_2 - 1, 3j_2)(3j_3 - 2, 3j_3 - 1, 3j_3).$$

لذا بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم

$$supp(\eta_{j_1j_2j_3}) \cap supp(x) = \{3j_1 - 2, 3j_1 - 1, 3j_2 - 2, 3j_2 - 1, 3j_3 - 2, 3j_3 - 1\}. \qquad (۲۲.۳)$$

قرار می‌دهیم

$$\delta_{j_۱j_۲j_۳} = (۳j_۱, ۳j_۲, ۳j_۳)(۳j_۱ - ۲, ۳j_۲ - ۲, ۳j_۳ - ۲)(۳j_۱ - ۱, ۳j_۲ - ۱, ۳j_۳ - ۱).$$

در این صورت $supp(\eta_{j_۱j_۲j_۳}) = supp(\delta_{j_۱j_۲j_۳})$ و

$$\delta_{j_۱j_۲j_۳}\eta_{j_۱j_۲j_۳} = (۳j_۱, ۳j_۲ - ۲, ۳j_۳ - ۱)(۳j_۲, ۳j_۳ - ۲, ۳j_۱ - ۱)(۳j_۳, ۳j_۱ - ۲, ۳j_۲ - ۱)$$
$$= \eta_{j_۱j_۲j_۳}\delta_{j_۱j_۲j_۳}.$$

حال فرض می‌کنیم

$$\rho_۲ = \Pi\delta_{j_۱j_۲j_۳}.$$

در این صورت $\rho_۲$ با $\tau_۲$ جابه‌جا می‌شود و $supp(\tau_۲) = supp(\rho_۲)$. بنابراین $\rho_۲$ با t جابه‌جا می‌شود و به‌صورت حاصلضرب $r_۲$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ است. لذا با استفاده از رابطه‌ی (۲۲.۳)، $\frac{۲r_۲}{۳}$ از دورهای به طول ۳ در $\rho_۲$ ساپورتشان مشمول در $supp(x)$ است و $\frac{r_۲}{۳}$ از دورهای به طول ۳ در $\rho_۲$ ساپورتشان دارای اشتراک تهی با $supp(x)$ است.

اکنون فرض می‌کنیم $\sigma_۱$ (به همین ترتیب $\sigma_۲$) حاصلضرب $\frac{۲r_۱}{۳}$ (به همین ترتیب $\frac{r_۲}{۳}$) دور به طول ۳ در $\rho_۱$ (به همین ترتیب در $\rho_۲$) باشد که ساپورتشان دارای اشتراک تهی با $supp(x)$ است. همچنین فرض می‌کنیم $\sigma_۴$ حاصلضرب $(r_۳ + \frac{۲r_۲}{۳} + \frac{r_۱}{۳})$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ باشد به طوری که $supp(\sigma_۴) \subseteq \Lambda$ و قرار می‌دهیم $\Delta = \Lambda \setminus supp(\sigma_۴)$.

حال ویژگی‌های مربوط به جایگشت‌های معرفی شده را در لم زیر بیان می‌کنیم.

لم ۳.۳.۳. فرض کنید $\tau_۰$، $\tau_۳$، $\rho_۱$، $\rho_۲$، $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، $\sigma_۴$ و t جایگشت‌های تعریف شده در بالا باشند. در این صورت برای جایگشت‌های $\tau_۰\rho_۱\rho_۲\tau_۳$ و $\sigma_۱\sigma_۲\tau_۰\sigma_۴$ داریم:

الف) $\tau_۰\rho_۱\rho_۲\tau_۳$ با t جابه‌جا می‌شود، به صورت حاصلضرب $r - r_*$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ است و $supp(\tau_۰\rho_۱\rho_۲\tau_۳) \subseteq supp(t)$.

ب) $\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4$ با $\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$ جابه‌جا می‌شود، به صورت حاصلضرب $r-r_*$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ است و $supp(\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4)\cap supp(x)=\emptyset$.

ج) اگر $n=6r$، آنگاه $s_*=|\Delta|$، و اگر $n>6r$، آنگاه $|\Delta|\geq 1+s_*$.

برهان. الف) چون τ_1 و τ_2 مجزا هستند و $supp(\rho_1)=supp(\tau_1)$ و $supp(\rho_2)=supp(\tau_2)$. لذا

$$supp(\rho_1\rho_2)=supp(\rho_1)\cup supp(\rho_2)=supp(\tau_1)\cup supp(\tau_2)=supp(\tau_1\tau_2).$$

بنابراین

$$supp(\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3)=supp(\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3)\subseteq supp(t).$$

همچنین $\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$ حاصلضرب دورهای دو به دو مجزا به طول ۳ است که تعداد این دورها

$$r-r_*=r_0+r_1+r_2+r_3$$

می‌باشد. چون ρ_1 و ρ_2 با t جابه‌جا می‌شوند. بنابراین $\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$ با t جابه‌جا می‌شود.

ب) همان طور که در بالا گفتیم

$$supp(\sigma_4)\subseteq\Lambda=\Omega\setminus supp(t)\cup supp(x).$$

لذا $supp(\sigma_4)\cap supp(t)=\emptyset$. بنابراین با توجه به قسمت (الف)، $supp(\sigma_4)\cap supp(\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3)=\emptyset$. لذا σ_4 با $\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$ جابه‌جا می‌شود. در نتیجه با توجه به تعریف σ_1 و σ_2، $\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4$ با $\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$ جابه‌جا می‌شود. همچنین $\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4$ به‌صورت حاصلضرب

$$\frac{2r_1}{3}+\frac{r_2}{3}+r_0+(\frac{r_1}{3}+\frac{2r_2}{3}+r_3)=r_0+r_1+r_2+r_3=r-r_*.$$

دور دو به دو مجزا به طول ۳ است. با توجه به تعریف τ_0، σ_1، σ_2 و σ_4 داریم:

$$supp(\tau_0)\cap supp(x)=supp(\sigma_1)\cap supp(x)=supp(\sigma_2)\cap supp(x)$$
$$=supp(\sigma_4)\cap supp(x)=\emptyset.$$

لذا $supp(\sigma_۱\sigma_۲\tau_۰\sigma_۴) \cap supp(x) = \emptyset$.

ج) اگر $n = ۶r$، آنگاه

$$|\Delta| = |\Lambda| - |supp(\sigma_۴) \cap \Lambda| = |\Lambda| - |supp(\sigma_۴)|$$

$$= s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳ - ۳(\frac{r_۱}{۳} + \frac{۲r_۲}{۳} + r_۳) = s_*.$$

اگر $n > ۶r$، آنگاه

$$|\Delta| = |\Lambda| - |supp(\sigma_۴) \cap \Lambda| = |\Lambda| - |supp(\sigma_۴)|$$

$$\geq ۱ + s_* + r_۱ + ۲r_۲ + ۳r_۳ - ۳(\frac{r_۱}{۳} + \frac{۲r_۲}{۳} + r_۳) = ۱ + s_*.$$

□

لم ۴.۳.۳. فرض کنید $t = t_۱t_۲ \ldots t_r$، که برای هر i، $۱ \leq i \leq r$، t_i ها دورهایی به طول ۳ هستند. در این صورت

$$C_G(t) \cong (Sym(r) \ltimes (< t_۱ > \times < t_۲ > \times \ldots \times < t_r >)) \times Sym(n - ۳r).$$

برهان. فرض کنیم

$$F = \{\sigma \in S_n | \sigma t = t\sigma, \sigma(i) = i, i > ۳r\}$$

و

$$L = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i, ۱ \leq i \leq ۳r\}.$$

در این صورت $F = C_{S_{۳r}}(t)$، $L = Sym(n - ۳r)$ و $F \cap L = ۱$. لذا $F, L \trianglelefteq C_G(t)$ و در نتیجه $FL \leqslant C_G(t)$. قرار می‌دهیم $D = \{t_۱, t_۲, \ldots, t_r\}$ و $H = \{\sigma \in F | \sigma(t_i) = t_j, ۱ \leq i, j \leq r\}$. لذا $H = Sym(r)$. چون F با تزویج روی D عمل می‌کند، لذا هسته‌ی این عمل به صورت زیر است:

$$Ker(\varphi) = \{\sigma \in F | \sigma(t_i) = t_i, ۱ \leq i \leq r\}$$

که

$$\varphi : F \times D \longrightarrow D$$

$$(\sigma, t_i) \longmapsto t_i^{\sigma}.$$

قرار می‌دهیم $K = Ker(\varphi)$. در این صورت $K \trianglelefteq F$ و $H \cap K = ۱$.

$$Ker(\varphi) = \{\sigma \in F | \sigma(t_i) = t_i, ۱ \leq i \leq r\}$$

با استفاده از لم (۱.۲.۳)، داریم

$$Ker(\varphi) = \left\{\sigma \in F | \sigma = {t_i}^k \beta, ۱ \leq k \leq ۳, \forall ۱ \leq i \leq r \quad supp(\beta) \cap supp(t_i) = \emptyset\right\}$$

چون F، $i > ۳r$ را ثابت نگه می‌دارد، پس $\beta = Id$. لذا

$$K = < t_۱ > \times < t_۲ > \times \ldots \times < t_r > .$$

حال با استفاده از قضیه‌ی مدار-پایدار ساز داریم:

$$|S_{۳r} : C_{S_{۳r}}(t)| = |Cl_{S_{۳r}}(t)| \Longrightarrow |C_{S_{۳r}}(t)| = \frac{|S_{۳r}|}{|t^{S_{۳r}}|}.$$

و چون همه‌ی جایگشت‌های با ساختار دوری یکسان با هم مزدوج هستند. لذا داریم

$$|C_{S_{۳r}}(t)| = \frac{(۳r)!}{\frac{۳r \times (۳r-۱) \times \ldots \times ۱}{۳^r r!}} = ۳^r r!.$$

همچنین داریم:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{r! ۳^r}{۱} = ۳^r r!.$$

بنابراین $|HK| = |C_{S_{3r}}(t)| = |F|$ و چون $HK \leqslant F$، لذا $F = HK$ و در نتیجه $F = H \times K$. از طرفی S_n روی خودش با تزویج عمل می‌کند، لذا بنابر قضیه‌ی مدار پایدار ساز با استدلالی مشابه بالا داریم:

$$|C_G(t)| = \frac{|S_n|}{|t^G|} = \frac{n!}{\frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-3r+1)}{3^r r!}} = 3^r r!(n-3r)!$$

و نیز داریم:

$$|FL| = \frac{|F||L|}{|F \cap L|} = \frac{3^r r!(n-3r)!}{1} = 3^r r!(n-3r)!$$

بنابراین $|C_G(t)| = |FL|$. چون $FL \leqslant C_G(t)$، پس $C_G(t) = FL$. در نتیجه $C_G(t) = F \times L$. لذا

$$C_G(t) = F \times L = (H \ltimes K) \times L$$

$$= (Sym(r) \ltimes (< t_1 > \times < t_2 > \times \ldots \times < t_r >)) \times Sym(n-3r).$$

□

قضیه ۵.۳.۳. اگر $6r < n < 8r$، آنگاه $diam\mathfrak{C}(G, X) \leq 3$.

برهان. فرض کنیم $x \in X$. می‌خواهیم ثابت کنیم $d(t, x) \leq 3$. با استفاده از لم (۴.۳.۳)، بدون از دست رفتن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $\tau_* = t_1 \ldots t_{r_*}$ که ($r_* = 0$ به این معنی است که $\tau_* = 1$). بسته به τ_* دو عنصر ρ_* و σ_* را طوری تعریف می‌کنیم که به‌صورت حاصلضرب r_* دور دو به دو مجزا به طول ۳ باشند. همان طور که در توضیحات ابتدای بخش دیدیم، $0 \leq r_* \leq 4$. بنابراین برای جایگشت τ_* پنج حالت داریم که به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت۱) $r_* = 4$:

در این صورت $\tau_* = t_1t_2t_3t_4 = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)$. لذا $s_* = 2\times 2 + 2 \times 1 = 6$. بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(\tau_*) \cap supp(x) = \{1,4,7,8,10,11\}$. چون x و t دارای ساختار دوری یکسان هستند، پس حداقل ۶ نقطه در $supp(x)$ هست که در $supp(t)$ نیست. لذا

$$|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۶.$$

همچنین با استفاده از قسمت (ج) لم (۳.۳.۳)، $|\Delta| \geq ۱ + s_* = ۱ + ۶ = ۷$. بنابراین با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴, \alpha_۵, \alpha_۶ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳, \beta_۴, \beta_۵, \beta_۶ \in \Delta$، می‌توانیم ρ_* و σ_* را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\alpha_۴, \alpha_۵, \alpha_۶)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶)$$

$$\sigma_* = (۲, ۳, ۵)(۶, ۹, ۱۲)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶).$$

حالت۲) $r_* = ۳$:

در این صورت $\tau_* = t_۱, t_۲, t_۳ = (۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۷, ۸, ۹)$. لذا $s_* = ۲ \times ۱ + ۲ = ۴$ یا $s_* = ۲ \times ۲ + ۱ = ۵$. اگر $s_* = ۴$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱, ۴, ۷, ۸\}$. بنابراین $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۵$. همچنین بنابر قسمت (ج) لم (۳.۳.۳)، $|\Delta| \geq ۱ + s_* = ۵$. در نتیجه با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴, \alpha_۵ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳, \beta_۴, \beta_۵ \in \Delta$، تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\alpha_۴, \alpha_۵, \beta_۱)(\beta_۲, \beta_۳, \beta_۴)$$

$$\sigma_* = (۲, ۳, ۵)(۶, ۹, \beta_۵)(\beta_۲, \beta_۳, \beta_۴).$$

اگر $s_* = ۵$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، قرار می‌دهیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۷\}$. بنابراین $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۴$ و $|\Delta| \geq ۱ + s_* = ۶$. لذا با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶ \in \Delta$ داریم

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶)$$

$$\sigma_* = (۳,۶,۸)(beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)((\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶)).$$

حالت۳) $r_* = ۲$:

در این صورت $\tau_* = t_۱, t_۲ = (۱,۲,۳)(۴,۵,۶)$. لذا $s_* = ۲ \times ۲ = ۴$، $s_* = ۲ \times ۱ + ۱ \times ۱ = ۳$ یا $s_* = ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ = ۲$. اگر ۳ یا ۲ $= s_*$ باشد، آنگاه $|supp(\tau_*) \setminus supp(x)| \geq ۳$، همچنین $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۳$ و $|\Delta| \geq ۱ + s_* \geq ۳$. بنابراین با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in supp(x) \setminus supp(t)$، $\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳ \in supp(t) \setminus supp(x)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳ \in \Delta$ تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)$$

$$\sigma_* = (\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳).$$

اگر $s_* = ۴$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، قرار می‌دهیم $supp(\tau_*) \cap supp(x) = \{۱,۲,۴,۵\}$. چون $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۲$ و $|\Delta| \geq ۱ + s_* = ۵$. بنابراین با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳\beta_۴, \beta_۵ \in \Delta$، تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \beta_۱)(\beta_۲, \beta_۳\beta_۴)$$

$$\sigma_* = (۳,۶,\beta_۵)(\beta_۲, \beta_۳\beta_۴).$$

حالت۴) $r_* = ۱$:

در این صورت $\tau_* = t_۱ = (۱,۲,۳)$. لذا ۲ یا ۱ $= s_*$. اگر $s_* = ۱$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، قرار می‌دهیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱\}$. بنابراین $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۲$ و $\Delta \geq ۱ + s_* = ۲$. با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲ \in \Delta$ تعریف می‌کنیم $\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \beta_۱)$ و $\sigma_* = (۲,۳,\beta_۲)$. اگر $s_* = ۲$ باشد، آنگاه $|\Delta| \geq ۱ + s_* = ۳$. بنابراین با انتخاب $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳ \in \Delta$ می‌توانیم تعریف کنیم $\rho_* = \sigma_* = (\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)$.

حالت۵) $r_* = 0$:

در این صورت $\tau_* = 1$. بنابراین تعریف می‌کنیم $\sigma_* = 1 = \tau_*$.

قرار می‌دهیم $y = \rho_*\tau_0\rho_1\rho_2\tau_3$. چون y حاصلضرب $r = r_*+r_0+r_1+r_2+r_3$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ است، بنابراین $y \in X$. به علاوه $supp(\rho_*) \subseteq (supp(x) \setminus supp(t)) \cup \Delta$. لذا $supp(\rho_*) \cap supp(t) = \emptyset$. بنابراین ρ_* با t جابه‌جا می‌شود و درنتیجه با استفاده از قسمت (الف) لم (۳.۳.۳)، $ty = yt$. قرار می‌دهیم $z = \sigma_*\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4$. با توجه به تعریف σ_* در حالت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵)، $supp(\sigma_*) \subseteq \Delta \cup (supp(\tau_*) \setminus supp(x))$. بنابراین $supp(\sigma_*) \cap supp(\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4) = \emptyset$. بنابر تعریف، σ_*، σ_1، σ_2، τ_0 و σ_4، همگی دو به دو مجزا هستند. چون σ_1، σ_2 و σ_4 به ترتیب، حاصلضرب $\frac{2r_1}{3}$، $\frac{r_2}{3}$ و $(\frac{r_1}{3} + \frac{2r_2}{3} + r_3)$ دور دو به دو مجزا به طول ۳ هستند. لذا z به صورت حاصلضرب

$$r_* + \frac{2r_1}{3} + \frac{r_2}{3} + r_0 + (\frac{r_1}{3} + \frac{2r_2}{3} + r_3) = r_* + r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = r$$

دو به دو مجزا به طول ۳ است. بنابراین $z \in X$. با توجه به حالت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵)، ρ_* و σ_* با هم جابه‌جا می‌شوند. لذا بنابر قسمت (ب) لم (۳.۳.۳)، $zy = yz$ و همچنین $supp(\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4) \cap supp(x) = \emptyset$. چون $supp(\sigma_*) \cap supp(x) = \emptyset$ لذا

$$supp(x) \cap (supp(\sigma_*) \cup supp(\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4)) = \emptyset \Rightarrow supp(x) \cap supp(\sigma_*\sigma_1\sigma_2\tau_0\sigma_4) = \emptyset \Rightarrow$$

$$supp(x) \cap supp(z) = \emptyset \Rightarrow xz = zx.$$

بنابراین

$$d(t,x) \leq d(t,y) + d(y,z) + d(z,x) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow diam\mathfrak{C}(G,X) \leq 3$$

و این حکم را ثابت می‌کند. □

مثال ۶.۳.۳. با توجه به جدول (۲.۳)، برای $r = 1$ و $n = 7$ یا $r = 2$ و $n = 15$، داریم $diam\mathfrak{C}(G,X) = 3$. لذا نتایج به دست آمده از برنامه نویسی مگما در قضیه‌ی (۵.۳.۳) صدق می‌کند.

لم‌های زیر را برای $n = ۶r$ ثابت می‌کنیم:

لم ۷.۳.۳. فرض کنید $t = (۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)$ (بنابراین $r = ۲$ و $n = ۱۲$)، در این صورت

الف) اگر $x = (۱, ۷, ۸)(۸, ۹, ۱۰)$ یا $x = (۱, ۴, ۷)(۲, ۵, ۸)$، آنگاه $d(t, x) \leq ۴$.

ب) اگر $x = (۱, ۴, ۷)(۸, ۹, ۱۰)$، آنگاه $d(t, x) \leq ۳$.

برهان. الف) ابتدا فرض می‌کنیم $x = (۱, ۷, ۸)(۴, ۹, ۱۰)$. در این صورت قرار می‌دهیم $x_۱ = (۷, ۸, ۱۱)(۹, ۱۰, ۱۲)$، $x_۲ = (۲, ۳, ۵)(۹, ۱۰, ۱۲)$ و $x_۳ = (۲, ۳, ۵)(۱, ۷, ۸)$. چون ساختار دوری $x_۱$،$x_۲$ و $x_۳$ مشابه ساختار دوری t است، لذا $x_۱, x_۲, x_۳ \in X$. همچنین داریم

$$tx_۱ = [(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)] [(۷, ۸, ۱۱)(۹, ۱۰, ۱۲)] = x_۱t$$

$$x_۱x_۲ = [(۷, ۸, ۱۱)(۹, ۱۰, ۱۲)] [(۲, ۳, ۵)(۹, ۱۰, ۱۲)] = x_۲x_۱$$

$$x_۲x_۳ = [(۲, ۳, ۵)(۹, ۱۰, ۱۲)] [(۲, ۳, ۵)(۱, ۷, ۸)] = x_۳x_۲$$

$$x_۳x = [(۲, ۳, ۵)(۱, ۷, ۸)] [(۱, ۷, ۸)(۴, ۹, ۱۰)] = xx_۳.$$

بنابراین $\{t, x_۱, x_۲, x_۳, x\}$ یک مسیر در $\mathcal{C}(G, X)$ است. لذا

$$d(t, x) \leq d(t, x_۱) + d(x_۱, x_۲) + d(x_۲, x_۳) + d(x_۳, x) = ۴.$$

حال فرض می‌کنیم $x = (۱, ۴, ۷)(۲, ۵, ۸)$. در این صورت قرار می‌دهیم $x_۱ = (۷, ۸, ۹)(۱۰, ۱۱, ۱۲)$، $x_۲ = (۱, ۳, ۶)(۱۰, ۱۱, ۱۲)$ و $x_۳ = (۲, ۵, ۸)(۱۰, ۱۱, ۱۲)$. با استدلال مشابه بالا $x_۱, x_۲, x_۳ \in X$. همچنین داریم

$$tx_۱ = [(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)] [(۷, ۸, ۹)(۱۰, ۱۱, ۱۲)] = x_۱t$$

$$x_۱x_۲=[(۷,۸,۹)(۱۰,۱۱,۱۲)]\,[(۱,۳,۶)(۱۰,۱۱,۱۲)]=x_۲x_۱$$

$$x_۲x_۳=[(۱,۳,۶)(۱۰,۱۱,۱۲)]\,[(۲,۵,۸)(۱۰,۱۱,۱۲)]=x_۳x_۲$$

$$x_۳x=[(۲,۵,۸)(۱۰,۱۱,۱۲)]\,[(۱,۴,۷)(۲,۵,۸)]=xx_۳.$$

لذا $\{t,x_۱,x_۲,x_۳,x\}$ یک مسیر در $\mathcal{C}(G,X)$ است. درنتیجه

$$d(t,x)\leq d(t,x_۱)+d(x_۱,x_۲)+d(x_۲,x_۳)+d(x_۳,x)=۴.$$

ب) قرار می‌دهیم $x_۱=(۱,۲,۳)(۸,۹,۱۰)$ و $x_۲=(۵,۶,۱۱)(۸,۹,۱۰)$. در این صورت

$$tx_۱=[(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)]\,[(۱,۲,۳)(۸,۹,۱۰)]=x_۱t$$

$$x_۱x_۲=[(۱,۲,۳)(۸,۹,۱۰)]\,[(۵,۶,۱۱)(۸,۹,۱۰)]=x_۲x_۱$$

$$x_۲x=[(۵,۶,۱۱)(۸,۹,۱۰)]\,[(۱,۴,۷)(۸,۹,۱۰)]=xx_۲.$$

بنابراین

$$d(t,x)\leq d(t,x_۱)+d(x_۱,x_۲)+d(x_۲,x)=۳.$$

□

لم ۸.۳.۳. فرض کنید $t=(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)(۷,۸,۹)$ (بنابراین $r=۳$ و $n=۱۸$) و $\tau_*=(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)$. همچنین فرض کنید $x\in X$ به گونه‌ای باشد که $supp(\tau_*)\cap supp(x)=\{۱,۴\}$ و ۱ و ۴ در دو دور متفاوت به طول ۳ از x قرار داشته باشند. در این صورت $d(t,x)\leq ۴$.

برهان. فرض می‌کنیم $x=(۱,*,*)(۴,\delta,\varepsilon)(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، که $\{۱,۴\}\cap\{\alpha,\beta,\gamma\}=\emptyset$. چون $\tau_*=(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)$، لذا $\{۷,۸,۹\}$ یا $supp(x)\cap\{۷,۸,۹\}=\emptyset$. بنابراین

$$supp(t) \cap supp(x) = \{۱, ۴\} \text{ یا } \{۱, ۴, ۷, ۸, ۹\}.$$

اگر $supp(t) \cap supp(x) = \{۱, ۴\}$. آنگاه با توجه به تعریف x، $\{\alpha, \beta, \gamma\} \notin ۴, ۵, ۶$. قرار می‌دهیم $x_۱ = (۱, ۲, ۳)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)$ و $x_۲ = (۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)$. در این صورت داریم

$$tx_۱ = [(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۷, ۸, ۹)]\,[(۱, ۲, ۳)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)] = x_۱t.$$

چون ۱ و ۴ نمی‌توانند در یک دور یکسان از x قرار گیرند و $۲, ۳ \notin supp(x)$. پس

$$x_۱x_۲ = [(۱, ۲, ۳)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)]\,[(۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)] = x_۲x_۱.$$

همچنین چون $\{۷, ۸, ۹\} \subseteq supp(t) \setminus supp(x)$. پس $* \notin \{۷, ۸, ۹\}$. لذا

$$x_۲x = [(۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)(۷, ۸, ۹)]\,[(۱, *, *)(۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)] = xx_۲.$$

بنابراین

$$d(t, x) \leq d(t, x_۱) + d(x_۱, x_۲) + d(x_۲, x) = ۳.$$

حال اگر $supp(x) \cap supp(t) = \{۱, ۴, ۷, ۸, ۹\}$ باشد، آنگاه

$$|supp(t) \cup supp(x)| = |supp(t)| + |supp(x)| - |supp(t) \cap supp(x)| = ۹ + ۹ - ۵ = ۱۳.$$

بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(x) \setminus supp(t) = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}$. در این صورت

$$۱۶, ۱۷, ۱۸ \in \Lambda.$$

حال قرار می‌دهیم $x_۱ = (۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۱۶, ۱۷, ۱۸)$ ، $x_۲ = (۱, ۲, ۳)(\alpha, \beta, \gamma)(۱۶, ۱۷, ۱۸)$ و $x_۳ = (۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)(۱۶, ۱۷, ۱۸)$. در این صورت داریم

$$tx_۱ = [(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۷, ۸, ۹)]\,[(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۱۶, ۱۷, ۱۸)] = x_۱t.$$

$$x_۱x_۲ = [(۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۱۶, ۱۷, ۱۸)]\,[(۱, ۲, ۳)(\alpha, \beta, \gamma)(۱۶, ۱۷, ۱۸)] = x_۲x_۱.$$

همچنین ۱ و ۴ با هم در یک دور قرار نمی‌گیرند و $۲,۳ \notin supp(x)$. لذا

$$x_۲x_۳ = [(۱,۲,۳)(\alpha,\beta,\gamma)(۱۶,۱۷,۱۸)]\,[(۴,\delta,\varepsilon)(\alpha,\beta,\gamma)(۱۶,۱۷,۱۸)] = x_۳x_۲.$$

بنابراین

$$d(t,x) \le d(t,x_۱) + (x_۱,x_۲) + d(x_۲,x_۳) + d(x_۳,x) = ۴.$$

و این اثبات را تمام می‌کند. □

لم ۹.۳.۳. فرض کنید $t = (۱,۲,۳)(۴,۵,۶)$، (یعنی $r = ۲$) و $\tau_* = (۱,۲,۳)$. همچنین فرض کنید $x = (۱,*,*)(۲,*,*)$، به طوری که $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱,۲\}$. در این صورت $d(t,x) \le ۳$.

برهان. چون $\tau_* = (۱,۲,۳)$ پس $\{۴,۵,۶\}$ یا $supp(x) \cap \{۴,۵,۶\} = \emptyset$. بنابراین

$$supp(x) \cap supp(t) = \{۱,۲\} \text{ یا } \{۱,۲,۴,۵,۶\}.$$

اگر $supp(x) \cap supp(t) = \{۱,۲\}$ باشد، آنگاه

$$|\Omega \setminus (supp(t) \cup supp(x))| = |\Omega| - |supp(t) \cup supp(x)| =$$

$$n - (|supp(t)| + |supp(x)| - |supp(t) \cap supp(x)|) = ۱۲ - (۶ + ۶ - ۲) = ۲.$$

بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $\Omega \setminus (supp(t) \cup supp(x)) = \{۱۱,۱۲\}$. لذا قرار می‌دهیم $x_۱ = (۴,۵,۶)(۱۰,۱۱,۱۲)$ و $x_۲ = (۴,۵,۶)(\alpha,\beta,\gamma)$ که (α,β,γ) دوری به طول ۳ است و شامل ۱۰ نیست. بنابراین داریم:

$$tx_۱ = [(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)]\,[(۴,۵,۶)(۱۰,۱۱,۱۲)] = x_۱t$$

$$x_۱x_۲ = [(۴,۵,۶)(۱۰,۱۱,۱۲)]\,[(۴,۵,۶)(\alpha,\beta,\gamma)] = x_۲x_۱$$

$$x_۲x = [(۴,۵,۶)(\alpha,\beta,\gamma)]\,[(۱,*,*)(۲,*,*)] = xx_۲.$$

در نتیجه

$$d(t,x) \leq d(t,x_۱) + d(x_۱,x_۲) + d(x_۲x) = ۳.$$

اگر $supp(t) \cap supp(x) = \{۱,۲,۴,۵,۶\}$ باشد، آنگاه

$$|\Omega \setminus (supp(t) \cup supp(x))| = ۱۲ - (۶+۶-۵) = ۵.$$

لذا بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $\Omega \setminus (supp(t) \cup supp(x)) = \{۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$. در این صورت قرار می‌دهیم $x_۱ = (۸,۹,۱۰)(۷,۱۱,۱۲)$ و $x_۲ = (۸,۹,۱۰)(\alpha,\beta,\gamma)$ که (α,β,γ) دوری به طول ۳ است و شامل ۷ نیست. بنابراین داریم:

$$tx_۱ = [(۱,۲,۳)(۴,۵,۶)]\,[(۸,۹,۱۰)(۷,۱۱,۱۲)] = x_۱t$$

$$x_۱x_۲ = [(۸,۹,۱۰)(۷,۱۱,۱۲)]\,[(۸,۹,۱۰)(\alpha,\beta,\gamma)] = x_۲x_۱$$

$$x_۲x = [(۸,۹,۱۰)(\alpha,\beta,\gamma)]\,[(۱,*,*)(۲,*,*)] = xx_۲.$$

درنتیجه

$$d(t,x) \leq d(t,x_۱) + d(x_۱,x_۲) + d(x_۲x) = ۳.$$

لذا حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۰.۳.۳. اگر $r > ۱$ و $n = ۶r$، آنگاه $diam\mathfrak{C}(G,X) \leq ۴$.

برهان. فرض کنیم $x \in X$، نشان می‌دهیم $d(t,x) \leq ۴$. با روندی مشابه اثبات قضیه‌ی قبل جایگشت‌های ρ_*، σ_* و ζ_* را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که هر یک از آن‌ها حاصلضرب r_* دور دو به دو مجزا به طول ۳ باشند. چون $۰ \leq r_* \leq ۴$. بنابراین برای جایگشت τ_*، پنج حالت داریم که به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت۱) $r_* = ۴$:

در این صورت $\tau_* = t_۱t_۲t_۳t_۴ = (۱,۲,۳)(۴,۵,۶)(۷,۸,۹)(۱۰,۱۱,۱۲)$. لذا

$$s_* = |supp(x) \cap supp(\tau_*)| = ۲ \times ۱ + ۲ \times ۲ = ۶.$$

بنابراین، بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(\tau_*) \cap supp(x) = \{۱, ۴, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱\}$. در این صورت $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۶$. به علاوه بنابر قسمت (ج) لم (۳.۳.۳)، $\Delta = s_* = ۶$. بنابراین با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴, \alpha_۵, \alpha_۶ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳, \beta_۴, \beta_۵, \beta_۶ \in \Delta$ تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\alpha_۴, \alpha_۵, \alpha_۶)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶)$$

$$\sigma_* = (۲, ۳, ۵)(۶, ۹, ۱۲)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\beta_۴, \beta_۵, \beta_۶).$$

حالت۲) $r_* = ۳$:

در این صورت $\tau_* = t_۱t_۲t_۳ = (۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)(۷, ۸, ۹)$. لذا ۵ یا $s_* = ۴$. اگر $s_* = ۴$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، قرار می‌دهیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱, ۴, ۷, ۸\}$. در این صورت $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۵$. به علاوه با استفاده از قسمت (ج) لم (۳.۳.۳)، $|\Delta| = s_* = ۴$. درنتیجه با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳ \in \Delta$، تعریف می‌کنیم:

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(۱۲۳)$$

$$\sigma_* = (۵, ۶, ۹)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(۱۲۳)$$

$$\zeta_* = (۵, ۶, ۹)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\alpha, \beta, \gamma)$$

که (α, β, γ) دوری به طول ۳ در x است، $۱ \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$ و $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cap supp(\sigma_*) = \emptyset$. اگر $s_* = ۵$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱, ۴, ۵, ۷, ۸\}$. در این صورت $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۴$ به علاوه $|\Delta| = s_* = ۵$. لذا با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in supp(x) \setminus supp(t)$ و $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳ \in \Delta$. تعریف می‌کنیم:

$$\rho_* = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(۴, ۵, ۶)$$

$$\sigma_* = (۲, ۳, ۹)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(۴, ۵, ۶)$$

$$\zeta_* = (۲, ۳, ۹)(\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳)(\alpha, \beta, \gamma)$$

که (α, β, γ) دوری به طول ۳ در x است و $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \{۴, ۵\} = \phi$. چون $r \geq r_* = ۳$ چنین انتخابی ممکن است.

حالت۳) $r_* = ۲$:

در این صورت $\tau_* = t_۱t_۲ = (۱, ۲, ۳)(۴, ۵, ۶)$. لذا ۴ یا ۳، $s_* = ۲$.

اگر $s_* = ۲$ باشد، آنگاه بدون از دست رفتن کلیت، قرار می‌دهیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{۱, ۴\}$. حال اگر $r = ۲$ باشد، آنگاه، زمانی که ۱ و ۴ در دو دور به طول ۳ از x باشند، قرار می‌دهیم $x = (۱, ۷, ۸)(۴, ۹, ۱۰)$ و زمانی که ۱ و ۴ در یک دور متفاوت از x باشند، قرار می‌دهیم $x = (۱, ۴, ۷)(۸, ۹, ۱۰)$. درنتیجه با استفاده از لم (۷.۳.۳)، داریم $d(t, x) \leq ۴$. اگر $r = ۳$ باشد و ۱ و ۴ در دو دور متفاوت به طول ۳ از x باشند. آنگاه، بدون این که خللی به مسأله وارد شود، قرار می‌دهیم $x = (۱, *, *)(۴, \delta, \varepsilon)(\alpha, \beta, \gamma)$. در این صورت با استفاده از لم (۸.۳.۳)، داریم $d(t, x) \leq ۴$. اگر $r = ۳$ و ۱ و ۴ در یک دور به طول ۳ از x قرار داشته باشند، یا $r \geq ۴$ باشد، آنگاه می‌توانیم دورهای (α, β, γ) و $(\delta, \varepsilon, \lambda)$ از x را طوری در نظر بگیریم که $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda\} \cap \{۱, ۴\} = \emptyset$. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = \sigma_* = \zeta_* = (\alpha, \beta, \gamma)(\delta, \varepsilon, \lambda).$$

اگر $s_* = ۳$، آنگاه $|supp(x) \setminus supp(t)| \geq ۳$، $|supp(t) \setminus supp(x)| \geq ۳$ و $|\Delta| = s_* = ۳$. بنابراین با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in supp(x) \setminus supp(t)$، $\beta_۱, \beta_۲, \beta_۳ \in \Delta$ و $\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳ \in supp(t) \setminus supp(x)$، تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\sigma_* = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

اگر $s_* = 4$. آنگاه، بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{1, 2, 4, 5\}$. فرض کنیم به ازای هر دور به طول ۳ مانند (α, β, γ) در x،

$$\{1, 2\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \emptyset \neq \{4, 5\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

در این صورت x حداکثر به صورت حاصل ضرب دو دور مجزا به طول ۳ است. چون $r_* = 2$ لذا $r = 2$. بنابراین، بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم $x = (1, 4, 7)(2, 5, 8)$. در نتیجه با استفاده از قسمت (الف) لم (۷.۳.۳)، داریم $d(t, x) \leq 4$. حال اگر x شامل دوری به طول ۳ مانند (α, β, γ) باشد به طوری که $\{1, 2\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} = \emptyset$. آنگاه چون $|\Delta| = s_* = 4$، با انتخاب $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \Delta$، تعریف کنیم

$$\rho_* = (1, 2, 3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\sigma_* = (\alpha, \beta, \gamma)(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

حالت۴) $r_* = 1$:

در این صورت $\tau_* = (1, 2, 3)$. لذا $s_* = 1$ یا ۲. بدون از دست رفتن کلیت، فرض می‌کنیم

$$supp(x) \cap supp(\tau_*) = \{1\} \text{ یا } \{2, 3\}.$$

اگر $s_* = 2$ باشد و $r = 2$، آنگاه زمانی که ۲ و ۳ در دو دور متفاوت به طول ۳ از x باشند، قرار می‌دهیم $x = (2, *, *)(3, *, *)$. در این صورت بنابر لم (۹.۳.۳)، داریم $d(t, x) \leq 3$. در غیر این‌صورت، یعنی $s_* = 2$، $r = 2$ و ۲ و ۳ در یک دور به طول ۳ از x قرار گیرند یا $s_* = 2$ و $r > 2$ یا $s_* = 1$، و

$r > ۱$. آنگاه دوری به طول ۳ مانند (α, β, γ) در x وجود دارد که $supp(\tau_*) \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} = \emptyset$. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\rho_* = \sigma_* = \zeta_* = (\alpha, \beta, \gamma).$$

حالت۵) $r_* = ۰$:

در این صورت قرار می‌دهیم $\sigma_* = ۱ = \rho_*$.

حال فرض می‌کنیم $y = \rho_* \tau_۰ \rho_۱ \rho_۲ \rho_۳$، $z = \sigma_* \sigma_۱ \sigma_۲ \tau_۰ \sigma_۴$ و $w = \zeta_* \sigma_۱ \sigma_۲ \tau_۰ \sigma_۴$ (w را برای حالاتی تعریف می‌کنیم که ζ_* در حالت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) تعریف شده باشد). در این صورت y حاصلضرب

$$r = r_* + r_۰ + r_۱ + r_۲ + r_۳$$

دور دو به دو مجزا به طول ۳ و z و w نیز حاصلضرب

$$r = r_* + \frac{۲r_۱}{۳} + \frac{r_۲}{۳} + (\frac{r_۱}{۳} + \frac{۲r_۲}{۳} + r_۳)$$

دور دو به دو مجزا به طول ۳ می‌باشند. لذا $y, z, w \in X$. با توجه به تعریف ρ_* در حالت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵)، ρ_* حاصلضرب دورهایی است که در τ_* ظاهر شده‌اند یا اشتراک ساپورتشان با $supp(t)$ مجموعه تهی است. بنابراین ρ_* با t جابه‌جا می‌شود. درنتیجه بنابر قسمت (الف) لم (۳.۳.۳)، $yt = ty$. همچنین با توجه به تعریف σ_* و ρ_* در حالت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵)، $\sigma_* \rho_* = \rho_* \sigma_*$. لذا بنابر قسمت (ب) لم (۳.۳.۳)، y و z نیز با هم جابه‌جا می‌شوند. به طور مشابه از تعریف ζ_* و σ_* داریم $\sigma_* \zeta_* = \zeta_* \sigma_*$، و لذا $wz = zw$. و در آخر با توجه به تعریف ζ_* در حالت‌های (۲)، (۳) و (۴)، $x\zeta_* = \zeta_* x$. بنابراین با توجه به قسمت (ب) لم (۳.۳.۳)، داریم $xw = wx$. درنتیجه $d(t, x) \leq d(t, y) + d(y, z) + d(z, w) + d(w, x) = ۴$. پس $diam \mathcal{C}(G, X) \leq ۴$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

تذکر ۱۱.۳.۳. توجه کنید که برای $r = ۱$ و $n = ۶$، گراف $\mathcal{C}(G, X)$ مطابق با [۹]، ناهمبند است. به همین دلیل در قضیه (۱۰.۳.۳)، فرض می‌کنیم $r > ۱$ باشد.

مثال ۱۲.۳.۳. با توجه به جدول (۲.۳)، اگر $r = ۲$ و $n = ۱۲$ آنگاه $diam\mathcal{C}(G,X) = ۴$ و اگر $r = ۳$ و $n = ۱۸$ آنگاه $diam\mathcal{C}(G,X) = ۳$. بنابراین $diam\mathcal{C}(G,X) \leq ۴$ و این همان چیزی است که در قضیه‌ی (۱۰.۳.۳) اثبات شد.

جدول زیر با استفاده از برنامه نویسی مگما در مرجع [۱۰]، روی $\mathtt{C}(G,X)$، G گروه متقارن و X یک رده‌ی تزویج از آن، به دست آمده است. اعداد ردیف اول مقادیر مختلف n را نشان می‌دهند، حرف D نشان دهنده‌ی این است که $\mathtt{C}(G,X)$ ناهمبند است و عدد d یا (d) به این معنی است که $\mathtt{C}(G,X)$ همبند است و دارای قطر d یا (حداکثر قطر (d))، می‌باشد.

جدول ۱.۳: Connectedness and Diameters of C(G،X)

a	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
(۱۲۳)	۱	D	D	D	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
(۱۲۳۴)	-	D	D	D	D	D	۴	۳	۲	۲	۲	۲
(۴۵)(۱۲۳)	-	-	D	D	D	۷	۵	۳	۳	۳	۲	۲
(۱۲۳۴۵)	-	-	D	D	D	D	D	D	۵	۳	۳	۲
(۴۵۶)(۱۲۳)	-	-	-	D	D	D	D	۶	۴	۴	۳	۳
(۵۶)(۱۲۳۴)	-	-	-	D	D	D	D	۸	۵	۴	۳	۳
(۱۲۳۴۵۶)	-	-	-	D	D	D	D	D	D	D	۶	۴
(۶۷)(۴۵)(۱۲۳)	-	-	-	-	D	D	D	۶	۵	۴	۳	۳
(۶۷)(۱۲۳۴۵)	-	-	-	-	D	D	D	D	D	۸	۵	۴
(۱۲۳۴۵۶۷)	-	-	-	-	D	D	D	D	D	D	D	D
(۷۸)(۴۵۶)(۱۲۳)	-	-	-	-	-	D	D	D	۱۲	۸	۵	۴
(۷۸)(۵۶)(۱۲۳۴)	-	-	-	-	-	D	D	۱۲	۹	۶	۵	(۶)

جدول زیر محاسباتی است که با استفاده از برنامه نویسی مگما در مرجع [۱۰]، برای به دست آوردن قطر و دیسک گراف جابجایی $\mathtt{C}(G,X)$ روی مقادیر مختلف n انجام شده است. اولین عدد نشان دهنده‌ی تعداد اعضای $\Delta_i(t)$ است. عدد داخل پرانتز تعداد $C_G(t)$ -مدارها را مشخص می‌کند. خط تیره به این معنی است که $|\Delta_i(t)| = ۰$.

جدول ۲.۳: Disc sizes and $C_G(t)$-orbits

r،n	$\Delta_۱(t)$	$\Delta_۲(t)$	$\Delta_۳(t)$	$\Delta_۴(t)$	$\Delta_۵(t)$	$\Delta_۶(t)$
r=۱						
n=۷	۹(۲)	۲۴(۲)	۳۶(۱)	-	-	-
n=۸	۲۱(۲)	۹۰(۳)	-	-	-	-
n=۹	۴۱(۲)	۱۲۶(۳)	-	-	-	-
r=۲						
n=۱۰	۳۵(۴)	۱۹۲(۶)	۱۰۰۸(۱۰)	۲۶۲۸(۲۰)	۳۶۷۲(۱۳)	۸۶۴(۵)
n=۱۱	۸۳(۴)	۱۰۸۰(۹)	۷۵۶۰(۲۳)	۹۶۵۶(۲۳)	-	-
n=۱۲	۲۰۳(۵)	۵۳۰۰(۱۶)	۲۸۲۹۶(۳۴)	۲۱۶۰(۵)	-	-
n=۱۶	۹۳۶۳(۵)	۳۱۰۹۵۶(۵۵)	-	-	-	-
r=۳						
n=۱۸	۲۴۴۴۱(۱۰)	۱۶۱۲۶۳۹۸(۲۱۰)	۹۲۷۵۷۹۶۰(۶۷۹)	-	-	-

مراجع

[1] A. Abdollahi, S.Akbari and H.R. Maimani, *Non-commuting graph of a group*, J. of Algebra, **298** (2006), 468-492.

[2] C. Bate, D. Bundy, S. Perkins, P. Rowley,*Commuting involution graphs for symetric goups*, J. Algebra, **266** (2003), no.1, 133-153.

[3] C. Bate, D. Bundy, S. Perkins, P. Rowley,*Commuting involution graphs for finite Coxeter groups*, J. Group theory, **6** (2003), no.4, 461-476.

[4] C. Bate, D. Bundy, S. Perkins, P. Rowley,*Commuting involution graphs in special linear groups*, Comm. Algebra, **32** (2004), no.11, 4179-4196.

[5] C. Bate, D. Bundy, S. Hart, P. Rowley,*Commuting involution graphs for sporadic simple groups*, J. Algebra, **316** (2007), no.2, 849-868.

[6] C. Bate, D. Bundy, S. Hart, P. Rowley,*A note on commuting graphs for symetric groups*, Electeron. J. combin. **16** (2009).

[7] J. A. Bondy and J.S. Murty,*Graph theory with Applications*, Elsevier, (1977), 10-176.

[8] R. Brauer, K.A. Fowler, *On groups of even order*, Ann. of Math. (2), **62** (1955), 565-583.

[9] D. Bundy, *The connectivity of commuting graphs*, J. Comb. Theory, Ser. 113, Issue, **6** (2006), 995-1007.

[10] J.J. Cannon, C. Playoust, *An introduction to Algebraic programming with M_{AGMA}[draft]*, Springer-Verlag (1997).

[11] David S. Dummit and Richard M.Foote, *Abstract Algebra*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc(Asia) Pvt. Ltd, Singapore(2005).

[12] A. Everet, *Commuting involution graphs for 3-dimensional unitary groups*, Electron. J. Combin. Paper 103, **11** (2011), no.1, 849-868.

[13] A. Everet, P. Rowley, *Commuting involution graphs for 4-dimensional projective symplectic groups*, MIMS Eprint, **67** (2010), 1-40.

[14] B. Fischer, *Finite groups generated by 3-transpositions*, I. Invent. Math. **13** (1971), 232-246.

[15] A. Nawawi and P. Rowely,*On commuting graphs for elements of order 3 in symetric groups*, MIMS Eprint, **58** (2012).

[16] Y. Segev, G. Seitz, *Anisotropic groups of type A_n and the commuting graph of finite simple groups*,Pacific J. Math. **202** (2002), no.1, 125-225.

[17] A. Asghar Talebi, *On the non-commuting graphs of group D2n*,International Jornal of Algebra, **2** (2008), no.20, 957-961.

[18] T. Tamizh Chelvam, K. Selvakumar and Manonmanian Sundaranar, *Commuting graph on Dihedral Group*, The journal of Mathematics and computer Science **2** (2011), no.2, 402-406.

[19] J. Vahidi, A. Asghar Talebi, *The commuting graphs on groups D2n and Qn*, The Journal of Mathematics and computer science, **1** (2010), no.2, 123-127.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

استدلال .... Argument

استقرا .... Induction

اشتراک .... Intersect

بدیهی .... Evidently

پوشش رأسی .... Vertex Cover

تراگرد .... Transversal

تطابق .... Matching

تطابق کامل .... Perfect Matching

تناقض .... Contradiction

درجه .... Degree

دور .... Cycle

دیسک .... Disc

رأس .... Vertex

رده ی تزویج .... Conjugacy Class

زیرگراف القایی .... Subgraph Induced

زیرگروه دوری .... Cyclic Subgroup

ضابطه .... Criterion

ضرب حلقوی .... Wreath Product

طوقه .... Loop

عدد استقلال .... Indipendent Number

عدد خوشه .... Clicue Number

عدد رنگی .... Chromatic Number

عنصر .... Element

قطر .... Diameter

کران .... Bound

کواترنیون تعمیم یافته .... Generalized Quaternion

گراف جابجایی .... Commuting Graph

گراف دو مؤلفه ای .... Split Graph

گروه دو وجهی .... Dihedral Group

گروه متقارن .... Symetric Group

مجاور .... Adjacent

مجزا .... Disjoint

محمل .... Support

مدار .... Orbit

مسیر .... Path

منتظم .... Regular

نقطه ثابت .... Fixed Point

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجاور	Adjacent
استدلال	Argument
کران	Bound
عدد رنگی	Chromatic Number
عدد خوشه	Clique Number
گراف جابجایی	Commuting Graph
رده ی تزویج	Conjugacy Class
تناقض	Contradiction
ضابطه	Criterion
دور	Cycle
زیرگروه دوری	Cyclic Subgroup
درجه	Degree
قطر	Diameter
گروه دووجهی	Dihedral Group
دیسک	Disc
مجزا	Disjoint
عنصر	Element

بدیهی .... Evidently

نقطه ثابت .... Fixed point

کواترنیون تعمیم یافته .... Generalaized Quaternion

عدد استقلال .... Independent Number

استقرا .... Induction

اشتراک .... Intersect

طوقه .... Loop

تطابق .... Matching

مدار .... Orbit

مسیر .... Path

تطابق کامل .... Perfect Matching

منتظم .... Regular

گراف دو مؤلفه ای .... Split Graph

زیرگراف القایی .... Subgraph Induced

محمل .... Support

گروه متقارن .... Symetric Group

تراگرد .... Transversal

رأس .... Vertex

پوشش رأسی .... Vertex Cover

ضرب حلقوی .... Wreath Product

Surname: Tooshmalani Name: Ziba

Title: Commuting graph of finite groups

Supervisor: Seyed heydar jafari

Advisor: Nader jafari rad

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Algebra

University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of pages: 89

Keywords: Chromatic number; Clique number; Commuting graph; Diameter; Dihedral group; Elements of order 3; Generalaized quaternio group; Independent number; Split graph; Symetric group.

Abstract

In this disseration, from [6], [15], [18] and [19], first we express the concept of commuting graphs. Then we investigating commuting graph on D_{2n}, Q_n and S_n, and we get some parameters of graph theory, as independent number, clique number and minimum size of a vertex cover of these graphs.

In the end of each parts, we determine the diameter(or bounded) of commuting graph on the subset of these groups.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Commuting graph of finite groups

Supervisor

Seyed heydar jafari

Advisor

Nader jafari rad

by

Ziba Tooshmalani

2013