



دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

مساله p – میانه فازی در شبکه

دانشجو : محمد قاسم حاجی زاده

استاد راهنما :

دکتر صادق رحیمی شعرباف

استاد مشاور:

دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه کارشناسی ارشد

دی ماه 1387

کتابخانه

تقديم به :

پدر و مادرم

تقدیر و تشکر

کز عهده ی شکرش به در آید؟

از دست و زبان که برآید

اکنون که با یاری و عنایت خداوند بزرگ این پایان نامه به اتمام رسیده است بر خود لازم می دانم که از فرصت استفاده کنم و مراتب تشکر و قدردانی خود را بعد از خداوند بزرگ از کسانی که اینجانب را در انجام این تحقیق یاری رساندند اظهار نمایم .

استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای **دکتر صادق رحیمی شعرباف** که زحمات بسیاری در طول انجام این پایان نامه برایم کشید و دلسوزانه این مسیر را برایم هموار ساخت . استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر جعفر فتحعلی** که من را در انجام این تحقیق بسیار یاری و کمک کردند . همچنین از آقای **دکتر جعفری راد** و آقای **دکتر زعفرانی** بخاطر قبول داوری این پایان نامه کمال تشکر را دارم ضمناً لازم میدانم از **خانواده ام** و کلیه کسانی که اینجانب را به هر نحوی در ا نجام این پایان نامه یاری رساندند تشکر و قدردانی نمایم .

امید است که مطالب این پایان نامه برای دانش پژوهان و علاقه مندان مفید واقع شود .

محمد قاسم حاجی زاده دی ماه ۱۳۸۷

چکیده

مساله مکانیابی یکی از مسائل مهم در ریاضیات کاربردی است که در مسائلی مانند تعیین مکان ایستگاههای مترو ، اتوبوس ، آتش نشانی و . . . مورد استفاده قرار می گیرد . مساله p - میانه نیز در مساله مکانیابی ، مساله ای بسیار مهم است که مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفته است . در مساله p - میانه ، مجموعه یالها و تقاضاهای رئوس معمولاً به صورت قطعی بیان می شوند اما در دنیای واقعی ، مجموعه یالها و تقاضاهای رئوس و یا ترکیبی از آنها همیشه به صورت قطعی نیستند یعنی در واقعیت ما همیشه با یک سری اطلاعات و اعداد و ارقام غیر قطعی مواجه هستیم که این اعداد و ارقام دارای ارزشی متفاوت هستند . ما در این پایان نامه به این موضوع می پردازیم که با در دست داشتن اطلاعات و داده های غیر قطعی ، مساله p - میانه چگونه بیان می شود؟ و یا به عبارت بهتر مدلهای مساله p - میانه فازی چگونه قابل طرح هستند؟ در این مجموعه همچنین اقدام به ارائه راه حلهای مناسب برای حل مساله p - میانه فازی شده است روشهایی مبتنی بر حذف یک رأس غیر ضروری و دارای ارزش خیلی کم ، تا چه اندازه می تواند باعث کاهش هزینه ها شود و یا اینکه اگر بخواهیم هزینه بهین در مساله p - میانه قطعی را تا اندازه دلخواهی کم کنیم تا چه اندازه باید از تقاضاهای رأسی کاسته شود بطوریکه در پاسخگویی متقاضیان لطمه ای وارد نشود .

کلمات کلیدی : مجموعه های فازی ، مکانیابی ، برنامه ریزی خطی ، مساله مکانیابی فازی ، p -میانه

فازی ، شبکه ها

فهرست مطالب

فصل اول

مکانیابی

1-1 مقدمه	۲
2-1 مکانیابی	۴
1-2-1 مکانیابی پیوسته	4
2-2-1 مکانیابی گسسته	4
3-1 مکانیابی روی شبکه	5
1-3-1 تابع فاصله	5
2-3-1 مدل صفر و یک برنامه ریزی خطی مسا له p - میانه	6
3-3-1 مدل صفر و یک و عدد صحیح برنامه ریزی خطی مسا له p - میانه	7

فصل دوم

منطق فازی و عملگرهای آن

- 15 1-2 منطق فازی
- 2-2 مجموعه های فازی و تعاریف اولیه
- 16
- 3-2 عملگرهای مجموعه فازی
- 18
- 21 4-2 عملگرهای تئوری مجموعه ها
- 21 1-4-2 عملگرهای نرم t
- 23 2-4-2 عملگرهای نرم s
- 24 3-4-2 عملگرهای میانگین

فصل سوم

مساله p - میانه فازی

- 27 1-3 مساله p - میانه با تقاضاهای فازی
- 31 1-1-3 الگوریتم
- 2-3 مساله p - میانه با رأسهای فازی

- 38 1-2-3 آنالیز مستقیم R
- 39 2-2-3 آنالیز فازی شیب ها
- 43 3-3 مساله p - میانه با تقاضاها و یالهای فازی

فصل چهارم

تعمیم مساله p - میانه فازی در حالت‌های دیگر

- 50 1-4 مساله p - میانه با تقاضاها و رئوس فازی
- 2-4 مساله p - میانه ترکیبی (تقاضاهای قطعی و فازی)
- 53 .
- 3-4 نتیجه گیری و پیشنهادات
- 59

- 60 منابع

فهرست جداول

- ۱-۱ : تعدادی از روشهای ابتکاری ۱۳
- ۱-۲ : عملگرهای منطق قطعی ۱۶
- ۱-۳ : مقایسه جوابهای فازی و قطعی ۳۵
- ۲-۳ : بهترین مکانیابی ها در حالت قطعی ۳۶
- ۳-۳ : بهترین مکانیابی ها در حالت فازی ۳۶
- ۴-۳ : مقایسه جوابها در حالت پوشش کامل و عدم پوشش تقاضای رأس v_3 ۳۸
- ۵-۳ : رئوس در شبکه ۴۷
- ۶-۳ : فواصل بین رئوس ۴۸
- ۱-۴ : جوابهای قطعی و فازی و مقایسه آنها ۵۳
- ۲-۴ : جوابهای مساله در حالتهاى قطعی و فازی و ترکیبی ۵۸

فهرست شکلها و نمودارها

۳۵	۱-۳ : شبکه با ۶ رأس
۳۷	۲-۳ : شبکه با ۳ رأس
۳۷	۳-۳ : توابع R_i
۳۷	۴-۳ : تابع R
۳۹	۵-۳ : تابع R
۴۲	۶-۳ : شبکه با ۱۱ رأس
۴۳	۷-۳ : توابع P_λ و R
۴۳	۸-۳ : توابع S^c و S^p
۵۱	۱-۴ : شبکه با ۴ رأس

٥٢ R_i : ٢-٤ : توابع

٥٢ R : ٣-٤ : تابع

٥٢ S^P و S^C : ٤-٤ : توابع

٥٧ : ٥-٤ : شبکه با ٦ رأس

٥٧ R : ٦-٤ : تابع

فصل اول

مکانیابی

1-1 مقدمه

مساله p - میانه یکی از مسائل مهم در نظریه مکانیابی است و همیشه مورد توجه بسیاری بوده است . در مساله p - میانه روی شبکه ، هدف پیدا کردن مجموعه $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ شامل مکان p سرویس دهنده روی شبکه $N = (V, E)$ است به گونه ای که مجموع فاصله ها از این مجموعه تا تمام رئوس روی N کمترین مقدار شود . فاصله هر رأس $v \in V$ از مجموعه X به صورت فاصله v تا نزدیکترین نقطه در X تعریف می شود . و هر رأس v_i دارای یک وزن w_i نیز می باشد که در این حالت هدف کمینه کردن مجموع فاصله ها خواهد بود یعنی :

$$F(X) = \sum_{v_i \in N} w_i d(X, v_i) \quad (1-1)$$

که در آن $d(X, p) = \min_{x_i \in X} d(x_i, p)$ و $d(x, y)$ فاصله بین دو نقطه X و Y روی شبکه است .

اولین بار مساله مکانیابی توسط فرما^۱ در قرن هفدهم مطرح شد که در سال ۱۶۴۰م این مساله توسط توریکلی^۲ حل شد و در قرن نوزدهم همین مساله روی شبکه ها توسط اشتاینر^۳ مطرح شد [13]. در سال ۱۹۰۹م وبر^۴ نیز مساله مکانیابی را به صورت کاربردی ارائه کرد [61] . در سال ۱۹۶۴م حکیمی^۵ تابع هدف مسائل مکانیابی را به صورت کمترین مجموع^۶ و مینیماکس^۷ مطرح کرد [24] و به بررسی مسائل مکانیابی روی شبکه ها نیز پرداخت . از آن زمان به بعد افراد زیادی در زمینه مسائل مکانیابی و

¹ Ferma

² Torricelli

³ Steiner

⁴ Weber

⁵ Hakimi

⁶ Minisum

⁷ Minimax

مدلهای آن کار کردند [25,26,28,35,40,62] که می توان به هندلر^۸ و میرچندانی^۹ [28] ، هاماکر^{۱۰} و نیکل^{۱۱} [27] ، تانسِل^{۱۲} و همکاران [59] ، هانسن^{۱۳} و همکاران [29] ، اون^{۱۴} و دسکین^{۱۵} [46] و . . . اشاره کرد. در زمینه حل مسائل مکانیابی بویژه مساله p-میانهِ روی شبکه نیز افراد زیادی کار کردند [8,18,19,33,38,54,65] که از آن جمله می توان به افرادی که به روشهای ابتکاری برای حل این مسائل روی آوردند اشاره کرد [1,2,4,10,17,21,22,33,36,48,50,52,60,63] . در تعریف روشهای ابتکاری باید گفت که روشهایی مبتنی بر آزمون و خطا هستند و به صورت قطعی نمی توان گفت که جواب بدست آمده از این روشها یک جواب بهینه است . این روشها زمانی بکار می روند که یک جواب نزدیک به بهینه ولی نه لزوماً بهینه مورد نیاز است . اما در مورد مساله p - میانهِ روی درخت ، ابتدا کریو^{۱۶} و حکیمی (۱۹۷۹) الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2 p^2)$ ارائه کردند [34] که آن را تمیر^{۱۷} (۱۹۹۶) به الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2 p)$ بهبود بخشید [56] .

اما از آنجا که در مساله p - میانهِ ممکن است به دلیل عدم دسترسی به اطلاعات درست و بعضی شرایط دیگر، تقاضاها و یالها بصورت قطعی بیان نشوند بنابراین مساله p - میانهِ فازی مطرح می شود . اولین مقاله در این زمینه توسط کانوس^{۱۸} ، ایورا^{۱۹} و لیرن^{۲۰} (۱۹۹۹) بطور مشترک با ارائه الگوریتمی در مورد مساله p - میانهِ فازی مطرح شد [6] . که در آن مقاله به بحث مدلی از فازی بودن تقاضاهای رئوس و چگونگی حل آن نیز پرداخته بودند . که همین سه تن مقاله بعدی خود را در سال ۲۰۰۱ ارائه کردند [7] که در آن به موضوع فازی بودن رئوس و چگونگی حل آن اشاره شده بود . در سال ۲۰۰۴

⁸ Handler

⁹ Mirchandani

¹⁰ Hamacher

¹¹ Nickel

¹² Tansel

¹³ Hansen

¹⁴ Owen

¹⁵ Daskin

¹⁶ Kariv

¹⁷ Tamir

¹⁸ Canos

¹⁹ Ivorra

²⁰ Liern

پرز^{۲۱} و گا^{۲۲} و وردگای^{۲۳} مقاله ای را ارائه کردند که در آن فازی بودن یالها و طولها را به شکل دیگری تعریف کرده بودند [43] و در سال ۲۰۰۷ مقاله دیگری از کانوس، ایورا و لیرن ارائه شد [9] که به موضوع فازی بودن طول فواصل بین رئوس و همچنین آنالیز آن پرداخته شده است.

1-2 مکانیابی

موضوع مکانیابی شامل دسته مسائل بهینه سازی است که خود به ۲ دسته تقسیم می گردد که هر دسته در زیر بطور جداگانه ارائه می شود.

1-2-1 مکانیابی پیوسته

فرض کنید نقاط $p_1, p_2, \dots, p_n$ در صفحه داده شده اند هر نقطه p_i دارای وزن w_i باشد می خواهیم مکان یک نقطه در صفحه را به گونه ای بیابیم که به ازای آن نقطه، مقدار تابع هدف بهینه گردد که این حالت را مکانیابی پیوسته تک وسیله ای می گویند. و در صورتی که بخواهیم با توجه به فرض در نظر گرفته شده، مکان چند نقطه را در صفحه به گونه ای بیابیم که به ازای آن چند نقطه، مقدار تابع هدف بهینه گردد به آن مکانیابی پیوسته چند وسیله ای می گویند.

1-2-2 مکانیابی گسسته

فرض کنید نقاط $p_1, p_2, \dots, p_n$ در صفحه داده شده اند هر نقطه p_i دارای وزن w_i باشد حال اگر بخواهیم مکان یک نقطه را از بین p_i ها به گونه ای بیابیم که به ازای آن نقطه، مقدار تابع هدف بهینه گردد این حالت را مکانیابی گسسته تک وسیله ای می گویند و در صورتی که بخواهیم مکان چند نقطه را از بین p_i ها به گونه ای بیابیم که به ازای آن نقاط، مقدار تابع هدف بهینه گردد در این صورت

²¹ Perez

²² Vega

²³ Verdegay

مکانیابی گسسته را تک وسیله ای می گویند .

تابع هدف می تواند به صورت های زیر باشد :

1- کمینه کردن مجموع وزنی فاصله نقطه جدید تا نقطه موجود یعنی :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n w_i d(x, p_i) \quad (2-1)$$

2- کمینه کردن فاصله وزنی نقطه جدید تا دورترین نقطه موجود یعنی :

$$\text{Min} (\text{Max}_{i=1,2,\dots,n} w_i d(x, p_i)) \quad (3-1)$$

که d تابع فاصله می باشد .

مسا له مکانیابی با تابع هدف به صورت اولی را مسا له تک وسیله ای کمترین مجموع می نامند و مسا له مکانیابی با تابع هدف به صورت دومی را مسا له تک وسیله ای مینیماکس می گویند .

3-1 مکانیابی روی شبکه

فرض کنید یک شبکه مانند $N = (V, E)$ داشته باشیم بطوریکه $d(x, v_i)$ تابع فاصله روی شبکه تعریف شود در این صورت مسا له مینیماکس روی شبکه را مساله مرکز²⁴ می گویند و همچنین مساله کمترین مجموع روی شبکه را مسا له میانه²⁵ می گویند و در حالت چند وسیله ای این مسا ئل را به ترتیب p - مرکز و p - میانه می گویند .

1-3-1 تابع فاصله

تابع فاصله می تواند توابع مختلفی باشد به طور مثال می تواند به صورت نرم اقلیدسی ، نرم مستطیلی ،

²⁴ Center

²⁵ Median

نرم چپیشف و یا نرمهای دیگری تعریف شود [23].

1-3-2 مدل صفرویک برنامه ریزی خطی مسا له p – میانه [49]

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } j \text{ به سرویس دهنده در رأس } i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{فرض کنید:} \quad (4-1)$$

تخصیص داده شود.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } i \text{ به عنوان سرویس دهنده انتخاب شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (5-1)$$

تقاضای رأس j ام w_j و کوتاهترین فاصله رأس j ام به رأس i ام d_{ij}

تعداد سرویس دهنده p و تعداد رئوس شبکه n

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j d_{ij} x_{ij}$$

s.t. (6-1)

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j \leq n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p \quad (3)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \quad \forall i, j \leq n$$

که قید (۱) بیانگر این است که رأس j ام از یک رأس سرویس داده شود. قید (۲) بیانگر این است که اگر رأس i ام بعنوان سرویس دهنده انتخاب نشد در این صورت به هیچ رأسی سرویس ندهد. قید (۳) نشاندهنده این موضوع است که تعداد سرویس دهنده ها p تا باشد .

3-3-1 مدل صفرویک و عدد صحیح برنامه ریزی خطی مسا له p - میانه

فرض کنید y_i مشابه (۱-۵) تعریف شود و x_{ij} نیز به صورت زیر تعریف شود :

(7-1)

مقدار تقاضای رأس j که توسط رأس i سرویس داده می شود x_{ij}

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

s.t. (8-1)

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = w_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq w_j y_i \quad \forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \leq n$$

قید (۱) بیانگر این مطلب است که تقاضای رأس j ام بطور کامل سرویس داده شود .

تفاوت این دو مدل در تعریف متغیر X_{ij} است که در قید (۱) نشان داده شده است .

قضیه (حکیمی) [24]: برای مسا له p - میانه روی شبکه به طوری که W_i ها مثبت هستند جواب

بهینه روی رأسها قرار دارد .

برهان: می دانیم برای مسا له p - میانه ، تابع هدف به صورت زیر است :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n w_i d(X, v_i)$$

چون تابع $d(X, v_i)$ روی هر کمان شبکه یک تابع مقعر است بنابراین تابع هدف یک تابع روی هر

کمان شبکه مقعر است . هر تابع مقعر مینیمم خود را در نقاط ابتدایی و انتهایی می یابد که در اینجا

رأسهای شبکه هستند بنابراین یک جواب رأسی وجود دارد . برای حالت p - میانه با استفاده از این که

$d(X, v_i) = \text{Min}_{j=1, \dots, p} d(x_j, v_i)$ و می دانیم مینیمم چند تابع مقعر، مقعر است و قضیه ثابت میشود .

مسا له 1 - میانه :

در این حالت ، حل مسا له به روش شمارشی به $O(n^2)$ محاسبه نیاز دارد .

اگر شبکه بصورت یک درخت باشد در این صورت از الگوریتم اکثریت وزنی استفاده می کنیم که در زیر

بیان می شود . البته قبل از بیان الگوریتم قضیه ای را بیان می کنیم که ما را با خاصیت اکثریت وزنی

آشنا می کند .

قضیه گلدمن^{۲۶} (1971): اگر در یک درخت T ، زیردرخت T_1 به گونه ای باشد که

$$W(T_1) \geq \frac{1}{2} W(T) \quad (9-1)$$

$W(T)$: مجموع وزنی درخت T

$W(T_1)$: مجموع وزنی زیر درخت T_1

آنگاه یک جواب بهینه برای مسا له ۱- میانه در T_1 وجود دارد .

خاصیت فوق را خاصیت اکثریت وزنی می نامند .

الگوریتم اکثریت وزنی :

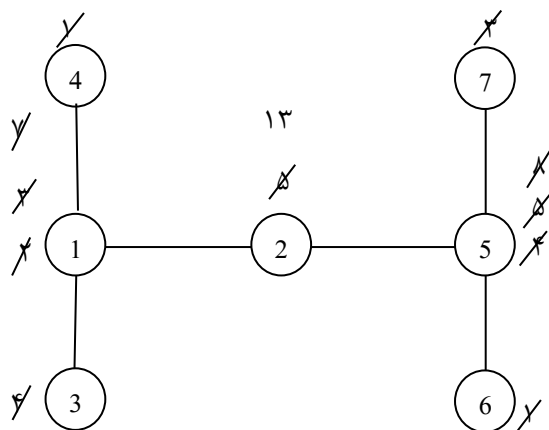
۱- اگر T شامل تنها یک رأس است توقف کنید همان رأس جواب مسا له است .

۲- به ازای هر رأس انتهایی مانند V ، اگر $W(v) \geq \frac{W(T)}{2}$ آنگاه V جواب مسا له است . در غیر این

صورت به گام ۳ بروید .

۳- فرض کنید u رأس مجاور V باشد وزن V را به u اضافه کرده و رأس V و کمان (u, V) را

حذف کنید و به گام ۱ بروید .



مثال :

$$W(T) = 20$$

جواب بهینه V_2

پیچیدگی زمانی الگوریتم فوق $O(n)$ می باشد .

مساله 2 - میانه :

در این حالت ، حل مساله به روش شمارشی $O(n^3)$ می باشد .

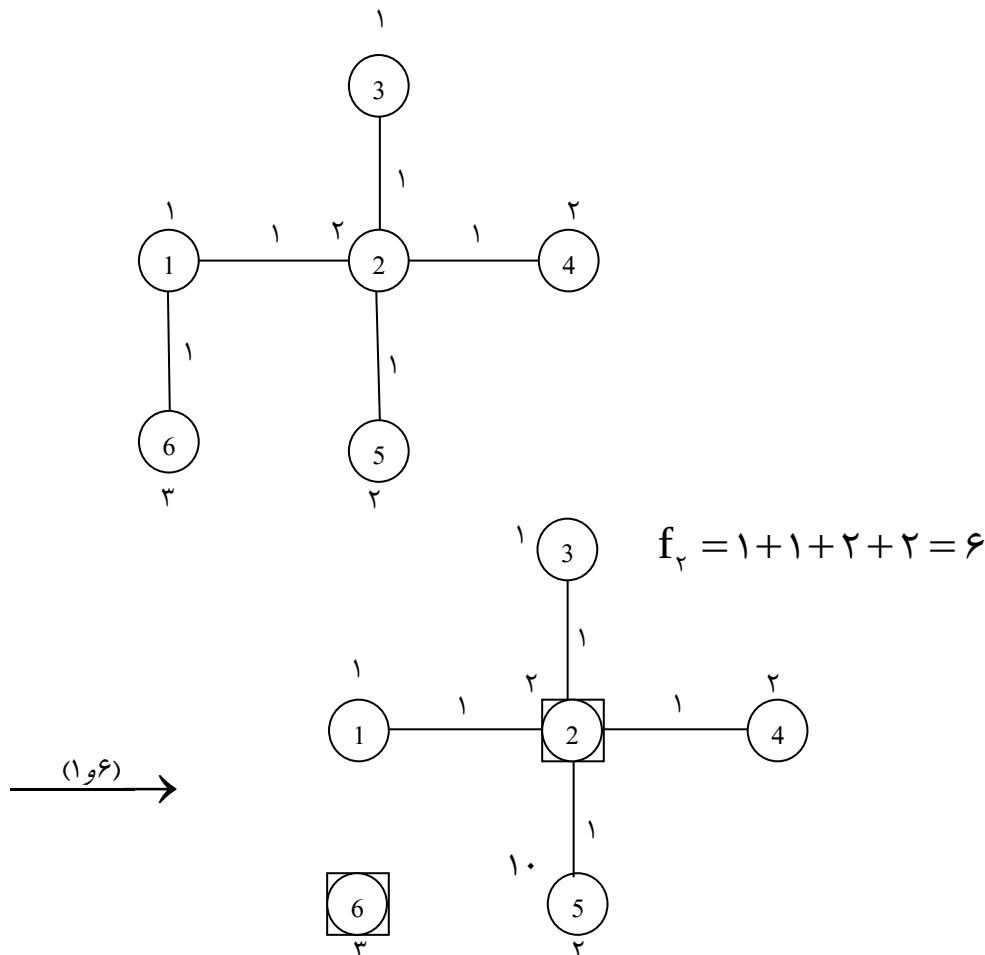
اگر شبکه به صورت یک درخت باشد ، در این صورت از روش حذف یال استفاده می کنیم که در زیر بیان شده است .

روش حذف یال :

در این روش به ازای حذف هر یال از درخت ، دو زیر درخت حاصل می شود که با الگوریتم اکثریت وزنی ، 1 - میانه را برای هر یک از دو زیردرخت می یابیم و مقدار تابع هدف را در هر دو زیر درخت محاسبه می کنیم در نهایت از بین مقادیری که به ازای حذف تمام یالها بدست می آید کمترین مقدار را پیدا می کنیم دو رأسی که به ازای این کمترین مقدار جواب مساله 1 - میانه در هر زیر درخت هستند جواب مساله 2 - میانه می باشد .

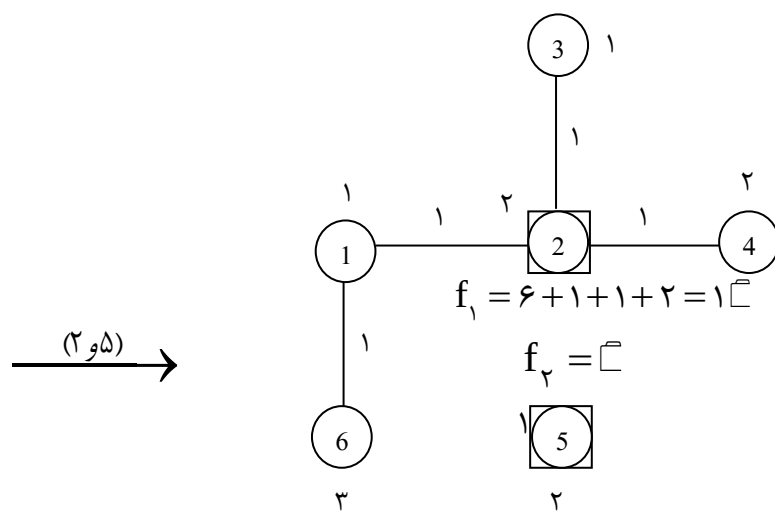
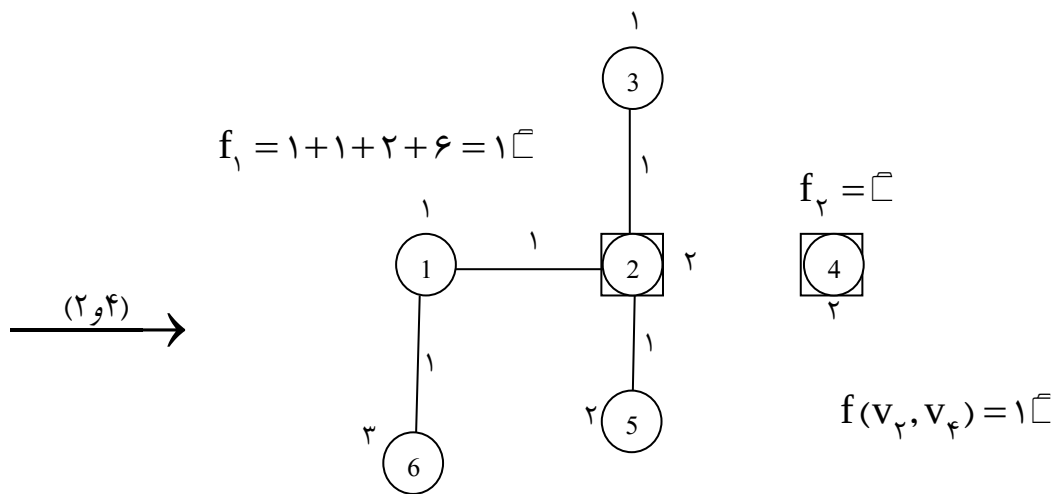
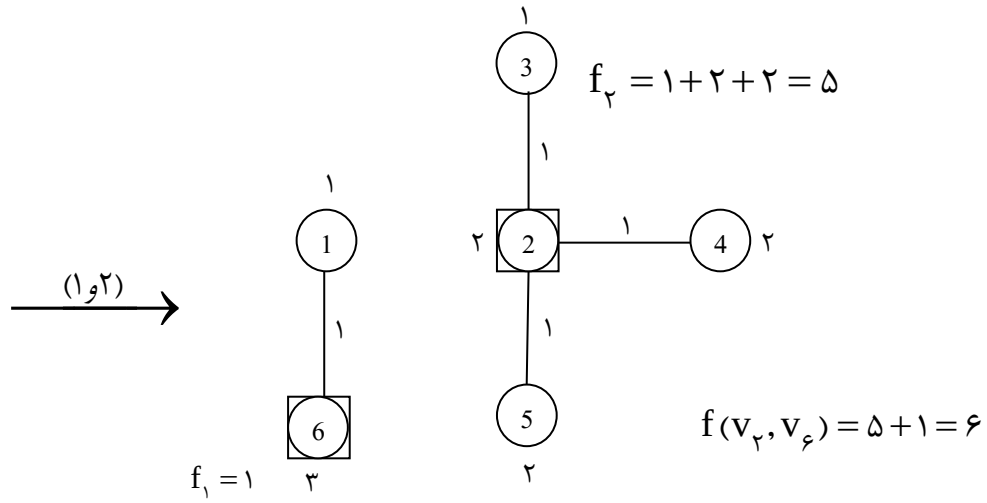
این روش دارای پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ می باشد .

مثال :



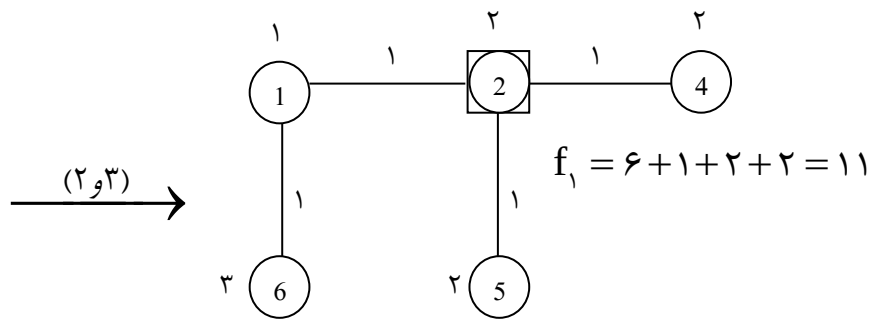
$$f_v = \cdot$$

$$f(v_r, v_s) = 6$$



$$f(v_7, v_8) = 1$$

$$\boxed{3} \quad f_7 = 1$$



$$f(v_7, v_3) = 11$$

بنابراین جواب بهینه مساله 2- میانه رأسهای V_7 و V_6 هستند با مقدار تابع هدف $f(v_7, v_6) = 6$.

اما بعد روش گاویش^{۲۷}- اسرید هلر^{۲۸} با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه شد.

نتیجه: در حالت کلی مسائل p - میانه را با روشهای مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی [49] و یا

روشهای ابتکاری (که در جدول 1-1 اسامی تعدادی از این افراد با روشهایشان آمده است) یا روشهای

کاهش لاگرانژ، روشهای مبتنی بر نظریه گراف حل می کنند. (برای آشنایی با روشهای حل مسائل

p - میانه به [20] مراجعه شود.)

^{۲۷} Gavish

^{۲۸} Sridhalar

افراد	روش ابتکاری
Maranzana (1964)	Neighborhood search or node partitioning
Teitz and Bart (1968) , Whitaker (1983)	Node substitution or interchange
Moreno-Perez et al. (1994) , Rolland et al (1996) , Voss (1996) , Taillard (2003)	Tabu search
Kuehn and Hamburger (1963) , Cherian and Ravi (1998) , Resende and Werneck (2003)	Greedy
Hansan and Mladenovic (1997) , Garcia-Lopez et al. (2002) , Crainic et al. (2004)	Variable neighborhood search
Hosage and Goodchild (1986) , Dibble and Densham (1993) , Alp et al. (2003) , Correa et al. (2004)	Genetic algorithm
Chiyiyoshi and Galvao (2000) , Levanova and Loresh (2004)	Simulated annealing
Garcia-Lopez et al. (2003)	Scatter search
Levanova and Loresh (2004)	Ant colony
Erlenkotter (1978) , Galvao (1980) , Captivo (1991) , Senne and Lorena (2000)	Dualoc

جدول 1-1 : تعدادی از روشهای ابتکاری

فصل دوم

منطق فازی و عملگرهای آن

در این فصل مفهوم فازی و تعاریف مورد نیاز آن در مساله p -میانه فازی را معرفی می کنیم .

منطق فازی ، منطقی غیر قطعی است که اولین بار توسط زاده²⁹ [64] ارائه شد . این منطق سالها پیش از آنکه شناخته شود وارد عرصه صنعت شده بود و انسانها بدون آنکه خود بدانند از این منطق در صنعت و در سایر امور استفاده می کردند که امروزه کاربرد بسیار زیاد آنرا در همه عرصه ها به وضوح می بینیم . مطالب این فصل برگرفته از منابع [16,41,47,64,67] می باشد .

1-2 منطق فازی

در منطق قطعی ارزش هر گزاره می تواند درست یا نادرست باشد که کامپیوتر آن را با یک و صفر نمایش می دهد . به عنوان مثال “ چراغ اتاق من روشن است ” یک گزاره درست و ارزش آن یک است و “ چراغ اتاق من روشن نیست ” یک گزاره نادرست و ارزش آن صفر است .

در رابطه با منطق گزاره ها ، نظریه مجموعه ها نیز مطرح می شود و هر مجموعه با اعضایش به طور کامل مشخص می شود . به عبارت دیگر یک مجموعه هنگامی به طور کامل معرفی می شود که بتوان هر عنصر را به طور قطعی عضو آن مجموعه دانست یا آن را خارج از آن معرفی کرد . هر مجموعه یک صفت مشخص کننده مربوط به خود دارد . معیار عضویت عناصر در مجموعه ، صفت مشخص کننده مجموعه است و هر عنصر اگر دارای آن صفت باشد عضو مجموعه و در صورت دارا نبودن صفت ، خارج از مجموعه شناخته می شود . این معیار عضویت را تابع عضویت نیز می نامیم که به صورت (1-2) بیان می شود :

²⁹ Zadeh

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (1-2)$$

اما اگر کمی بیشتر دقت کنیم می بینیم که طریقه ارزش گذاری در مغز انسان فازی بوده و اکثر جملاتی که در زبان گفتاری بکار می بریم به طور ذاتی مبهم فازی هستند . به عنوان مثال “ با دوستانم ساعت 4 بعد از ظهر جمعه قرار می گذاریم ” اما به طور یقین هیچ یک سر ساعت 4 بعد از ظهر در محل حاضر نخواهیم شد یعنی ممکن است حتی برای یک ثانیه و یا حتی کمتر از یک ثانیه زودتر یا دیرتر در محل حاضر شویم که این مقدار تاخیر و یا تعجیل ممکن است در حد چند دقیقه هم افزایش یابد ولی این اختلاف به ساعت و یا روز نرسیده و این طور نخواهد بود که در روز چهارشنبه در محل حاضر شویم . این میزان اختلاف ، اندازه فازی بودن فکر و زبان ما را مشخص می کند . ابهام و عدم دقت در کلام و تفکر ما همچنان باقی است و به طور مسلم کسی که در ساعت چهار و یک دقیقه در محل حاضر شده باشد بد قول نیست و ارزش صفر را برای او در نظر نمی گیریم. از اینرو به منظور شبیه سازی و به دست آوردن مدل ریاضی برای منطق زبانی، منطق فازی به ما اجازه می دهد به تابع عضویت μ مقداری بین صفر و یک را نسبت داده و ابهام را جایگزین قطعیت کنیم . بنابراین یک مجموعه فازی را به صورت عضوهای آن به اضافه درجه عضویت هر عضو نشان می دهیم .

2-2 مجموعه های فازی و تعاریف اولیه

می دانیم که عملگرهای منطق قطعی به صورت زیر تعریف می شوند :

p	q	Not p	Not q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0

1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1

جدول ۲-۱: عملگرهای منطق قطعی

با توجه به این عملگرها می توان عملگرهای تئوری مجموعه ها را تعریف کرد . به طور مثال عملگرهای متمم ، اجتماع و اشتراک به صورت زیر تعریف می شوند :

$$\bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\} \quad \text{متمم مجموعه قطعی } A :$$

$$A \cup B = \{(x \in A) \text{ OR } (x \in B)\} \quad \text{اجتماع دو مجموعه } A \text{ و } B :$$

$$A \cap B = \{(x \in A) \text{ AND } (x \in B)\} \quad \text{اشتراک دو مجموعه } A \text{ و } B :$$

تعریف 2-2-1 : اگر X مجموعه مرجعی باشد که هر عضو آن را با X نمایش دهیم مجموعه فازی

$\tilde{A}$ در X به وسیله زوج های مرتبی به صورت (2-2) بیان می شود :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \quad (2-2)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت و یا درجه عضویت می باشد که میزان تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان

می دهد و برد این تابع اعداد حقیقی غیرمنفی می باشد که یک مقدار ماکزیمم برای آن در نظر

می گیریم و در حالت نرمال به صورت فاصله بسته $[0, 1]$ در نظر گرفته می شود و در صورتی که برد

این تابع ، $\{0, 1\}$ در نظر گرفته شود همان مجموعه قطعی را خواهیم داشت .

تعریف 2-2-2 : پشتیبان^{۳۰} مجموعه فازی $\tilde{A}$ که آن را با $S(\tilde{A})$ نمایش می دهیم یک مجموعه

قطعی از X های متعلق به مجموعه مرجع X می باشد که تابع عضویتشان غیرصفر باشد .

تعریف 3-2-2: مجموعه α - برش³¹ به مجموعه ای گفته می شود که اعضایش ، X های متعلق

به مجموعه مرجع X بوده و تابع عضویتشان در مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیشتر از α باشد .

$$A_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (3-2)$$

و به مجموعه $A'_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ ، α - برش قوی می گویند .

مثال 1-2-2: فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\tilde{A} = \{(1, 0/6), (2, 0/4), (3, 0/5), (4, 1), (5, 0/7), (6, 0), (7, 0)\}$$

$$S(\tilde{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A_{.5} = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$A'_{.5} = \{1, 4, 5\}$$

تعریف 4-2-2: دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را برابر می گوییم اگر و فقط اگر

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad . \quad (4-2)$$

تعریف 5-2-2: مجموعه فازی $\tilde{A}$ را زیر مجموعه مجموعه فازی $\tilde{B}$ می گوییم اگر و فقط اگر

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad . \quad (5-2)$$

3-2 عملگرهای مجموعه فازی

تعریف 1-3-2 : فرض کنید $C = A \cap B$ در این صورت تابع عضویت $\mu_{\tilde{C}}(x)$ که تابع

اشتراک دو مجموعه A و B می باشد برابر است با :

$$\mu_{\tilde{C}} = \text{Min}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad , \quad x \in X \quad . \quad (6-2)$$

تعریف 2-3-2 : فرض کنید $D = A \cup B$ در این صورت تابع عضویت $\mu_{\tilde{D}}(x)$ که تابع اجتماع

دو مجموعه A و B می باشد برابر است با :

$$\mu_{\tilde{D}} = \text{Max}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad , \quad x \in X \quad . \quad (7-2)$$

تعریف 3-3-2 : فرض کنید متمم مجموعه A را با $\tilde{A}$ نشان می دهیم در این صورت تابع

عضویت مجموعه $\tilde{A}$ برابر است با :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad , \quad x \in X \quad . \quad (8-2)$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

مثال 1-3-2: فرض کنید : $X = \{1, 2, \dots, 10\}$

$$A = \{(1, 0/4), (2, 0/8), (3, 0/9), (4, 1), (5, 0/5)\}$$

$$B = \{(3, 0/5), (4, 0/1), (5, 0/6), (6, 0/8), (7, 0/1), (8, 1)\}$$

در این صورت داریم :

$$= A \cap B = \{(3, 0/5), (4, 0/1), (5, 0/5)\}$$

$$D = A \cup B = \{(1, 0/4), (2, 0/8), (3, 0/9), (4, 1), (5, 0/6), (6, 0/8), (7, 0/1), (8, 1)\}$$

$$\sim = \{(1, 0/6), (2, 0/2), (3, 0/1), (5, 0/5), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1)\} \tilde{A}$$

مثال 2-3-2 : فرض کنید $X = R$ و $\tilde{A}$ مجموعه اعداد بزرگتر از 10 و B مجموعه اعداد نزدیک

به 11 باشد در این صورت $\tilde{A}$ و B را به صورت زیر نشان می دهیم :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \bullet & x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & x > 10 \end{cases}$$

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$$

و

که در آن

$$\mu_B(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

در این صورت تابع عضویت اشتراک و اجتماع دو مجموعه $\tilde{A}$ و B به صورت زیر تعریف می شود :

$$\mu_{\tilde{A} \cup B} = \text{Max}[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] , \quad x \in X$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap B} = \begin{cases} \text{Min}[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] & x > 10 \\ \bullet & x \leq 10 \end{cases}$$

اما به غیر از عملگرهای ماکزیمم و مینیمم ، عملگرهای دیگری نیز هستند که می توانند برای تعریف اجتماع و اشتراک بکار روند که باید از قوانین خاصی پیروی کنند اما چون عملگرهای “ و ” و “ یا ” در منطق گزاره ها مشابه عملگرهای “ اشتراک ” و “ اجتماع ” در تئوری مجموعه ها می باشند در این

صورت اگر S و T دو گزاره باشند ، با در نظر گرفتن علامت $\wedge$ برای “ و ” و علامت $\vee$ برای “ یا ” آن قوانین که توسط بلمن^{۳۲} و گیتز^{۳۳} معرفی شد ، را به صورت زیر بیان می کنیم :

$$\mu_S \wedge \mu_T = \mu_T \wedge \mu_S \quad \text{1- جابجایی}$$

$$\mu_S \vee \mu_T = \mu_T \vee \mu_S$$

$$(\mu_S \wedge \mu_T) \wedge \mu_U = \mu_S \wedge (\mu_T \wedge \mu_U) \quad \text{2- شرکت پذیری}$$

$$(\mu_S \vee \mu_T) \vee \mu_U = \mu_S \vee (\mu_T \vee \mu_U)$$

$$(\mu_S \wedge \mu_T) \vee \mu_U = (\mu_S \vee \mu_U) \wedge (\mu_T \vee \mu_U) \quad \text{3- پخش پذیری}$$

$$(\mu_S \vee \mu_T) \wedge \mu_U = (\mu_S \wedge \mu_U) \vee (\mu_T \wedge \mu_U)$$

4- عملگر مینیمم و ماکزیمم $\mu_S \wedge \mu_T$ و $\mu_S \vee \mu_T$ در حوزه خود باید پیوسته و غیر نزولی باشند .

5- در مورد μ_S باید $\mu_S \wedge \mu_S$ و $\mu_S \vee \mu_S$ به طور مطلق صعودی باشند .

$$\mu_S \wedge \mu_T \leq \text{Min}(\mu_S, \mu_T) \quad \text{6-}$$

$$\mu_S \vee \mu_T \geq \text{Max}(\mu_S, \mu_T)$$

$$1 \wedge 1 = 1 \quad \text{7-}$$

$$0 \vee 0 = 0$$

2-4 عملگرهای تئوری مجموعه ها

³² Bellman

³³ Giertz

می دانیم اشتراک دو مجموعه فازی توسط عملگر مینیمم و " و " منطقی و اجتماع دو مجموعه فازی توسط عملگر ماکزیمم و " یا " منطقی مدل سازی شده است اما این عملگرها تنها عملگرهای قابل تعریف برای مجموعه های فازی نمی باشند که این عدم یکتایی عملگرها به خاطر قابلیت تطابق ، کلی بودن و عدم قطعیت می باشد بنابراین می توان عملگرهای متفاوتی تعریف کرد که این عملگرها را به دو دسته تقسیم می کنند . دسته اول : عملگرهای مربوط به اجتماع و اشتراک می باشند که تحت دو حالت با نامهای نرم t و نرم s تعریف می شوند و دسته دوم : عملگرهای میانگین می باشند که حد وسط دو نرم t و s را در بر می گیرند .

1-4-2 عملگرهای نرم t

نرم t یک تابع از $[0,1] \times [0,1]$ به $[0,1]$ است که دارای خواص زیر باشد :

$$t_{(.,.)} = \diamond ; \quad t_{(\mu_{\sim A}(x), 1)} = t_{(1, \mu_{\sim A}(x))} = \mu_{\sim A}(x) , \quad x \in X \quad -1$$

2- یکنوایی

$$\text{if } \mu_{\sim A}(x) \leq \mu_{\sim C}(x) \text{ و } \mu_{\sim B}(x) \leq \mu_{\sim D}(x) \longrightarrow t_{(\mu_{\sim A}(x), \mu_{\sim B}(x))} \leq t_{(\mu_{\sim C}(x), \mu_{\sim D}(x))}$$

3- جابجایی

$$t_{(\mu_{\sim A}(x), \mu_{\sim B}(x))} = t_{(\mu_{\sim B}(x), \mu_{\sim A}(x))}$$

4- شرکت پذیری

$$t(\mu_{\sim A}(x), t_{(\mu_{\sim B}(x), \mu_{\sim C}(x))}) = t(t_{(\mu_{\sim A}(x), \mu_{\sim B}(x))}, \mu_{\sim C}(x))$$

نرم t یک گروه عمومی از عملگرها برای اشتراک مجموعه های فازی را معرفی می کند . از جمله عملگر های معروف نرم t می توان به :

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \text{Min}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \text{مینیمم :}$$

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{ضرب جبری :}$$

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)} \quad \text{ضرب هاماکر :}$$

و ... اشاره کرد .

2-4-2 عملگرهای نرم s

نرم s نیز یک تابع از $[0,1] \times [0,1]$ به $[0,1]$ است که دارای خواص زیر باشد :

$$s_{(1,1)} = 1 \quad ; \quad s_{(\mu_{\tilde{A}}(x), *)} = s_{(*, \mu_{\tilde{A}}(x))} = \mu_{\tilde{A}}(x) \quad , \quad x \in X \quad -1$$

2- یکنوایی

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x) \quad \text{و} \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x) \longrightarrow s_{(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))} \leq s_{(\mu_{\tilde{C}}(x), \mu_{\tilde{D}}(x))}$$

if

3- جابجایی

$$s_{(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))} = s_{(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x))}$$

4- شرکت پذیری

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), s(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x))) = s(s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \mu_{\tilde{C}}(x))$$

نرم S یک گروه عمومی از عملگرها برای اجتماع مجموعه های فازی را معرفی می کند . از جمله عملگر های معروف نرم S می توان به :

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \text{Max}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \text{ماکزیمم :}$$

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{جمع جبری :}$$

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 2\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)} \quad \text{جمع هاماخر :}$$

و ... اشاره کرد .

2-4-3 عملگرهای میانگین

عملگرهایی هستند که در دسته بندی t و در دسته بندی S قرار نمی گیرند. این نوع عملگرها در مسائلی بکار می روند که در آن پارامتر های متعددی بکار رفته و بهینه شدن هر یک از این پارامتر ها با بهینه شدن دیگری در تضاد باشد . هر چند که ممکن است پارامتر های موثر در جواب ، همگی بهینه نشده باشند . میزان عضویت های حاصل از این عملگرها حد وسط میزان عضویت حاصل از عملگرهای قاعده t و S می باشد . از جمله عملگرهای میانگین می توان به : عملگرهای جمع تقارنی اشاره کرد که دارای خاصیت شرکت پذیری نمی باشند و به صورتهای زیر با نام های جمع های تقارنی و تفریق های تقارنی شناخته می شوند :

$$M_{\gamma}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \gamma \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)} \quad (9-2)$$

$$M_{\gamma}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x) + \gamma \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)} \quad (10-2)$$

$$N_{\gamma}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\text{Max}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}}{1 + \left| \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x) \right|} \quad (11-2)$$

$$N_{\gamma}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\text{Min}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}}{1 + \left| \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x) \right|} \quad (12-2)$$

و همچنین عملگرهای میانگین معروف دیگری نیز هستند که توسط افراد دیگری تعریف شده اند [67].

فصل سوم

مساله p – میانه فازی

اولین بار زاده و بلمن در سال ۱۹۷۰ مفهوم کلی هدف فازی و قید های فازی را در مسائل تصمیم گیری فازی ارائه کردند [3]. زیمرمن^{۳۴} در سال ۱۹۸۳ یک مدل فازی از برنامه ریزی خطی چند هدفه را پیشنهاد کرد [66]. آسای^{۳۵} و تاناکا^{۳۶} در سال ۱۹۸۴ مدلی را برای برنامه ریزی خطی با قید های فازی بیان کردند و روش حلی برای آن ارائه کردند [57]. نگویتا^{۳۷} در سال ۱۹۸۵ به بررسی و تجزیه و تحلیل برنامه ریزی خطی فازی با ضرایب فازی پرداخت [44]. سر انجام شا و چنگ^{۳۸} در سال ۱۹۹۴ مساله برنامه ریزی خطی با قید های فازی و حالت خاصی از تابع هدف فازی را ارائه کرد [53].

³⁴ Zimmermann

³⁵ Asai

³⁶ Tanaka

³⁷ Negoita

³⁸ Shaocheng

در مسائل برنامه ریزی خطی قطعی همیشه هدف تصمیم گیرنده دست یافتن به ماکسیمم و یا مینیمم تابع هدف است و همچنین قیدهای مساله از نوع قطعی هستند اما شکل و مفهوم این نوع مسائل در محیط فازی ممکن است تغییر کند . بطور مثال ممکن است هدف تصمیم گیرنده دست یافتن به ماکسیمم و یا مینیمم تابع هدف نباشد بلکه رسیدن به سطح آرزویی با درجه رضایتمندی بالا باشد . به عبارتی دیگر ، هدف تصمیم گیرنده این باشد که بخواهد هزینه یا سود موجود در جواب قطعی را با توجه به اطلاعات و شرایط موجود و سطح رضایتمندی ، به میزان قابل توجهی بهبود بخشد .

همچنین می دانیم که نامساویهای $\leq$ و $\geq$ در ریاضیات بصورت قطعی بیان می شوند ولی در محیط فازی تجاوزهای کوچک قابل قبول است . این حالت زمانی اتفاق می افتد که قیدها ، سطح آرزو را نشان می دهند یا به عبارت دیگر آنها نشان دهنده سلیقه ، رنگ ، طعم و مزه ، کوچکی و بزرگی و ... می باشند که نمی توان بوسیله قیود قطعی نشان داد .

که علامت $\geq$ نسخه فازی $\geq$ را مشخص می کند و به معنی “در اصل و به طور ضروری بزرگتر یا مساوی با ” است و علامت $\leq$ نسخه فازی $\leq$ را مشخص می کند و به معنی “در اصل و به طور ضروری کوچکتر یا مساوی با ” است .

مساله p - میانه فازی

مساله p - میانه فازی ممکن است به 4 شکل زیر مطرح شود [16] :

1- مساله p - میانه با رأسهای فازی

2- مساله p - میانه با یالهای فازی

3- مساله p - میانه با تقاضاهای فازی

4- مساله p - میانه با طولهای فازی

که البته حتی ممکن است به صورت ترکیبی از آنها نیز مطرح شود .

3-1 مساله p - میانه با تقاضاهای فازی

فرض کنید که $\mathcal{G}$ یک هدف فازی و $\mathcal{C}$ یک محدودیت فازی به ما داده شده باشند که در هدف فازی می خواهیم انتظارات ما از هدف این مساله برآورده شود . در این صورت تعریف می کنیم :

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C} \quad (1-3)$$

$\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}$ را که درجه عضویت $\mathcal{D}$ هست را به صورت زیر می نویسیم [67] :

$$\mu_{\tilde{\mathcal{D}}} = \text{Min}\{\mu_{\tilde{\mathcal{G}}}, \mu_{\tilde{\mathcal{C}}}\} \quad (2-3)$$

اگر Y_i و X_{ij} مانند روابط (۵-۱) و (۷-۱) تعریف شوند در این صورت :

چون درجه شدنی بودن هر جواب بصورت (X_{ij}, Y_i) به اختلاف میان مجموع تقاضاهایی که می بایست پوشش داده شود با تقاضاهایی که پوشش داده شده است وابسته است . بنابراین μ_f و μ_g را اینگونه تعریف می کنیم [67] :

$$\mu_f = (x_{ij}, y_i) = h_f \left(\sum_{j=\overline{1}}^n w_j - \sum_{i=\overline{1}}^n \sum_{j=\overline{1}}^n x_{ij} \right) \quad (3-3)$$

که:

$$h_f(x) = \begin{cases} 1 & x < \underline{p} \\ \frac{x - \underline{p}}{p_f - \underline{p}} & \underline{p} \leq x \leq p_f \\ 0 & x > p_f \end{cases} \quad (4-3)$$

$$x > p_f$$

که p_f ماکزیمم سطح دامنه تغییرات برای یک جواب شدنی ما باشد و

$$\mu_g(x_{ij}, y_i) = h_g \left(Z^* - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \right) \quad (5-3)$$

Z^* : جواب بهینه در حالت قطعی

$$h_g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \frac{x}{p_g} & 0 \leq x \leq p_g \\ 1 & x > p_g \end{cases} \quad (6-3)$$

که p_g مقدار هزینه ای که می بایست کاهش یابد به منظور بهبود مورد نظر باشد.

با همه این تعاریف، مساله فازی را با توجه به صورت مدل قطعی مساله (۸-۱) به صورت زیر بیان

می کنیم:

مدل فازی مساله [6]

Find (x_{ij}, y_i)

s.t. (7-3)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} d_{ij} \leq Z^* \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_{ij} &\leq w_j & \forall j \leq n \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq \sum_{j=1}^n w_j & (3) \\
x_{ij} &\leq w_j y_i & \forall i, j \leq n \\
\sum_{i=1}^n y_i &= p \\
y_i &\in \{0, 1\} & \forall i \leq n
\end{aligned}$$

قید (۱) بیانگر این است که جواب در حالت فازی باید بهتر از حالت قطعی باشد. قید (۳) نشاندهنده امکان جواب در حالت فازی است.

حال اگر λ را درجه عضویت مجموعه $\tilde{D}$ بنامیم در این رابطه به دنبال بزرگترین مقدار λ هستیم که آن را می توانیم از مدل (۳-۸) بدست آوریم:

Max λ

s.t. (8-3)

$$\lambda \leq \mu_g(x_{ij}, y_i)$$

$$\lambda \leq \mu_f(x_{ij}, y_i)$$

$$\forall x_{ij} \leq w_j y_i \quad \forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \leq n$$

حال با جایگزین کردن فرمولها و توابع خطی h_f و h_g ، مساله (3-8) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Max } \lambda$$

$$\text{s.t.} \quad (9-3)$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d_{ij}}{p_g} x_{ij} \leq \frac{z^*}{p_g}$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{p_f} x_{ij} \leq \frac{\sum_{j=1}^n w_j}{p_f}$$

$$x_{ij} \leq w_j y_i \quad \forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$\forall \lambda \leq 1$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

$$\forall i \leq n$$

و این مدل را با روش شاخه و کران حل می کنیم . در صورتی که تعداد رئوس خیلی زیاد نباشد می توان از الگوریتمی شمارشی استفاده کرد .

حال به تشریح الگوریتمی شمارشی راجع به همین موضوع می پردازیم .

3-1-1 الگوریتم مساله p- میانه فازی [6]

ابتدا همه پوشش های $A_1, A_2, \dots, A_k$ (که هر A_i انتخاب p عضو از n عضو است.) را برای p عضو از n رأس در نظر می گیریم و چون تقاضای هر رأس بوسیله نزدیکترین سرویس دهنده ، پوشش داده خواهد شد [35,40,62] بنابراین برای یک پوشش A_i ، فاصله پوشش داده شده رأس v_j بصورت زیر است :

$$D_{ij} = \min_{L \in A_j} d_{Lj} \quad (10-3)$$

که L رأسی است که رأس v_j را پوشش می دهد و d_{Lj} کوتاهترین فاصله این دو رأس است . پس با این پوشش 'هزینه عمومی بصورت زیر خواهد بود :

$$\sum_{j=1}^n w_j D_{ij}$$

بنابراین :

$$Z^* = \min_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^n w_j D_{ij} \quad (11-3)$$

حال پوشش A_i را ثابت نگه می داریم و شروع به کاهش تقاضای رؤوس می کنیم . مثلاً اگر w_j به x_j کاهش یابد در این صورت درجه شدنی بودن جواب و درجه بهبود هدف را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$\mu_f(x_j) = h_f \left(\sum_{j=1}^n (w_j - x_j) \right)$$

$$\mu_g^i(x_j) = h_g \left(Z^* - \sum_{j=1}^n x_j D_{ij} \right)$$

$$\lambda_i(x_j) = \min \{ \mu_f(x_j), \mu_g^i(x_j) \} \quad (12-3)$$

حال اگر λ_i^* درجه بهینه قابل قبول برای پوشش A_i باشد که بصورت (۱۳-۳) محاسبه شده

$$\text{Max} \lambda_i$$

$$\text{s.t.} \quad (13-3)$$

$$\lambda_i \leq \mu_g^i(x_j)$$

$$\lambda_i \leq \mu_f(x_j)$$

$$\lambda_i \leq 1$$

بنابراین بهترین درجه ممکن $\lambda_i^* = \text{Max}_{\lambda_i \leq k} \lambda_i^*$ می باشد. که این مساله با روش معمول حل می شود.

حال ما الگوریتم را در چندین مرحله تشریح می کنیم :

1- منظم کردن همه رئوس $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}$ بصورت نزولی با توجه به مقادیر D_{ij} . که داریم

$$\forall k > n' \quad n' = n - p \quad D_{ij_k} = \infty$$

۲- قرار می دهیم :

$$x = \sum_{j=1}^n w_j - \sum_{j=1}^n x_j$$

چون برای هر واحد کاهش تقاضا در v_{j_k} ، هزینه به اندازه D_{ij_k} واحد کاهش می یابد پس اگر ما به

اندازه $x \leq w_{j_1}$ کاهش دهیم، هزینه به اندازه $D_{ij_1} x$ کاهش می یابد بنابراین تابع میزان کاهش هزینه را

بصورت (۱۴-۳) زیر تعریف کنیم :

$$R_i^*(x) = \begin{cases} D_{ij_1} x & x \leq w_{j_1} \\ D_{ij_1} w_{j_1} + D_{ij_2} (x - w_{j_1}) & w_{j_1} < x \leq w_{j_1} + w_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{n-1} D_{ij_k} w_{j_k} + D_{ij_n} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k} \right) & \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k} < x \end{cases} \quad (14-3)$$

که تابع R_i^* یک تابع قطعه ای خطی است با گره هایی در نقاط $\forall s = 1, 2, \dots, n$ $a_s = \sum_{k=1}^s w_{j_k}$

که $a_0 = 0$ در نظر می گیریم بنابراین شیب R_i^* در بازه $[a_{s-1}, a_s]$ برابر D_{ij_s} است.

همچنین توابع R_i و R که به ترتیب تابع کاهش برای انتخاب رأس i به عنوان سرویس دهنده و مینیمم توابع کاهش هستند، را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R_i = F_i - R_i^* \quad (15-3)$$

(که F_i مقدار تابع هدف به ازای انتخاب رأس V_i به عنوان سرویس دهنده است.)

$$R = \min_{1 \leq i \leq n} R_i \quad (16-3)$$

3- بهترین جواب شدنی (x_j) را برای مقدار کاهش یافته از رأس V_j با مقدار X در نظر می گیریم.

درجه بهبود هدف و شدنی بودن بصورت زیر بدست می آیند:

$$\mu_f(x) = h_f(x)$$

$$\mu_g^i(x) = h_g \left(Z^* - \sum_{j \in J} D_{ij} w_j + R_i^*(x) \right)$$

که فرمول داخل پرانتز ، اختلاف مقدار تابع هدف در حالت قطعی و فازی را نشان می دهد.

۴- تابع $\mu_f(x)$ بصورت خطی و در بازه $[P_f]$ و اکیدا نزولی از 1 به 0 است و تابع $\mu_g(x)$ نیز خطی و در بازه $[P_g]$ و اکیدا صعودی است که از صفر شروع می شود . نکته قابل توجه این است که اگر هزینه برای A_i خیلی دور از Z^* باشد ممکن است مساله جوابی نداشته باشد .

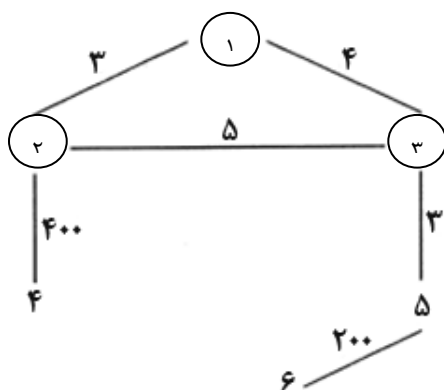
5- با تعریفی که از X^* داشتیم ، اگر r اولین اندیسی باشد بطوریکه $a_r \leq X^* < a_{r+1}$ در این صورت :

$$x_{j_s} = \begin{cases} L & s < r \\ w_{j_s} - X^* + a_{r-1} & s = r \\ w_{j_s} & r < s \leq n \end{cases} \quad (17-3)$$

نکته ۳-۱ : این الگوریتم برای مساله p -میان با رأس فازی نیز بکار می رود . همچنین قابل ذکر است که این الگوریتم ممکن است برای انواع دیگر مساله p -میان فازی نیز بکار گرفته شود .

مثال ۳-۱-۱ : فرض کنید یک مساله 2 - میان در شبکه ای با 6 رأس به صورت شکل ۳-۱ باشد

(تقاضاهای رئوس در کنار شکل آمده است .)



$$w_1 = 8$$

$$w_2 = 9$$

$$w_3 = 4$$

$$w_4 = 6/5$$

$$35$$

۴

۸

۶

$$w_5 = 9$$

$$w_6 = 12/5$$

شکل ۱-۳: شبکه با ۶ رأس

در این صورت در حالت قطعی رأس های ۵ و ۴ با هزینه $Z^* = 2640$ به عنوان رؤس بهینه انتخاب می شوند. حال می خواهیم هزینه را حداقل ۱۰۰ واحد کاهش دهیم در این صورت $p_g = 2$ در نظر می گیریم تا درجه عضویت بالاتر از $0/5$ بدست آید. و کاهش تقاضا در رأس حداکثر به اندازه ۱ واحد باشد در این صورت با توجه به تعریف $h_f = 2$ ، p_f را در نظر می گیریم. در حالت فازی رأس های ۶ و ۲ به عنوان سرویس دهنده با درجه عضویت $\lambda = 0/72$ انتخاب می شوند. که جدول ۱-۳ جوابهای مساله را درحالتهای قطعی و فازی مقایسه می کند.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Z^*	مکانیابی
قطعی	۸	۹	۴	۶/۵۰	۹	۱۲/۵	۲۶۴۰	۴, ۵
فازی	۸	۹	۴	۵/۹۵	۹	۱۲/۵	۲۴۹۵/۲	۲, ۶
اختلاف	۰	۰	۰	-۰/۵۵	۰	۰	-۱۴۴/۸	

جدول ۱-۳: مقایسه جوابهای فازی و قطعی

جدول ۲-۳: بهترین جوابهای قطعی را به ترتیب نشان می دهد.

	مکانیابی	Z	$Z - Z^*$
۱	۴, ۵	۲۶۴۰	۰
۲	۳, ۴	۲۶۴۱/۵	۱/۵
۳	۱, ۴	۲۶۹۳/۵	۵۳/۵
۴	۲, ۴	۲۷۱۶	۷۶
۵	۲, ۶	۲۷۱۶	۷۶

جدول ۲-۳: بهترین مکانیابی ها در حالت قطعی

جدول ۳-۳ بهترین جوابهای فازی را به ترتیب نشان می دهد .

	مکانیابی	$\lambda(\%)$
1	2 , 6	72/40
2	1 , 6	71/62
3	3 , 6	70/64
4	3 , 4	66/75
5	4 , 5	66/67
6	5 , 6	65/35
7	1 , 4	58/71
8	2 , 4	55/19

جدول ۳-۳: بهترین مکانیابی ها در حالت فازی

که جدول ۳-۲ و ۳-۳ نشان می دهند که جواب بهینه قطعی نمی تواند یک جواب نزدیک برای حالت فازی باشد و همچنین برعکس .

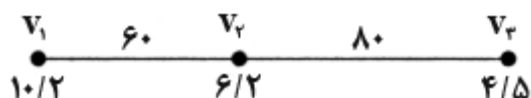
نکته 2-3: در حالت فوق ما به بررسی یکی از شکلهای مساله p -میان با تقاضاهای فازی پرداختیم بنابراین تقاضاهای فازی ممکن است شکلهای مختلفی داشته باشد [9,38,39,43] .

2-3 مساله p - میان با رأسهای فازی

در این حالت ما به دنبال پیدا کردن یک رأس با کمترین ارزش به منظور حذف آن برای بهبود دادن به تابع هدف هستیم . که در این صورت ما به اطلاعات بیشتر و مفیدتری راجع به شبکه نیازمندیم که با مثالهایی این حالت را تشریح می کنیم [7].

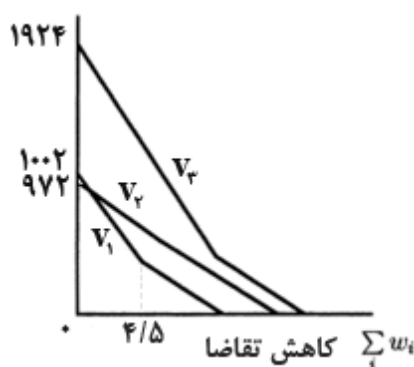
مثال ۳-2-1: فرض کنید در مساله ۱- میان مطابق شکل ۳-۲ ، ۳ رأس در شبکه با تقاضاهایی به

صورت $10/2$ و $6/2$ و $4/5$ و فواصلی که در شکل ۳-۲ نیز نشان داده شده ، داشته باشیم .

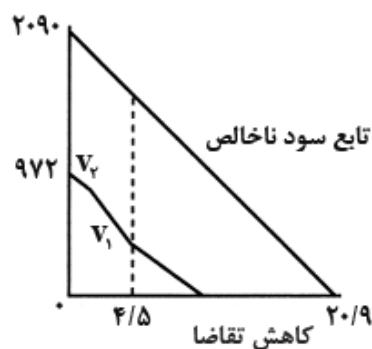


شکل ۳-۲ : شبکه با ۳ رأس

در حالت قطعی ، رأس V_2 بعنوان رأس بهینه با هزینه ۹۷۲ یورو بدست می آید [7]. حال یک پارامتر خارجی در نظر می گیریم : فرض کنید سود ناخالص^{۳۹} برای هر واحد نقل و انتقالات ، ۱۰۰ یورو باشد همین موضوع باعث می شود که رأس V_1 یا V_3 را به منظور رأس بهینه انتخاب نکنیم چونکه فاصله آنها از سود ناخالص بزرگتر است از این رو هزینه نقل و انتقالات از V_1 به V_3 یا برعکس ، از سود ناخالص بیشتر می شود . حال می خواهیم با کاهش از تقاضای رؤس کم ارزش ، هزینه را کاهش دهیم . بنابراین ابتدا تابع R_i مربوط به هر مکانیابی را به صورت شکل ۳-۳ رسم می کنیم سپس با توجه به تعریف تابع R که مینیمم توابع R_i ها است آن را با توجه به شکل ۳-۳ به صورت شکل ۴-۳ رسم می کنیم .



شکل ۳-۳ : توابع R_i



شکل ۴-۳ : تابع R

اختلاف میان تابع مقدار بهینه R و تابع سود ناخالص (که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است) به ما سود خالص^{۴۰} برای کاهش تقاضا به اندازه X را می دهد . با توجه به شکل دیده می شود که برای کاهش به اندازه $X = 4/5$ ، یعنی با عدم پوشش تقاضا در رأس V_3 و انتخاب V_1 بعنوان رأس بهینه ، مینیمم هزینه اتفاق می افتد که جدول ۴-۳ ، مقادیر بدست آمده در این حالت را نسبت به حالتی که تقاضا ها بطور کامل پوشش داده می شد ، مقایسه می کند .

سود خالص	سود ناخالص	هزینه	تقاضا
1118	2090	972	کامل پوشش داده شده

³⁹ gross profit

⁴⁰ net profit

عدم پوشش V3	372	1640	1268
اختلاف	600	-450	+150

جدول ۳-۴: مقایسه جوابها در حالت پوشش کامل و عدم پوشش V3

عدم پوشش تقاضا در رأس V1 یا V3 و انتخاب V3 یا V1 بعنوان رأس بهینه باعث بهتر شدن جواب می شود بنابراین این نوع کاهش تقاضا بسیار مفید و موثر است که این نوع کاهش را “کمبود واقعی”^{۴۱} می نامیم .

3-2-1 آنالیز مستقیم R

در بعضی حالات ، شکل R می تواند بدون آنالیز بیشتری ، کمبود واقعی را نشان دهد . مثال زیر بیانگر همین مطلب است .

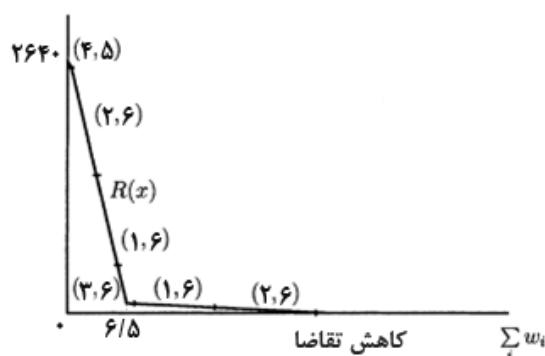
مثال ۳-۲-۲: اگر به مثال ۳-۱-۱ برگردیم می بینیم که ۶ رأس بوسیله ماتریس فواصل یعنی D و بردار تقاضا W که در زیر آمده اند ، مشخص می شد .

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4.3 & 7 & 2.7 \\ 3 & 0 & 5 & 4.0 & 8 & 2.8 \\ 4 & 5 & 0 & 4.5 & 3 & 2.3 \\ 4.3 & 4.0 & 4.5 & 0 & 4.8 & 6.8 \\ 7 & 8 & 3 & 4.8 & 0 & 2.0 \\ 2.7 & 2.8 & 2.3 & 6.8 & 2.0 & 0 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 6/5 \\ 9 \\ 12/5 \end{pmatrix}$$

که در مثال ۳-۱-۱ دیدیم در حالت قطعی ۴ و ۵ بعنوان رأسهای بهینه انتخاب شد و همچنین جواب فازی (با توجه به میزان کاهش در نظر گرفته شده) رأسهای ۲ و ۶ به عنوان سرویس دهنده انتخاب شدند . با توجه به الگوریتم ۳-۱-۱ نمودار تابع R بصورت شکل ۳-۵ می باشد که نشان می دهد کاهش به اندازه $x = 6/5$ ، یعنی عدم پوشش تقاضا در رأس V4 باعث کاهش هزینه به اندازه 2536 یورو می

⁴¹ Virtual loss

شود و متناظر با آن رأسهای ۳ و ۶ بعنوان سرویس دهنده انتخاب می شوند و مقدار تابع هدف در این حالت ۱۰۴ یورو می باشد. اگر چه در این مثال تابع سود ناخالص داده نشده اما ما می توانیم بر راحتی وجود کمبود واقعی با توجه به شکستگی نمودار در شکل ۳-۵ ببینیم.



شکل ۳-۵: تابع R

3-2-2 آنالیز فازی شیب ها

داده های خارجی همیشه بصورت قطعی نیستند بعضی وقت ها ممکن است آنها نیز بصورت تخمینی و نادقیق بیان شوند بطور مثال سود ناخالص ممکن است بصورت تخمینی بیان شود بطوریکه برای هر کاهش تقاضای x سود ناخالص در بازه $[a(x), b(x)]$ باشد که ما $a(x)$ و $b(x)$ را توابع پیوسته ای از x فرض کرده ایم که آنها کرانه های سود ناخالص را بیان می کنند. بنابراین تعریف می کنیم:

$$p_{\lambda}(x) = (\frac{1}{\lambda}a(x) + \lambda b(x)) \quad (3-18)$$

که λ را "سطح خوش بین"^{۴۲} برای سود موجود برای هر پوشش تقاضا در نظر می گیریم. به منظور

مقایسه بهتر p_{λ} و R ، روابط (3-۱۹) و (3-۲۰) را تعریف می کنیم:

تعریف ۳-۲-۱: میانگین سرعت نزول هزینه را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$S^c(x) = \frac{R(x) - R(\cdot)}{x} \quad x > \cdot \quad (19-3)$$

بطور مشابه ، میانگین سرعت نزول سودها را برای سطح λ بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$x > \cdot \quad S_{\lambda}^p(x) = \frac{p_{\lambda}(x) - p_{\lambda}(\cdot)}{x} \quad (20-3)$$

اگر یک برآورد قطعی مانند $p(x)$ از سود ناخالص داشته باشیم در این صورت یک تابع از میانگین سرعت نزول سود به شکل $S^p(x)$ را خواهیم داشت بنابراین اگر نامساوی $S^p(x) > S^c(x)$ اتفاق بیافتد بدین معناست که کاهش تقاضا به اندازه x باعث اختلاف سود ناخالص به اندازه $S^p(x)x$ و اختلاف هزینه نقل و انتقالات به اندازه $S^c(x)x$ و در نتیجه باعث اختلاف سود خالص به اندازه $(S^p(x) - S^c(x))x > 0$ می شود و این نشان دهنده وجود کمبود واقعی در مدل است . اما اگر نامساوی $S^p(x) \leq S^c(x)$ اتفاق بی افتد در این صورت می توان آن را بصورت $S^c(x) \in [S^p(x), +\infty)$ نیز نوشت . در اینصورت تخمین فازی از سودها را در نظر می گیریم از این رو تعریف می کنیم :

$$S_{\lambda}^p(x) = (1 - \lambda)S_{\square}^p + \lambda S_{\triangle}^p(x) \quad (21-3)$$

همچنین $m(x)$ و $M(x)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$M(x) = \text{Max} \{ S_{\square}^p(x), S_{\triangle}^p(x) \} \quad (22-3)$$

$$m(x) = \text{Min} \{ S_{\square}^p(x), S_{\triangle}^p(x) \} \quad (23-3)$$

بنابراین برای $S_{\lambda}^p(x)$ بی نهایت حالت ممکن است اتفاق بی افتد .

حال تابع عضویت را برای این فاصله بصورت (۲۴-۳) تعریف می کنیم [67] :

$$\mu_x(y) = \begin{cases} 1 & y > M(x) \\ \frac{y - m(x)}{M(x) - m(x)} & m(x) \leq y \leq M(x) \\ 0 & y < m(x) \end{cases} \quad (24-3)$$

که برای سادگی حل مساله آن را بصورت قطعه ای خطی در نظر می گیریم که با توجه به مطالب گفته شده برای کاهش تقاضا به اندازه x که باعث افزایش در سود خالص می شود در بهترین حالت بصورت :

$$\mu_x(S^c(x)) = \bar{\alpha}$$

خواهد بود. یا بعبارت دیگر برای کاهش تقاضا به اندازه x که باعث کاهش سود خالص می شود در

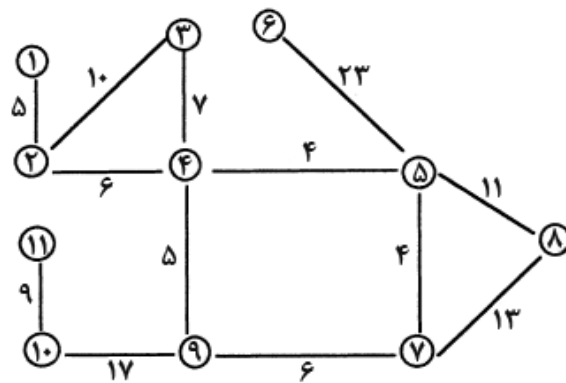
$$\mu_x(S^c(x)) = \bar{\alpha} \quad \text{بدترین حالت بصورت :}$$

تعریف ۳-۲-۲ : درجه اعتبار مدل مساله $p -$ میانه را با در نظر گرفتن تخمین داده شده سودها بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\alpha = \min_x \mu_x(S^c(x)) \in [0, 1] \quad (25-3)$$

که α را میزان درستی فازی عبارت "وجود نداشتن میزان کمبودهای واقعی در مدل" در نظر می گیریم .

مثال ۳-۲-۳ [7] : مساله ۳ - میانه داده شده بصورت شکل ۳-۶ را با توجه به تقاضاهای داده شده در زیر شکل ۳-۶ ، در نظر بگیرید :



شکل 3-6: شبکه با ۱۱ رأس

$$W_1 = 1 \text{ €}$$

$$W_2 = 28$$

$$W_3 = 49$$

$$W_4 = 16$$

$$W_5 = 18$$

$$W_6 = 4 \text{ €}$$

$$W_7 = 9 \text{ €}$$

$$W_8 = 7 \text{ €}$$

$$W_9 = 1 \text{ €}$$

$$W_{10} = 5 \text{ €}$$

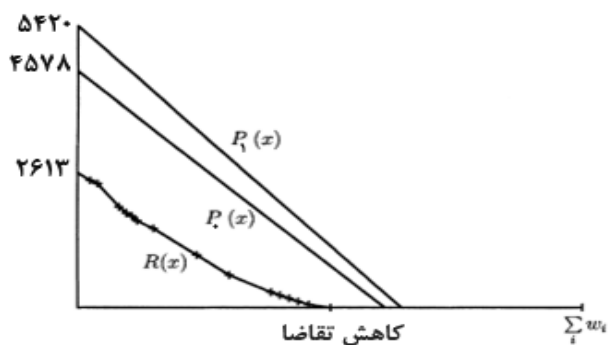
$$W_{11} = 4 \text{ €}$$

در حالت قطعی رئوس بهینه بصورت (V5, V6, V10) خواهند بود.

فرض کنید سودها برای هر کاهش تقاضا به اندازه x بین $p_1(x)$ و $p_2(x)$ داده شده در زیر اتفاق بی افتد (که این اطلاعات را در اختیار تصمیم گیرنده قرار می دهند).

$$p_1(x) = -18x + 4578$$

$$p_2(x) = -2x + 542$$

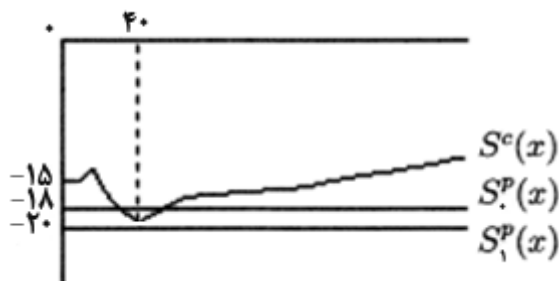


شکل 3-7: توابع P_1 و R

شکل 3-7، کرانه‌های سود ناخالص

با تابع $R(x)$ را نشان می دهد.

از روی شکل 3-7 وجود کمبود واقعی مشخص نیست. اما بوسیله شکل 3-8 و مشخص شدن S^p و S^c با توجه به روابط (3-20) و (3-19)، کمبود واقعی مشخص می شود.



شکل 3-8: توابع S^p و S^c

با توجه به شکل 3-8 دیده می شود که مینیمم درجه عضویت در $x = 40$ اتفاق می افتد که در این نقطه $\alpha = 0.125$ است. بنابراین میزان درستی وجود کمبودهای واقعی 87.5% است که با توجه به این کاهش، مکانیابی بهینه فازی، رئوس (V_4 , V_8 , V_{10}) و عدم پوشش تقاضا در رأس V_6 اتفاق می افتد.

3-3 مساله p- میانه با تقاضاها و یالهای فازی

ما این حالت را با در نظر گرفتن شهر کین شاسا^{۴۳} و اطلاعاتی که از این شهر در دست ماست [38]، توضیح می دهیم.

مثال 3-3-1: شهر کین شاسا پایتخت سیاسی جمهوری دموکراتیک کنگو است. جمعیت این شهر در سال ۱۹۶۰، 400 هزار نفر بوده اما در سال ۲۰۰۱ جمعیت آن به بیش از ۶ میلیون نفر رسید. بنابراین در کنار شهرهایی همچون لاگوس و کاریو جز شهرهای پر جمعیت دنیاست که طبق تحقیقات آماری در سال ۲۰۱۵، لاگوس به ۲۴ میلیون نفر، کاریو به ۱۶/۵ میلیون و کین شاسا به بیش از ۱۰ میلیون نفر خواهد رسید. مساحت کین شاسا در حدود ۱۰ هزار کیلو متر مربع است. این شهر دارای

۵ راه اصلی است : خیابان های آی پی ان ، ۲۴ نوامبر ، کاساوبو ، دانشگاه و لومومبا . مطالعات نشان میدهد که هر روز 100196 جابجایی در این شهر صورت می گیرد که ۴٪ آن از ماشینهای شخصی، ۴۰٪ از اتوبوس یا قطار ، ۲۰٪ از تاکسی و ۳۶٪ پیاده این کار را می کنند. از آنجایی که جمعیت این شهر رو به رشد است سیاستمداران آن به دنبال اتخاذ تصمیم جدیدی برای نقل و انتقالات هستند از جمله ترن زیر زمینی ، قطار و اتوبوس . اما کین شاسا خاک مناسبی برای احداث ترن زیر زمینی ندارد و همچنین احداث آن بسیار پر هزینه خواهد بود . حال هدف پیدا کردن مکانهایی برای احداث ایستگاههای اتوبوس یا راه آهن و غیره است بطوریکه نقل و انتقالات برای متقاضیان آسانتر و در کل هزینه نقل و انتقالات هم مینیمم شود . این یک مساله p - میانه است که با توجه به مدل 1-3-2 می دانیم مدل مساله p - میانه در حالت قطعی به صورت زیر است :

$$Z^* = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j d_{ij} x_{ij}$$

(۲۶-3)

s.t.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

$$\forall j \leq n$$

$$x_{ij} \leq y_i$$

$$\forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}$$

$$\forall i, j \leq n$$

مدل فازی مساله

شبکه $G = (N, A)$ را در نظر می گیریم بطوریکه $N = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه رئوس و A مجموعه یالهای موجود بین هر جفت رأس (i, j) است و w_j وزن مربوط به رأس j ام است و نشاندهنده جمعیت رأس j ام است و L_{ij} وزن مربوط به یال (i, j) است. در این مساله عدم قطعیت روی w_j ها و L_{ij} ها است که مجموعه های فازی مربوط به آنها بصورت زیر تعریف می شوند:

$$W = \{(w_j, \mu_w(w_j))\} \quad \forall j \in N \quad (27-3)$$

$$L = \{(L_{ij}, \mu_L(L_{ij}))\} \quad \forall i, j \in N \quad (28-3)$$

که W و L ماتریسهای مربوط به w_j ها و L_{ij} ها است.

$\mu_w(w_i)$ درجه عضویت برای تقاضا در رأس w_j است و $\mu_L(L_{ij})$ درجه عضویت طول L_{ij} است.

مدل مساله p - میانه فازی در این حالت بصورت زیر است: [38,39,67]

$$(Z^*, \lambda^*) = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_j, \mu_w(w_j))(d_{ij}, \mu_D(d_{ij}))x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad (29-3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j \in N$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N$$

که y_i و x_{ij} باتوجه به روابط (1-5) و (1-4) تعریف می شود و همچنین:

تقاضا در رأس j ام $W_j =$ ، هزینه بهینه نقل و انتقالات $Z^* =$

درجه عضویت W_j $\mu_w(w_j) =$ ، درجه عضویت هزینه بهینه $\lambda^* =$

فاصله کوتاهترین مسیر میان رئوس i, j $d_{ij} =$ ، درجه عضویت d_{ij} $\mu(d_{ij}) =$

ماتریس فازی از فواصل d_{ij} $D =$ ، زیر مجموعه فازی از وزنهای رئوس $W =$

که d_{ij} نیز با الگوریتم دایجسترا محاسبه می شود [12].

می دانیم که عناصر یک مجموعه فازی طبق عملگرها می توانند با هم ترکیب شوند [47] و یک

مجموعه فازی جدید را بوجود بیاورند که این عملگرها باید شرایط زیر را داشته باشند :

$$A : [\square, \square] \longrightarrow [\square, \square]$$

۱ - کرانداری : $A(1, 1, \dots, 1) = 1$ و

$$A(\square, \square, \dots, \square) = \square$$

2- یکنواختی : $\longrightarrow A(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i \geq y_i$$

در این مدل ما از عملگر میانگین حسابی بجای عملگر جمع و از عملگر مینیمم بجای عملگر ضرب استفاده می کنیم .

برای حل این مدل ، در مرحله اول مسا له p - میانه را در حالت قطعی حل می کنیم و در مرحله دوم درجه عضویت کل را بصورت زیر محاسبه می کنیم :

$$\lambda^* = \frac{1}{n-p} \sum_{j=1}^{n-p} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \text{Min}(\mu_w(w_j), \mu_D(d_{ij})) x_{ij} \right) \quad (30-3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N$$

$$\mu_w(w_j), \mu_D(d_{ij}) \in [0, 1] \quad \forall i, j \in N$$

که در حالت قطعی w_j ها و d_{ij} ها نیز قطعی هستند یعنی :

$$\forall j \in N \quad \mu_w(w_j) = 1$$

$$\forall d_{ij} \in D \quad \mu_D(d_{ij}) = 1$$

$$\lambda^* = 1$$

در مثال شهر کین شاسا تقاضاها و فواصل را فازی در نظر گرفته ایم و هدف هم پیدا کردن 2 مکان بهینه برای ایستگاه اتوبوس است از بین 7 رأس داده شده در جدول 3-5 ، این رؤس با تقاضاها و درجه عضویت هایشان مشخص شده اند .

درجه قطعیت	تقاضا	اسامی رؤس	رأس
0/75	۲۶/۱۳	بینزا آی پی ان	1
0/70	۲۶/۱۳	بینزا دلواکس	2
0/80	۲۶/۱۳	بینزا ازون	3
0/65	۲۶/۱۳	بینزا پمپیچ	4
0/70	۱۴/۸۰	کینتامبو ماکسین	5
0/70	۳۰/۵۸	پارکینگ بندل	6
0/65	۴۴/۹۷	سلمباو مارچ	7

جدول 3-5 : رؤس در شبکه

فواصل میان رؤس در جدول 3-6 داده شده که درجه عضویت همه آنها را 0/75 در نظر می گیریم .

	1	2	3	4	5	6	7
1	0/00	3/00	7/00	11/20	8/00	7/60	3/60
2	3/00	0/00	4/00	8/20	5/00	9/50	6/60
3	7/00	4/00	0/00	6/40	3/20	7/70	10/60
4	11/20	8/20	6/40	0/00	3/20	7/70	11/70
5	8/00	5/00	3/20	3/20	0/00	4/50	8/50
6	7/60	9/50	7/70	7/70	4/50	0/00	4/00
7	3/60	6/60	10/60	11/70	8/50	4/00	0/00

جدول 3-6 : فواصل بین رئوس

که با توجه به محاسبات انجام شده (روابط (30-3) و (29-3)) رئوس 5 و 7 به عنوان مکان بهینه با هزینه 514270 و درجه عضویت 0/69 بدست می آیند .

همچنین ممکن است طول فواصل بین رئوس نیز فازی باشند که در این صورت شکل شبکه یعنی مکان های رئوس و طول فواصل آنها از هم باید به صورت خاصی باشد تا با تغییر فواصل به جواب بهتری برسیم [9,43] یا اینکه ممکن است یالها به صورت اعداد مثلثی فازی تعریف شوند که در این صورت با تعریف تابع عضویت مناسب آن را حل می کنیم [43].

نتیجه : فازی بودن یالها و یا تقاضاها و یا طولها ممکن است به شکلهای مختلفی روی شبکه ها مطرح شود . همین مطلب می تواند شکلهای مختلفی نیز در گرافهای فازی و درخت فازی داشته باشد [14,15,42].

فصل چهارم

تعمیم مساله p – میانه فازی در

حالت‌های دیگر

در این فصل به صورت ابتکاری اقدام به توسیع مساله p -میان به راسها و تقاضاهای فازی شده است. همچنین طرح ترکیبی فازی و قطعی بودن تقاضاهای رئوس برای مساله p -میان ارائه شده است.

1-4 مساله p - میان به تقاضاها و رئوس فازی

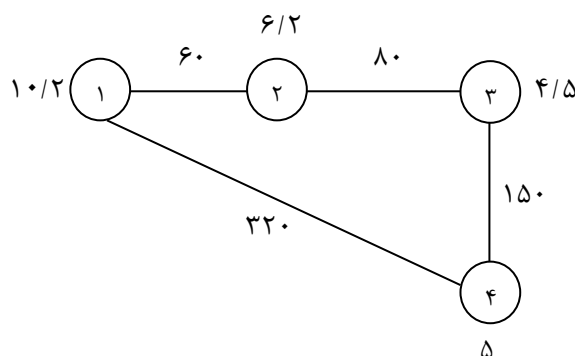
در این حالت هم رئوس و هم تقاضاها فازی هستند. اگر فازی بودن تقاضاها و رئوس را به همان شکلی که در مباحث 2-3 و 1-3 گفته شد، در نظر بگیریم در این صورت برای حل این شکل از مساله، اینگونه عمل می کنیم که ابتدا مساله p - میان را با رئوس فازی در نظر می گیریم و مساله را به همان شکلی که در حالت مساله p - میان با رئوس فازی گفته شد (حالت 3-2) حل می کنیم. سپس شبکه جدید بدست آمده از حل مساله p - میان با رئوس فازی را برای مساله p - میان به تقاضاهای فازی در نظر می گیریم و با توجه روابط بدست آمده و شیوه حلی که در حالت مساله p - میان به تقاضاهای فازی (در حالت 3-1) بیان شد مساله را روی شبکه جدید بدست آمده حل می کنیم. به طور مثال اگر یک شبکه با n رأس را در نظر بگیریم در این صورت مساله را با رئوس فازی حل می کنیم بعد از حل، یک رأس با درجه عضویت α حذف می شود و سپس مساله را با تقاضاهای فازی برای $n-1$ رأس باقیمانده حل می کنیم که در این صورت رأس مورد نظر برای کاهش تقاضا و میزان کاهش تقاضا و تابع هدف با درجه عضویت λ بدست می آید. در پایان حل مساله p - میان به تقاضاهای فازی، درجه عضویت کل یعنی درجه عضویت جواب مساله p - میان با رئوس و تقاضاهای فازی را از تابع عضویت کل که به صورت زیر تعریف شود، بدست می آوریم:

$$\gamma = \frac{\lambda + (1 - \alpha)}{2} \quad (1-4)$$

در پایان، این نکته قابل ذکر است که اگر اولویت بندی بیان شده برای حل مساله رعایت نشود در این صورت مساله یا بطور کامل حل نمی شود و یا باعث بالا رفتن پیچیدگی زمانی حل مساله می شود.

همچنین در حالت مساله p - میانه با رئوس فازی ، برای سادگی حل مساله ، تابع سود ناخالص از نوع خطی در نظر گرفته می شود که در غیر این صورت حل مساله ، پیچیده خواهد شد .

مثال 1-1-4 : شبکه زیر را با رئوس و تقاضاهای داده شده در شکل ۱-۴ ، در نظر بگیرید :



شکل ۱-۴: شبکه با ۴ رأس

و فرض کنید توابع سود ناخالص برای کاهش تقاضا به صورت (۳-۴) و (۲-۴) باشند :

$$p_2(x) = -229x + 259 \quad (2-4)$$

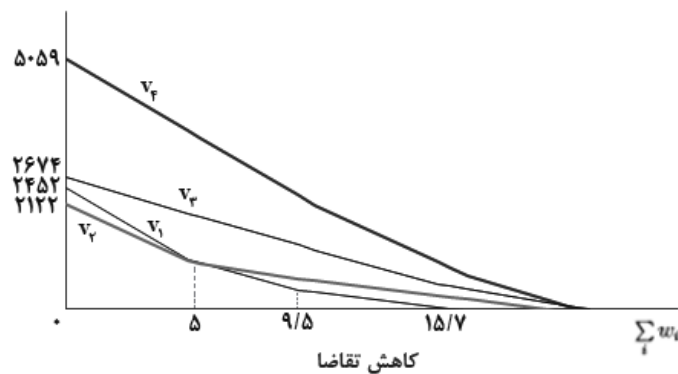
$$p_3(x) = -237x + 343 \quad (3-4)$$

حال هدفهای مساله 1- میانه شرح داده شده ، حذف یک رأس غیر ضروری به منظور پایین آوردن هزینه و همچنین کاهش تقاضا در یک رأس حداکثر به اندازه ۱ واحد ، به منظور پایین آوردن هزینه در حدود ۱۰۰ یورو و در پایان نیز پیدا کردن یک سرویس دهنده برای سرویس دهی تقاضاهای رئوس به منظور پیدا کردن یک جواب مطلوب برای مساله 1- میانه می باشد .

حل : ابتدا مساله ۱- میانه را در حالت قطعی حل می کنیم که جواب بهینه مساله 1- میانه در حالت

قطعی V_2 به عنوان رأس بهینه با مقدار تابع هدف ۲۱۲۲ یورو است

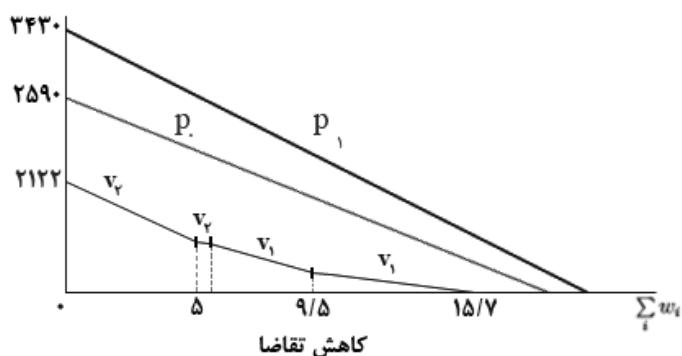
حال به فازی بودن رئوس می پردازیم و مساله را در این حالت حل می کنیم . با توجه به الگوریتم 1-1-3 شکل توابع کاهش R_i به صورت شکل ۲-۴ می باشد.



شکل ۴-۲: توابع R_i

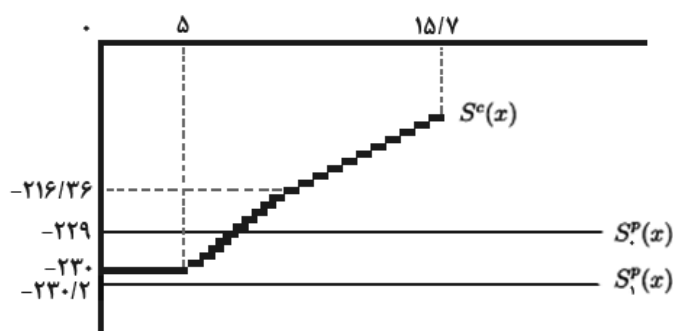
در نتیجه شکل تابع کاهش R

به صورت شکل ۴-۳ می باشد.



شکل ۴-۳: تابع R

بنابراین نمودار توابع $S^P_{\square}$ و S^C و $S^P_{\square}$ به صورت شکل ۴-۴ می باشد.



شکل ۴-۴: توابع S^P و S^C

همانطوریکه در شکل ۴-۴ دیده می شود با توجه به تعاریف و روابط گفته شده در حالت مساله p -

میانها با رئوس فازی، در $x = 5$ یعنی تقاضا در رأس V_f ، مینیمم درجه عضویت با مقدار $\alpha = 0.2$

اتفاق می افتد. بنابراین میزان درستی وجود کمبودهای واقعی 0.8 است. پس رأس V_f از بین رئوس

حذف می شود . اکنون مساله را با رئوس باقیمانده یعنی V_1 و V_2 و V_3 برای حالت تقاضاهای فازی حل می کنیم که در این حالت ابتدا P_g و P_h را به صورت زیر در نظر می گیریم [9]:

$$P_f = 1/04 \quad (4-4)$$

$$p_g = 194/4 \quad (5-4)$$

حال با توجه به کلیه روابط و شیوه حل گفته شده در مثال حالت مساله p - میانه با تقاضاهای فازی (حالت ۴-۱)، جواب مساله به صورت جدول ۴-۱ می باشد .

درجه رضایتمندی	مکانیابی	Z^*	W_{III}	W_2	W_1	
	۲	۹۷۲	۴/۵	۶/۲	۱۰/۲	قطعی
	۱	۸۷۵/۴	۳/۸۱	۶/۲	۱۰/۲	فازی
		-۹۶/۶	۰/۶۹	۰	۰	اختلاف

جدول ۴-۱ : جوابهای قطعی و فازی و مقایسه آنها

که با توجه به رابطه (۴-۱) درجه عضویت کل یعنی درجه عضویت جواب مساله p - میانه با رأس و تقاضای فازی بصورت $\gamma = 0.57$ می باشد .

2-4 مساله p - میانه ترکیبی (تقاضاهای قطعی و فازی)

شبکه $N = (V, E)$ را در نظر بگیرید بطوریکه $V_1, V_2, \dots, V_n$ رئوس شبکه باشند و W_i تقاضای متناظر با رأس V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) باشد . فرض کنید مساله مورد نظر یک مساله p - میانه باشد به طوریکه بخواهیم تقاضاهای رئوس ($s = 1, \dots, r$; $r < n$) بصورت قطعی برآورده شوند و کاهش تقاضا از بین رئوس دیگر صورت بگیرد. اگر فازی بودن تقاضاها را به همان صورتی که در حالت مساله p - میانه با تقاضاهای فازی (حالت 3-۱) گفته شد ، در نظر بگیریم در این صورت : روش بدست آوردن تابع عضویت برای محاسبه درجه عضویت و همچنین میزان کاهش تقاضا و تابع

هدف و به طور کل جواب نهایی به صورتی که در مساله p - میانه با تقاضاهای فازی (حالت 3-1) بیان شد، محاسبه می شود فقط تغییرات اندکی صورت می گیرد که آنها را بیان می کنیم .

اگر توابع عضویت مانند حالت 3-1 در نظر گرفته شود ، در این صورت مدل مساله فازی (3-7) به

مدل (4-6) تغییر می یابد .

مدل فازی مساله

Find (x_{ij}, y_i)

s.t.

(4-6)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} d_{ij} \leq Z^*$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j$$

$$\forall j ; j = \{r+1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{is} = w_s$$

$$\forall s ; s = \{1, 2, \dots, r\}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq \sum_{i=1}^n w_j$$

$$x_{ij} \leq w_j y_i$$

$$\forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\forall i, j \leq n$$

حال اگر λ درجه عضویت کل باشد ، در این صورت بزرگترین λ از مدل مساله (4-7) بدست

می آید :

$$\text{Max } \lambda$$

$$\text{s.t.} \quad (7-4)$$

$$\lambda \leq \mu_g(x_{ij}, y_i)$$

$$\lambda \leq \mu_f(x_{ij}, y_i)$$

$$x_{ij} \leq w_j y_i \quad i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad \forall j ; j = \{r+1, \dots, n\}$$

$$\forall s ; s = \{1, 2, \dots, r\} \quad \sum_{i=1}^n x_{is} = w_s$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad x_{ij} \geq 0 \quad \lambda \leq 1 \quad i, j \leq n$$

که با جایگزین کردن فرمولها و توابع خطی ، مدل (7-4) بصورت (8-4) در می آید :

$$\text{Max } \lambda$$

$$\text{s.t.} \quad (8-4)$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d_{ij}}{p_g} x_{ij} \leq \frac{Z^*}{p_g}$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_f} x_{ij} \leq 1 - \frac{\sum_{j=1}^n w_j}{p_f}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq w_j y_i \quad \forall i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad \forall j ; j = \{r+1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{is} = w_s \quad \forall s ; s = \{1, 2, \dots, r\}$$

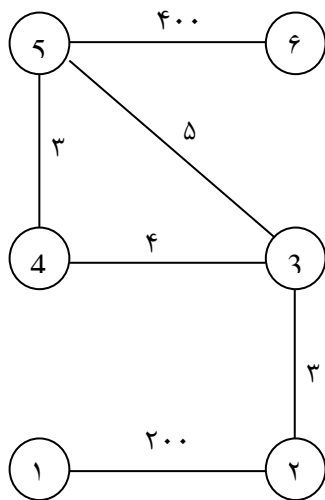
$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad x_{ij} \geq 0 \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \forall i, j \leq n$$

و این مدل را با روش شاخه و کران حل می کنیم .

همچنین در الگوریتم (الگوریتم 3-1-1) می بایست رئوسی را که می خواهیم تقاضاهای آنها را قطعی در نظر بگیریم جز رئوس گام اول الگوریتم در نظر نمی گیریم . یعنی در اینجا رئوس V_s را جز رئوس گام اول الگوریتم در نظر نمی گیریم .

مثال 4-2-1 : فرض کنید یک مساله 2 - میانه در 6 رأس شبکه به صورت شکل 4-5 داده شده باشد بطوریکه تقاضاهای رئوس بصورت زیر در نظر گرفته شده باشند :



$$w_1 = 12/5$$

$$w_2 = 9$$

$$w_3 = 4$$

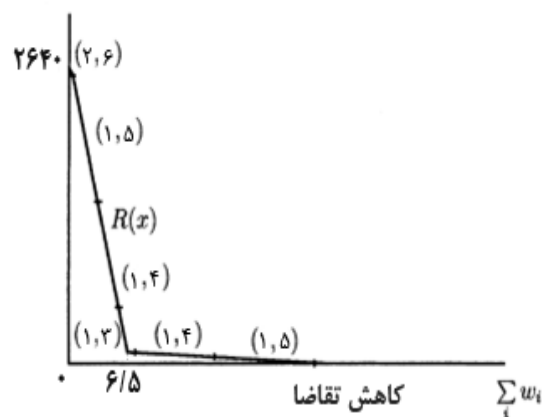
$$w_4 = 8$$

$$w_5 = 9$$

$$w_6 = 6/5$$

شکل ۴-۵: شبکه با ۶ رأس

با توجه به الگوریتم ۱-۳-۱ و نمودار توابع کاهش R_i ، نمودار تابع R بصورت شکل ۴-۶ می باشد.



شکل ۴-۶: تابع R

با توجه به شکل ۴-۶، رؤس ۶ و ۲ با هزینه ۲۶۴۰، جواب بهینه مساله در حالت قطعی هستند.

اکنون می خواهیم هزینه را تا حدود ۱۰۰ واحد کاهش دهیم در این صورت $P_g = 2$ در نظر می گیریم تا درجه رضایتمندی بالاتر از $0/5$ بدست آید و کاهش تقاضا در رأس حداکثر به اندازه ۱ واحد باشد در این صورت با توجه به تعریف h_f ، $P_f = 2$ در نظر می گیریم. در حالت فازی با توجه به شکل ۴-۶ و روابط بیان شده در حالت ۲-۴، رأس های ۵ و ۱ به عنوان سرویس دهنده با درجه عضویت $\lambda = 0.72/4$ انتخاب می شوند. همچنین اگر بخواهیم تقاضاهای رؤس V_1 و V_2 و V_3 به طور

کامل پوشش داده شود و از تقاضای این ۳ رأس برای کاهش تقاضا استفاده نشود . در این حالت (حالت ترکیبی) نیز با توجه به الگوریتم 3-1-1 و روابط بیان شده در حالت 4-2 ، مجدداً رأس های ۵ و ۱ به عنوان سرویس دهنده با درجه عضویت $\lambda = 72/4\%$ انتخاب می شوند. که جدول 4-2 جوابهای مساله را درحالتهای قطعی و فازی و ترکیبی مقایسه می کند .

	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	W ₅	W ₆	Z*	مکانیابی	
قطعی	12/5	9	4	8	9	۶/۵	2640	2 . 6	
فازی	12/5	9	4	8	9	۵/۹۵	2495/2	1 . 5	$\lambda = 72/4\%$
اختلاف	0	0	0	0	0	-0/55	-144/8		
ترکیبی	12/5	9	4	8	9	5/95	2495/2	1 . 5	$\lambda = 72/4\%$

جدول 4-۲ : جوابهای مساله در حالتهای قطعی و فازی و ترکیبی

بنابراین می توان گفت جواب مساله p - میانه ترکیبی ، یا همان جواب مساله p- میانه با تقاضای فازی می شود و یا ممکن است بدتر از جواب مساله p - میانه با تقاضای فازی شود و این موضوع زمانی اتفاق می افتد که یکی از رأسهایی را که می خواهیم تقاضای آنها را قطعی در نظر بگیریم ، همان رأسی باشد که اگر تقاضای همه رئوس را فازی در نظر بگیریم و مساله را حل کنیم در جواب نهایی مساله p - میانه با رئوس فازی از تقاضای آن رأس برای جواب نهایی مساله کاسته شود یعنی در این مساله تقاضای رأس ۶ را قطعی در نظر بگیریم و بخواهیم تقاضای آن بطور کامل پوشش داده شود . اما مزیت این حالت در این است که از اختیارات بیشتری برخورداریم و متناسب با این اختیارات بیشتر ، تصمیم گیری می کنیم .

3-4 نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه در فصل اول ، موضوع مکانیابی (حالت‌های پیوسته و گسسته) و مساله p -میان‌ه روی شبکه بررسی شده است . در فصل دوم ، خلاصه ای از منطق فازی و مجموعه ها و عملگرهای فازی بیان شده است . در فصل سوم ، ابتدا بصورت مختصر برنامه ریزی خطی فازی بررسی شده است و سپس مساله p -میان‌ه با یالها و رئوس و تقاضاهای فازی روی شبکه معرفی و روشهای حل آن بیان شده است و در فصل چهارم ، به صورت ابتکاری اقدام به توسیع مساله p -میان‌ه با رأسها و تقاضاهای فازی شده است همچنین طرح ترکیبی فازی و قطعی بودن تقاضاهای رئوس برای مساله p -میان‌ه ارائه شده است .

پیشنهادهات :

- ۱- امکان بررسی موضوع روی شبکه با یالها ، رئوس ، تقاضاها و طولهای فازی
- ۲- امکان یافتن الگوریتمی با پیچیدگی کمتر به منظور حذف رأس در مساله p -میان‌ه با رئوس

فازی

Reference

- [1] Alp O., Erkut E. , Drezner Z. (2003) “ An efficient genetic algorithm for the p-median problem ” *Annals of Operation Research*, 122 , pp. 21–42 .
- [2] Beasley J.E. (1993) “ Lagrangean heuristics for location problems ” *European Journal of Operation Research*, 65 , pp. 383–399 .
- [3] Bellman R.E., Zadeh L.A. (1970) “ Decision-making in a fuzzy environment ” *Management Science* ,17 ,pp. 141–164 .
- [4] Bozkaya Z. J. , Erkut E. (2002) “A genetic algorithm for the p-median problem” In Drezner Z. and Hamacher H. (eds) , *Facility Location : Applications and Theory*. Berlin : Springer .
- [5] Burkard R.E. , Krarup J. (1998) “ A linear algorithm for the pos/neg weighted 1-median problem on a cactus ” *Computing* 60, pp. 193–215 .
- [6] Canos M.J., Ivorra C., Liern V. (1999) “ An exact algorithm for the fuzzy p-median problem ” *European J. Operations Research*, 116 , pp. 80–86 .
- [7] Canos M.J., Ivorra C., Liern V. (2001) “ The fuzzy p- median problem : a global analysis of the solutions ” *European J. Operations Research*, 130 , pp. 430–436 .
- [8] Canos M.J., Ivorra C., Liern V. (2002) “ Finding satisfactory near-optimal solutions in location problems ” Verdegay J. L. Editor , *Fuzzy sets Based Heuristics for Optimization* , 126 , pp. 265–276 .
- [9] Canos M.J., Ivorra C., Liern V. (2007) “ Marginal analysis for the fuzzy p-median problem ” *European J. Operations Research*, doi: 10.1016 , pp. 1–7 .
- [10] Captivo E.M. (1991) “ Fast primal and dual heuristics for the p-median location problem ” *European Journal of Operational Research* , 52 ,pp. 65–74 .
- [11] Chinas S. , Delgado M. , Verdegay J.L., Vila M.A. (1995) “ Fuzzy optimal flow on imprecise structures ” *European J. Operations Research* 83 , pp. 568–580.

[12] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L. (1989) "Introduction to Algorithm" The MIT Press, 1026 .

[13] Courant R. and Robbins H. (1941) "What is mathematics?" Oxford : Oxford University Press .

[14] Delgado M., Verdegay J.L. , Vila M.A. (1985) " On fuzzy tree definition " European J. Operations Research, 22 , pp 243–249 .

[15] Delgado M., Verdegay J.L. , Vila M.A. (1990) " On valuation and problems in fuzzy graphs : a general approach and some particular cases " ORSA J. Comput. 2 , pp. 74–84 .

[16] Delgado M., Verdegay J.L., Vila M.A. (1994) " Fuzzy linear programming : From Classical Methods to New Applications " Fuzzy Optimization : Recent Advances, Physica-Verlag, Heidelberg .

[17] Dibble C. , Densham P.J. (1993) " Generating interesting alternatives in GIS and SDSS using genetic algorithms " GIS/LIS Symposium, University of Nebraska, Lincoln.

[18] Eiselt H.A. , Laporte G. (1995) " Objectives in location problems " Chapter 8 in: Facility Location. A Survey of Applications and Methods. Drezner Z. (eds.) , Springer-Verlag, New York, Inc.

[19] Erkut E. , Bozkaya B. (1999) " Analysis of aggregation errors for the p-median problem " Computers and Operations Research 26 , pp. 1075–1096 .

[20] فتحعلی ج ، (۱۳۸۳) ، رساله دکتری : "مساله p -میان با وزنهای مثبت و منفی " دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه فردوسی مشهد .

[21] Fathali J., Kakhki H.T. , Burkard R.E.(2006) " An ant colony algorithm for the pos/neg weighted p-median problem " Central European Journal of Operations Research , 14 , pp.229–246 .

- [22] Fathali J. and Kakhi H.T. (2006) “ Solving the p-median problem with Pos/neg weights by variable neighborhood search and some results for special cases” *European Journal of Operation Research*, 170 , pp. 440–462 .
- [23] Francis R., McGinnis Jr . L. F. and White J. A.,(1992)“ Facility Layote and Location : An Analysical Approach ” Pretice Hall.
- [24] Hakimi S.L. (1964) “ Optimum Location of swithing centers and the absolute centers and medians of a graph ” *Operation Research* , 12 , pp. 450–459 .
- [25] Hakimi A.L. (1965) “ Optimum distributions of swithing centers in a communications network and some related graph theoretic problems ” *Operations Research*, 13 , pp. 462–475 .
- [26] Hakimi S.L., Maheshwari S.N. (1972) “ Optimum Locations of centers in networks ” *Operations Research*, 20, pp. 967–973 .
- [27] Hamacher H.W. And Nickel S. (1998) “ Classification of Location models ” *Location Science* , 6 , pp. 229–242 .
- [28] Handler G.Y. , Mirchandani P.B. (1979) “ Location on Networks : Theory and Applications ” MIT Press, Cambridge , MA.
- [29] Hansen P., Labbe M., Peeters D. (1987) “ Single facility locayion on networks ” *Annals of Discrete Math.*, 31 , pp. 113–146 .
- [30] Herrera F., Verdegay J.L. (1995) “ Three models of fuzzy integer linear programming ” *European J. Operations Research* 83 , pp. 1–6 .
- [31] Herrera F., Verdegay J.L. (1996) “ Fuzzy Boolean programming problems with fuzzy cost ” *Fuzzy Sets and Systems* 81 ,pp. 57–76 .
- [32] Hooker J.N., Garfinkel R.S., Chen C.K. (1991) “ Finite dominating sets for network location problems ” *Operations Research* 39 , pp. 314–320 .
- [33] Hribar M. , Daskin M.S. (2001) “ A Dynamic programming heuristic for the p-median problem ” *European Journal of Operational Research* 101 ,pp. 430–436 .

- [34] Kariv O. and Hakimi S. L. (1979) “ An algorithmic approach to network location problems . Part 2 : p-medians ” SIAM J. Appl. Math. 37 , pp. 539–560.
- [35] Kouvelis P. , Robust G.Yu (1997) “ Discrete Optimization and its Applications ” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [36] Kuehn A.A. and Hamburger M. J. (1963) “ A heuristic program for locating warehouses ” Management Science 9 , pp. 643–666 .
- [37] Kuhn H.W. (1967) “ On a pair of dual nonlinear programs ” , In : Nonlinear Programing , Abadie J . (eds) , North-Holand Publishers Co Amsterdam , pp. 37–54 .
- [38] Kutangila D. , Verdegay J.L. (October 2003) “ Fuzzy graphs as basis for solving some public transportation problems in Kinshasa ” Emergent Solutions for Information and Knowledge Economy Proceedings of the 10th SIGEF Congress 2 , pp. 71–77 .
- [39] Kutangila-Mayoya D., Verdegay J.L. (2005) “ p-median problems in a fuzzy environment ” Mathware and Soft Computing 12 ,pp. 97– 106 .
- [40] Labbe M., Peetters D., Thisse J.F. (1995) “ Handbooks in OR and MS ” Elsevier , Amsterdam .
- [41] Lai Y.J., Hwang C.L. (1992) “ Fuzzy Mathematical Programming : Methods and Applications ” Springer, Berlin .
- [42] Mordeson J.N., Nair P.S. (2000) “ Fuzzy graphs and fuzzy Hypergraphs ” Studies in Fuzziness and Soft computing, Physica-Verlag, Wurzburg .
- [43] Moreno Perez J.A., Moreno Vega J.M., Verdegay J.L.(2004) “ Fuzzy location problems on networks ” Fuzzy Sets and Systems 142 pp. 393–405 .
- [44] Negoita C.V. (1970) “ Fuzziness in Management ” OPSA/TIMS, Miami.
- [45] Okada S., Soper T. (2000) “A Shortest path problem on a network with fuzzy are lengths ” Fuzzy Sets and Systems 109 , pp. 129–140 .

- [46] Owen S.H. and Daskin M.S. (1998) “ Strategic facility Location ” European Journal of Operational Research 111 , pp. 423–477 .
- [47] Pedrycz W. , Gomide F.(1987) “ An introduction fuzzy sets : Analysis and Design ” The MIT Press, London .
- [48] Resenda M.G.C. and Werneck R. (2000) “ A Hybrid heuristic for the p-median problem ” Journal of Heuristics, 10 , pp. 59–88 .
- [49] Revelle C., Swain R.W. (1970) “ Central facilities location ” Geographical Analysis 2 , pp. 30–42 .
- [50] Rolland E., Schilling D.A. , Current J.R. (1996) “ An efficient tabu search heuristic for the p-median problem ” European Journal of Operational Research 96 ,pp. 329–342 .
- [51] Rosenfeld A., Fuzzy Graph, in : Zadeh L.A., Fu K.S., Tanaka K., Shimura M. (1975) (Eds), “Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes ” Academic Press, New York , pp.79–97 .
- [52] Rosing K.E, Revelle C.S., Schilling D.A. (1999) “ Agamma heuristic for the p-median problem ” European Journal of Operational Research 117 , pp. 522–532 .
- [53] Saocheng T. (1994) “ Interval number and fuzzy number linear programming ” Fuzzy Set and Systems 66, pp. 301–306 .
- [54] Serra D., Marianov V.(1998) “ The p-median problem in a changing network the case of Barcelona ” Location Science , 6 ,pp. 383–394 .
- [55] Syau Y.R.(1999) “ On convex and concave fuzzy mappings ” Fuzzy Sets and Systems 103 ,pp. 163–168 .
- [56] Tamir A.(1996) “ An $O(pn^2)$ algorithm for the p-median and related problems on tree graphs ” Operations Research Letters ,19 , pp. 59–64 .
- [57] Tanaka H., Asai K. (1984) “ Fuzzy Linear programming problems with fuzzy numbers ” Fuzzy Sets and Systems 13, pp. 1–10 .

- [58] Tanaka H., Okuda T., Asai K. (1984) “ On fuzzy mathematical programming ” J. Cybernetics ,3 ,pp. 37–46 .
- [59] Tansel B.C. , Francis R.L. and Lowe T.J. (1983) “ Location on networks A survey ” Management Science , 29 , pp. 482–511 .
- [60] Teitz M.B. , Bart P. (1968) “ Heuristic methods for estimating generalized vertex median of a weighted graph ” Operational Research 16 , pp. 955–961 .
- [61] Weber A. (1929) “ Uber den Standort der Industrien .” Tübingen 1909; English Trans . : Theory of location of Industries , (Friedrich C.J.; Ed. And Trans.) Chicago University Press, Chicago, Illinois.
- [62] Wendell R.E. , Hurter A.P. (1973) “ location theory : dominance and convexity ” Operations Research 21 ,pp. 314–320 .
- [63] Whitaker R. (1983) “ A fast algorithm for the greedy interchange for Large-scale clustering and median location problems ” INFOR, 21 , pp. 95–108 .
- [64] Zadeh L.A. (1965) “ Fuzzy sets ” Information and Control , 8 , pp. 338–353 .
- [65] Zhao P., Batta R. (1999) “ Analysis of centroid aggregation for the Euclidean distance p-median problem ” European Journal of Operational Research, 113 ,pp. 147–168 .
- [66] Zimmermann H.J. (1983) “ Fuzzy mathematical programming ” Comput. Operation Research Vol. 10, No 4 ,pp. 291–298 .
- [67] Zimmermann H.J. (1997) “ Fuzzy mathematical programming ” in : T. Gal, H.J. Greenberg (Eds) , Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming, Kluwer Academic Publishers, Boston .

واژه نامه

Greedy	آزمند
Heuristic	ابتکاری
Vagueness	ابهام
Partially	جزئی
Aspiration level	سطح آرزو

Optimism Level	سطح خوش بین
Net Profit	سود خالص
Gross Profit	سود ناخالص
Index	شاخص
Entry	درايه
Vertex	رأس
Essentially	بطور ضروری
Total	کلی
Virtual Loss	کمبرود واقعی
Fuzzy	فازی
Crisp	قطعی
Imprecise	غیر دقیق
Center	مرکز
Convex	محدب
Concave	مقعر
Location	مکانیابی
Median	میانہ
Weighted	وزن دار
Edge	یال

Abstract

Location problems are one of the most important operation researches which are used in the field of location of subway stations , buss stops , fire stations and etc. p-median problems are very significant in the field of location so that in which many math scientists have been interested. In p-median problem, the sets of edges and vertex demands are assumed in a crisp form but in reality the sets of edges and vertex demands or a mixture of both are not crisp. In other words, in reality almost always fuzzy data and numbers are

available. In this these we work on the issue how to prepose the models of p-median problem and how to solve them appropriately. We also intend to understand how much cost the solutions based on eliminating one less significant and unnecessary vertex can reduce. Or in order to decrease the optimal cost as much as needed how much vertex demandss should be declined to make demanders needs satisfied.

Key word : Fuzzy sets , Location , Linear programming , Fuzzy location problem , Fuzzy p-median , Networks



Shahrood University of Technology

Basice Sciences College

Mathematical Group

Fuzzy p-median problem on networks

Master's Thesis

Mohammad Ghasem Hajizadeh

Supervisor :

Dr. Sadegh Rahimi

Consulting:

Dr. Jafar Fathali

December 2008