دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بهترین تقریب همزمان در فضاهای توابع و عملگرها

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

پژوهشگر

سکینه دهبندی دودانگی

۱۳۹۲/۶/۲۶

نام خانوادگی دانشجو: دهبندی دودانگی نام: سکینه

عنوان: بهترین تقریب همزمان در فضاهای توابع و عملگرها

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۶ تعداد صفحات: ۶۳

واژگان کلیدی: به‌طور همزمان پروکسیمینال-بهترین تقریب همزمان

چکیده

هدف اصلی ما در این پایان نامه معرفی بهترین تقریب همزمان در فضاهای توابع و عملگرهاست. همچنین به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن شرایط، یک مجموعه در چنین فضاهایی، بهترین تقریب همزمان داشته باشد.

تقدیم به:

مادر عزیزم و روح پدر مهربانم

پیشگفتار

بهترین تقریب همزمان نقش مهمی در بخش هائی از ریاضیات از جمله بهینه سازي و اقتصاد ایفا می کند. در سال ۱۹۷۴ گول[۱]، هلند[۲] و نسیم[۳] بهترین تقریب همزمان را در فضای خطی نرمدار X بررسی کردند. بهترین تقریب همزمان در سال ۱۹۷۶ توسط دانهام[۴]، دیاز[۵] و لاگلین[۶] در زیرمجموعه‌ای از فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه فشرده [a،b] مورد مطالعه قرار گرفت. در این پایان نامه مسأله بهترین تقریب همزمان را در فضاهای توابع و عملگرها مورد بررسی قرار می‌دهیم و به دنبال شرایطی هستم که تحت آن شرایط، یک مجموعه به‌طور همزمان پروکسیمینال باشد.

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. در فصل اول به تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های بعد پرداخته شده است. در فصل دوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع پیوسته وعملگرهای خطی کراندار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در فصل سوم بهترین تقریب همزمان در یک مجموعه نامتناهی از توابع مطرح می‌شود. در فصل چهارم و پنجم بهترین تقریب همزمان در فضای ضرب تانسوری به عنوان یک عملگر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[۱] Geol
[۲] Holand
[۳] Nasim
[۴] Dunham
[۵] Diaz
[۶] Laughlin

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

سکینه دهبندی دودانگی
۱۳۹۲/۶/۲۶

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از آنالیز

در این فصل به تعاریف، قضایا و لم‌های مورد نیاز در فصل‌های بعد اشاره می‌نماییم که از مراجع [۶]، [۸]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای متریک (X, d) عبارت است از یک مجموعه ناتهی X از عناصر (که آنها را نقطه می‌نامیم) و یک تابع حقیقی d که روی $X \times X$ تعریف شده است به‌گونه‌ای که برای هر x, y و z متعلق به X داریم:

۱. $d(x, y) \geq ۰$

۲. $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$

۳. $d(x, y) = d(y, x)$

۴. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

تابع d را متر‌روی X می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و M و N زیرفضاهای بسته از X باشند. X را جمع مستقیم M, N می‌نامیم و می‌نویسیم $X = M \oplus N$ اگر هر $x \in X$ نمایش یکتایی به شکل $x = m + n$ داشته باشد که $m \in M$ و $n \in N$.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه دلخواه $X \neq \varnothing$ به همراه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند τ را یک فضای توپولوژیک گویند، هرگاه:

الف: $\emptyset, X \in \tau$ باشند.
ب: اجتماع اعضای هر زیرگردایه از τ در τ قرار داشته باشد.
پ: اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی از τ، متعلق به τ باشد.

تعریف ۴.۱.۱. اگر τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X می‌نامند. یک زیرمجموعه از X بسته نامیدهمی‌شود هرگاه متمم آن باز باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی (یا مختلط) باشد تابع
$\| \cdot \|: X \to R^{+} \cup \{o\}$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه:
۱. برای هر x, y در X :

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

۲. اگر $x \in X$ و α یک عدد ثابت باشد آنگاه

$$\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \| .$$

۳. $x = o$ اگر و تنها اگر $\| x \| = o$.
اگر روی X یک نرم وجود داشته باشدآنگاه X را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد.گوییم X یک فضای باناخ[۱] است هرگاه X نسبت به متر d $x, y \in X$ ، $d(x, y) = \| x - y \|$ که توسط نرم روی X تولید می‌شود، کامل باشد. یعنی هر دنباله کوشی $\{x_n\}$ نسبت به متر d همگرا به یک $x \in X$ باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فضای خطی حقیقی X یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود، اگر برای هر جفت از عناصر $x, y \in X$ یک اسکالر حقیقی منحصربه‌فرد $\langle x, y \rangle$ داشته باشیم،که شرایط زیر برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in R$ برقرار باشد.
الف: $\langle x, x \rangle \geq o$
ب: $\langle x, x \rangle = o$ اگروتنهااگر $x = o$
ج: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
د: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
ه: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

[۱] Banach

تعریف ۸.۱.۱. $D \subseteq X$ را در X چگال می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ و $\epsilon > o$ وجود داشته باشد $y \in D$ به‌طوریکه:

$$\| x - y \| < \epsilon.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیر فضای بسته از X باشد. برای هر $x \in X$ فاصله x از فضای G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x, G) = \inf\{\| x - g \| : g \in G\}.$$

$g_o \in G$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

$$\| x - g_o \| = d(x, G).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیر فضای بسته از X باشد. برای هر $x \in X$، مجموعه همه بهترین تقریب‌های x از G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_G(x) := \{g_o \in G : \| x - g_o \| = d(x, G)\}.$$

اگر $P_G(x)$ شامل حداقل یک عنصر باشد، آنگاه G در X پروکسیمینال نامیده می‌شود. اگر $P_G(x)$ تک عضوی باشد آنگاه G در X چبیشف نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیر فضای بسته از X باشد. برای هر زیر مجموعه کراندار $B \subset X$ قرار می‌دهیم:

$$d(B, G) := \inf_{g \in G} \sup_{b \in B} \| b - g \| .$$

عنصر $g_o \in G$ بهترین تقریب همزمان B از G نامیده می‌شود هرگاه:

$$d(B, G) = \sup_{b \in B} \| b - g_{\circ} \| .$$

اگر برای هر مجموعه کراندار B در X، حداقل یک بهترین تقریب همزمان B از G وجود داشته باشد آنگاه G یک زیرمجموعه به‌طور همزمان پروکسیمینال از X نامیده می‌شود.
اگر برای هر مجموعه کراندار B در X، یک بهترین تقریب همزمان یکتا برای B از G وجود داشته باشد آنگاه G یک زیرمجموعه به‌طور همزمان چبیشف از X نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیر فضای بسته از X باشد و $x, y, x_۱, y_۱ \in X$ باشند. $P_G(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_G(x,y) = \{g \in G : d(x,y,G) = \max\{\| x - g \|, \| y - g \|\}\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف است هرگاه به ازای هر $p, q \in X$ که $p \neq q$ باشد یک همسایگی از p مانند U و یک همسایگی از qمانند V وجود داشته باشد به‌طوری که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری، F یک میدان و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامند هرگاه:

۱. برای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ در X بسته باشد.

۲. نگاشت های $X \times X \longrightarrow X$ و $F \times X \longrightarrow X$ به ترتیب با ضابطه های $(x,y) \longrightarrow x + y$ و $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

قضیه ۱۵.۱.۱. *هر فضای برداری توپولوژیک هاسدورف است.*

برهان. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۱۲.۱]. □

تعریف ۱۶.۱.۱. (اصل انتخاب)[۲] فرض کنید A یک تابع روی مجموعه I باشد به‌طوریکه برای هر $x \in I$ داشته باشیم $A(x) \neq \emptyset$. در این صورت یک تابع f وجود دارد به‌طوریکه $f(x) \in A(x)$ برای هر $x \in I$.

تعریف ۱۷.۱.۱. نگاشت P از یک فضای برداری X به یک فضای برداری Y، یک نگاشت خطی، یک عملگر خطی و یا مختصرا عملگر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و همه عددهای حقیقی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ داشته باشیم:

$$P(\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲) = \alpha_۱ P(x_۱) + \alpha_۲ P(x_۲).$$

[۲] Axiom of choice

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر X و Y فضاهای برداری نرمدار باشند، عملگر خطی P را کراندار می‌گویند هرگاه یک عدد ثابت M موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\| P(x) \| \leq M \| x \| .$$

تعریف ۱.۱.۱۹. اگر X و Y فضاهای برداری نرمدار باشند، عملگر $P : X \longrightarrow Y$ طولپا نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم :

$$\| P(x) \| = \| x \| .$$

تعریف ۱.۱.۲۰. عملگر خطی کراندار $P : X \longrightarrow X$ تعریف شده روی فضای خطی نرمدار X را یک تصویر می‌نامیم هرگاه $P^{۲} = P$.

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار روی میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. مجموعه متشکل از تابعک‌های خطی پیوسته روی X یا $X^* = B(X, \mathbb{C})$ را فضای دوگان X می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی کوچکترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف بر X می نامند و متشکل از تمام اجتماعهای دلخواه از اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های به شکل $f^{-۱}(v)$ می‌باشد که $f \in X^*$ و v در F باز است.

تعریف ۱.۱.۲۳. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. X^* یک فضای نرمدار با نرم زیر است:

$$\| f \| = \sup\{|f(x)| : \| x \| \leq ۱\}$$

دوگان X^* را با X^{**} نشان می‌دهیم.

نگاشت ϕ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi : X \longrightarrow X^{**}$$
$$\phi(x)(f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

تعریف ۱.۱.۲۴. اگر X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد آنگاه کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته گردد را توپولوژی ضعیف ستاره روی X نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک و $\beta\in I$ باشد. آنگاه نگاشت تصویری نظیر اندیس β به شکل $\pi_\beta=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha\to X_\beta$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in I})=x_\beta$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\delta_\beta=\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta)|\text{باز است } X_\beta \text{ در } U_\beta\}$$

توپولوژی تولید شده به وسیله زیرپایه $\delta=\cup_{\beta\in I}\delta_\beta$ را توپولوژی حاصل ضربی می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. یک زیرمجموعه غیر تهی مانند A را محدب می‌نامند هرگاه برای هر دو نقطه دلخواه $x,y\in A$ و $0\leq\lambda\leq 1$ داشته باشیم:

$$(1-\lambda)x+\lambda y\in A.$$

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید Xیک فضای برداری و $\emptyset\neq K\subseteq X$ و محدب باشد. $\emptyset\neq S\subseteq K$ را مجموعه فرین[۳] از K می‌نامیم هرگاه برای هر $0<t<1$ و $x,y\in K$، از $tx+(1-t)y\in S$ نتیجه شود که $x,y\in S$. اگر S تک نقطه‌ای باشد آن را نقطه فرین می‌نامیم. مجموعه نقاط فرین K را با $extK$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $\emptyset\neq A\subseteq X$ باشد. در این صورت پوسته محدب A عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل Aکه آن را با $co(A)$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۲۹.۱.۱. *اگر X یک فضای برداری و $A\subseteq X$ آنگاه $\overline{co}(A)$ را پوسته محدب بسته A می‌نامیم.*

قضیه ۳۰.۱.۱. (کرین-میلمن). [۴] *فرض کنید X یک فضای نرمدار و $\emptyset\neq K\subseteq X$ یک مجموعه فشرده و محدب باشد. در این صورت $ext(K)\neq\emptyset$ و همچنین $K=\overline{co}(ext(K))$*

برهان. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۲۱.۳]. □

[۳] Extreme
[۴] Kerin-Milman Theorem

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. گردایه $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را موضعا متناهی می‌نامیم در صورتی که هر نقطه X همسایگی‌ای داشته باشد که فقط تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را قطع کند.

تعریف ۳۲.۱.۱. فضای X را پیرافشرده می‌نامیم در صورتی که هاسدورف باشد و هر پوشش باز X یک زیر پوشش باز موضعا متناهی داشته باشد.

قضیه ۳۳.۱.۱. *هر فضای متریک پذیر پیرافشرده است.*

برهان. رجوع شود به [۱۱، قضیه ۴۱.۴]. □

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید Φ یک نگاشت باشد که فضای توپولوژیک S را به خانواده همه زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک τ بنگارد. نگاشت Φ از پایین نیم پیوسته نامیده می‌شود اگر برای هر مجموعه باز O در τ مجموعه $\{s \in S : \Phi(s) \cap O \neq \emptyset\}$ در S باز باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع حقیقی f را روی X، نیم پیوسته بالایی می‌نامیم اگر برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x : f(x) < \alpha\}$ باز باشد.

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند و $A : X \to Y$ نگاشتی خطی باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:*

۱. A *پیوسته است.*

۲. A *کراندار است.*

برهان. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۱.۳۲]. □

قضیه ۳۷.۱.۱. *(انتخاب میشل)*. [۵] *فرض کنید Φ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین بر فضای پیش فشرده S به خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های غیرتهی، بسته و محدب از فضای باناخ X باشد. در این صورت یک نگاشت پیوسته $\phi : S \longrightarrow X$ وجود دارد به قسمی که برای تمامی $s \in S$ داشته باشیم* $\phi(s) \in \Phi(s)$.

برهان. رجوع شود به [۱۱، قضیه ۱۱.۱۴]. □

[۵] Michael selection

قضیه ۳۸.۱.۱. *اگر X یک فضای نرمدار و $x_o \neq o$ آنگاه وجود دارد $A \in X^*$ به‌طوریکه $\| A \| = ۱$ و $\| x_o \| = Ax_o$. همچنین برای هر $x \in X$ داریم:*

$$\| x \| = \sup\{|Ax| : A \in X^*, \| A \| = ۱\}.$$

برهان. رجوع شود به [۷، قضیه ۳.۴]. □

فصل ۲

بهترین تقریب همزمان در فضاهای توابع و عملگرها

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم بهترین تقریب همزمان در فضاهای توابع و عملگرها می‌پردازیم. ابتدا مفهوم نگاشت تقریب همزمان را تعریف کرده و خواص آن را بررسی و رابطه آن را با مفهوم بهترین تقریب همزمان بیان می‌کنیم. در انتها تعریفی از مفهوم M -جمعوند ارائه می‌دهیم و نقش آن را در بهترین تقریب همزمان بررسی می‌کنیم. در این فصل از مراجع [۱] و [۲] استفاده شده است.

۲.۲ نگاشت تقریب همزمان

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و X یک فضای باناخ باشد. $l^\infty(S, X)$ فضای باناخ تمامی توابع کراندار از S به X است که نرم تعریف شده بر آن به صورت زیر است:

$$\| f \|= \sup_{s\in S} \| f(s) \| .$$

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. $C(S, G)$ زیرمجموعه‌ای از $l^\infty(S, X)$ است که شامل تمامی توابع پیوسته است.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. در این صورت $L(X, Y)$ فضای باناخ تمامی عملگرهای خطی کراندار از X به Y است و نرمش همانند بالا تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته‌ای از X باشد. قرار می‌دهیم:

$$Z = X \underset{\infty}{\oplus} X = \{(x,y) : x,y \in X\}$$

و به ازای هر (x,y) نرم سوپریمم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| (x,y) \| = max\{\| x \|, \| y \|\}.$$

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته از X باشد. برای $x,y \in X$ ، $d(x,y,G)$ را تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y,G) = \inf_{g \in G} max\{\| x-g \|, \| y-g \|\}. \qquad (۱.۲)$$

$P_G(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_G(x,y) = \{g \in G : d(x,y,G) = max\{\| x-g \|, \| y-g \|\}\}. \qquad (۲.۲)$$

اگر $P_G(x,y)$ برای هر $x,y \in X$ ناتهی باشد آنگاه G را به طور همزمان پروکسیمینال در X می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته و به طور همزمان پروکسیمینال در X باشد. آنگاه منظور از نگاشت تقریب همزمان[۱]، نگاشتی مانند

$$\Pi_G : X \underset{\infty}{\oplus} X \longrightarrow G$$

است که هر عضو $(x_۱,x_۲) \in X \underset{\infty}{\oplus} X$ را به عضوی در $P_G(x_۱,x_۲)$ می‌نگارد.

قضیه ۷.۲.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته از X باشد. اگر G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X و $\Pi_G : X \underset{\infty}{\oplus} X \longrightarrow G$ نگاشت تقریب همزمان باشد در این صورت:*

۱. برای هر $x_۱,x_۲$ متعلق به X داریم:

$$\Pi_G(\Pi_G(x_۱,x_۲),\Pi_G(x_۱,x_۲)) = \Pi_G(x_۱,x_۲).$$

[۱] Simultaneous Proximity map

۲. *برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X داریم:*

$$\Pi_G(x_۱, x_۲) \leq ۲ \parallel (x_۱, x_۲) \parallel .$$

برهان. ۱. برای هر عضو $(g, g) \in X \underset{\infty}{\oplus} X$، $\Pi_G(g, g)$ به عضوی در $P_G(g, g)$ نگاشته می‌شود وطبق (۲.۲)، $P_G(g, g) = g$ پس برای هر $g \in G$ داریم $\Pi_G(g, g) = g$. فرض کنید $(x_۱, x_۲) \in X \underset{\infty}{\oplus} X$ دلخواه باشد و $\Pi_G(x_۱, x_۲) = g$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Pi_G(\Pi_G(x_۱, x_۲), \Pi_G(x_۱, x_۲)) = \Pi_G(g, g) = g = \Pi_G(x_۱, x_۲).$$

۲. برای هر $(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \in X \underset{\infty}{\oplus} X$ داریم:

$$\begin{aligned} \parallel (x_۱, x_۲) - \Pi_G(x_۱, x_۲) \parallel &\leq \parallel (x_۱, x_۲) - \Pi_G(y_۱, y_۲) \parallel \\ &\leq \parallel (x_۱, x_۲) - (y_۱, y_۲) \parallel + \parallel (y_۱, y_۲) - \Pi_G(y_۱, y_۲) \parallel . \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\parallel (x_۱, x_۲) - \Pi_G(x_۱, x_۲) \parallel - \parallel (y_۱, y_۲) - \Pi_G(y_۱, y_۲) \parallel \leq \parallel (x_۱, x_۲) - (y_۱, y_۲) \parallel$$

$\Pi_G(o, o) = o$ است. لذا با قرار دادن $(y_۱, y_۲) = (۰, ۰)$ داریم:

$$\parallel (x_۱, x_۲) - \Pi_G(x_۱, x_۲) \parallel \leq \parallel (x_۱, x_۲) \parallel . \qquad (۳.۲)$$

با استفاده از خواص نرم نتیجه می‌گیریم که:

$$\parallel \Pi_G(x_۱, x_۲) \parallel \leq \parallel \Pi_G(x_۱, x_۲) - (x_۱, x_۲) \parallel + \parallel (x_۱, x_۲) \parallel . \qquad (۴.۲)$$

از(۳.۲) و (۴.۲) داریم:

$$\parallel \Pi_G(x_۱, x_۲) \parallel \leq \parallel \Pi_G(x_۱, x_۲) - (x_۱, x_۲) \parallel + \parallel (x_۱, x_۲) \parallel \leq ۲ \parallel (x_۱, x_۲) \parallel .$$

□

۳.۲ M -تصویر

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته از X باشد. یک تصویر خطی $P : X \longrightarrow G$ ، M-تصویر [۲] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\| x \| = max\{\| P(x) \|, \| x - P(x) \|\}.$$

زیرفضای بسته $G \subseteq X$ یک M -جمعوند[۳] نامیده می‌شود هرگاه در برد یک M -تصویر باشد.

گزاره ۲.۳.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای M -جمعوند از X باشد. در این صورت G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است، به‌علاوه G نگاشت تقریب هم‌زمان خطی دارد.*

برهان. فرض کنید $x_۱, x_۲ \in X$ و $\theta = \frac{P(x_۱)+P(x_۲)}{۲}$ باشد. بنا به فرض G یک زیرفضای M -جمعوند از X است. پس داریم:

$$\begin{aligned}
\| x_۱ - \theta \| &= \max\{\| P(x_۱ - \theta) \|, \| x_۱ - \theta - P(x_۱ - \theta) \|\} \\
&= \max\{\| P(x_۱) - P(\theta) \|, \| x_۱ - \theta - P(x_۱) + P(\theta) \| \\
&= \max\{\| P(x_۱) - \theta \|, \| x_۱ - \theta - P(x_۱) + \theta \|\} \\
&= \max\{\| x_۱ - P(x_۱) \|, \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\}.
\end{aligned}$$

به‌طورمشابه

$$\| x_۲ - \theta \| = max\{\| x_۲ - P(x_۲) \|, \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\}.$$

در نتیجه:

$$max\{\| x_۱ - \theta \|, \| x_۲ - \theta \|\} \leq$$

$$max\{\| x_۱ - P(x_۱) \|, \| x_۲ - P(x_۲) \|, \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\}. \qquad (۵.۲)$$

---
[۲] M -Projection
[۳] M -Summand

حال، فرض کنید $z \in G$ باشد در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲} \parallel P(x_۱) - P(x_۲) \parallel &= \frac{۱}{۲} \parallel P(x_۱) - z + z - P(x_۲) \parallel \\ &\leq \frac{۱}{۲} \parallel P(x_۱) - z \parallel + \frac{۱}{۲} \parallel P(x_۲) - z \parallel \\ &\leq max\{\parallel P(x_۱) - z \parallel, \parallel P(x_۲) - z \parallel\}. \qquad (۶.۲)\end{aligned}$$

با استفاده از (۵.۲) و (۶.۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}&max\{\parallel x_۱ - \theta \parallel, \parallel x_۲ - \theta \parallel\} \\ &\leq max\{max\{\parallel x_۱ - P(x_۱) \parallel, \parallel P(x_۱) - z \parallel\}, max\{\parallel x_۲ - P(x_۲) \parallel, \parallel P(x_۲) - z \parallel\} \\ &= max\{\parallel x_۱ - z \parallel, \parallel x_۲ - z \parallel\}.\end{aligned}$$

از این که G یک زیرفضای M-جمعوند از X است و اینکه $z \in G$ دلخواه است داریم:

$$max\{\parallel x_۱ - \theta \parallel, \parallel x_۲ - \theta \parallel\} \leq max\{\parallel x_۱ - z \parallel, \parallel x_۲ - z \parallel\} \quad \forall z \in G$$

بنابراین $\theta \in G$ بهترین تقریب همزمان $x_۱, x_۲ \in X$ است و G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است.

حال نگاشت $\Pi : X \underset{\infty}{\oplus} X \longrightarrow G$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi(x_۱, x_۲) = \frac{P(x_۱) + P(x_۲)}{۲}$$

به‌وضوح طبق تعریف نگاشت تقریب همزمان، Π یک نگاشت تقریب همزمان است. خطی بودن آن نیز از خطی بودن P نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۳.۳.۲. *فرض کنید G یک زیر فضای M-جمعوند از X باشد، آنگاه G نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد.*

برهان. اثبات به‌طورمستقیم از گزاره (۲.۳.۲) و این حقیقت که نگاشت تقریب همزمان خطی، پیوسته است نتیجه می‌شود. □

۴.۲ نتایج

در این قسمت به اثبات چند قضیه مهم می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴.۲. *فرض کنید G زیرفضای بسته از فضای باناخ X و S فضای هاسدورف فشرده باشد. در این صورت برای هر $f_۱, f_۲ \in C(S,X)$ داریم:*

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) = d(f_۱, f_۲, l^\infty(S,G)) = \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

برهان. چون $C(S,G) \subseteq l^\infty(S,G)$ است پس داریم :

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \geq d(f_۱, f_۲, l^\infty(S,G)). \tag{۷.۲}$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$d(f_۱, f_۲, l^\infty(S,G)) \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

اگر $g \in l^\infty(S,G)$ دلخواه باشد. با توجه به (۱.۲) و برای هر $t \in S$ داریم:

$$\max\{\| f_۱(t) - g(t) \|, \| f_۲(t) - g(t) \|\} \geq d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

با گرفتن سوپریمم از دو طرف نامساوی بدست می‌آوریم:

$$\max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

چون $g \in l^\infty(S,G)$ دلخواه بود، در نتیجه داریم:

$$\inf_{g\in l^\infty(S,G)} \max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

بنابراین:

$$d(f_۱, f_۲, l^\infty(S,G)) \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G). \tag{۸.۲}$$

حال باید ثابت کنیم:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \leq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

برای اثبات، شرایط قضیه (۳۸.۱.۱) را بررسی می‌کنیم. مقدار λ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\lambda > \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G). \tag{۹.۲}$$

برای $t \in S$ ، $\phi(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(t) = \{h \in G : max\{\| f_۱(t) - h \|, \| f_۲(t) - h \|\} \leq \lambda\}. \tag{۱۰.۲}$$

اولا چون $\lambda > \sup d(f_۱(t), f_۲(t), G)$ و طبق (۱.۲)هم داریم:

$$d(f_۱(t), f_۲(t), G) = \inf_{g\in G} \max\{\| f_۱(t) - g \|, \| f_۲(t) - g \|\}.$$

در نتیجه $\phi(t)$ زیرمجموعه بسته غیرتهی از G است.
ثانیا نشان می‌دهیم که برای هر $t \in S$ ، $\phi(t)$ محدب و ϕ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین [۴] است.
برای اثبات محدب بودن فرض کنید $t \in S$، $h_۱, h_۲ \in \phi(t)$ و $۰ \leq \alpha \leq ۱$ باشند. نشان می‌دهیم:

$$\alpha h_۱ + (۱ - \alpha) h_۲ \in \phi(t).$$

چون $h_۱, h_۲ \in \phi(t)$ هستند لذا طبق (۱۰.۲)داریم:

$$max\{\| f_۱(t) - h_۱ \|, \| f_۲(t) - h_۱ \|\} \leq \lambda. \tag{۱۱.۲}$$

و

$$max\{\| f_۱(t) - h_۲ \|, \| f_۲(t) - h_۲ \|\} \leq \lambda. \tag{۱۲.۲}$$

[۴] Lower semicontinuous

از(۱۱.۲) و (۱۲.۲) داریم:

$$\max\{\| f_۱(t)-\alpha h_۱-(۱-\alpha)h_۲ \|, \| f_۲(t)-\alpha h_۱-(۱-\alpha)h_۲ \|$$
$$=\max\{\| f_۱(t)-\alpha f_۱(t)+\alpha f_۱(t)-\alpha h_۱-(۱-\alpha)h_۲ \|,$$
$$\| f_۲(t)-\alpha f_۲(t)+\alpha f_۲(t)-\alpha h_۱-(۱-\alpha)h_۲ \|\}$$
$$\leq \max\{\alpha \| f_۱(t)-h_۱ \| +(۱-\alpha) \| f_۱(t)-h_۲ \|, \alpha \| f_۲(t)-h_۱ \| +(۱-\alpha) \| f_۲(t)-h_۲ \|\}$$
$$\leq \alpha \max\{\| f_۱(t)-h_۱ \|, \| f_۲(t)-h_۱ \|\}+(۱-\alpha)\max\{\| f_۱(t)-h_۲ \|, \| f_۲(t)-h_۲ \|\}$$
$$\leq \alpha\lambda+(۱-\alpha)\lambda=\lambda.$$

بنابراین برای هر $t \in S$ ، $\phi(t)$ محدب می‌باشد. برای نشان دادن اینکه ϕ یک نگاشت نیم‌پیوسته از پایین است فرض کنید O یک مجموعه باز در G باشد و قرار می‌دهیم:

$$O^*=\{t\in S:\phi(t)\cap O\neq\emptyset\}. \qquad (۱۳.۲)$$

طبق تعریف (۳۵.۱.۱) باید نشان دهیم که O^* باز است. فرض کنید $\sigma \in O^*$, آنگاه $\phi(\sigma)\cap O\neq\emptyset$.
از این رو بنا به (۱۰.۲) یک $h\in O$ وجود دارد به‌طوریکه:

$$max\{\| f_۱(\sigma)-h \|, \| f_۲(\sigma)-h \|\}\leq\lambda.$$

طبق (۹.۲) و (۱.۲) خواهیم داشت :

$$\lambda > \inf_{y\in G} max\{\| f_۱(\sigma)-y \|, \| f_۲(\sigma)-y \|\}$$

در این صورت $h' \in G$ وجود دارد به‌طوری که:

$$max\{\| f_۱(\sigma)-h' \|, \| f_۲(\sigma)-h' \|\}<\lambda.$$

از طرفی چون $h\in O$ و O مجموعه‌ای باز است، لذا طبق تعریف مجموعه باز ϵ ای بزرگتر از صفر موجود است به‌قسمی که :

$$B(h,\varepsilon)=\{y\in G:\| y-h \|<\varepsilon\}\subseteq O \qquad (۱۴.۲)$$

فرض کنید $\delta = \frac{\varepsilon}{۲\|h-h'\|}$ باشد. اگر $\|h-h'\| \leq ۱+\frac{\varepsilon}{۲}$ باشد. آنگاه خواهیم داشت :

$$\delta = \frac{\epsilon}{۲\parallel h-h' \parallel} \leq \frac{\epsilon}{۲(۱+\frac{\epsilon}{۲})} = \frac{\epsilon}{\epsilon+۲} \leq ۱.$$

فرض کنید $h'' = (۱-\delta)h+\delta h'$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\parallel h''-h \parallel = \parallel (۱-\delta)h+\delta h' - h' \parallel = \delta \parallel h-h' \parallel < \epsilon.$$

پس $h'' \in B(h,\epsilon)$ است و طبق (۱۴.۲)نتیجه می‌گیریم که $h'' \in O$ است. چون $\phi(\sigma)$ محدب و $h, h' \in \phi(\sigma)$ لذا $h'' = (۱-\delta)h+\delta h' \in \phi(\sigma)$ است. پس خواهیم داشت :

$$max\{\parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel\} < \lambda. \tag{۱۵.۲}$$

حال نشان می‌دهیم که O^* باز است. فرض کنید N یک همسایگی از σ باشد به قسمی که برای هر $t \in N$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &max\{\parallel f_۱(\sigma)-f_۱(t) \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-f_۲(t) \parallel\} < \lambda \\ &- max\{\parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel .\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

طبق (۱۵.۲) این همسایگی موجود است بنابر (۱۶.۲) برای هر $t \in N$ داریم:

$$max\{\parallel f_۱(t)-h'' \parallel, \parallel f_۲(t)-h'' \parallel$$

$$\begin{aligned} &\leq max\{\parallel f_۱(t)-f_۱(\sigma) \parallel + \parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(t)-f_۲(\sigma) \parallel + \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel\} \\ &\leq max\{\parallel f_۱(t)-f_۱(\sigma) \parallel, \parallel f_۲(t)-f_۲(\sigma) \parallel\} + max\{\parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel\} \\ &\leq \lambda - max\{\parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel\} + max\{\parallel f_۱(\sigma)-h'' \parallel, \parallel f_۲(\sigma)-h'' \parallel\} \\ &\leq \lambda. \end{aligned}$$

بنابراین طبق (۱۰.۲)، $h'' \in \phi(t)$ و در نهایت $h'' \in \phi(t) \cap O$ و بنا بر (۱۳.۲)، $t \in O^*$ است. پس $N \subseteq O^*$ و O^* باز است. لذا ϕ یک نگاشت نیم‌پیوسته از پایین است. شرایط قضیه (۳۸.۱.۱) برقرار است. طبق قضیه (۳۸.۱.۱)، $g \in C(S,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$g(t) \in \phi(t) \quad \forall t \in S$$

از این‌رو:

$$max\{\| f_۱(t)-g(t) \|, \| f_۲(t)-g(t) \|\} \leq \lambda \quad \forall t \in S,$$

لذا

$$max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} \leq \lambda.$$

بنابراین

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \leq max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} \leq \lambda.$$

پس داریم:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \leq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G). \qquad (۱۷.۲)$$

از (۷.۲) ، (۸.۲) و (۱۷.۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) = d(f_۱, f_۲, l^\infty(S,G)) = \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G).$$

□

لم ۲.۴.۲. *فرض کنید S فضای هاوسدورف فشرده، Y فضای باناخ و H, G زیرفضاهای بسته از Y باشند، آنگاه:*

$$C(S, H \underset{\infty}{\oplus} G) = C(S,H) \underset{\infty}{\oplus} C(S,G).$$

برهان. برای $f \in C(S, H \underset{\infty}{\oplus} G)$، فرض کنید $f_۱ : S \longrightarrow H$ و $f_۲ : S \longrightarrow G$ باشد. به‌طوری‌که:

$$f(t) = (f_۱(t), f_۲(t)) \quad \forall t \in S$$

$f_۱ \in C(S,H)$ و $f_۲ \in C(S,G)$ هستند. نگاشت ψ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi : C(S, H \underset{\infty}{\oplus} G) \longrightarrow C(S,H) \underset{\infty}{\oplus} C(S,G)$$

که $\psi(f) = (f_1, f_2)$ است. نگاشت ψ طولپایی است زیرا :

$$\begin{aligned} \| \psi(f) \| &= max\{\| f_1 \|, \| f_2 \|\} \\ &= supmax\{\| f_1(t) \|, \| f_2(t) \|\} \\ &= sup \| f(t) \| \\ &= \| f \| . \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۴.۲. *فرض کنید S فضای هاوسدورف فشرده و G زیرفضایی بسته از فضای باناخ X باشد، آنگاه:*

۱. اگر $C(S, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S, X)$ باشد، آنگاه G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است.

۲. اگر G نگاشت تقریب همزمان پیوسته داشته باشد، آنگاه $C(S, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S, X)$ است و نگاشت تقریب هم‌زمان پیوسته دارد.

برهان. ۱.فرض کنید $x, y \in X$ باشند. توابع $f_y : S \longrightarrow Y$ و $f_x : S \longrightarrow X$ را برای هر $s \in S$ به ترتیب با ضابطه‌های $f_x(s) = x, f_y(s) = y$ در نظر بگیرید.طبق فرض چون $C(S, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S, X)$ است لذا $g \in C(S, G)$ وجود دارد به‌طوریکه طبق (۲.۲) و قضیه (۱.۴.۲) روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} max\{\| f_x - g \|, \| f_y - g \|\} &= d(f_x, f_y, C(S, G)) \\ &= \sup_{s \in S} d(f_x(s), f_y(s), G) \\ &= d(x, y, G). \end{aligned}$$

لذا برای یک $s_o \in S$ داریم:

$$max\{\| f_x(s.) - g(s.) \|, \| f_y(s.) - g(s.) \| \leq d(x, y, G).$$

از این‌رو $g(s_o)$ یک بهترین تقریب همزمان برای x, y از G است.
۲.فرض کنیم $A : X \underset{\infty}{\oplus} X \longrightarrow G$ نگاشت تقریب همزمان پیوسته برای G با ضابطه

$$A(x_1, x_2) = P_G(x_1, x_2)$$

باشد. A' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A' : C(S, X \underset{\infty}{\oplus} X) \longrightarrow C(S, G)$$

که $A'(f) = Aof$ است. طبق لم (۲.۴.۲) می‌توان A' را برای هر $s \in S$ به‌صورت زیر نوشت:

$$A' : C(S, X) \underset{\infty}{\oplus} C(S, X) \longrightarrow C(S, G)$$

که ضابطه آن عبارت است از:

$$A'(f_1, f_2)(s) = A(f_1(s), f_2(s)) = P_G(f_1(s), f_2(s)).$$

لذا $A'(f_1, f_2) \in C(S, G)$ است. فرض کنید $g \in C(S, G)$ باشد در این صورت برای هر $s \in S$ داریم:

$$\begin{aligned}
&max\{\| f_1(s) - A(f_1(s), f_2(s)) \|, \| f_2(s) - A(f_1(s), f_2(s)) \|\} \\
&= max\{\| f_1(s) - P_G(f_1(s), f_2(s)) \|, \| f_2(s) - P_G(f_1(s), f_2(s)) \|\} \\
&\leq max\{\| f_1(s) - g(s) \|, \| f_2(s) - g(s) \|\}.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه (۱.۴.۲) داریم:

$$max\{\| f_1 - A(f_1, f_2) \|, \| f_2 - A(f_1, f_2) \| \leq max\{\| f_1 - g \|, \| f_2 - g \|\}.$$

در نتیجه $A(f_1, f_2)$ بهترین تقریب همزمان برای f_2, f_1 از $C(S, G)$ است و لذا $C(S, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S, X)$ است. همچنین

$$A' : C(S, X) \underset{\infty}{\oplus} C(S, X) \longrightarrow C(S, G)$$

نگاشت تقریب همزمان پیوسته است. □

نتیجه ۴.۴.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای M-جمعوند از فضای باناخ X باشد. در این صورت $C(S,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است و نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد.*

برهان. چون G یک زیر فضای M-جمعوند از فضای باناخ X است لذا بنا به نتیجه (۳.۳.۲)، G دارای یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است و طبق قضیه (۳.۴.۲)، $C(S,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد. □

لم ۵.۴.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت داریم:*

$$L(X, X \underset{\infty}{\oplus} X) = L(X, X) \underset{\infty}{\oplus} L(X, X).$$

برهان. فرض کنید $T \in L(X, X \underset{\infty}{\oplus} X)$ و $T(x) = (z_1, z_2)$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$A(x) = z_1, B(x) = z_2$$

در این صورت $A, B \in L(X, X)$ هستند. برای هر $x \in X$ که $\| x \| = 1$ داریم:

$$\| A(x) \| \leq max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq max\{\| A \|, \| B \|\},$$

با گرفتن سوپریمم از عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\| A \| \leq \sup_{\|x\|=1} max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq max\{\| A \|, \| B \|\}. \qquad (۱۸.۲)$$

به‌طور مشابه داریم:

$$\| B \| \leq \sup_{\|x\|=1} max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq max\{\| A \|, \| B \|\}. \qquad (۱۹.۲)$$

از (۱۸.۲) و (۱۹.۲) داریم:

$$max\{\| A \|, \| B \|\} \leq \sup_{\|x\|=1} max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq max\{\| A \|, \| B \| .\}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$max\{\| A \|, \| B \|\} = \sup_{\|x\|=1} max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\}.$$

تعریف می‌کنیم:

$$\phi : L(X, X \underset{\infty}{\oplus} X) \to L(X, X) \underset{\infty}{\oplus} L(X, X)$$

که

$$\phi(t) = (A, B)$$

است. به وضوح این نگاشت طولپا است زیرا:

$$\begin{aligned} \| \phi(T) \| &= max\{\| A \|, \| B \|\} \\ &= supmax\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \\ &= sup \| T(x) \| \\ &= \| T \| . \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۴.۲. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و G زیرفضای به‌طور همزمان پروکسیمینال از Y باشد. اگر G نگاشت تقریب همزمان خطی داشته باشد آنگاه $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و نگاشت تقریب همزمان خطی دارد.*

برهان. فرض کنید $\Pi : Y \underset{\infty}{\oplus} Y \longrightarrow G$ نگاشت تقریب همزمان خطی برای G باشد. که برای هر x, y متعلق به $Y \underset{\infty}{\oplus} Y$ ضابطه آن به صورت زیر است :

$$\Pi(x, y) = P_G(x, y).$$

نگاشت $A : L(X, Y \underset{\infty}{\oplus} Y) \longrightarrow L(X, G)$ را با ضابطه $A(f) = \Pi o f$ در نظر می‌گیریم که $f = (f_1, f_2)$ است. بنا به لم (۵.۴.۲) داریم:

$$A : L(X, Y) \underset{\infty}{\oplus} L(X, Y) \longrightarrow L(X, G)$$

و برای هر $x \in X$ ضابطه آن به صورت زیر است:

$$A(f_۱, f_۲) = \Pi o(f_۱, f_۲)$$

$$\Pi o(f_۱, f_۲)(x) = \Pi(f_۱(x), f_۲(x)) = P_G(f_۱(x), f_۲(x)).$$

همچنین این نگاشت، یک نگاشت خطی است زیرا برای هر $f_۱, f_۲$ و $g_۱, g_۲$ متعلق به $L(X, Y) \underset{\infty}{\oplus} L(X, Y)$ و هر α, β ثابت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
A(\alpha(f_۱, f_۲) + \beta(g_۱, g_۲))(x) =& \Pi o(\alpha(f_۱, f_۲) + \beta(g_۱, g_۲))(x) \\
&= \Pi(\alpha(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta(g_۱(x), g_۲(x))) \\
&= P_G(\alpha(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta(g_۱(x), g_۲(x))) \\
&= \alpha P_G(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta P_G(g_۱(x), g_۲(x)) \\
&= \alpha \Pi(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta \Pi(g_۱(x), g_۲(x)) \\
&= \alpha A(f_۱, f_۲)(x) + \beta B(g_۱, g_۲)(x) \\
&= (\alpha A(f_۱, f_۲) + \beta A(g_۱, g_۲))(x).
\end{aligned}$$

پس A یک نگاشت تقریب همزمان خطی برای $L(X, G)$ است. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است.

فرض کنید $g \in L(X, G)$ دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}
& max\{\| f_۱(x) - A(f_۱(x), f_۲(x)) \|, \| f_۲(x) - A(f_۱(x), f_۲(x)) \|\} \\
& = max\{\| f_۱(x) - P_G(f_۱(x), f_۲(x)) \|, \| f_۲(x) - P_G(f_۱(x), f_۲(x)) \|\} \\
& \leq max\{\| f_۱(x) - g(x) \|, \| f_۲(x) - g(x) \|\}.
\end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت:

$$max\{\| f_۱ - A(f_۱, f_۲) \|, \| f_۲ - A(f_۱, f_۲) \|\} \leq max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\}.$$

بنابراین طبق (۲.۲)، $A(f_۱, f_۲)$ بهترین تقریب همزمان برای $f_۱, f_۲$ است و $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است. □

نتیجه ۷.۴.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای M-جمعوند از فضای باناخ Y باشد. در این صورت $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد.*

برهان. بنا به نتیجه (۳.۳.۲) ، G دارای یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است و طبق قضیه (۶.۴.۲) $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد. □

قضیه ۸.۴.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته از فضای باناخ Y باشد. اگر $L(X, G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ باشد، آنگاه G به‌طور همزمان پروکسیمینال در Y است.*

برهان. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in Y$ و $x_. \in X$ ، $x_. \neq ۰$ باشد. با استفاده از قضیه (۳۹.۱.۱)، $x^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوریکه $\| x^* \| = ۱ = x^*(x_.)$ باشد. عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$x^* \otimes y_۱, x^* \otimes y_۲ : X \longrightarrow Y$$

برای هر $x \in X$ و $i = ۱, ۲$ ضابطه آن را به صورت $x^* \otimes y_i(x) = x^*(x) y_i$ تعریف می‌کنیم. $x^* \otimes y_۱, x^* \otimes y_۲$ به فضای عملگرهای خطی کراندار تعلق دارند زیرا

$$\| (x^* \otimes y_۱)(x) \| = \| x^*(x)(y_۱) \| \leq \| x^* \| \| y_۱ \| \leq \| y_۱ \| .$$

و همچنین برای α, β ثابت داریم

$$\begin{aligned} x^* \otimes y_۱(\alpha x_۱ + \beta x_۲) &= x^*(\alpha x_۱ + \beta x_۲) y_۱ \\ &= (\alpha x^*(x_۱) + \beta x^*(x_۲)) y_۱ \\ &= \alpha x^*(x_۱) y_۱ + \beta x^*(x_۲)(y_۱) \\ &= \alpha x^* \otimes y_۱(x_۱) + \beta x^* \otimes y_۱(x_۲). \end{aligned}$$

طبق فرض چون $L(X,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $L(X,Y)$ است لذا T ای متعلق به $L(X,G)$ وجود دارد به‌طوریکه:

$$max\{\| x^* \otimes y_۱ - T \|, \| x^* \otimes y_۲ - T \|\}\} \leq max\{\| x^* \otimes y_۱ - B \|, \| x^* \otimes y_۲ - B \|\}$$

برای هر $B \in L(X,G)$.

فرض کنید B به تمامی عملگرهایی به شکل $x^* \otimes g$ اشاره می‌کند که $g \in G$ است و $T = x^* \otimes g_۱$ در نظر بگیرید. آنگاه برای هر $g \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} & max\{\| x^* \otimes y_۱ - T \|, \| x^* \otimes y_۲ - T \|\} \\ \leq & max\{\| x^* \otimes y_۱ - x^* \otimes g \|, \| x^* \otimes y_۲ - x^* \otimes g \|\}. \end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & max\{\| x^* \otimes y_۱(x_o) - T(x_o) \|, \| x^* \otimes y_۲(x_o) - T(x_o) \\ & = max\{\| x^*(x_o)y_۱ - x^*(x_o)g_۱ \|, \| x^*(x_o)y_۲ - x^*(x_o)g_۱ \|\} \\ & \leq max\{\| x^*(x_o)y_۱ - x^*(x_o)g \|, \| x^*(x_o)y_۲ - x^*(x_o)g \|\}. \end{aligned}$$

پس برای هر $g \in G$ نتیجه می‌گیریم که:

$$max\{\| y_۱ - g_۱ \|, \| y_۲ - g_۱ \|\} \leq max\{\| y_۱ - g \|, \| y_۲ - g \|\}.$$

پس بنا به تعریف بهترین تقریب همزمان ، $g_۱$ بهترین تقریب همزمان برای $y_۱$ و $y_۲$ از G است.
□

لم بعد همان قضیه (۱.۴.۲) است با این تفاوت که در اینجا S یک مجموعه غیر تهی در نظر گرفته شده است.

لم ۹.۴.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضای بسته از X و S یک مجموعه غیرتهی باشد. در این صورت برای هر $f, g \in l^\infty(S, X)$ داریم:*

$$d(f, g, l^\infty(S, G)) = \sup_{s \in S} d(f(s), g(s), G).$$

برهان. فرض کنید $h \in l^\infty(S, G)$ باشد آنگاه برای هر $s \in S$ طبق **(۱.۲)** داریم:

$$max\| f(s) - h(s) \|, \| g(s) - h(s) \| \geq d(f(s), g(s), G)$$

با گرفتن سوپریمم از دو طرف نامساوی بالا داریم:

$$max\{\| f - h \|, \| g - h \|\} \geq \sup_s d(f(s), g(s), G)$$

حال از این‌که $h \in l^\infty(S, G)$ دلخواه بود داریم:

$$d(f, g, l^\infty(S, G)) \geq \sup_s d(f(s), g(s), G)$$

یک طرف نامساوی ثابت شد. حال به اثبات عکس نامساوی می‌پردازیم. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. آنگاه برای هر $s \in S$ ، $k(s) \in G$ وجود دارد به‌طوریکه:

$$max\{\| f(s) - k(s) \|, \| g(s) - k(s) \|\} < d(f(s), g(s), G) + \epsilon \qquad (۲۰.۲)$$

با استفاده از تعریف **(۱۶.۱.۱)** برای هر $h_o(s) = k(s), s \in S$ تعریف می‌کنیم. $h_o \in l^\infty(S, G)$ است. با گرفتن سوپریمم از دو طرف رابطه **(۲۰.۲)** و بنا به **(۱.۲)** نتیجه می‌گیریم:

$$d(f, g, l^\infty(S, G)) \leq max\{\| f - h_o \|, \| g - h_o \|\} < \sup_s d(f(s), g(s), G) + \epsilon,$$
$$d(f, g, l^\infty(S, G)) \leq \sup sd(f(s), g(s), G) + \epsilon.$$

چون ϵ دلخواه بود. لذا داریم:

$$d(f, g, l^\infty(S, G)) \leq \sup_s d(f(s), g(s), G).$$

و لذا قضیه ثابت می‌گردد. □

قضیه ۱۰.۴.۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X و S یک زیرمجموعه ناتهی باشد. آنگاه جملات زیر معادلند:*

۱. *G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

۲. *$l^\infty(S,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $l^\infty(S,X)$ است.*

برهان. ۱ $\leftarrow$ ۲

فرض کنید $f,g \in l^\infty(S,X)$ باشند. چون G به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است لذا برای هر $s \in S$ ، $k(s)$ ای متعلق به G وجود دارد به‌طوریکه :

$$max\{\parallel f(s)-k(s) \parallel, \parallel g(s)-k(s) \parallel\} \leq max\{\parallel f(s)-z(s) \parallel, \parallel g(s)-z(s) \parallel\} \quad (۲۱.۲)$$

که $z \in l^\infty(S,G)$ و $z(s) \in G$ است.

با استفاده از تعریف (۱۶.۱.۱) k ای متعلق به $l^\infty(S,G)$ وجود دارد که در (۲۱.۲) صدق می‌کند.بنابراین برای هر $z \in l^\infty(S,G)$ داریم:

$$max\{\parallel f-k \parallel, \parallel g-k \parallel\} \leq max\{\parallel f-z \parallel, \parallel g-z \parallel\}$$

لذا:

$$\sup_s d(f(s),g(s),G) = max\{\parallel f-k \parallel, \parallel g-k \parallel\} = d(f,g,l^\infty(S,G)).$$

که نتیجه می‌دهد $l^\infty(S,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $l^\infty(S,X)$ است.

۲ $\leftarrow$ ۱

فرض کنید $x,y \in X$ باشند.$f_x : S \to X$ و $f_y : S \to Y$ را برای هر $s \in S$ به‌ترتیب با ضابطه $f_x(s)=x$ و $f_y(s)=y$ در نظر بگیرید.با استفاده از لم(۹.۴.۲) داریم:

$$d(f_xf_y, L^\infty(S,G)) = \sup_s d(f_x(s),f_y(s),G) = d(x,y,G). \quad (۲۲.۲)$$

طبق فرض چون $l^\infty(S,G)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $l^\infty(S,X)$ است لذا g ای متعلق به $l^\infty(S,G)$ وجود دارد به‌طوریکه:

$$max\{\parallel f_x-g \parallel, \parallel f_y-g \parallel\} = d(x,y,G)$$

لذا با استفاده از (۲۲.۲) میتوانیم s_o متعلق به S در نظر بگیریم که

$$max\{\| x - g(s_o) \|, \| y - g(s_o)\} \leq d(x, y, G).$$

بنابراین $g(s_o)$ بهترین تقریب همزمان برای x و y از G است. □

فصل ۳

بهترین تقریب همزمان از یک مجموعه نامتناهی از توابع

۱.۳ مقدمه

در این فصل به بررسی بهترین تقریب همزمان از یک مجموعه نامتناهی از توابع می‌پردازیم. ابتدا مفهوم بهترین تقریب همزمان را در یک مجموعه نامتناهی از توابع تعریف و سپس مشخصه سازی و یکتایی بهترین تقریب همزمان را در این مجموعه بیان می‌کنیم و به اثبات قضایایی در این رابطه می‌پردازیم. در این فصل از مراجع [۲]، [۳]، [۴]، [۷]، [۱۴] و [۱۵] استفاده شده است.

۲.۳ تعریف بهترین تقریب همزمان در مجموعه نامتناهی از توابع

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار با نرم $\| . \|_X$ و B فضای خطی نرمدار که عناصرش دنباله‌های $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ هستند با نرم $\| . \|_B$ باشد. همچنین فرض کنید U به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$U = \{a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in B, \| a \|_B \leq 1\}.$$

در این صورت نرم را برای هر $F = (\phi_1, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| F \| = \max_{a \in U} \| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i \|_X \, . \tag{۱.۳}$$

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید توابع $\phi_۱, ..., \phi_i, ...$ در X داده شده‌اند و $F = (\phi_۱, ..., \phi_i, ...)$ و $S \subset X$ باشد. مسئله مورد بحث یافتن $\phi^* \in S$ است به طوریکه:

$$\| F - f^* \| = \inf_{\phi \in S} \| F - f \| \tag{۲.۳}$$

که $f^* = (\phi^*, ..., \phi^*, ...)$ و $f = (\phi, ..., \phi, ...)$ می‌باشد. f^* بهترین تقریب همزمان در F نامیده می‌شود.

مجموعه همه بهترین تقریب های همزمان $f = (\phi, ..., \phi, ...)$ که $\phi \in S$ در F را با $P_S(F)$ نشان می‌دهیم.

$d(F, S)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(F, S) = \inf\{\| F - f \| : f = (\phi, ..., \phi, ...), \phi \in S\}.$$

فرض اساسی در (۲.۳) این است که B به گونه‌ای است که:

$$\sup\{|\sum_{i=۱}^{\infty} a_i|, a \in U\} < \infty. \tag{۳.۳}$$

در حقیقت فرض زیر را روی فضای B اعمال می‌کنیم:

$$\sup\{\sum_{i=۱}^{\infty} |a_i|, a \in U\} < \infty. \tag{۴.۳}$$

اگر (۴.۳) برقرار باشد آنگاه U زیرمجموعه کراندار از B است. فرض کنید $\bar{U}$ بستار U در B در توپولوژی ضعیف-ستاره باشد. فضای دنباله‌های نامتناهی با نرم داده شده به‌وسیله جمع در (۴.۳)، فضای دوگان فضای دنباله‌های نامتناهی $c = (c_۱, ...c_n, ...)$ همگرا به $\{c_i\}$ و نرم $\| c \| = \sup_i |c_i|$ است. بنابراین $\bar{U}$ فضای هاسدورف فشرده با توپولوژی ضعیف-ستاره است.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید W علامت گوی یکه در فضای دوگان X و $\bar{U}$ فضای هاسدورف فشرده با توپولوژی ضعیف - ستاره باشد. برای $F = (\phi_۱, ..., \phi_i, ...)$ که $\phi_i \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$g_F(a, w) = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w, \phi_i > \quad (a, w) \in \overline{U} \times W.$$

که W با توپولوژی ضعیف - ستاره و $\bar{U} \times W$ با توپولوژی حاصل ضربی است. ضرب داخلی نشانه ارتباط عنصرهای X و دوگان آن است.

۳.۳ مشخصه سازی

لم ۱.۳.۳. *فرض کنید* $F = (\phi_{۱}, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X$ *باشد و داشته باشیم:*

$$\lim_{i\to\infty} \phi_i = \phi_o \tag{۵.۳}$$

در این صورت $g_F(a,w)$ *روی* $\bar{U}\times W$ *پیوسته است.*

برهان. فرض کنید F طوری باشد که شرایط (۵.۳) برقرار باشد، در این صورت برای هر $\epsilon > o$ وجود دارد N ای که برای هر $i > N$ ، داریم:

$$\parallel \phi_i - \phi_o \parallel_X < \epsilon.$$

حال برای هر $(a,w),(a^{۰},w^{۰}) \in \bar{U}\times W$ داریم:

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_i > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_i > | = |\sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_i > + \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_o > \\
&- \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_o > + \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_o > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_o > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_i > | \\
&\leq |\sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_o > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w^{۰},\phi_o > + \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w^{۰},\phi_o > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_o > | \\
&+ |\sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_i > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i < w,\phi_o > + \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_o > - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_i > | \\
&\leq |\sum_{i=۱}^{\infty} a_i| \, |< w - w^{۰},\phi_o >| + |\sum_{i=۱}^{\infty}(a_i - a_i^{۰})| \, |< w^{۰},\phi_o >| \\
&+ |\sum_{i=۱}^{N} a_i < w,\phi_i > - \sum_{i=۱}^{N} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_i > | + |\sum_{i=۱}^{N} a_i < w,\phi_o > - \sum_{i=۱}^{N} a_i^{۰} < w^{۰},\phi_o > | \\
&+ \sum_{N+۱}^{\infty} |a_i|\epsilon + \sum_{N+۱}^{\infty} |a_i^{۰}|\epsilon.
\end{aligned}$$

فرض کنید $(a,w) \longrightarrow (a^{\circ}, w^{\circ})$ در این صورت:

$$< w - w^{\circ}, \phi_{\circ} > \to o, \quad \sum_{i=1}^{\infty}(a_i - a_i^{\circ}) \to o$$

و همچنین:

$$| \sum_{i=1}^{N} a_i < w, \phi_i > - \sum_{i=1}^{N} a_i^{\circ} < w^{\circ}, \phi_i > | \to o$$

و

$$| \sum_{i=1}^{N} a_i < w, \phi_o > - \sum_{i=1}^{N} a_i^{\circ} < w^{\circ}, \phi_o > | \to o.$$

چون ϵ می‌تواند به دلخواه کوچک فرض شود نتیجه می‌شود که $g_F(a,w)$ روی $\bar{U} \times W$ پیوسته است. □

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنید $N(a,w)$ نشان دهنده گردایه $\{O\}$ از همه همسایگی‌های باز (a,w) در $\bar{U} \times W$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$g_F^{+}(a,w) = \inf_{O \in N(a,w)} \sup_{(a,w) \in O} g_F(a,w) \quad \forall (a,w) \in \overline{U} \times W.$$

لم ۳.۳.۳. *$g_F^{+}(.,.)$ نیم پیوسته بالایی روی $\overline{U} \times W$ است.*

برهان. رجوع شود به [۷، ملاحظه ۱]. □

لم ۴.۳.۳. *فرض کنید $F = (\phi_1, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X$ و $f = (\phi, ..., \phi, ...), \phi \in X$ باشد، در این صورت:*

$$\| F - f \| = \max_{(a,w) \in \bar{U} \times W} [g_F^{+}(a,w) - g_f(a,w)] = \max_{(a,w) \in \bar{U}_{\circ} \times \bar{W}_{\circ}} [g_F^{+}(a,w) - g_f(a,w)].$$

که $\overline{U_{\circ}} = \overline{ext\bar{U}}$ و $\overline{W_{\circ}} = \overline{extW}$ می‌باشد. که ext مجموعه نقاط فرین می‌باشد. که در تعریف (۲۷.۱.۱) آمده است.

برهان. رجوع شود به [۴، لم ۳]. □

لم ۵.۳.۳. *فرض کنید G یک تابع نیم‌پیوسته بالایی و کراندار حقیقی تعریف شده روی فضای هاسدورف فشرده K و $V \subseteq C(K)$، فضای توابع پیوسته حقیقی تعریف شده روی K، باشد. تعریف می‌کنیم:*

$$d(G-v) = \max_{t\in K}[G(t)-v(t)] \quad \forall v \in V.$$

آنگاه اگر $\inf_{v\in V} d(G-v) > -\infty$ **جملات زیر معادلند:**

۱. *برای* $v^* \in V$

$$d(G-v^*) = \inf_{v\in V} d(G-v) \longrightarrow d(G_\alpha - v^*) = \inf_{v\in V} d(G_\alpha - v),$$

که

$$G_\alpha = v^* + \alpha(G-v^*) \quad \forall \alpha > o.$$

۲. $d(G-v^*) = \inf_{v\in V} d(G-v)$ *اگر و تنها اگر برای هر* $v \in V$، $t \in K$ **موجود باشد به طوریکه:**

$$G(t) - v^*(t) = d(G-v^*), \quad v^*(t) - v(t) \geq o$$

برهان. رجوع شود به [۱۵، قضیه ۱]. □

تعریف ۶.۳.۳. یک مجموعه S برای تقریب همزمان، سان [۱] نامیده می‌شود اگر برای هر

$$F = (\phi_1, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X, \quad f^* = (\phi^*, ..., \phi^*, ...), \phi^* \in S, \quad f^* \in P_S(F)$$

نتیجه بگیریم:

$f^* \in P_S(F_\alpha)$ که $F_\alpha = f^* + \alpha(F - f^*)$ و $\alpha \geq o$.

قضیه ۷.۳.۳. *اگر* $F = (\phi_1, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X$ *و* $S \subseteq X$ *یک سان برای تقریب همزمان باشد. آنگاه* $f^* \in P_S(F)$ *اگر و تنها اگر برای هر* $f = (\phi, ..., \phi, ...), \phi \in S$ **وجود داشته باشد** $(a, w) \in \overline{U.} \times \overline{W.}$ **به‌طوریکه:**

$$g_F^+(a,w) - g_f^*(a,w) = \| F - f^* \|$$

$$g_{f^*-f}(a,w) \geq o.$$

[۱] Sun

برهان. فرض کنید $S \subset X$ یک سان برای تقریب همزمان و $K = \bar{U}_\circ \times \bar{W}_\circ$ باشد. از لم (۴.۳.۳) نتیجه می‌شود که مساله اصلی تقریب F بوسیله f معادل است با تقریب g_f^+ بوسیله g_f به معنی کمینه کردن عبارت زیر:

$$\max_{t\in K}[g_F^+(t) - g_f(t)]. \quad (۶.۳)$$

روی همه توابع $g_f(t)$ در مجموعه :

$$V = \{g_f : f = (\phi, ..., \phi, ...)\}.$$

فرض کنید $f^* \in P_S(F)$ باشد در این صورت $g_f^* \subset V$ ، (۶.۳) را کمینه می‌کند. چون S ، سان است نتیجه می‌شود که $f^* \in P_S(f^*+\alpha(F-f^*))$ است. بنابراین g_{f^*} عبارت زیر را مینیمم می‌کند:

$$\max_{t\in K}[g^+_{f^*+\alpha(F-f^*)}(t) - g_f(t)].$$

طبق لم (۱.۳.۳)، $V \subset C(K)$ می‌باشد. برای هر $t \in K$ قرار می‌دهیم:

$$G(t) = g_F^+(t), \quad v(t) = g_f(t), \quad v^*(t) = g_{f^*}(t).$$

شرایط و جمله ۱ لم(۵.۳.۳) برقرار است در نتیجه جمله (۲) نیز برقرار می‌شود و نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۸.۳.۳. *فرض کنید $S \subset X$ یک سان برای تقریب همزمان باشد و $F = (\phi_1, ..., \phi_i, ...)$ که $\phi_i \in X$ و $\phi_i \to \phi_\circ$ وقتی که $i \to \infty$ آنگاه $f^* \in P_S(F)$ اگر و فقط اگر برای هر $f = (\phi, ..., \phi, ...), \phi \in S$ وجود داشته باشد $a \in ext\bar{U}$ و $w \in extW$ به‌طوریکه:*

$$g_{F-f^*}(a, w) = \parallel F - f^* \parallel \quad (۷.۳)$$

$$g_{f^*-f}(a, w) \geq o. \quad (۸.۳)$$

برهان. فرض کنید شرایط بیان شده روی F و S برقرار باشد. در این صورت طبق لم (۱.۳.۳) ، g_F پیوسته است و طبق قضیه (۷.۳.۳) ، (۷.۳) و (۸.۳) برقرار است. فرض کنید $f^* \in P_S(F)$

باشد در این صورت طبق قضیه (۷.۳.۳) نتیجه می‌شود که برای هر $\phi \in S$ ،$f = (\phi, ..., \phi, ...)$ ، $w \in \bar{W}$ و $a \in \bar{U}$ وجود دارد به‌طوریکه (۷.۳) و (۸.۳) برقرارند. با استفاده از قضیه (۳۱.۱.۱) می‌توانیم $a \in ext\bar{U}$ و $w \in extW$ انتخاب کنیم. □

۴.۳ یکتایی

تعریف ۱.۴.۳. X به‌طور یکنواخت محدب در هر مسیر نامیده می‌شود اگر برای هر $x_n, y_n \in X$ که $\| x_n \|_X \leq ۱, \| y_n \|_X \leq ۱$ و $\| x_n + y_n \|_X \longrightarrow ۲$ نتیجه شود $\| x_n - y_n \|_X \longrightarrow ۰$. در صورتی که $x_n - y_n = \lambda_n y$ برای $y \in X$ و $\lambda_n \in R$.

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنید X به‌طور یکنواخت محدب در هر مسیر و $S \subset X$ یک سان برای تقریب همزمان باشد. در این صورت برای هر $F = (\phi_۱, ..., \phi_i, ...), \phi_i \in X$ که $d(F, X) < d(F, S)$ باشد، $P_S(F)$ حداکثر یک عنصر را شامل می‌شود.*

برهان. (فرض خلف) فرض کنید شرایط بیان شده به‌وسیله X, S و F برقرار باشد و همچنین فرض کنید $P_S(F)$ $f^* = (\phi^*, ..., \phi^*, ...) \in$ و $\bar{f} = (\bar{\phi}, ..., \bar{\phi}, ...) \in P_S(F)$ که $\bar{\phi} \neq \phi^*$ است. تعریف می‌کنیم:

$$\phi_i^\circ = ۲\phi_i - \bar{\phi}, \quad i = ۱, ۲, ..., \quad F^\circ = (\phi_۱^\circ, ..., \phi_i^\circ, ...).$$

بنابراین از تعریف (۶.۳.۳) نتیجه می‌شود که $\bar{f} \in P_S(F^\circ)$. همچنین:

$$\begin{aligned} \| F^\circ - f^* \| &= \| ۲F - \bar{f} - f^* \| \\ &\leq \| F - \bar{f} \| + \| F - f^* \| = ۲ \| F - \bar{f} \| \\ &= \| F^\circ - \bar{f} \| . \end{aligned}$$

بنابراین $f^* \in P_S(F^\circ)$. حال فرض کنیم $\{a^n\} \in U$ باشد به‌طوری که:

$$lim_{n \longrightarrow \infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (۲\phi_i - \bar{\phi} - \phi^*) \|_X = \sup_{a \in U} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i (۲\phi_i - \bar{\phi} - \phi^*) \|_X .$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\| F^\circ - f^* \| &= lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (۲\phi_i - \bar{\phi} - \phi^*) \|_X \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} [\| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \bar{\phi}) \|_X + \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X] \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \bar{\phi}) \|_X + \lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X \\
&\leq \| F - \bar{f} \| + \| F - f^* \| \\
&= \| F^\circ - f^* \| .
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \bar{\phi}) \|_X = \lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X = \| F - f^* \|,$$

و همچنین:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \bar{\phi}) + \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X = ۲ \| F - f^* \| .$$

حال برای هر n فرض کنید:

$$\beta_n = \max\{\| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X, \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \bar{\phi}) \|_X\},$$

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n \frac{(\phi_i - \bar{\phi})}{\beta_n}, \\
v_n &= \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n \frac{(\phi_i - \phi^*)}{\beta_n}.
\end{aligned}$$

آنگاه:

$$\| u_n \|_X \leq ۱, \quad \| v_n \|_X \leq ۱,$$

و هنگامی که $n \longrightarrow \infty$

$$\| u_n + v_n \|_X \longrightarrow ۲.$$

که:

$$u_n - v_n = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n \frac{(\phi^* - \bar{\phi})}{\beta_n}.$$

چون X به‌طور یکنواخت محدب در هر مسیر است طبق تعریف (۱.۴.۳) نتیجه می‌شود که:

$$\| u_n - v_n \|_X \longrightarrow o,$$

بنابراین زمانی که $n \longrightarrow \infty$

$$|\sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n| \longrightarrow o.$$

بنابراین برای هر $\phi \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}
\| F - f^* \| &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi^*) \|_X \\
&\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi_i - \phi) \|_X + \lim_{n \longrightarrow \infty} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^n (\phi - \phi^*) \|_X \\
&\leq \sup_{a \in U} \| \sum_{i=۱}^{\infty} a_i (\phi_i - \phi) \|_X .
\end{aligned}$$

در نتیجه $f^* \in P_X(F)$ که با فرض $d(F,X) < d(F,S)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

فصل ۴

بهترین تقریب همزمان در فضای ضرب تانسوری

۱.۴ مقدمه

مطالبی که در این فصل ارائه می‌گردد در مورد بهترین تقریب همزمان و وجود آن در فضای ضرب تانسوری به عنوان یک عملگر است. در ابتدا مفهوم به طور همزمان پروکسیمینال بودن را درفضای ضرب تانسوری بیان کرده و P - جمعوند را تعریف می‌کنیم. سپس در مورد بهترین تقریب همزمان قضایایی را مطرح می‌کنیم. در این فصل از مرجع [۲] ، [۵] و [۱۲] استفاده شده است.

۲.۴ به‌طور همزمان پروکسیمینال در فضای ضرب تانسوری

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید Y یک فضای باناخ و F زیرفضای بسته از Y باشد. قرار می‌دهیم:

$$J(Y) = Y \bigoplus_1 Y = \{x + y : x, y \in Y\}$$

به‌طوری‌که :

$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$$

و

$$D(F) = \{(z, z) : z \in F\}$$

به‌طوری‌که:

$$\| (z,z) \|=\| z \| + \| z \| .$$

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای هر زیر مجموعه متناهی $E \subseteq X$ و $1 \leq P < \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$d_p(E,G) = inf\{(\sum_{e\in E} \| e-y \|^p)^{\frac{1}{p}} : y \in G\}$$

و

$$d_\infty(E,G) = inf\{\sup_{e\in E} \| e-y \|: y \in G\}.$$

چنین اینفیممی لازم نیست که اخذ شود. در حالتی که برای هر زیرمجموعه متناهی $E \subseteq X$ ، اینفیمم اخذ شود می‌گوییم G، $|E|$-به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است که $|E|$ کاردینال E است. یا به عبارت دیگر G، n-به‌طور همزمان پروکسیمینال در X برای d_1 است، اگر برای هر مجموعه E در X با $|E| = n$ وجود داشته باشد $y \in G$ به‌طوری که:

$$d_1(E,G) = \sum_{e\in E} \| e-y \|$$

در حالت $|E| = 1$، ۱-به‌طور همزمان پروکسیمینال بودن همان پروکسیمینال بودن است.

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. در این صورت G ۲- به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ ، y ای متعلق به G وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\| x_1 - y \| + \| x_2 - y \| \leq \| x_1 - z \| + \| x_2 - z \| \quad \forall z \in G.$$

n-به‌طور همزمان پروکسیمینال نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و X^* و Y^* دوگان آنها باشد. منظور از عبارت $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ که $x_i \in X$ ، $y_i \in Y$ و $n \in N$ عملگری مانند $A : X^* \to Y$ است که به‌صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$A\phi = \sum_{i=۱}^{n} \phi(x_i)y_i, \quad \phi \in X^*.$$

این عملگر یک رابطه هم‌ارزی را از X^* به Y به‌صورت زیر تعریف می‌کند:
$\sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i \sim \sum_{i=۱}^{n} u_i \otimes v_i$ اگر و فقط اگر این دو عبارت عملگر یکسانی را از X^* به Y تعریف کنند.
مجموعه تمام کلاس‌های هم‌ارزی ایجاد شده را فضای تانسوری و با نماد $X \otimes Y$ نمایش می‌دهند.
به طور کلی $X \otimes Y$ را فضای همه عملگرهای متناهی بعد از فضای دوگان X^* به Y معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنید α یک نرم روی $X \otimes Y$ باشد. α یک نرم متقاطع [۱]نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ داشته باشیم

$$\alpha(x \otimes y) = \| x \| \| y \| .$$

تعریف ۶.۲.۴. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. در این صورت $X \overset{\alpha}{\otimes} Y$ ضرب تانسوری X و Y با نرم متقاطع α است.

تعریف ۷.۲.۴. نرم متقاطع تصویری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(x) = inf\{\sum_{i=۱}^{n} \| a_i \| \| b_i \| : x = \sum_{i=۱}^{n} a_i \otimes b_i\}$$

که $x \in A \otimes B$ است.
حاصلضرب تانسوری در این نرم حاصلضرب تانسوری تصویری نامیده می‌شود و با $A \overset{\wedge}{\otimes} B$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۴. نرم متقاطع یک به یک را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\epsilon(x) = sup\{|(a^* \otimes b^*(x)| : a^* \in A^*, b^* \in B^*, \| a^* \|, \| b^* \| \leq ۱\}$$

که در آن $x \in A \otimes B$ و B^* ، A^* دوگان فضاهای باناخ B و A می‌باشند.
حاصلضرب تانسوری در این نرم حاصلضرب تانسوری یک به یک نامیده می‌شود و با $A \overset{\vee}{\otimes} B$ نشان داده می‌شود.

[۱] Crossnorm

گزاره ۹.۲.۴. *ϵ یک نرم متقاطع روی $X \otimes Y$ است. همچنین اگر α یک نرم متقاطع روی $X \otimes Y$ باشد آنگاه:*

$$\epsilon(u) \leq \alpha(u), \quad \forall u \in X \otimes Y$$

برهان. رجوع شود به [۵، گزاره ۳]. $\square$

ملاحظه ۱۰.۲.۴. *گوی واحد بسته از فضای باناخ X را با $B[X]$ و کره واحد از X را با $S[X]$ نشان می‌دهیم.*

قضیه ۱۱.۲.۴. *فرض کنید Y یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از Y باشد. اگر $X \overset{\vee}{\otimes} G$ ۲ - به‌طور همزمان پروکسیمینال در $X \overset{\vee}{\otimes} Y$ باشد آنگاه G ۲ - به‌طور همزمان پرو کسیمینال در Y است.*

برهان. فرض کنید $y_1, y_2 \in Y$ و $x \in S[X]$ باشد. $x^* \in S[X^*]$ را به‌طوریکه $< x, x^* >= 1$ انتخاب می‌کنیم. عناصر $x \otimes y_1$ و $x \otimes y_2$ متعلق به $X \overset{\vee}{\otimes} Y$ هستند.
طبق فرض چون $X \overset{\vee}{\otimes} G$ ۲ - به‌طور همزمان پروکسیمینال در $X \overset{\vee}{\otimes} Y$ است در نتیجه $z_0 \in X \overset{\vee}{\otimes} G$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $z \in X \overset{\vee}{\otimes} G$:

$$\| x \otimes y_1 - z_0 \| + \| x \otimes y_2 - z_0 \| \leq \| x \otimes y_1 - z \| + \| x \otimes y_2 - z \| .$$

اگر $z = x \otimes g$ که $g \in G$ باشد نیز این نامساوی برقرار است و همچنین طبق گزاره (۹.۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \| x \otimes y_1 - z_0 \| + \| x \otimes y_2 - z_0 \| &\leq \| x \otimes y_1 - x \otimes g \| + \| x \otimes y_2 - x \otimes g \| \\ &\leq \| x \| (\| y_1 - g \| + \| y_2 - g \|) \\ &= \| y_1 - g \| + \| y_2 - g \| . \end{aligned}$$

از این رو برای هر $v^* \in S[X^*]$ داریم:

$$\| (x \otimes y_1)(v^*) - z_0(v^*) \| + \| x \otimes y_2(v^*) - z_0(v^*) \| \leq \| y_1 - g \| + \| y_2 - g \| .$$

v^* را مساوی با x^* در نظر می‌گیریم. با این وجود $(x \otimes y_1)(x^*) = y_1$ و $(x \otimes y_2)(x^*) = y_2$ است. بنابراین:

$$\| y_1 - z.(x^*) \| + \| y_2 - z.(x^*) \leq \| y_1 - g \| + \| y_2 - g \| .$$

در نتیجه $z.(x^*)$، ۲-بهترین تقریب همزمان $y_1, y_2 \in Y$ است. بنابراین G ، ۲-به‌طور همزمان پروکسیمینال در Y است. □

ملاحظه ۱۲.۲.۴. *قضیه ۱۰.۲.۳ برای n - به‌طور همزمان پروکسیمینال بودن نیز برقرار است.*

برهان. مشابه قضیه ۱۰.۲.۳ است. □

مثال ۱۳.۲.۴. فرض کنید I یک فضای هاسدورف فشرده باشد. فضای $C(I)\overset{\vee}{\otimes}X$ به‌طور ایزومتری ایزومورفیسم با فضای باناخ $C(I,X)$ از توابع پیوسته $f : I \longrightarrow X$ مجهز به نرم $\| f \|_\infty = sup\{\| f(\omega) \| : \omega \in I\}$ است.

برهان. نگاشت خطی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$J : C(I) \otimes X \longrightarrow C(I,X)$$

$$J(\Sigma_{i=1}^n f_i \otimes x_i)(\omega) = \Sigma_{i=1}^n f_i(\omega)x_i.$$

ابتدا نشان می‌دهیم نرم تابع $J(\Sigma_{i=1}^n f_i \otimes x_i)$ با نرم تانسوری یک به یک $\Sigma_{i=1}^n f_i \otimes x_i$ یکی است. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}
\| J(\Sigma_{i=1}^n f_i \otimes x_i) \| &= sup\{\| \Sigma_{i=1}^n f_i(\omega)x_i \| : \omega \in I\} \\
&= sup\{|x^*(\Sigma_{i=1}^n f_i(\omega)x_i)| : \omega \in I, x^* \in X^*, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= sup\{|\Sigma_{i=1}^n f_i(\omega)x^*(x_i)| : \omega \in I, x^* \in X^*, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= sup\{sup\{|\Sigma_{i=1}^n x^*(x_i)f_i(\omega)| : \omega \in I\} : x^* \in X^*, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= sup\{\| \Sigma_{i=1}^n x^*(x_i)f_i \|_\infty : x^* \in X^*, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= sup\{|\nu(\Sigma_{i=1}^n x^*(x_i)f_i)| : \nu \in C(I)^*, x^* \in X^*, \| \nu \|, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= sup\{|\Sigma_{i=1}^n x^*(x_i)\nu(f_i)| : \nu \in C(I)^*, x^* \in X^*, \| \nu \|, \| x^* \| \leq 1\} \\
&= \epsilon(\Sigma_{i=1}^n f_i \otimes x_i).
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که $J(C(I)\otimes X)$ در $C(I,X)$ چگال است. فرض کنید $f: I\to X$ پیوسته و $\epsilon>۰$ باشد. چون $f(I)$ فشرده است $\omega_۱,...,\omega_n\in I$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $\omega\in I$ داریم:

$$\parallel f(\omega)-f(\omega_j)\parallel\leq\frac{\epsilon}{۲}$$

برای j هایی که $۱\leq j\leq n$ باشد. فرض کنید $U_j=\{\omega\in I:\parallel f(\omega)-f(\omega_j)\parallel<\epsilon\}$ برای $۱\leqslant j\leqslant n$ باشد. در این صورت $U_۱,..U_n$ یک پوشش باز از I است.
فرض کنید $\{f_۱,...,f_n\}\subseteq C(I)$ یک افراز واحد وابسته به پوشش باز $\{U_۱,...,Un\}$ باشد یعنی

$$\Sigma_{i=۱}^n f_i(\omega)=۱,\quad o\leq f_j(\omega)\leq ۱\quad \forall\omega\in I, ۱\leq j\leq n$$

و

$$f_j(\omega)=o\quad if\quad \omega\notin U_j\quad for\quad ۱\leq j\leq n.$$

اگر $g: I\to X$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$g(\omega)=\Sigma_{i=۱}^n f_i(\omega)f(\omega_i)$$

آنگاه برای هر $\omega\in I$ داریم:

$$\parallel g(\omega)-f(\omega)\parallel<\epsilon.$$

در نتیجه J به‌طور ایزومتری ایزومورفیسم است و $C(I)\overset{\vee}{\otimes}X$ با $C(I,X)$ می‌تواند یکی فرض شود.
□

نتیجه ۱۴.۲.۴. *فرض کنید Y یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از Y باشد.اگر $C(I,G)$ ۲- به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(I,X)$ باشد آنگاه G ۲- به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. از قضیه (۱۱.۲.۴) و این که $C(I,X)=C(I)\overset{\vee}{\otimes}X$ نتیجه حاصل می‌شود. □

۳.۴ P - جمعوند

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G زیرفضایی از X باشد. G، P-جمعوند ($1 \leq P < \infty$) نامیده می‌شود اگر زیرفضای بسته $W \subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X = G \oplus W$ باشد و نرم $x = g + w$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\| x \| = (\| g \|^p + \| w \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

و به صورت $X = G \underset{p}{\oplus} W$ نمایش داده می‌شود.

اگر G ، ۱- جمعوند در X باشد آنگاه تصویر:

$$P : X \longrightarrow G, P(g+w) = g$$

یک L^1 - تصویر از X به G نامیده می‌شود و G را ۱- متمم در X می‌گویند.
در حالتی که $\| x \| = max\{\| g \|, \| w \|\}$ ، G یک ∞ - جمعوند نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای ۱-جمعوند از X باشد. در این صورت G ، ۲-به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. فرض کنید x و y متعلق به X باشند. چون G یک زیرفضای ۱-جمعوند از X است پس $X = G \underset{1}{\oplus} M$. بنابراین:

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2.$$

فرض کنید $z = \frac{x_1+y_1}{2}$باشد در این صورت:

$$x - z = \frac{x_1 - y_1}{2} + x_2, \quad y - z = \frac{y_1 - x_1}{2} + y_2$$

از این رو:

$$\begin{aligned}\| x-z \| + \| y-z \| &= \| \frac{x_۱ - y_۱}{۲} \| + \| x_۲ \| + \| \frac{y_۱ - x_۱}{۲} \| + \| y_۲ \| \\ &= \| x_۲ \| + \| y_۲ \| + \| x_۱ - y_۱ \| \\ &\leq \| x_۲ \| + \| y_۲ \| + \| x_۱ - w \| + \| y_۱ - w \|, \quad \forall w \in G \\ &= (\| x_۲ \| + \| x_۱ - w \|) + (\| y_۲ \| + \| y_۱ - w \|) \\ &= \| x-w \| + \| y-w \| .\end{aligned}$$

در نتیجه z ۲-بهترین تقریب همزمان در G برای x و y است و G ۲-به‌طور همزمان پروکسیمینال در X است. □

گزاره ۳.۳.۴. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. اگر $u \in X \hat{\otimes} Y$ و $\epsilon > ۰$ باشد. آنگاه وجود دارد دنباله $\{x_n\}$ در X و $\{y_n\}$ در Y به‌طوری‌که:*

۱. $u = \sum_{n=۱}^{\infty} x_n \otimes y_n$

۲. $\lim \| y_n \| = ۰ = \lim \| x_n \|$

۳. $\pi(u) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \| x_n \| \| y_n \| \leq \pi(u) + \epsilon$

برهان. رجوع شود به [۱۲، لم ۱۸.۱]. □

گزاره ۴.۳.۴. *فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و G زیرفضا و ۱-جمعوند در Y باشد. در این صورت $X \hat{\otimes} G$ ، ۱- جمعوند در $X \hat{\otimes} Y$ است.*

برهان. فرض کنید P ، $L^۱$ - تصویر نسبت به G باشد. برای $A \in X \hat{\otimes} Y$ قرار می‌دهیم:

$$A_۱ = PA$$

و

$$A_۲ = (I-P)A.$$

$A_۱$ و $A_۲$ در $X \hat{\otimes} Y$ هستند. $\epsilon > ۰$ و $A = \sum x_i \otimes y_i$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که طبق گزاره (۳.۳.۴) داریم:

$$\| A \| \leq \sum \| x_i \| \| y_i \| \leq \| A \| + \epsilon.$$

بنابراین:

$$A_۱ = \sum x_i \otimes Py_i$$

و

$$A_۲ = \sum x_i \otimes (I-P)y_i$$

حال

$$A = A_۱ + A_۲.$$

و چون G ، ۱- جمعوند است داریم:

$$\| A_۱ \| + \| A_۲ \| \leq \sum \| x_i \| (\| Py_i \| + \| (I-P)y_i \|) = \sum \| x_i \| \| y_i \| .$$

بنابراین:

$$\| A \| \leq \| A_۱ \| + \| A_۲ \| \leq \sum \| x_i \| \| y_i \| \leq \| A \| + \epsilon.$$

چون ϵ دلخواه بود نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۵.۳.۴. *فرض کنید Y یک فضای باناخ و G ، ۱-جمعوند از Y باشد. در این صورت $X \overset{\wedge}{\otimes} G$ ، ۲-به‌طور همزمان پروکسیمینال در $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ است.*

برهان. از گزاره (۴.۳.۴) نتیجه می‌شود که $X \overset{\wedge}{\otimes} G$ ، ۱ -جمعوند در $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ است. و طبق قضیه (۲.۳.۴) نتیجه حاصل می‌شود. □

فصل ۵

نگاشت تقریب همزمان در فضاهای ضرب تانسوری

۱.۵ مقدمه

در این فصل مفهوم و وجود نگاشت تقریب همزمان را در فضای ضرب تانسوری بیان کرده و ارتباط آن را با به‌طور همزمان پروکسمینال بودن بررسی می‌کنیم. در این فصل از مراجع [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۳] استفاده شده است.

۲.۵ تعریف نگاشت تقریب همزمان در فضای ضرب تانسوری

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید α یک نرم روی $X \otimes Y$ باشد.α^* را روی $X^* \otimes Y^*$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha^*(\sum_{i=۱}^{n} \phi_i \otimes \psi_i) = sup\{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} \phi_i(x_j)\psi_i(y_j) : \alpha(\sum_{j=۱}^{m} x_j \otimes y_j) = ۱\}$$

که $\phi_i \in X^*$ و $\psi_i \in Y^*$ برای $i = ۱, ..., n$ است.

تعریف ۲.۲.۵. نرم α روی $X \otimes Y$ نرم متقاطع منطقی [۱] نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برای α برقرار باشد:

۱. به ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، $\alpha(x \otimes y) = \| x \| \| y \|$

[۱] Crossnorm reasonable

۲. برای هر $\phi \in X^*, \psi \in Y^*$ تابعک $\phi \otimes \psi$ روی $(X \otimes Y, \alpha)$ کراندار و نرمش برابر با $\| \phi \| \| \psi \|$ باشد.

لم ۳.۲.۵. *اگر α یک نرم متقاطع منطقی روی $X \otimes Y$ باشد آنگاه α^* یک نرم متقاطع منطقی روی $X^* \otimes Y^*$ است.*

برهان. رجوع شود به [۱۰، لم ۵.۱]. □

تعریف ۴.۲.۵. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. نرم متقاطع α را روی $X \otimes Y$ یکنواخت گویند اگر برای هر جفت از عملگرهای $A \in L(X, X)$ و $B \in L(Y, Y)$ داشته باشیم:

$$\alpha(\sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i) \leq \| A \| \| B \| \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) \quad \forall x_i \in X, y_i \in Y.$$

تعریف ۵.۲.۵. برای هر $z \in X \otimes Y$ تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(z) = inf\{\sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \| y_i \| : x_i \in X, y_i \in Y, z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$$

و نرم λ را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}) = sup\{\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)y_i \| : f \in X^*, \| f \| = 1\}.$$

تعریف ۶.۲.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و W یک زیرفضا از X باشد. نگاشت $P : X \longrightarrow W$ نگاشت تقریب همزمان نامیده می‌شود اگر برای هر مجموعه کراندار S در X داشته باشیم:

$$\sup_{t \in S} \sup_{s \in S} \| s - Pt \| \leq \sup_{s \in S} \| s - w \| \quad \forall w \in W.$$

قضیه ۷.۲.۵. *برای هر فضای هاسدورف فشرده S و هر فضای باناخ Y داریم:*

$$C(S) \otimes_\lambda Y = C(S, Y)$$

برهان. رجوع شود به[۱۰، قضیه ۱۳.۱]. □

لم ۸.۲.۵. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و G زیرفضای بسته از X باشد. در این صورت $G \otimes_\lambda Y$ زیرفضای بسته از $X \otimes_\lambda Y$ است.*

برهان. رجوع شود به [۱۰، لم ۱۷.۱]. □

لم ۹.۲.۵. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و G و H به ترتیب زیرفضاهای بسته از X و Y باشند و α یک نرم متقاطع یکنواخت باشد. همچنین فرض کنید $G \otimes_\alpha Y + X \otimes_\alpha H$ زیرفضای پروکسیمینال از $X \otimes_\alpha Y$ باشد. در این صورت G در X و H در Y پروکسیمینال است.*

برهان. رجوع شود به [۸، قضیه ۱.۳]. □

لم ۱۰.۲.۵. *فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار، G زیرفضای خطی از X و $x \in X \setminus \bar{G}$ ، $g_\circ \in G$ باشد. در این صورت $g_\circ \in P_G(x)$ است اگر و فقط اگر $\varphi \in X^*$ وجود داشته باشد به‌طوریکه:*

$$\| \varphi \| = 1, \quad \varphi(g) = o \quad \forall g \in G, \quad \varphi(x - g_o) = \| x - g_o \| .$$

برهان. رجوع شود به [۱۳، قضیه ۱.۱]. □

اگر X و Y مجموعه‌های غیرتهی باشند و تابع $f : X \times Y \longrightarrow R$ برد کراندار داشته باشد آنگاه داریم:

$$\sup_{x \in X, y \in Y} f(x,y) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x,y) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y).$$

به‌طور معادل:

$$\sup_{x \in X, y \in Y} f(x,y) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} f_x(y) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X} f_x(y)$$

که f_x روی Y به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_x(y) := f(x,y) \quad \forall y \in Y.$$

۳.۵ وجود نگاشت تقریب همزمان در فضاهای ضرب تانسوری

قضیه ۱.۳.۵. *فرض کنید S و T فضای هاسدورف فشرده باشند. اگر G زیرفضایی از $C(S)$ باشد به‌طوریکه $G \otimes_\lambda C(T)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,T)$ باشد آنگاه G به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S)$ است.*

برهان. فرض کنید $W = G \otimes_\lambda C(T)$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,T)$ و B یک مجموعه کراندار در $C(S)$ باشد. برای هر $f \in B$ تعریف می‌کنیم:

$$f'(s,t) = f(s) \quad \forall (s,t) \in S \times T. \qquad (۱.۵)$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$B' = \cup_{f\in B}\{f' = f'(s,t) = f(s) \quad \forall (s,t) \in S \times T\}. \qquad (۲.۵)$$

B' یک مجموعه کراندار در $C(S,T)$ است زیرا برای هر $f' \in B'$ داریم:

$$\| f' \| = \sup_{t\in T, s\in S} |f'(s,t)| = \sup_{s\in S} |f(s)| = \| f \| .$$

بنابراین برای هر $g \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} d(B',W) &= \inf_{w\in W} \sup_{f'\in B'} \| f' - w \| \\ &= \inf_{w\in W} \sup_{f'\in B'} \sup_{s\in S, t\in T} |f'(s,t) - w(s,t)| \\ &\leq \sup_{f'\in B'} \sup_{s\in S, t\in T} |f'(s,t) - g(s) \otimes ۱(t)| \\ &= \sup_{f\in B} \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)| \\ &= \sup_{f\in B} \| f - g \| . \end{aligned}$$

که ۱ به‌وسیله $۱(t) = ۱$ برای هر $t \in T$ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$d(B',W) \leq \inf_{g\in G} \sup_{f\in B} \| f - g \| = d(B,G). \qquad (۳.۵)$$

فرض کنید F'_o یک بهترین تقریب همزمان B' از $W = G \otimes_\lambda C(T)$ باشد از این رو:

$$d(B', W) = \sup_{f' \in B'} \parallel f' - F'_o \parallel = \sup_{f' \in B'} \sup_{s \in S, t \in T} |f'(s,t) - F'_o(s,t)|. \qquad (۴.۵)$$

حال $\tau \in T$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که:

$$\parallel f' - F'_o \parallel = \sup_{s \in S} |f'(s,\tau) - F'_o(s,\tau)|. \qquad (۵.۵)$$

f_o را به صورت $f_o(s) = F'_o(s,\tau)$ برای هر $s \in S$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $f_o \in G$ است.
بنابراین از(۳.۵) ، (۴.۵) و (۵.۵) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B} \parallel f - f_o \parallel &= \sup_{f \in B} \sup_{s \in S} |f(s) - f_o(s)| \\ &= \sup_{f' \in B'} \sup_{s \in S} |f'(s,\tau) - F'_o(s,\tau)| \\ &= \sup_{f' \in B'} \parallel f' - F'_o \parallel \\ &= d(B', W) \\ &\leq d(B, G) \\ &\leq \sup_{f \in B} \parallel f - f_o \parallel . \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\sup_{f \in B} \parallel f - f_o \parallel = d(B, G).$$

در نتیجه f_o بهترین تقریب همزمان B در G است. از این رو G زیر فضای به‌طور همزمان پروکسیمینال از $C(S)$ است. □

قضیه ۲.۳.۵. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و G و H زیرفضاهای بسته از X و Y باشند. همچنین فرض کنید α یک نرم متقاطع منطقی روی $X \otimes Y$ باشد. اگر $W = G \otimes_\alpha Y + X \otimes_\alpha H$ به‌طور همزمان پروکسیمینال در $X \otimes_\alpha Y$ باشد آنگاه G و H زیرفضاهای به‌طور همزمان پروکسیمینال از X و Y هستند.*

برهان. ثابت می‌کنیم G یک زیرفضای به‌طور همزمان پروکسیمینال از X است. (پروکسیمینال بودن همزمان H به‌طور مشابه اثبات می‌شود.) چون $W = G \otimes_\alpha Y + X \otimes_\alpha H$ زیرفضای به‌طور همزمان

پروکسیمینال از $X \otimes_\alpha Y$ است از لم (۹.۲.۵) نتیجه می‌شود که H زیرفضای پروکسیمینال از Y است. حال فرض کنید $x \in Y \setminus \bar{H}$ باشد آنگاه $y_o \in H$ وجود دارد به‌طوریکه $y_o \in P_H(x)$ باشد. طبق لم (۱۰.۲.۵) $\varphi \in Y^*$ وجود دارد به‌طوریکه :

$$\| \varphi \| = 1, \varphi|_H = 0, \varphi(x - y_\circ) = \| x - y_\circ \| .$$

فرض کنید $e_o = x - y_o$ و $e = \frac{e_o}{\|e_o\|}$ باشد در نتیجه داریم:

$$\varphi(e) = 1 = \| e \| .$$

فرض کنید $I : X \longrightarrow X$ یک نگاشت همانی باشد. چون α یک نرم متقاطع منطقی است طبق لم (۳.۲.۵) α^* هم یک نرم متقاطع منطقی است و از این رو :

$$\alpha^*(I \otimes \varphi) = \| I \| \| \varphi \| = 1. \tag{۶.۵}$$

فرض کنید S یک مجموعه کراندار در X باشد. S' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S' := \{s \otimes e | s \in S\}.$$

آنگاه S' مجموعه کراندار در $X \otimes_\alpha Y$ است زیرا برای هر $s \in S$ داریم:

$$sup\{\alpha(s \otimes e) : s \in S\} = \sup_{s \in S}\{\| s \| \| e \|\} = \sup_{s \in S} \| s \| < \infty.$$

چون $W = G \otimes_\alpha Y + X \otimes_\alpha H$ زیرفضای به‌طور همزمان پروکسیمینال از $X \otimes_\alpha Y$ است نتیجه می‌شود که نگاشت تقریب همزمان

$$A' : X \otimes_\alpha Y \longrightarrow W$$

وجود دارد. نگاشت A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A : X \longrightarrow G$$

$$A(t) = (I \otimes \varphi)(A'(t \otimes e)) \quad \forall t \in X. \tag{۷.۵}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $t \in X$ ، $A(t) \in G$ می‌باشد. برای این منظور داریم:

$$A'(t \otimes e) \in S_W(t \otimes e) \subset W.$$

که S_W مجموعه تمامی بهترین تقریب‌های همزمان S از W است .
از این رو $u \in G \otimes_\alpha Y$ و $v \in X \otimes_\alpha H$ وجود دارند به‌طوری‌که:

$$A'(t \otimes e) = u + v$$

و همچنین داریم:

$$v = \lim_{n \longrightarrow \infty} \Sigma_{i=۱}^{k_n} x_i^n \otimes h_i^n$$

که $x_i^n \in X$ و $h_i^n \in H$ است.
چون برای هر $h \in H$ ، $\varphi(h) = ۰$ در نتیجه:

$$(I \otimes \varphi)(\Sigma_{i=۱}^{k_n} x_i^n \otimes h_i^n) = ۰ \quad \forall h \geq ۱$$

بنابراین با پیوستگی $I \otimes \varphi$ بدست می‌آوریم که $(I \otimes \varphi)(v) = ۰$ است.
از این رو برای هر $t \in X$ داریم:

$$A(t) = (I \otimes \varphi)(A'(t \otimes e)) = (I \otimes \varphi)(u) \in G.$$

حال نشان می‌دهیم که A نگاشت تقریب همزمان است. چون $A' : X \otimes_\alpha Y \longrightarrow W$ نگاشت تقریب همزمان است، طبق تعریف (۶.۲.۵) داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{t' \in S'} \sup_{s' \in S'} \alpha(s' - A'(t')) &\leq \sup_{s' \in S'} \{\alpha(s' - w)\} \quad (w \in W) \\ &= \sup_{s \in S} \{\alpha(s \otimes e - w)\} \quad \forall w \in W.\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sup_{t' \in S'} \sup_{s \in S} \alpha(s \otimes e - A'(t')) \leq \sup_{\alpha \in S} \alpha(s \otimes e - g \otimes e) \quad \forall g \in G. \qquad (۸.۵)$$

بنابراین از(۶.۵)، (۷.۵) و (۸.۵) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in S}\sup_{s\in S} \| s - A(t) \| &= \sup_{t'\in S'}\sup_{s\in S} \| s - (I\otimes\varphi)A'(t') \| \\
&= \sup_{t'\in S'}\sup_{s\in S} \| (I\otimes\varphi)(s\otimes e - A'(t')) \| \\
&\le \sup_{t'\in S'}\sup_{s\in S} \alpha^*(I\otimes\varphi)\alpha(s\otimes e - A'(t')) \\
&\le \sup_{s\in S} \alpha(s\otimes e - g\otimes e) \quad (g\in G) \\
&= \sup_{s\in S} \alpha((s-g)\otimes e) \\
&= \sup_{s\in S} \| s-g \|\| e \| \\
&= \sup_{s\in S} \| s-g \| \quad \forall g\in G.
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sup_{t\in S}\sup_{s\in S} \| s - A(t) \| \le \sup_{s\in S} \| s-g \|, \quad \forall g\in G. \tag{۹.۵}$$

از این رو $A : X \longrightarrow G$ یک نگاشت تقریب همزمان است. در نتیجه G زیرفضای به‌طور همزمان پروکسیمینال از X است. لذا حکم برقرار است. $\square$

نتیجه ۳.۳.۵. *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و G و H به ترتیب زیرفضاهای بسته از X و Y باشند. اگر $W = G\otimes_\alpha Y + X\otimes_\alpha H$ نگاشت تقریب همزمان پیوسته داشته باشد آنگاه G و H نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارند.*

برهان. نگاشت $Q : X \longrightarrow G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(t) = [(I\otimes\varphi)oPoj](t), \quad \forall t\in X,$$

که:

$$P : X\otimes_\alpha Y \longrightarrow W,$$

نگاشت تقریب همزمان پیوسته از $X\otimes_\alpha Y$ به W است. نگاشت $J : X \longrightarrow X\otimes_\alpha Y$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(t) = t \otimes e, \quad \forall t \in T,$$

که e و $I \otimes \varphi$ همان تعریفی است که در برهان قضیه (۲.۳.۵) آمده است. واضح است که Q نگاشت پیوسته است. فرض کنید S مجموعه کراندار در X باشد. مجموعه S' را تعریف می‌کنیم:

$$S' := \{s \otimes e | s \in S\}$$

آنگاه همچنان که در برهان قضیه (۲.۳.۵) دیدیم S' در $X \otimes_\alpha Y$ کراندار است. همچنین تعریف Q مشابه تعریف A در برهان قضیه (۲.۳.۵) است. بنابراین با استفاده از (۹.۵) داریم:

$$\sup_{t \in S} \sup_{s \in S} \| s - Q(t) \| \leq \sup_{s \in S} \| s - g \| \quad \forall g \in G$$

این نشان می‌دهد که Q یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است. یک استدلال مشابه نشان می‌دهد که H نیز یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد. $\square$

مراجع

[1] E. Abu-sirhan, Best simultaneous appriximation in function and operator spaces, TUBITAK, 34 :1–12, 2010.

[2] E. Abu-sirhan and R. Khalil, Simultaneous approximation in operator and tensor product spaces, Applied Functional Analysis, 4(1) :112–121, 2009.

[3] B. Beauzarny, lntroduction to Banach Spaces and Their Geometry, North-Holland, Amsterdam, (1985).

[4] Li. Chong , G.A. Watson, Best simultaneous approximation of an infinite set of function, January, 1999, 1-9.

[5] j. Diestel and J. J. Uhi, Vector measures, The American Mathematical Society Providence, R. I. 1977.

[6] R. M. Dudley, Real Analysis and probability, Cambridge university press.

[7] J. H. Freilich and H.W. Mclaughlin, Approximation of bounded sets, J. Approz. Theory 84, 146-158, (1982).

[8] D. Hussain and R. Khalil, Best approximation in tensor product spaces, Soochow journal of mathematics, 18(1992), 397-407.

[9] M. Iranmanesh and H. Mohebi, Best simultaneous approximation in tensor product spaces,Applied Mathematical Sciences, 1(18) :883-894, 2007.

[10] W. A. Light and E. W. Cheney, Approximation Theory in tensor product spaces, Lecture Notes in Mathematics 1169, 1185.

[11] J. R. Munkres, Topology a first course, Prentice-hall, 1975.

[12] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1991.

[13] I. Singer, Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer-Verlag, New York Berlin, 1970.

[14] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Analysis, Methods and Applications 16, 1127-1138, (1991).

[15] S.Y. Xu and C. Li, Characterization of best simultaneous approximation, Acta Math Siniea 30, 528-535, (1987).

[16] S.Y. Xu and C. Li, Characterization of best simultaneous approximation, Approz. Theory and Its Appl 3, 190–198, (1987).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بهترین تقریب همزمان .... Best simultaneous approximation

به‌طور همزمان پروکسیمینال .... Simultaneously proximinal

به‌طور یکنواخت محدب .... Uniformly convex

پیرافشرده .... Paracompact

توپولوژی .... Topology

توپولوژی حاصل ضربی .... Product topology

توپولوژی ضعیف .... Weak topology

چبیشف .... Chebyshev

ضرب تانسوری یک به یک .... Injective tensor product

ضرب تانسوری تصویری .... Projective tensor product

طولپایی .... Isometric

عملگر .... Operator

فضای تابعی .... Function Space

فضای دوگان .... Dual space

فضای ضرب تانسوری .... Tensor product space

فضای نرمدار .... Normed space

مشخصه سازی .... Characterization

نرم متقاطع .... Cross-norm

نگاشت تقریب .... Proximity map

هاسدورف .... Hausdorff

یکتایی .... Uniqeness

یکتایی قوی .... Strong uniqeness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Best simultaneous approximation	بهترین تقریب همزمان
Characterization	مشخصه سازی
Chebyshev	چبیشف
Cross-norm	نرم متقاطع
Dual space	فضای دوگان
Function Space	فضای تابعی
Hausdorff	هاسدورف
Injective Product tensor	ضرب تانسوری یک به یک
Isometric	طولپایی
Normed space	فضای نرمدار
OPerator	عملگر
Paracompact	پیرافشرده
Product Topology	توپولوژی حاصل ضربی
Projective Product tensor	ضرب تانسوری تصویری
Proximity Map	نگاشت تقریب
Simultaneously proximinal	به‌طور همزمان پروکسیمینال
Strong Uniqeness	یکتایی قوی

فضای ضرب تانسوری .... Tensor Product Space

توپولوژی .... Topology

به‌طور یکنواخت محدب .... Uniformly Convex

یکتایی .... Uniqeness

توپولوژی ضعیف .... Weak Topology

Surname: Dehbandi dodangi Name: Sakineh

Title: Best simultaneous approximation in function and operator spaces.

Supervisor: dr.Mahdi Iranmanesh

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Mathematics Analysis

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 1392/6/26 Number of pages: 63

Keywords: Simultaneous proximinal- Best simultaneous approximation

Abstract

Our main goal in this thesis is to introduce the best simultaneous approximation in function and operator spaces. we also state condition under which a set in such spaces has simultaneous approximation.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Best simultaneous approximation in function and operator spaces.

Supervisor

dr.Mahdi Iranmanesh

by

Sakineh Dehbandi dodangi

1392/6/26