



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های اجزای محدود و تفاضلات متناهی تطبیقی ترکیبی برای مساله‌های پراکندگی معکوس

استاد راهنما

علی مس فروش

استاد مشاور

مهدی قوتمند جزی

پژوهشگر

مریم جوکار

۱۳۹۲



نام خانوادگی دانشجو: جوکار

نام: مریم

عنوان: روش‌های اجزای محدود و تفاضلات متناهی تطبیقی ترکیبی برای مساله‌های پراکندگی معکوس

استاد راهنما: علی مس‌فروش

استاد مشاور: مهدی قوتمند جزی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۹۵

واژگان کلیدی: مساله معکوس، معادله‌ی موج، اجزای محدود، تفاضلات متناهی، روش لاگرانژ، شبه‌نیوتون، بهینه‌سازی، تطبیق

چکیده

برای مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، در حالات ۲ و ۳ بعدی، کارایی روش از نظر اجرایی و به‌خصوص حافظه‌ی موردنیاز، اهمیت بسیاری دارد. از سویی، در بسیاری از کاربردهای معادله‌ی موج، فقط بخش کوچکی از دامنه‌ی محاسباتی، پیچیده است و به گسسته‌سازی پیچیده، نیاز دارد درحالی‌که، ناحیه بزرگی از دامنه‌ی محاسباتی، با شبکه دکارتی ساده، گسسته می‌شود. به همین دلیل در این پایان‌نامه، روشی ترکیبی ارائه می‌شود که انعطاف‌پذیری روش عناصر متناهی را با کارایی روش تفاضلات متناهی، ترکیب می‌کند؛ به عبارت دیگر، دامنه به دو بخش تقسیم می‌شود، در بخش‌هایی از دامنه که هندسه، ساده است از روش تفاضلات متناهی و در بخش‌های پیچیده‌تر، از روش عناصر متناهی، استفاده می‌شود.

تقدیم به همه آشنایی که

می خوانند بیشتر بدانند

پروردگار...!

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیق ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عسای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

سپاس‌گزاری...

سپاس می‌گویم خدای مهربانم را که زیباترین راه زندگی را به من آموخت و با گرفتن دستان ناتوانم قدم‌های مرا در این راه محکم کرد، مشکلات و سختی‌ها را برایم آسان نمود و درهای بسته دانش را با نور وجودش به رویم گشود. بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که من را در نوشتن این پایان‌نامه یاری کردند، قدردانی و تشکر نمایم. تشکر می‌کنم از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که با خلوص نیت و در کمال صبر و آرامش پاسخ‌گوی تمام سوالات من بودند. همچنین تشکر می‌کنم از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند جزی و سپاسگزارم از جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از خانواده و تمامی دوستان و هم‌کلاسی‌های گرامی‌ام که در طول تحصیل افتخار مصاحبت و هم‌فکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاس‌گزاری نمایم.

مریم جوکار
۱۳۹۲

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. جوکار م و مس فروش ع، (۱۳۹۲)، ” روش ترکیبی عناصر متناهی و تفاضلات متناهی برای معادله موج وابسته به زمان ”، کنفرانس ریاضی کاربردی ایران، ص ۹۲، همدان.
۲. جوکار م و رضایی کوشال شاه س.ع.، (۱۳۹۲)، ” روش ترکیبی عناصر متناهی و تفاضلات متناهی برای مساله پراکندگی معکوس ”، کنفرانس ریاضی ایران، مشهد.
۳. رضایی کوشال شاه س.ع، جوکار م و رستمی م، (۱۳۹۲)، ” روش عناصر متناهی برای معادله موج بی کران ”، کنفرانس ریاضی ایران، مشهد.

تعهد نامه

اینجانب **مریم جوکار** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **روش های اجزای محدود و تفاضلات متناهی تطبیقی ترکیبی برای مساله های پراکندگی معکوس تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم مریم جوکار رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان روش های اجزای محدود و تفاضلات متناهی تطبیقی ترکیبی برای مساله های پراکندگی معکوس که در تاریخ ۹۲/۶/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی) امتیاز ۱۹/۴۹	☒ دفاع مجدد	☐ مردود
-------------------------------------	---	--------------------------------

2- بسیار خوب (18/99 - 18)

1- عالی (20 - 19)

4- قابل قبول (15/99 - 14)

3- خوب (17/99 - 16)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنما	دکتر علی مس فروش	استادیار	
2- استاد مشاور	دکتر مهدی قوتمند جزی	استادیار	
3- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	سید رضا موسوی	مربی	
4- استاد ممتحن	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
5- استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناطقی	استادیار	

امضاء

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره



فهرست مطالب

۱	مقدمه و پیش‌نیاز	۱
۷	۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۷
۹	۲.۱ روش تفاضلات متناهی	۹
۱۰	۱.۲.۱ تقریب‌های اصلی	۱۰
۱۰	۲.۲.۱ روش تفاضلات متناهی برای عملگر لاپلاس	۱۰
۱۱	۳.۱ روش اجزای محدود	۱۱
۱۵	۴.۱ تطبیق	۱۵
۱۶	۱.۴.۱ نظریف شبکه در فضا	۱۶
۱۷	۲ مساله‌های معکوس	۱۷
۱۷	۱.۲ معرفی مساله‌های معکوس	۱۷
۱۸	۲.۲ چند مثال	۱۸
۳۱	۳.۲ درستی شرطی	۳۱
۳۲	۴.۲ الگوریتم‌هایی برای حل پایدار مساله‌های معکوس خطی	۳۲
۳۲	۱.۴.۲ منظم سازی تیخونف	۳۲
۳۶	۵.۲ حل عددی مساله‌های معکوس خطی	۳۶
۳۷	۱.۵.۲ گسسته‌سازی با روش‌های انتگرال‌گیری عددی	۳۷
۳۷	۲.۵.۲ روش گالرکین	۳۷
۳۹	۳.۵.۲ روش SVD	۳۹
۳۹	۴.۵.۲ روش منظم‌سازی TSVD	۳۹
۴۱	۵.۵.۲ روش منظم‌سازی تیخونف	۴۱
۴۳	۶.۵.۲ اصل اختلاف	۴۳

۴۶	۳	روش تطبیقی ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی برای مساله‌های پراکندگی معکوس
۴۷	۱.۳	مساله‌ی پراکندگی معکوس
۴۸	۱.۱.۳	روش لاگرانژ
۵۰	۲.۳	روش حداکثر کاهش
۵۳	۳.۳	فرمول‌بندی روش اجزای محدود
۵۴	۴.۳	روش بهینه‌سازی نیوتون
۵۵	۱.۴.۳	روش‌های شبه‌نیوتون
۵۶	۵.۳	بهینه‌سازی روش شبه‌نیوتون با ذخیره‌ی محدود
۵۸	۶.۳	تخمین خطای پسین برای لاگرانژ
۶۴	۷.۳	الگوریتم تطبیقی
۶۵	۸.۳	تخمین خطای پیشین برای معادله‌ی موج
۷۰	۴	نتایج عددی
۷۰	۱.۴	روش ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی
۷۰	۱.۱.۴	روش عددی
۷۲	۲.۱.۴	فرمول‌بندی روش تفاضلات متناهی
۷۲	۲.۴	مثال عددی
۷۳	۱.۲.۴	مثال عددی دوبعدی
۷۶	۲.۲.۴	مثال عددی سه‌بعدی
۷۸	۳.۴	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۷۹		مراجع
۸۲		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۸۷		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مقدمه و پیش‌نیاز

مفهوم مساله‌های بدوضع، موضوع جدیدی نیست بلکه، هادمارد^۱ در سال ۱۹۲۳ [۱۲]، مساله‌ای را که جواب منحصر به فرد نداشت یا تغییری کوچک در داده‌ی آن، منجر به تغییری بزرگ در جواب می‌شد، بدوضع نامید. هادمارد، جنبه‌ی عددی مساله‌های بدوضع را مورد مطالعه، قرار نداد؛ چون فکر می‌کرد که بدوضع‌ی مساله از فرمول‌بندی نادرست فیزیکی آن، به وجود می‌آید. تیخونف^۲ در سال ۱۹۶۳ [۳۱]، اولین کسی بود که مساله‌های بدوضع را از نظر عددی، بررسی کرد و سپس مفهوم منظم‌سازی را ارایه داد. تیخونف، سعی کرد مدل را در زمان ایجاد تقریب داده، حتی اگر داده فقط به مقدار کمی تغییر یابد، پایدار نگه دارد. وی مفهوم منظم‌سازی را برای پایدار نمودن مساله، معرفی کرد. پارکر^۳ در [۲۵]، روش منظم‌سازی وزن‌دار را ارایه داد. این روش، نه تنها پایداری را تضمین می‌کرد، بلکه برخی ویژگی‌های مطلوب را نیز، دارا بود. این روش، در [۳۲]، [۲۳]، [۱۹] و ۰۰۰ توسعه یافت.

امروزه، مفهوم منظم‌سازی به خوبی، درک شده است اما مشکل اصلی، اجرای آن در مساله‌هایی با اندازه‌های بزرگ است. در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های زیادی در زمینه‌ی مساله‌های معکوس خطی، در [۱۳]، [۲۲]، [۳۰]، [۶]، [۲۴]، [۲۶]، [۲۱] و ۰۰۰ صورت گرفته است. اما هنوز، سوالات بدون پاسخ بسیاری، در این زمینه وجود دارد و نمی‌توان روشی قطعی را برای مساله‌ای خاص، پیشنهاد کرد. مساله‌های معکوس غیرخطی در مقایسه با مساله‌های معکوس خطی، پیشرفت‌های بیشتری داشته است.

مساله‌ی پراکندگی معکوس با اختراع رادار و کاشف زیردریایی به وسیله‌ی امواج صوت در جنگ جهانی دوم، مطرح شد. توانایی استفاده از امواج صوتی و الکترومغناطیسی برای تعیین مکان تجهیزات دشمن در آب دریا و ابرها، نقش تعیین‌کننده‌ای را در نتیجه‌ی جنگ، بازی می‌کرد. پس از موفقیت این دو اختراع، نه تنها امکان تعیین

^۱J. Hadamard

^۲A.N. Tichonov

^۳R.L. Parker

دامنه‌ی شی، بلکه تعیین تصویر شی و شناسایی آن، یعنی تشخیص بین وال و زیردریایی یا گاز و هواپیما نیز، انتظار می‌رفت.

در این پایان‌نامه، در فصل اول، تعاریف و مقدمات مورد نیاز را ارائه می‌کنیم. در فصل دوم، مساله‌های معکوس و روش‌های عددی را برای حل مساله‌های معکوس خطی، مورد بحث قرار می‌دهیم، در فصل بعد، تئوری روش ترکیبی تطبیقی اجزای محدود و تفاضلات متناهی را برای معادله‌ی موج صوت وابسته به زمان، بیان می‌کنیم و در فصل آخر، این روش را با استفاده از بسته‌ی نرم‌افزاری PETSc [۱۱]، اجرا کرده و نتایج را ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که، تعاریف این فصل از [۱۷]، [۵] و [۱]، گردآوری شده است.

تعریف ۱.۰.۰.۱. V را فضای برداری با اسکالر حقیقی می‌نامیم هرگاه، اگر $u, v \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ، آن‌گاه $\lambda u + \mu v \in V$ باشد.

تعریف ۲.۰.۰.۱. تابع $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع خطی می‌نامیم هرگاه

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v), \quad \forall u, v \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (۱.۱)$$

برقرار باشد و $L(\cdot)$ را کران‌دار گوییم هرگاه، ثابت C وجود داشته باشد به‌طوری‌که،

$$|L(u)| \leq C\|u\|,$$

و C مستقل از u باشد.

تعریف ۳.۰.۰.۱. فرم دوطرفی روی فضای برداری V ، تابعی است مانند $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طوری‌که نسبت به هر آرگومان خود، خطی باشد؛ به عبارت دیگر،

$$۱. \quad a(\lambda u + \mu w, v) = \lambda a(u, v) + \mu a(w, v)$$

$$۲. \quad a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w)$$

اگر ثابت c ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که،

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

$a(\cdot, \cdot)$ را کران‌دار می‌نامیم.

تعریف ۴.۰.۰.۱. ماتریس A را متقارن می‌نامیم هرگاه،

$$A^T = A,$$

و آن را معین مثبت گوییم هرگاه،

$$v^T A v > 0, \quad \forall v \neq 0,$$

باشد. اگر به جای علامت بزرگ‌تر اکید، علامت $\geq$ باشد ماتریس را نیمه معین مثبت می‌گوییم.

تعریف ۵.۰.۱. فرم دوخطی $a(\cdot, \cdot)$ را متقارن می‌نامیم هرگاه،

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V,$$

و آن را معین مثبت می‌نامیم اگر،

$$a(v, v) > 0, \quad \forall v \neq 0, v \in V.$$

تعریف ۶.۰.۱. فرم دوخطی متقارن و معین مثبت، روی فضای برداری V را یک ضرب داخلی یا ضرب اسکالر روی فضای V می‌نامیم.

تعریف ۷.۰.۱. فضای برداری V را به همراه یک ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

تعریف ۸.۰.۱. در حالت کلی، می‌توان نورم روی فضای برداری V را به شکل تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، تعریف کرد به طوری که، دارای خواص زیر باشد

$$1. \quad \|v\| \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad \text{و} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

$$2. \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall v \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V.$$

و $\|\cdot\|$ را نیم نورم می‌نامیم اگر همه‌ی شرایط بالا بجز،

$$\|v\| = 0 \not\Leftrightarrow v = 0$$

برقرار باشد.

تعریف ۹.۰.۱. دنباله‌ی نامتناهی $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ را در $v \in V$ ، همگرا به $v \in V$ گوئیم و با نماد

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v,$$

نشان می‌دهیم هرگاه،

$$\|v_i - v\| \rightarrow 0, \quad \text{as} \quad i \rightarrow \infty.$$

تعریف ۱۰.۰.۱. دنباله‌ی $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ را دنباله‌ی کوشی می‌نامیم اگر،

$$\|v_i - v_j\| \rightarrow 0, \quad \text{as} \quad i, j \rightarrow \infty.$$

تعریف ۱۱.۰.۱. اگر هر دنباله‌ی کوشی در فضای ضرب داخلی V همگرا باشد آن‌گاه، V فضای ضرب داخلی کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۰.۱. فضای همه توابعی که مربع آنها انتگرال پذیر باشد را فضای $L_2(\Omega)$ می‌گوییم. ضرب داخلی و نرم در فضای $L_2(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} vw \, dx \quad \bullet$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\Omega)} = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

تعریف ۱۳.۰.۱. فضای نرم‌دار کامل را، فضای باناخ^۴ می‌گوییم.

تعریف ۱۴.۰.۱. فضای ضرب داخلی کامل را، فضای هیلبرت^۵ می‌گوییم.

تعریف ۱۵.۰.۱. فضای سوبولف^۶ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); D^{\alpha}v \in L_2(\Omega), |\alpha| < k\},$$

که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ بردار d تایی از عناصر صحیح نامنفی است و چنداندیس^۷ گفته می‌شود. مشتق مرتبه $|\alpha|$ ام و طول $|\alpha|$ ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D^{\alpha}v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

ضرب داخلی، نرم و نیم‌نرم روی فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle v, w \rangle_k = \langle v, w \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}v D^{\alpha}w \, dx \quad \bullet$$

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^{\alpha}v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha}v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

در این فضا،

$$H^0 = H = L_2, \quad \|v\|_{H^0} = \|v\| : k = 0 \quad \bullet$$

$$H^1 = \{v \in L_2, D^{\alpha}v \in L_2, |\alpha| \leq 1\} : k = 1 \quad \bullet$$

$$H_0^1 = \{v \in H^1, v|_{\Gamma} = 0\} \quad \bullet$$

^۴Banach Space

^۵Hillbert Space

^۶Sobolev Spase

^۷Multi Index

تعریف ۱۶.۰.۱. فرض کنید $\|\cdot\|_V$ ، نورم متناظر با ضرب داخلی $a(\cdot, \cdot)_V$ روی فضای $V \times V$ باشد. اگر ثابت c وجود داشته باشد به طوری که

$$a(v, v) \geq c\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

$a(\cdot, \cdot)$ را **کواریسیو**^۸ گوئیم.

تعریف ۱۷.۰.۱. به نابرابری که در سمت چپ خطا و در سمت راست، جواب تقریبی باشد، تخمین خطای پسین و به نابرابری که در سمت چپ خطا و در سمت راست، جواب دقیق مساله باشد، تخمین خطای پیشین می گوئیم.

تعریف ۱۸.۰.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی حقیقی مقدار باشد. اگر همه‌ی مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f ، موجود و روی دامنه‌ی تابع، پیوسته باشد آن گاه، **ماتریس هسیان** f به صورت

$$H(f)_{i,j}(\mathbf{x}) = D_i D_j f(\mathbf{x}),$$

تعریف می شود، که در آن $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و D_i عملگر دیفرانسیل بر حسب i -امین مولفه است؛ به عبارت دیگر،

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

قضیه ۱۹.۰.۱ (Lax-Milgram). فرض کنید $L(\cdot)$ تابعی خطی کران دار و $a(\cdot, \cdot)$ فرم دوخطی کران دار و کواریسیو در V باشد. آن گاه، $u \in V$ منحصر به فرد وجود دارد به طوری که،

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

برای اثبات این قضیه به [۱۷]، مراجعه کنید.

تعریف ۲۰.۰.۱. فرض کنید T ، عملگری کران دار روی فضای هیلبرت H باشد. عملگر $T^*: H \rightarrow H$ که به صورت

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x, y \in H,$$

تعریف می شود، **عملگر الحاقی** نامیده می شود.

تعریف ۲۱.۰.۱. a را **نقطه مانایی**^۹ تابع f می نامیم اگر،

$$f(a) = 0,$$

^۸Coercive

^۹Stationary Point

باشد.

قضیه ۲۲.۰.۱ (فرمول گرین). [۱]. فرض کنید $u \in C^2$ و $v \in C$ باشد. آن گاه،

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) v ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

که در آن $\mathbf{n}(x, y)$ بردار نرمال خارجی در نقطه‌ی مرزی Γ و $\mathbf{x} \in \Gamma$ و ds المانی بر مرز Γ است.

تعریف ۲۳.۰.۱. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, d\},$$

باشد. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ دامنه گفته می‌شود اگر باز و محدب باشد. برای $d = 1$ این دامنه، بازه، برای $d = 2$ بخشی از صفحه و برای $d = 3$ قسمتی از فضا می‌باشد. مرز دامنه را با $\partial\Omega = \Gamma$ نشان می‌دهیم و بستار دامنه را به صورت $\bar{\Omega} = \Gamma \cup \Omega$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۰.۱ (معادله‌ی انتگرالی). معادله‌ای که در آن، تابع مجهول، در انتگرال ظاهر شود معادله‌ی انتگرالی نامیده می‌شود.

در این پایان نامه، از معادلات انتگرالی خطی زیر استفاده می‌شود:

۱. فردهلم^{۱۰} نوع اول

$$\int_a^b K(t, s) u(s) ds = g(t)$$

۲. فردهلم نوع دوم

$$u(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s) u(s) ds.$$

۳. ولترای^{۱۱} نوع اول

$$\int_a^t K(t, s) u(s) ds = g(t).$$

۴. ولترای نوع دوم

$$u(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s) u(s) ds.$$

^{۱۰} Fredholm

^{۱۱} Voltra

۵. ابل^{۱۲}

$$\int_a^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds = g(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

تعریف ۲۵.۰.۱. [۱۶]. فرض کنید V ، فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم $\|\cdot\|$ و $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار باشد. اگر $E(V^*) = \inf_{v \in V} E(v)$ ، آن‌گاه

$$v^* = \arg_{v \in V} E(v),$$

می‌باشد.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

بیشتر فرایندهای طبیعی را می‌توان در سطح میکروسکوپی، بدون شرح رفتار تک تک ملکول‌ها، اتم‌ها، الکترون‌ها یا اجزای دیگر، توصیف کرد. کمیت‌هایی مانند دگرذیسی، سرعت، چگالی، فشار، دما، غلظت یا میدان الکترومغناطیسی، توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، به دست می‌آیند. این معادلات، زبانی برای فرمول‌بندی بسیاری از مسأله‌های مهندسی و علمی است. برای مثال، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی^{۱۳} در پیش‌بینی و کنترل خواص دینامیکی و استاتیکی ساختمان‌ها، جریان خون در سیاهرگ‌ها، آب و هوا، بازدارای حرارتی تومورها، گرم کردن و ذوب کردن فلزات، زدودن آلودگی هوا و آب در تسهیلات شهری، سوزاندن گاز در موتور وسایل نقلیه، عکس‌برداری تشدید مغناطیسی، پرتونگاری مقطعی کامپیوتری در پزشکی و ... به کار می‌رود.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE خوانده می‌شود، دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که در آن، توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها، وجود داشته باشد. بیشتر PDEها در عمل فقط شامل مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم بوده و PDEهای مرتبه دوم نامیده می‌شوند.

فرض کنید $\mathcal{O}$ مجموعه‌ای باز و همبند در $\mathbb{R}^n$ باشد، شکل کلی PDE مرتبه دوم با n متغیر مستقل $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$Au := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} (a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_i} (b_i(z)u) + c_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i} \right) + a_0(z)u = f(z), \quad (2.1)$$

است که در آن، $f \in C^1(\mathcal{O})$ و $a_0 \in C^1(\mathcal{O})$ ، $c_i \in C^1(\mathcal{O})$ ، $b_i \in C^1(\mathcal{O})$ ، $a_{ij} \in C^1(\mathcal{O})$ ، $u \in C^2(\mathcal{O})$

^{۱۲}Abel

^{۱۳}Partial Differential Equation

می باشد.

تعریف ۱.۱.۱ (معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی). PDE به شکل (۲.۱) را با ماتریس متقارن ضرایب $A(z) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ در نظر بگیرید،

۱ معادله را در $z \in \mathcal{O}$ ، بیضوی می نامیم اگر $A(z)$ معین مثبت باشد.

۲ معادله را در $z \in \mathcal{O}$ ، سهموی می نامیم هرگاه، $A(z)$ نیمه معین مثبت باشد اما معین مثبت نباشد و رتبه ی $A(z)$ ، $b(z)$ و $c(z)$ مساوی n باشد.

۳ معادله را در $z \in \mathcal{O}$ ، هذلولوی می نامیم هرگاه، $A(z)$ یک مقدار ویژه ی منفی و $n-1$ مقدار ویژه ی مثبت داشته باشد.

معادله را در مجموعه ی $\mathcal{O}$ ، بیضوی، سهموی یا هذلولوی می نامیم هرگاه، در هر نقطه ی $\mathcal{O}$ به ترتیب، بیضوی، سهموی یا هذلولوی باشد.

به طور کلی، PDE های وابسته به زمان و مستقل از زمان، متمایز هستند. اگر معادله، مستقل از زمان باشد، قرار می دهیم $n = d$ و $z = x$ ، که d بعد فضا و x ، متغیر فضا است، این حالت بیشتر در معادلات بیضوی رخ می دهد. اگر کمیت های معادله، به زمان وابسته باشند، قرار می دهیم $n = d + 1$ و $z = (x, t)$ که در آن t ، متغیر زمان است و اغلب در معادلات سهموی و هذلولوی، با این حالت مواجه می شویم. در چنین حالتی، مجموعه ی $\mathcal{O}$ دامنه ی فضا-زمان را نشان می دهد. اگر بخش فضایی دامنه ی $\mathcal{O}$ در زمان تغییر نکند، دامنه به شکل استوانه ی فضا-زمان $\Omega \times (0, T)$ درمی آید که $\Omega \in \mathbb{R}^d$ و $(0, T)$ ، بازه ی زمانی متناظر است. به طور کلی، معادلات دیفرانسیل به سه رده ی کلی زیر تقسیم می شود:

۱. مسایل مقدار اولیه IVP^{۱۴}

مثال ۲.۱.۱

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \quad t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \quad t = 0. \end{cases}$$

۲. مسایل مقدار مرزی BVP^{۱۵}

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $\partial\Omega$ مرز دامنه ی Ω باشد. معادله ی لاپلاس به صورت

$$\begin{cases} \Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, t) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

^{۱۴}Initial Value Problems

^{۱۵}Boundry Value Problems

است.

در مسایل مقدار مرزی، سه نوع شرط مرزی وجود دارد:

- شرط مرزی دریکله^{۱۶}

مثال ۴.۱.۱.

$$u(x, t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega$$

- شرط مرزی نوین^{۱۷}

مثال ۵.۱.۱.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

که در آن، $n = n(x)$ بردار یک‌ه‌ی خارجی عمود بر Ω در $x \in \partial\Omega$ است.

- شرط مرزی روبین^{۱۸}

مثال ۶.۱.۱.

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k \cdot u(x, t) = g(x), \quad k > 0, \quad x \in \partial\Omega$$

۳. مسایل مقدار ویژه^{۱۹}

مثال ۷.۱.۱. مساله‌ی مقدار ویژه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \lambda u, & \text{in } \omega = (0, 1), \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

که در آن، λ مقدار ویژه و u ، تابع ویژه‌ی متناظر با λ است.

۲.۱ روش تفاضلات متناهی

روش تفاضلات متناهی، بر اساس تقریبات موضعی مشتقات جزئی PDE ها، پایه‌گذاری شده است. این تقریب‌ها توسط بسط سری تیلور از مراتب پایین، به دست می‌آید. روش تفاضلات متناهی، از لحاظ تعریف و اجرا، ساده است و روی مش یکنواخت و ناحیه‌های ساده، مانند مستطیل، به کار می‌رود. ماتریس‌هایی که از این روش به دست می‌آید، خوش‌ساختار هستند، به این معنا که، شامل قطرهای ناصفر می‌باشند. در این بخش، مروری بر روش گسسته‌سازی تفاضلات متناهی داریم.

^{۱۶}Dirichlet Boundary Condition

^{۱۷}Neumann Boundary Condition

^{۱۸}Robin Boundary Condition

^{۱۹}Eigenvalue Problems

۱.۲.۱ تقریب‌های اصلی

ساده‌ترین فرمول به‌دست آوردن مشتق مرتبه اول تابع u در نقطه‌ی x ، رابطه‌ی

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (۴.۱)$$

است. هنگامی‌که u در x مشتق‌پذیر باشد، حد نسبت فوق، وقتی $h \rightarrow 0$ ، همان مشتق u در x است. اگر u در همسایگی x ، عضو C^4 باشد طبق فرمول تیلور،

$$u(x+h) = u(x) + h \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4u(\xi_+)}{dx^4}, \quad \xi_+ \in (x, x+h), \quad (۵.۱)$$

است. بنابراین، تقریب (۴.۱) در عبارت

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2} \frac{d^2u(x)}{dx^2} + O(h^2), \quad (۶.۱)$$

صدق می‌کند. با تغییر h به $-h$ در (۵.۱)، به عبارت زیر می‌رسیم

$$u(x+h) = u(x) - h \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4u(\xi_-)}{dx^4}, \quad \xi_- \in (x-h, x), \quad (۷.۱)$$

با جمع طرفین (۵.۱) و (۷.۱)، تقسیم بر h^2 و استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین برای مشتق چهارم داریم:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4u(\xi)}{dx^4}, \quad \xi_- \leq \xi \leq \xi_+. \quad (۸.۱)$$

چون نقطه‌ای که مشتق در آن تقریب زده می‌شود، در مرکز نقاط استفاده شده برای تقریب، قرار دارد، رابطه‌ی (۸.۱)، تقریب تفاضلات متناهی مرکزی نامیده می‌شود.

تقریب (۴.۱) برای مشتق مرتبه اول، تقریب تفاضلات متناهی پیشرو نامیده می‌شود و با تغییر h به $-h$ ، در رابطه‌ی (۴.۱)، تقریب تفاضلات متناهی پسرو به‌دست می‌آید.

۲.۲.۱ روش تفاضلات متناهی برای عملگر لاپلاس

فرض کنید $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ و اندازه‌ی مش برای متغیرهای x_1 و x_2 به‌ترتیب، h_1 و h_2 باشد، با به‌کارگیری تقریب (۸.۱) برای $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ و $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ در عملگر لاپلاس^{۲۰} داریم

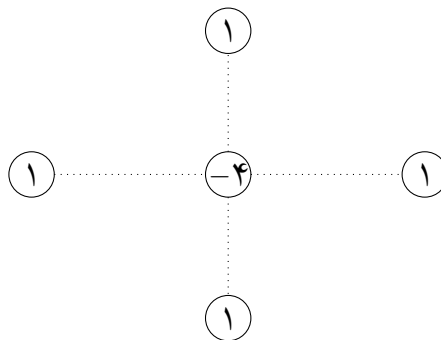
^{۲۰} Laplace Operator

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ &\approx \frac{u(x_1 + h_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2)}{h_1^2} \\ &\quad + \frac{u(x_1, x_2 + h_2) + u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2)}{h_2^2}.\end{aligned}\quad (9.1)$$

در حالت خاص، اگر $h_1 = h_2 = h$ باشد، تقریب (۹.۱) به صورت

$$\Delta u(x) = \frac{u(x_1 + h, x_2) + u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h) + u(x_1, x_2 - h) - 4u(x_1, x_2)}{h^2}, \quad (10.1)$$

بازنویسی می‌شود که به آن، تقریب مرکزی ۵-نقطه‌ای لاپلاس گفته می‌شود و الگوی تقریب تفاضلات متناهی آن به صورت زیر است



شکل ۱۰.۱: الگوی ۵-نقطه‌ای برای تقریب تفاضلات مرکزی عملگر لاپلاس.

۳.۱ روش اجزای محدود

مدل‌های ریاضی در علوم و مهندسی، بیشتر به شکل معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرالی هستند. برای استفاده از مدل‌های ریاضی در کامپیوتر، به الگوریتم‌های عددی نیازمندیم، چرا که فقط در ساده‌ترین حالات می‌توان به جواب تحلیلی رسید. ولی در حالت کلی ناگزیریم از روش‌های عددی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده کنیم. یکی از روش‌های عددی حل معادلات با مشتقات جزئی، روش اجزای محدود^{۲۱} است که به اختصار FEM گفته می‌شود.

معادله اسکالر موج، که انتشار موج صوت را در دامنه کران‌دار $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ ، با کران Γ ، مدل‌سازی می‌کند در نظر بگیرید:

^{۲۱}Finite Element Method

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p &= f, & \text{in } \Omega \times (0, T), \\
p(\cdot, 0) &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, 0) = 0, & \text{in } \Omega, \\
p|_{\Gamma} &= 0, & \text{on } \Gamma \times (0, T),
\end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

که در آن $p(x, t)$ فشار، $c(x)$ سرعت صوت وابسته به $x \in \Omega$ ، t متغیر زمان، T زمان نهایی و $f(x, t)$ تابع منبع مفروض است.

برای حل معادله (۱۱.۱) چون معادله به زمان و مکان بستگی دارد، در روش اجزای محدود، دو حالت را در نظر می‌گیریم، ابتدا زمان را ثابت نگه داشته و معادله را نسبت به مکان حل می‌کنیم، که به گسسته‌سازی ناقص^{۲۲} موسوم است، سپس معادله را هم نسبت به زمان و هم نسبت مکان گسسته می‌کنیم که گسسته‌سازی کامل^{۲۳} نامیده می‌شود.

حال می‌خواهیم جواب تقریبی $p_h(x, t)$ را برای زمان ثابت $t = t_k$ ، بدست آوریم. $p_h(x, t)$ تابعی قطعه‌وار خطی روی هر عنصر افراز شده، است. این عنصر، در حالت یک بعدی، بازه، در حالت دوبعدی، مثلث و در حالت سه‌بعدی، چهاروجهی است. اساس کار روش اجزای محدود به این صورت است که ابتدا باید دامنه را، که یک چندضلعی است، مش‌بندی کنیم. در حالت دوبعدی این مش‌بندی، مثلثی‌سازی^{۲۴} نامیده می‌شود. در مثلثی‌سازی، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1. \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

$$2. h_K = \text{diam}(K)$$

$$3. h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

در این صورت ناحیه‌ای به صورت $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{j=1}^{m_h}$ ، با اجزای مثلثی K خواهیم داشت که m_h تعداد نقاط داخل چندضلعی است. رئوس مثلث‌های $K \in \mathcal{T}_h$ ، گره نامیده می‌شود. اشتراک هر دو مثلث از $\mathcal{T}_h$ یک گره، یک یال یا تهی است و هیچ گره‌ای از $\mathcal{T}_h$ نباید روی یالی از مثلث‌ها، قرار گیرد.

حال اگر Ω ناحیه‌ای محدب و هموار باشد اما چندضلعی نباشد، برای مش‌بندی باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱. تعدادی نقطه، روی مرز دامنه، مشخص می‌کنیم.

۲. این نقاط را به وسیله خطوط راست به هم وصل می‌کنیم، ناحیه جدید به شکل چندضلعی خواهد بود.

^{۲۲}Semi Discretization

^{۲۳}Fully Discretization

^{۲۴}Triangulation

۳. تعدادی نقطه‌ی دلخواه در داخل چندضلعی، در نظر می‌گیریم و مثلثی‌سازی را انجام می‌دهیم.

در این مش‌بندی، هر چقدر مش ظریف‌تر انتخاب شود، جواب تقریبی ما دقیق‌تر خواهد بود.

تعریف ۱۰.۳.۱ (فضای آزمایش^{۲۵}). مجموعه‌ای از توابع، که جواب تقریبی را در آن می‌یابیم.

تعریف ۲.۳.۱ (فضای آزمون^{۲۶}). فضای توابعی که برای شرط تعامد به‌کار می‌بریم.

فرض کنید $\{P_j\}_{j=1}^{m_h}$ مجموعه‌ای از گره‌های داخلی باشد. فضای توابع خطی قطعه‌وار پیوسته را به‌عنوان فضای آزمون، در نظر می‌گیریم:

$$S_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : K \in \mathcal{T}_h \text{ در } v, \quad v|_{\Gamma} = 0\}.$$

حال با ضرب معادله‌ی (۱۱.۱) در تابع آزمون^{۲۷} $\varphi \in S_h$ ، و انتگرال‌گیری روی ناحیه مورد نظر داریم:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2(x)} p_{tt} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \Delta p \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad (12.1)$$

با استفاده از فرمول گرین برای جمله‌ی دوم (۱۲.۱)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \cdot \varphi dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi ds - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \langle p \cdot n, \varphi \rangle_{\Gamma} - \langle \nabla p, \nabla \varphi \rangle. \end{aligned}$$

چون $\varphi \in S_h$ ، پس جمله‌ی اول سمت راست تساوی بالا، برابر صفر است.

بنابراین، مساله به‌شکل یافتن $p \in H_0^1$ ، به‌گونه‌ای که

$$\left\langle \frac{1}{c^2} p_{tt}, \varphi \right\rangle + \langle \nabla p, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad t > 0, \quad (13.1)$$

باشد، بازنویسی می‌شود. به این صورت از مساله، فرمول‌بندی وردشی^{۲۸}، شکل ضعیف^{۲۹} یا به اختصار V.F

می‌گوییم. توابع $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m_h}$ را به‌صورت

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (14.1)$$

^{۲۵} Trial Space

^{۲۶} Test Space

^{۲۷} Test Function

^{۲۸} Variational Formulation

^{۲۹} Weak Form

تعریف می‌کنیم و آن را به عنوان پایه‌ای برای S_h ، در نظر می‌گیریم. بنابراین هر عضو S_h را می‌توان، به شکل ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت:

$$\forall v \in S_h, \quad v = \sum_{i=0}^{m_h} v_i \varphi_i(x), \quad v_i = v(x_i). \quad (15.1)$$

از این رو، روش اجزای محدود به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:
برای هر $t > 0$ ، $p_h(t) = p_h(\cdot, t) \in S_h$ را بیابید به طوری که،

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{c^2} p_{h,tt}, \chi \rangle + \langle \nabla p_h, \nabla \chi \rangle &= \langle f, \chi \rangle, \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \\ p_h(T) &= p_h(\cdot, T) = 0, \quad p_{h,t}(T) = 0. \end{aligned} \quad (16.1)$$

به این نوع از گسسته سازی، گسسته سازی ناقص، گفته می‌شود.
حال می‌خواهیم گسسته سازی را نسبت به هر دو متغیر فضا و زمان، انجام دهیم. اصطلاحاً به این عمل، گسسته سازی کامل می‌گوییم. فرض کنید P^k ، تقریبی از $p(t)$ در $t = t_k$ ، $(P^k = p_h \approx p(t_k))$ گام زمانی، τ مشتق دوم نسبت به زمان، $T = n\tau$ و $t_k = k\tau$ باشد. برای مشتق دوم p نسبت به زمان، از تقریب تفاضلات متناهی مرکزی،

$$\bar{\partial}^2 P^k = p_{h,tt} = \frac{P^{k+1} - 2P^k + P^{k-1}}{\tau^2} \quad (17.1)$$

استفاده می‌کنیم. با جایگذاری (۱۷.۱) در (۱۶.۱) داریم

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{c^2} \frac{P^{k+1} - 2P^k + P^{k-1}}{\tau^2}, \chi \right\rangle + \langle \nabla P^k, \nabla \chi \rangle &= \langle f^k, \chi \rangle, \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \\ P^n &= 0, \quad \bar{\partial} P^n = 0. \end{aligned} \quad (18.1)$$

لذا،

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{c^2} P^{k+1}, \chi \right\rangle + \tau^2 \langle \nabla P^k, \nabla \chi \rangle &= \tau^2 \langle f^k, \chi \rangle + 2 \left\langle \frac{1}{c^2} P^k, \chi \right\rangle - \left\langle \frac{1}{c^2} P^{k-1}, \chi \right\rangle, \\ \forall \chi \in S_h, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (19.1)$$

چون $P^k \in S_h$ ، پس می‌توان نوشت

$$P^k(x) = \sum_{i=1}^{m_h} P_i^k \varphi_i(x). \quad (20.1)$$

با قرار دادن (۲۰.۱) و $\chi = \varphi_j$ در (۱۹.۱)، عبارت

$$\sum_{i=1}^{m_h} P_i^{k+1} \left\langle \frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right\rangle + \tau^2 \sum_{i=1}^{m_h} P_i^k \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle =$$

$$\tau^2 \langle f^k, \varphi_j \rangle + \tau^2 \sum_{i=1}^{m_h} P_i^k \left\langle \frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right\rangle - \tau^2 \sum_{i=1}^{m_h} P_i^{k-1} \left\langle \frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right\rangle \quad (21.1)$$

به دست می‌آید. شکل ماتریسی (۲۱.۱)، به صورت زیر بیان می‌شود

$$M(\mathbf{P}^{k+1} - \tau \mathbf{P}^k + \mathbf{P}^{k-1}) = \tau^2 F^k - \tau^2 K \mathbf{P}^k, \quad (22.1)$$

که در آن، $M = M_{ij} = \left\langle \frac{1}{c^2} \varphi_i, \varphi_j \right\rangle$ ماتریس جرم، $K = K_{ij} = \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle$ ماتریس سختی، $k = 1, 2, \dots$ سطح زمانی، F^k بردار بار و $\mathbf{P}$ قسمت مجهول فرمول گسسته‌ی P است. همان‌گونه که می‌بینید، روش اجزای محدود، مساله‌ای را که حل تحلیلی آن، دشوار به نظر می‌رسد، به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کند.

۴.۱ تطبیق

پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی بسیار مهمی وجود دارد که روش‌های عددی تطبیقی، برای حل دوباره‌ی آنها ضروری است. این روش‌ها، به‌طور خودکار، در جهت اصلاح جواب‌های تقریبی، تعدیل می‌شوند. روش‌های عددی تطبیقی، در حوزه‌ی محاسباتی، حتی در زمینه‌ی اجزای محدود، جدید نیستند.

در حل عددی مسایل علمی در مهندسی و فیزیک مانند مکانیک جامدات و سیالات و جریان متخلخل مواد، اغلب، دقت تقریب‌های عددی توسط تکنیکی، کاهش می‌یابد. راه حلی برای این مشکل، نظریف شبکه‌ها در نزدیکی دامنه است. به عبارت دیگر، تعداد نقاط شبکه‌ای بیشتری را در مناطق تکنیکی، در نظر می‌گیریم. سوالی که در این جا، پیش می‌آید این است که، چگونه این نواحی را تشخیص دهیم، آنها را نظریف کنیم و بین نقاط نظریف شده و نظریف نشده، تعادل را برقرار کنیم به‌طوری‌که دقت سراسری، بهینه باشد. برای پاسخ به این سوال، تطبیق را به کار می‌بریم؛ یعنی باید به‌طریقی، روشی عددی را برای بهبود کیفیت جواب‌های تقریبی بسازیم. ساختن این روش عددی شامل تغییر در تعداد عناصر، نظریف شبکه‌ها، افزایش مرتبه‌ی تقریب، جابه‌جا شدن نقاط گره‌ای و اصلاح ساختارهای الگوریتم است.

سوال دیگر این است که چگونه، تخمین‌های معتبری را برای دقت جواب‌های تقریبی محاسبه شده، به دست آوریم. تخمین خطای پیشین، برای این کار، مناسب نیست چون خطای پیشین فقط اطلاعاتی را درباره‌ی رفتار مجانبی خطاها، تولید می‌کند و به‌طور منظم به جواب بستگی دارد که در حضور تکنیکی ذکر شده، صدق نمی‌کند.

برای پاسخ به این سوال، باید کیفیت خطای پسین جواب تقریبی را تعیین کنیم؛ یعنی خطایی که بعد از تقریب اولیه به دست می‌آید. برای این کار باید خطای پسین را محاسبه کنیم. البته، محاسبه‌ی تخمین خطای پسین باید به مراتب، کم‌هزینه‌تر از محاسبه‌ی جواب تقریبی باشد. به علاوه، باید محاسبه‌ی شاخص خطای محلی، به طور دینامیکی، امکان‌پذیر باشد.

۱.۴.۱ نظریف شبکه در فضا

سه نوع استراتژی تطبیقی، وجود دارد:

۱. نظریف شبکه‌ی ثابت،

۲. اضافه کردن درجه‌ی آزادی بیشتر، با استفاده توابع پایه‌ای مراتب بالاتر در اجزا مشخص،

۳. حرکت تطبیقی شبکه‌ی محاسباتی برای به دست آوردن جواب دوباره.

در این پایان‌نامه، ما از روش اول برای تعدیل جواب استفاده می‌کنیم. این روش، طبق خطای مشخص شده، به طور خودکار، نظریف می‌شود. چنین روشی، به مساله‌ی مدیریت داده‌ی بسیار پیچیده، تبدیل می‌شود چون این روش، شامل تولید دوباره‌ی دینامیکی شبکه، شماره‌گذاری دوباره‌ی گره‌ها، اجزا و اتصال اجزاست. این روش، در [۱۸]، [۹] و [۳]، برای مسایل پیچیده، بررسی شده است. در حالت دوبعدی، شبکه می‌تواند مثلثی، چهارضلعی یا ترکیبی از این دو باشد.

تعریف ۱.۴.۱. یک راس را منظم می‌نامیم هرگاه این راس، راسی برای اجزا مجاور خود نیز باشد و شبکه را منظم می‌نامیم اگر همه‌ی راس‌های آن، منظم باشد.

راسی را که منظم نباشد، راس نامنظم می‌نامیم.

فرض کنید u جواب دقیق، u_h جواب تقریبی حاصل از روش FEM، $R(u_h) = u - u_h$ خطای مانده، e خطای پسین و tol خطای قابل چشم‌پوشی باشد. الگوریتم این روش، به صورت زیر است

۱. یک شبکه‌ی اولیه را برای دامنه، در نظر می‌گیریم.

۲. جواب تقریبی u_h و $R(u_h)$ را به دست می‌آوریم.

۳. اگر $\|e\| > tol$ باشد، شبکه را در اجزایی که $R(u_h)$ مقدار بزرگی دارد، نظریف می‌کنیم و مراحل ۱ و ۲ را تکرار می‌کنیم.

در پایان الگوریتم، می‌بینیم که نظریف به یک سمت دامنه کشیده می‌شود.

فصل ۲

مساله‌های معکوس

مساله‌های معکوس، برای اولین بار، توسط فیزیک‌دان ارمنی-شوروی، به نام ویکتور امبارتسومیان^۱، کشف و معرفی شد. این مسایل، در پزشکی، مکان‌یابی ذخایر نفت و ذخایر معدنی در زیرساختارهای زمین، ایجاد تصاویر اختریفی با استفاده از داده‌های تلسکوپ، یافتن شکاف و وجه مشترک درون مواد، بهینه‌سازی شکل، شناسایی مدل در فرایند رشد و علوم مختلف دیگر، کاربرد دارد.

در این فصل، ابتدا مساله‌های معکوس، به طور مختصر، معرفی شده و مثال‌هایی برای آشنایی بیشتر با این موضوع، مطرح می‌شود. در بخش ۳.۲ درستی شرطی، در بخش ۴.۲ الگوریتم‌هایی برای حل پایدار مساله‌های معکوس خطی و در پایان فصل، روش‌های عددی منظم‌سازی تیخونف و منظم‌سازی TSVD^۲ را برای حل این مسایل، به طور مفصل، شرح می‌دهیم.

برای گردآوری این فصل از مراجع [۷]، [۱۵]، [۲]، [۱۰] و [۱۴] استفاده شده است.

۱.۲ معرفی مساله‌های معکوس

تعریف ۱.۱.۲. دو مساله را معکوس یکدیگر می‌نامیم اگر فرمول‌بندی یکی، شامل همه یا قسمتی از جواب دیگری باشد [۱۵].

تعریف ۲.۱.۲ (محک هادمارد). مساله را خوش‌وضع^۳ می‌نامیم اگر:

۱. مساله حداقل یک جواب داشته باشد. (وجود جواب)

۲. مساله حداکثر یک جواب داشته باشد. (یکتایی جواب)

^۱Viktor Ambartsumian

^۲Truncated Singular Value Decomposition

^۳Well Posed

۳. جواب به‌طور پیوسته به داده، وابسته باشد. (پایداری)

مساله‌ای را که خوش‌وضع نباشد، بدوضع^۴ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۲. اگر یکی از دو مساله که معکوس یکدیگرند بدوضع باشد، آن را مساله‌ی معکوس و دیگری را مساله‌ی مستقیم می‌نامیم [۱۵].

مساله‌های معکوس، به دو رده‌ی خطی و غیرخطی، تقسیم می‌شوند.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید s ، مجهول مساله‌ی مستقیم و t ، مجهول مساله‌ی معکوس باشد. اگر رابطه‌ی بین s و t در مساله‌ی معکوس، خطی باشد، مساله را مساله‌ی معکوس خطی می‌گوییم و اگر رابطه‌ی بین آن‌ها، غیرخطی باشد، به آن، مساله‌ی معکوس غیرخطی می‌گوییم.

همه‌ی مثال‌هایی که در فصل ۲، مطرح شده‌اند، مساله‌ی معکوس خطی هستند و مساله‌ای که در فصل ۳ بررسی می‌شود، مساله‌ی معکوس غیرخطی است.

۲.۲ چند مثال

مثال ۱.۲.۲. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، معکوس یکدیگرند. چون مشتق‌گیری در محیط مفروض L_∞ ، بدوضع است، پس مساله‌ی معکوس نامیده می‌شود. مساله‌ی مستقیم را به‌صورت محاسبه انتگرال

$$(T_D\varphi)(x) := \int_0^x \varphi(t)dt, \quad x \in [0, 1], \quad \varphi \in C([0, 1]),$$

تعریف می‌کنیم. مساله‌ی معکوس، شامل حل معادله

$$T_D\varphi = g, \quad (1.2)$$

برای $g \in C([0, 1])$ مفروض است به‌طوری‌که $g(0) = 0$ باشد. مساله‌ی معکوس با محاسبه $\varphi = g'$ ، هم‌ارز است. به‌عبارت دیگر، (۱.۲) دارای جواب $\varphi \in C([0, 1])$ است اگر و تنها اگر $g \in C([0, 1])$ باشد. اگر داده‌ی g با نورم C^1 اندازه‌گیری شود، مساله‌ی معکوس (۱.۲)، خوش‌وضع خواهد بود؛ اما اگر داده‌ی g ، شامل خطای اندازه‌گیری یا گردکردن باشد که فقط بتوان آن را با نورم سوپریم تخمین زد، مساله‌ی معکوس (۱.۲)، بدوضع خواهد بود. برای اثبات این ادعا، داده‌ی اختلال

$$g^\delta \in C^1([0, 1]), \quad 0 < \delta < 1,$$

^۴Ill Posed

را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که،

$$\|g^\delta - g\|_\infty \leq \delta, \quad (۲.۲)$$

باشد. برای تابع

$$g_n^\delta(x) := g(x) + \delta \sin \frac{nx}{\delta}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (۳.۲)$$

داریم:

$$\|g_n^\delta(x) - g(x)\|_\infty = \|\delta \sin \frac{nx}{\delta}\|_\infty \leq \delta.$$

بنابراین، g_n^δ در کران خطای (۲.۲) صدق می‌کند. حال با مشتق‌گیری از (۳.۲)، داریم:

$$(g_n^\delta)'(x) = g'(x) + n \cos \frac{nx}{\delta}.$$

در نتیجه،

$$\|\varphi^\delta - \varphi\|_\infty = \|(g_n^\delta)'(x) - g'(x)\|_\infty = \|n \cos \frac{nx}{\delta}\|_\infty = n,$$

پس،

$$\|\varphi^\delta - \varphi\|_\infty = n, \quad n = 2, 3, 4, \dots. \quad (۴.۲)$$

لذا، اگر $n \rightarrow \infty$ میل کند، آنگاه (۴.۲) نیز، به بی‌نهایت میل می‌کند.

اگرچه خطا در داده توسط δ کران‌دار شده است، اما خطا در جواب به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین، مساله (۱.۲) نسبت به نورم سوپریم، پایدار نیست و در نتیجه، طبق محک هادامارد، بدوضع است.

مثال ۲.۲.۲ (معادله‌ی گرمای مستقیم). مساله‌ی مستقیم معادله‌ی گرما، به شکل زیر است:

فرض کنید $\varphi \in L^2([0, 1])$ داده شده باشد، $g(x) = u(x, T)$ را به‌گونه‌ای بیابید که

$$u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ در مساله زیر صدق کند:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (۵.۲)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (۶.۲)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (۷.۲)$$

که در آن $u(x, t)$ دما در مکان x و زمان t ، φ دما در زمان $t = 0$ را بیان می‌کند و دما در زمان $t = T$ مجهول است.

مساله‌ی معکوس این معادله، به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید $g = u(., T) \in L^2([0, 1])$ داده شده است، $\varphi \in L^2([0, 1])$ را بیابید به طوری که u در (۵.۲)–(۷.۲)، صدق کند.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر $[a, b]$ باشد به طوری که،

$$\int_a^b \psi_n(x) \overline{\psi_m(x)} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

آن‌گاه، $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ دستگاه یکه از توابع بر $[a, b]$ نامیده می‌شود [۲۸].

فرض کنید $\psi_n(\cdot) = \{\sqrt{2} \sin(n\pi \cdot), n = 1, 2, \dots\}$ ، دنباله‌ای از توابع بر $[0, 1]$ باشد؛ بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_n(x) \overline{\psi_m(x)} dx &= 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \cos(n-m)\pi x dx - \int_0^1 \cos(n+m)\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi(n-m)} \sin(n-m)\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi(n+m)} \sin(n+m)\pi x \Big|_0^1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_n(x) \overline{\psi_n(x)} dx &= 2 \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx \\ &= \int_0^1 (1 - \cos(2\pi nx)) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nx) \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi n} (\sin(2\pi n) + \sin 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنابراین چون $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ بر $[0, 1]$ متعامد یکه است،

$$c_n = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi \sin(n\pi x) dx, \quad (۸.۲)$$

را ضریب فوریه^۵ φ -n ام نسبت به $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نامیم. پس می‌توان φ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x).$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرهای جواب داریم:

$$u(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \psi_n(x). \quad (9.2)$$

با قرار دادن ۹.۲ در ۵.۲، به عبارت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) (\psi_n)_{xx}(x),$$

می‌رسیم. پس،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \psi_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 a_n(t) (\psi_n)(x),$$

بنابراین، رابطه‌ی

$$\dot{a}_n(t) = -n^2 \pi^2 a_n(t),$$

برقرار است. از سویی، چون $u(x, 0) = \varphi(x)$ است پس با جایگذاری در (۹.۲)، داریم:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) \psi_n(x),$$

در نتیجه،

$$a_n(0) = c_n.$$

بنابراین برای حل مساله، باید دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dot{a}_n(t) = -n^2 \pi^2 a_n(t), \\ a_n(0) = c_n, \end{cases} \quad (10.2)$$

را حل کنیم. با انتگرال‌گیری روی بازه‌ی $(0, t)$ ، رابطه‌ی

$$\ln a_n(t) - \ln a_n(0) = -n^2 \pi^2 t,$$

^۵Fourier Coefficient

حاصل می‌شود، پس

$$\ln \frac{a_n(t)}{a_n(\circ)} = -n^2 \pi^2 t,$$

در نتیجه،

$$a_n(t) = c_n e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

با جایگذاری در $u(x, t)$ ، داریم:

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x). \quad (11.2)$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم (۱۱.۲)، در مساله‌ی مستقیم صدق می‌کند. ابتدا درستی رابطه‌ی (۵.۲) را بررسی می‌کنیم. از روابط

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\sqrt{2} (n^2 \pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) = -n^2 \pi^2 u(x, t),$$

$$\nabla u(x, t) = \sqrt{2} (n\pi) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x),$$

و

$$\Delta u(x, t) = -\sqrt{2} (n^2 \pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) = -n^2 \pi^2 u(x, t),$$

نتیجه می‌گیریم که،

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t).$$

پس $u(x, t)$ در (۵.۲)، صدق می‌کند.

از طرفی، $u(x, t)$ شرایط مرزی و شرط اولیه‌ی مساله را نیز، می‌پذیرد:

$$u(\circ, t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(\circ) = \circ,$$

$$u(1, t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi) = \circ,$$

و

$$u(x, \circ) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 (\circ)} \sin n\pi x = \varphi(x).$$

عملگر $T_{BH} : L^2([\circ, 1]) \mapsto L^2([\circ, 1])$ را به صورت

$$(T_{BH})(x) := 2 \int \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 \pi^2 T} \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) \varphi(y)) dy, \quad (12.2)$$

تعریف می‌کنیم که از جایگذاری (۸.۲) در (۱۱.۲)، به دست می‌آید. در نتیجه، می‌توان مساله را به صورت معادله‌ی انتگرالی از نوع اول:

$$T_{BH}\varphi = g, \quad (۱۳.۲)$$

فرمول‌بندی کرد.

دقت کنید که جواب مستقیم عملگر T_{BH} ، مولفه‌های با بسامد بالا را با عامل کاهش نمایی $e^{-n^2\pi^2 T}$ ، میرا می‌کند؛ یعنی، اگر جواب φ را داشته باشیم و در (۱۳.۲) قرار دهیم، با افزایش n ، عامل $e^{-n^2\pi^2 T} > 0$ مقدار بسیار کوچکی می‌گیرد و باعث می‌شود g ، مقدار کمتری را اختیار کند. بنابراین، در مساله معکوس، خطای داده در n -امین مولفه‌ی فوریه‌ی g ، با عامل $e^{-n^2\pi^2 T}$ بزرگ می‌شود. و این نشان می‌دهد که مساله‌ی معکوس شدیداً بدووضع است. همچنین، مساله‌ی معکوس برای هر $g \in L^2([0, 1])$ دلخواه، دارای جواب نیست. و این نکته، اثباتی دیگر بر بدووضع مساله‌ی معکوس است.

مثال ۴.۲.۲. دوباره، معادله‌ی انتقال حرارت را روی بازه $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم؛ اما این بار با یک بازه‌ی زمانی نامتناهی،

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (۱۴.۲)$$

فرض کنیم بازه‌ی $[0, 1]$ دیواره‌ی کوره را توصیف کند (سمت خارجی و ۱ سمت داخلی کوره)، سمت خارجی دیواره، عایق باشد؛ به عبارت دیگر، تغییرات دما نسبت به مکان، در دیواره خارجی صفر باشد:

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (۱۵.۲)$$

و دمای سمت داخلی دیواره کوره با دمای داخلی کوره برابر باشد:

$$u(1, t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (۱۶.۲)$$

مساله‌ی مستقیم

فرض کنید $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ داده شده باشد، $u : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که در معادله‌ی

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & x \in (0, 1) \quad t \in \mathbb{R}, \\ u_x(0, t) &= 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(1, t) &= \varphi(t), & t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (۱۷.۲)$$

صدق کند.

اما در عمل، دمای درون کوره، $\varphi(t)$ ، قابل دسترس نیست؛ در حالی که، دمای سمت بیرونی دیواره‌ی کوره، به سادگی قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

مساله‌ی معکوس

$g \in L^2(\mathbb{R})$ مفروض است، $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ را بیابید به طوری که جواب (۱۷.۲)، در $t \in \mathbb{R}$ ، $u(\circ, t) = g(t)$ ، صدق کند.

فرض کنید $u(x, t)$ تابعی در $L^1(\mathbb{R})$ باشد، آنگاه تبدیل فوریه u بر حسب متغیر t را به صورت

$$(\mathcal{F}u)(x, \omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt, \quad (18.2)$$

و تبدیل فوریه‌ی معکوس آن را به شکل

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(x, t) d\omega, \quad (19.2)$$

تعریف می‌کنیم [۵]. در نتیجه، روابط

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_{xx}(x, t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt \\ &= (\mathcal{F}u)_{xx}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u_t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_t(x, t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega t} u(x, t) \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt \\ &= i\omega \mathcal{F}u, \end{aligned}$$

برقرار می‌باشند. بنابراین، با اعمال تبدیل فوریه بر (۱۷.۲)، به مساله‌ی

$$(\mathcal{F}u)_{xx} = i\omega \mathcal{F}u, \quad (\mathcal{F}u)_x(\circ, \cdot) = \circ, \quad (\mathcal{F}u)(1, \cdot) = \mathcal{F}\varphi, \quad (20.2)$$

می‌رسیم. برای سادگی قرار می‌دهیم $y = \mathcal{F}u$ ، بنابراین (۲۰.۲) به صورت

$$\begin{cases} y'' = i\omega y, \\ y'(\circ) = \circ, \\ y(1) = \mathcal{F}\varphi, \end{cases} \quad (21.2)$$

فرمول‌بندی می‌شود. (۲۱.۲)، معادله‌ای با ضرایب ثابت است، پس با فرض

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2},$$

معادله‌ی شاخص به صورت

$$(D^2 - i\omega)y = 0,$$

بازنویسی می‌شود. در نتیجه،

$$D = \pm \sqrt{i\omega}.$$

چون معادله‌ی شاخص، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین،

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{i\omega}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\omega}x}.$$

با اعمال شرایط مرزی، چون $y'(0) = 0$ پس،

$$c_1 \sqrt{i\omega} e^{\sqrt{i\omega} \times 0} - c_2 \sqrt{i\omega} e^{-\sqrt{i\omega} \times 0} = 0,$$

در نتیجه، $c_1 = c_2$ است. از سویی، $y(1) = \mathcal{F}\varphi$:

$$c_1 e^{\sqrt{i\omega}} + c_2 e^{-\sqrt{i\omega}} = \mathcal{F}\varphi.$$

پس،

$$c_1 (e^{\sqrt{i\omega}} + e^{-\sqrt{i\omega}}) = \mathcal{F}\varphi,$$

از این رو،

$$c_1 = c_2 = \frac{\mathcal{F}\varphi}{2 \cosh \sqrt{i\omega}},$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(x, \omega) &= y(x) \\ &= c_1 (e^{\sqrt{i\omega}x} + e^{-\sqrt{i\omega}x}) \\ &= \frac{\mathcal{F}\varphi}{\cosh \sqrt{i\omega}} \cosh x \sqrt{i\omega} \\ &= \frac{\cosh x \sqrt{i\omega}}{\cosh \sqrt{i\omega}} \mathcal{F}\varphi, \end{aligned}$$

از طرفی،

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}g)(\omega) &= (\mathcal{F}u)(0, \omega) \\ &= \frac{\cosh 0}{\cosh \sqrt{i\omega}} \mathcal{F}\varphi(\omega) \\ &= (\cosh \sqrt{i\omega})^{-1} \mathcal{F}\varphi(\omega), \end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

در نتیجه، طبق تبدیل فوری‌ی معکوس، $g(t)$ به صورت

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}((\cosh \sqrt{i\omega})^{-1} \mathcal{F}\varphi(\omega)), \quad (23.2)$$

است. بنابراین، با تعریف عملگر $T_{SH}\varphi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ به شکل

$$T_{SH}\varphi = \mathcal{F}^{-1}((\cosh \sqrt{i\omega})^{-1} \mathcal{F}\varphi(\omega)), \quad (24.2)$$

می‌توان مساله را به صورت

$$T_{SH}\varphi = g, \quad (25.2)$$

فرمول‌بندی کرد.

قضیه ۵.۲.۲ (قضیه‌ی پیچش^۶). [۵]. اگر $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ باشند، آنگاه

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),$$

که در آن، $*$ ، نماد پیچش است. به عبارت دیگر،

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)).$$

بنابراین، می‌توان سمت راست تساوی (۲۴.۲)، را به صورت

$$\mathcal{F}^{-1}((\cosh \sqrt{i\omega})^{-1} \mathcal{F}\varphi(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}((\sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\cosh \sqrt{i\omega})^{-1})) \mathcal{F}\varphi(\omega)),$$

بازنویسی کرد. بنابراین، طبق قضیه‌ی پیچش، (۲۲.۲) را می‌توان به شکل

$$\begin{aligned} (T_{SH}\varphi)(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(k) \cdot \mathcal{F}(\varphi)) \\ &= k * \varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds, \end{aligned} \quad (26.2)$$

بیان کرد، که در آن

$$k = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}((\cosh \sqrt{i\omega})^{-1}), \quad (27.2)$$

هسته‌ی^۷ انتگرال نامیده می‌شود.

^۶Convolution Theorem

^۷Kernel

حال می‌خواهیم ثابت کنیم مساله معکوس (۲۶.۲)، ناپایدار است. تساوی (۲۲.۲)، را می‌توان به شکل

$$(\mathcal{F}\varphi)(\omega) = \cosh \sqrt{i\omega}(\mathcal{F}g)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (28.2)$$

نوشت. بنابراین، یک جواب برای مساله تعیین φ با داده‌ی g ، استفاده از تبدیل معکوس

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cosh(\sqrt{i\omega})(\mathcal{F}g)(\omega) d\omega, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29.2)$$

است. نشان می‌دهیم خطای کوچکی در داده‌ی g ، می‌تواند به خطایی بزرگ در جواب، منجر شود. اگر g^δ طوری انتخاب شود که

$$\|g - g^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \delta, \quad (30.2)$$

آن‌گاه،

$$\|\mathcal{F}g - \mathcal{F}g^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \delta. \quad (31.2)$$

بنابراین،

$$(\mathcal{F}\varphi^\delta)(\omega) = \cosh \sqrt{i\omega}(\mathcal{F}g^\delta)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

حال فرض کنید، $\omega_0 \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد، g_δ را با تبدیل فوری‌ی آن به صورت

$$(\mathcal{F}g^\delta)(\omega) = \begin{cases} (\mathcal{F}g)(\omega), & \omega \notin [\omega_0, \omega_0 + 1], \\ (\mathcal{F}g)(\omega) + \delta, & \omega \in [\omega_0, \omega_0 + 1], \end{cases} \quad (32.2)$$

تعریف می‌کنیم، در نتیجه،

$$\|g - g^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}g - \mathcal{F}g^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \delta.$$

برای محاسبه‌ی خطای جواب داریم:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\mathcal{F}\varphi - \mathcal{F}\varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} |\cosh \sqrt{i\omega}(\mathcal{F}g)(\omega) - \cosh \sqrt{i\omega}(\mathcal{F}g^\delta)(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} |\cosh \sqrt{i\omega}((\mathcal{F}g)(\omega) - (\mathcal{F}g^\delta)(\omega))|^2 d\omega \\ &= \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} |\cosh \sqrt{i\omega}|^2 d\omega, \end{aligned}$$

و از رابطه‌ی $|\cosh \sqrt{i\omega}| = (\sinh^2 \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} + \cosh^2 \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}})$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} d\omega \\ &\geq \delta^2 \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}}. \end{aligned}$$

لذا،

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \delta \sinh \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}} \\ &= \delta \frac{e^{i\sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}}} - e^{-i\sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}}}}{2i} \\ &\geq \frac{\delta}{\gamma} e^{i\sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

بنابراین، خطای داده‌ی δ ، با عامل نمایی $e^{i\sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}}}$ بزرگ می‌شود. از این‌رو، مساله معکوس (۲۶.۲)، بدوضع است.

مثال ۶.۲.۲ (پرتونگاری مقطعی). پرتونگاری مقطعی کامپیوتری که در عکس‌برداری‌های پزشکی و بسیاری از کاربردهای دیگر استفاده می‌شود، در یک دوره‌ی زمانی طولانی، به‌شدت، مورد مطالعه قرار گرفت. در پرتونگاری مقطعی اشعه X ، به‌دنبال تعیین چگالی φ برای یک سطح مقطع دوبعدی از بدن انسان، توسط اندازه‌گیری میرایی اشعه‌ی X ، هستیم. فرض می‌کنیم محمل φ ، شامل دیسکی به شعاع ۱ و

$$I(t) = I_{\vartheta, s}(t),$$

شدت یک رفت و برگشت اشعه‌ی X در جهت $\vartheta^\perp$ و در امتداد

$$t \mapsto s\vartheta + t\vartheta^\perp,$$

باشد به‌طوری‌که

$$\vartheta^\perp := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vartheta, \quad \vartheta \in S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\},$$

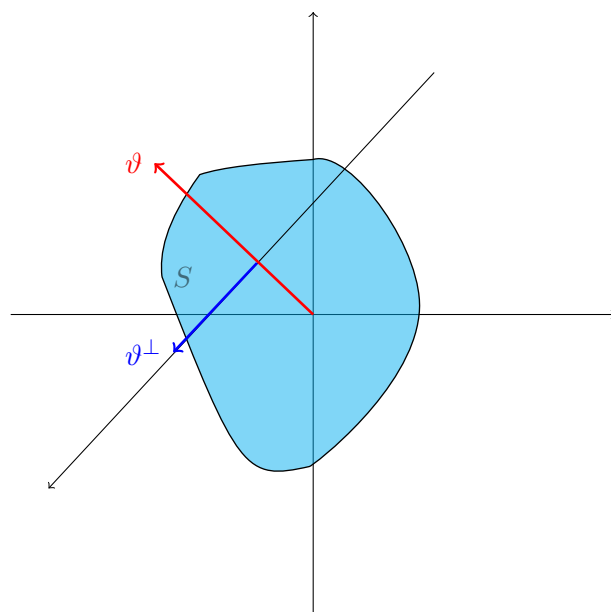
است.

آنگاه I در معادله دیفرانسیل

$$I'(t) = -\varphi(s\vartheta + t\vartheta^\perp)I(t), \quad (33.2)$$

صدق می‌کند. بنابراین،

$$\frac{I'}{I(t)} = -\varphi(s\vartheta + t\vartheta^\perp),$$



شکل ۱۰۲: تبدیل رادون

با انتگرال گیری روی بازه $(-\infty, t)$ داریم:

$$\ln I(t) \Big|_{-\infty}^t = - \int_{-\infty}^t \varphi(s\vartheta + \tilde{t}\vartheta^\perp) d\tilde{t},$$

در نتیجه،

$$\ln \frac{I(t)}{I(-\infty)} = - \int_{-\infty}^t \varphi(s\vartheta + \tilde{t}\vartheta^\perp) d\tilde{t}, \quad (34.2)$$

پس،

$$I(t) = I(-\infty) \exp \left(- \int_{-\infty}^t \varphi(s\vartheta + \tilde{t}\vartheta^\perp) d\tilde{t} \right).$$

اگر φ ، محمل فشرده داشته باشد آنگاه، $I(t)$ برای $|t|$ به اندازه‌ی کافی بزرگ، ثابت است. با تعریف تبدیل

رادون^۸ به صورت

$$(R\varphi)(\vartheta, s) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s\vartheta + t\vartheta^\perp) dt,$$

و استفاده از (۳۴.۲)، داریم

$$- \ln \frac{I(+\infty)}{I(-\infty)} = (R\varphi)(\vartheta, s), \quad (35.2)$$

که در آن، مقادیر مجانبی $I(\pm\infty)$ از $I(t)$ ، داده‌های مفروض مساله هستند.

^۸Radon Transform

مساله‌ی مستقیم پرتونگاری مقطعی، تبدیل رادون $(R\varphi)(\vartheta, s)$ را برای توزیع چگالی $\varphi \in L^2(B_1)$ ، محاسبه می‌کند که،

$$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}, \quad \forall \vartheta \in S^1, \quad s \in \mathbb{R},$$

است.

مساله‌ی معکوس، شامل یافتن $\varphi \in L^2(B_1)$ است در صورتی که $g = R\varphi \in L^2(S^1 \times \mathbb{R})$ ، مفروض باشد. در حالت خاص اگر φ به‌طور شعاعی، متقارن باشد فقط به اشعه‌ها از یک جهت، نیاز داریم چون، $(R\varphi)(\vartheta, s)$ نسبت به جهت φ ، ثابت است. فرض کنیم، $\varphi(x) = \Phi(|x|^2)$ باشد آن‌گاه،

$$\begin{aligned} (R\varphi)(\vartheta, s) &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \varphi(s\vartheta + t\vartheta^\perp) dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \varphi(s\vartheta + t\vartheta^\perp) dt, \end{aligned} \quad (36.2)$$

برقرار است. با تغییر متغیر $\tau = t^2 + s^2$ و $\sigma = s^2$ ، داریم

$$dt = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau - \sigma}},$$

با جایگذاری در (36.2)، به عبارت

$$(R\varphi)(\vartheta, s) = \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{\tau - \sigma}} d\tau, \quad (37.2)$$

می‌رسیم. از این‌رو، مساله‌ی معکوس به معادله‌ی انتگرالی ابل

$$(T_{CT}\Phi)(\sigma) = g(\sigma), \quad \sigma \in [0, 1], \quad (38.2)$$

با عملگر ولترای

$$(T_{CT}\Phi)(\sigma) = \int_\sigma^1 \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{\tau - \sigma}} d\tau, \quad (39.2)$$

تبدیل می‌شود.

همان‌طور که در همه‌ی مثال‌های بالا، مشاهده می‌شود، می‌توان مساله‌ی معکوس را به‌صورت معادلات عملگری

$$T(\varphi) = g, \quad T: X \rightarrow Y, \quad (40.2)$$

فرمول‌بندی کرد که X و Y دو فضای نورم‌دار هستند.

بنابراین، تعریف هادمارد برای خوش‌وضع، به‌صورت زیر قابل بازنویسی است،

مساله‌ی (40.2) خوش‌وضع است اگر، همه‌ی شرایط زیر برقرار باشد

۱. برد عملگر T ، $\mathcal{R}(T)$ ، برابر با تمام فضای Y باشد.

۲. معکوس عملگر T ، T^{-1} ، موجود باشد.

۳. T پیوسته باشد.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید T ، عملگر خطی یک‌به‌یک و پیوسته با دامنه $D(T) = X$ و برد $\mathcal{R} \subseteq Y$ روی فضاهای هیلبرت X و Y باشد. آنگاه، معکوس عملگر T ، T^{-1} ، کران‌دار است اگر و تنها اگر، $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$ باشد که $\overline{\mathcal{R}(T)}$ بستار برد T است.

بنابراین، اگر T^{-1} بی‌کران باشد آنگاه $\mathcal{R}$ ، در Y بسته نیست؛ یعنی، معادله‌ی عملگری T ، در همه‌ی فضای Y ، حل‌پذیر نیست و در بخشی از آن، حل‌پذیر است. از این‌رو، مساله‌های زیادی از جبرخطی، تحلیل‌های قابل اجرا، محاسبه‌ی تغییرات، نظریه‌ی کنترل، عکس‌برداری پردازش سیگنال و ... طبق تعریف هادمارد، بدوضع است. به این ترتیب، باید این مساله‌ها را از چارچوب ریاضی کلاسیک مستثنی کرد. برای رفع چنین مشکلی، مفهوم درستی شرطی، توسط تیخونف، معرفی شد.

۳.۲ درستی شرطی

تعریف ۱.۳.۲. مساله‌ی (۴۰.۲)، خوش‌وضع یا به‌طور شرطی خوش‌وضع نامیده می‌شود اگر همه‌ی شرایط زیر برقرار باشد

۱. از قبل بدانیم جوابی برای مساله وجود دارد و به مجموعه‌ی مشخص $M \subset X$ تعلق دارد؛ به عبارت دیگر،

$$g \in N = TM$$

۲. این جواب روی مجموعه‌ی M ، منحصر‌به‌فرد است؛ یعنی، معکوس T روی این مجموعه، تعریف شده است.

۳. T^{-1} روی N ، پیوسته باشد.

مجموعه‌ی M را یک مجموعه‌ی درستی می‌نامیم.

مفهوم درستی از نظر هادمارد و تیخونف، اساساً متفاوت است. برخلاف تعریف هادمارد، تیخونف معتقد است که لزومی ندارد معادله‌ی عملگری (۴۰.۲)، در سراسر فضای X ، حل‌پذیر باشد. به علاوه، شرط پیوستگی برای T^{-1} ، فقط برای مجموعه‌ی درستی M ، مورد نیاز است. طبق تعریف تیخونف، هر مجموعه‌ی فشرده‌ی X می‌تواند به صورت مجموعه‌ی درستی M ، در نظر گرفته شود.

همان‌گونه که در مثال‌ها دیده می‌شود، می‌توان مساله‌های معکوس را به صورت

$$(T\varphi)(x) = \int k(x, s)\varphi(s)ds, \quad (41.2)$$

بازنویسی کرد که در آن، $k(x, s)$ هسته نامیده می‌شود. به (۴۱.۲) نیز، معادله‌ی انتگرالی نوع اول می‌گوییم.

۴.۲ الگوریتم‌هایی برای حل پایدار مساله‌های معکوس خطی

در این بخش، روش‌هایی برای حل پایدار عملگر انتگرالی بدو وضع

$$T\varphi = g, \quad (42.2)$$

معرفی می‌کنیم. عملگر $T: X \rightarrow Y$ ، بین فضاها ی هیلبرت X و Y ، یک به یک و خطی کراندار است. دقت کنید که، مساله ی معکوس (۴۲.۲)، بدو وضع است یعنی به طور پیوسته به داده وابسته نیست و ممکن است توسط اختلالی آشفته شود. فرض کنیم g^δ ، داده ی اختلال باشد به طوری که،

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta. \quad (43.2)$$

همان طور که در بخش قبل بیان شد، می توان معادله ی (۴۲.۲) را به صورت یافتن می نیمم تابعک

$$\varphi \mapsto \|T\varphi - g^\delta\|^2, \quad (44.2)$$

در X ، فرمول بندی کرد. اما، این مساله ی می نیمم سازی نیز، پایدار نیست.

۱.۴.۲ منظم سازی تیخونف

به طور کلی، اصطلاح منظم سازی^۹، به معنای تقریب زدن مساله ی بدو وضع، با خانواده ی از مساله های خوش وضع نزدیک به آن است. یک روش برای پایدار ساختن (۴۴.۲)، افزودن یک جمله ی جریمه به تابعک (۴۴.۲) است که شامل فاصله ی φ از φ_0 (حدس اولیه) است:

$$J_\alpha(\varphi) := \|T\varphi - g^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2, \quad (45.2)$$

پارامتر $\alpha > 0$ را پارامتر تنظیم و J_α را تابعک تیخونف می نامیم.

ملاحظه ۱.۴.۲. اگر مقدار اولیه ی φ_0 ، معلوم نباشد قرار می دهیم $\varphi_0 = 0$.

قضیه ۲.۴.۲. تابعک تیخونف J_α به ازای هر $\alpha > 0$ ، $g^\delta \in Y$ و $\varphi_0 \in X$ ، می نیمم منحصر به فرد دارد که با رابطه ی

$$\varphi_\alpha^\delta = (T^*T + \alpha I)^{-1}(T^*g^\delta + \alpha\varphi_0) \quad (46.2)$$

به دست می آید. عملگر $T^*T + \alpha I$ ، کران دار و معکوس پذیر است بنابراین، φ_α^δ به طور پیوسته به داده ی g^δ وابسته است [۱۵].

این قضیه بیان می کند که تابعک J_α برای هر $\alpha > 0$ ، داده ی اختلال و حدس اولیه ی دلخواه، می نیمم یکتا دارد و پایدار است. برای اثبات این قضیه، به مقدمات زیر، نیاز داریم.

^۹Regularization

تعریف ۳.۴.۲ (مشتق فرچت). [۱۵]. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ، $U \in X$ یک مجموعه‌ی باز و $F : U \rightarrow Y$ عملگر باشد. عملگر F ، در نقطه‌ی $\varphi \in U$ ، مشتق فرچت^{۱۰} $F'[\varphi]$ دارد اگر عملگر خطی $F'[\varphi] \in L(X, Y)$ ، به ازای هر h و $\varphi + h \in U$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که،

$$F(\varphi + h) - F(\varphi) = F'[\varphi]h + \alpha(\varphi, h), \quad (۴۷.۲)$$

و

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(\varphi, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (۴۸.۲)$$

برای به‌دست آوردن تعریفی معادل و بهتر برای مشتق فرچت، فرض کنید شرایط بالا برقرار و $\varphi \in U$ باشد به‌طوری‌که، $\{z : \|\varphi - z\| < \epsilon\} \in U$. بردار $h \in \{h \in X : \|h\| < 1\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $t \in \mathbb{R}$ و $|t| < \epsilon$ یک پارامتر باشد. اگر قرار دهیم $z = \varphi + th$ ، داریم:

$$\|z - \varphi\| = \|\varphi + th - \varphi\| = \|th\| = |t|\|h\| < \epsilon,$$

در نتیجه، $\varphi + th \in U$ است پس، طبق رابطه‌ی (۴۷.۲)،

$$F(\varphi + th) - F(\varphi) = F'[\varphi]th + \alpha(\varphi, th), \quad (۴۹.۲)$$

و چون،

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|th\| = \|h\| \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0,$$

است طبق (۴۸.۲)،

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(\varphi, th)\|_Y}{|t|\|h\|_X} = 0. \quad (۵۰.۲)$$

با تقسیم طرفین (۴۹.۲) بر t ، حد گرفتن از آن و استفاده از رابطه‌ی (۵۰.۲)، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود،

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\varphi + th) - F(\varphi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'[\varphi]th}{t},$$

پس،

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\varphi + th) - F(\varphi)}{t} = F'[\varphi]h. \quad (۵۱.۲)$$

لم ۴.۴.۲. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از فضای نورم‌دار X باشد. اگر $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ در φ ، فرچت مشتق‌پذیر و $\varphi \in U$ ، می‌نیم موضعی F باشد آنگاه، $hF'[\varphi] = 0$ است [۱۵].

^{۱۰}Frechet

برهان. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $hF'[\varphi] \neq 0$ و $hF'[\varphi] < 0$ باشد یعنی،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\varphi + \epsilon h) - F(\varphi)}{\epsilon} = F'[\varphi]h < 0, \quad (52.2)$$

بنابراین،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\varphi + \epsilon h) - F(\varphi)}{\epsilon h} = F'[\varphi]. \quad (53.2)$$

سمت چپ (53.2)، تعریف مشتق معمولی $F(\varphi)$ است که با فرض می‌نیم بودن φ ، در تناقض است چون باید $F'(\varphi) = 0$ باشد.

برای حالت $hF'[\varphi] > 0$ نیز، به همین ترتیب عمل می‌کنیم. بنابراین فرض خلف باطل است و $hF'[\varphi] = 0$ می‌باشد [۱۵]. $\square$

لم 54.2. تابعک تیخونف، برای هر $\alpha \geq 0$ ، فرجت مشتق‌پذیر است و مشتق فرجت آن به صورت

$$J'[\varphi]h = 2\operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle, \quad (54.2)$$

است [۱۵].

برهان. با استفاده از تعریف تابعک تیخونف داریم

$$J_\alpha(\varphi) = \|T\varphi - g^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2, \quad (55.2)$$

و

$$\begin{aligned} J_\alpha(\varphi + h) &= \|T(\varphi + h) - g^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi + h - \varphi_0\|^2 \\ &= \|T\varphi - g^\delta + Th\|^2 + \alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2 + \alpha\|h\|^2 + 2\alpha\langle \varphi - \varphi_0, h \rangle \\ &= \|T\varphi - g^\delta\|^2 + \|Th\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T\varphi - g^\delta, Th \rangle + \alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2 \\ &\quad + \alpha\|h\|^2 + 2\alpha\langle \varphi - \varphi_0, h \rangle \\ &= \|T\varphi - g^\delta\|^2 + \|Th\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi - g^\delta), h \rangle + \alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2 \\ &\quad + \alpha\|h\|^2 + 2\alpha\langle \varphi - \varphi_0, h \rangle. \end{aligned}$$

درنتیجه،

$$J_\alpha(\varphi + h) - J_\alpha(\varphi) = \|Th\|^2 + \alpha\|h\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle.$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۵۱.۲)،

$$\begin{aligned} J'[\varphi]h &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J_\alpha(\varphi + \epsilon h) - J_\alpha(\varphi)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2 \|Th\|^2 + \alpha \epsilon^2 \|h\|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle}{\epsilon} \\ &= 2\operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle. \end{aligned}$$

□

و به این ترتیب، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود [۱۵].

حال، به اثبات قضیه‌ی ۲.۴.۲ می‌پردازیم.

فرض کنید φ_α^δ ، تابعک تیخونف J_α را می‌نیم کند. چون طبق لم ۵.۴.۲، J_α فرجت مشتق‌پذیر است، پس بنا به لم ۴.۴.۲، برای هر h ، $J'_\alpha[\varphi]h = 0$ است. با انتخاب $h = T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0)$ و جایگذاری در فرمول (۵۴.۲) داریم

$$J'_\alpha[\varphi_\alpha^\delta]h = 0,$$

پس،

$$2\operatorname{Re}\langle T^*(T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta) + \alpha(\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0), T^*(T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta) + \alpha(\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0) \rangle = 0.$$

آنگاه،

$$\operatorname{Re}\langle T^*T\varphi_\alpha^\delta + \alpha\varphi_\alpha^\delta - T^*g^\delta - \alpha\varphi_0, T^*T\varphi_\alpha^\delta + \alpha\varphi_\alpha^\delta - T^*g^\delta - \alpha\varphi_0 \rangle = 0,$$

از این رو،

$$(T^*T + \alpha I)\varphi_\alpha^\delta - T^*g^\delta - \alpha\varphi_0 = 0.$$

و در نتیجه،

$$(T^*T + \alpha I)\varphi_\alpha^\delta = T^*g^\delta + \alpha\varphi_0.$$

اکنون باید ثابت کنیم، $T^*T + \alpha I$ ، کران‌دار و معکوس‌پذیر است، به عبارت دیگر، نشان می‌دهیم φ_α^δ ، منحصر بفرد است. برای این کار، از قضیه‌ی لکس میلگرام^{۱۱}، استفاده می‌کنیم. چون T ، تابعکی خطی کران‌دار است، بنابراین $T^*T + \alpha I$ نیز خطی کران‌دار است. از طرفی، $T^*T + \alpha I$ ، کواریسو است چون

^{۱۱}Lax-Milgrim

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle (T^*T + \alpha I)\varphi, \varphi \rangle &= \langle T^*T, \varphi \rangle + \langle \alpha\varphi, \varphi \rangle \\
&= \langle T\varphi, T\varphi \rangle + \alpha\langle \varphi, \varphi \rangle \\
&= \|T\varphi\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2 \\
&\geq \alpha\|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی لکس میلگرام، عضو یکتایی مانند φ_α^δ وجود دارد به‌طوری‌که

$$(T^*T + \alpha I)\varphi_\alpha^\delta = T^*g^\delta + \alpha\varphi_\alpha^\delta.$$

برای اثبات می‌نیمم بودن φ_α^δ ، فرض کنید $t \in \mathbb{R}$ و $h \in X \setminus \{0\}$ باشد، تابع $\psi(t)$ را به‌صورت

$$\psi(t) := J_\alpha(\varphi_\alpha^\delta + th) = \|T(\varphi_\alpha^\delta + th) - g^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi_\alpha^\delta + th - \varphi_\alpha^\delta\|^2, \quad \alpha > 0,$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $\psi \geq 0$ و یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ است. از سویی،

$$\psi'(0) = J'_\alpha(\varphi_\alpha^\delta + 0h) = 0.$$

درنتیجه، تابع $\psi(t)$ در $t = 0$ دارای می‌نیمم است. از این‌رو، برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $\psi(t) \geq \psi(0) = J_\alpha(\varphi_\alpha^\delta)$ ، می‌باشد و حالت تساوی فقط برای $t = 0$ ، برقرار است.

۵.۲ حل عددی مساله‌های معکوس خطی

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، می‌توان مساله‌ی معکوس را به‌صورت معادله‌ی عملگری

$$(T\varphi)(x) = \int k(x, y)\varphi(y)dy, \quad (56.2)$$

بیان نمود. برای حل عددی این نوع معادلات، باید آن‌ها را گسسته کنیم. برای این‌کار، از دو روش اصلی استفاده می‌کنیم

۱. روش‌های انتگرال‌گیری عددی،

۲. روش‌های گالرکین^{۱۲}.

^{۱۲}Galerkin Methods

۱.۵.۲ گسسته‌سازی با روش‌های انتگرال‌گیری عددی

فرض کنید انتگرال (۵۶.۲) را به روش

$$\int k(s_j, y) \varphi(y) dy = \sum_{i=1}^M w_i k(s_j, y_i) \varphi(y_i) \Delta y_i, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad M > N, \quad (57.2)$$

تقریب بزنیم. بنابراین، (۵۶.۲) به دستگاه معادلات خطی

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} + \xi, \quad (58.2)$$

تبدیل می‌شود که در آن $A = (A_{i,j}) = w_i k(s_j, y_i) \Delta y_i$ ماتریسی $M \times N$ با $M > N$ ، $\mathbf{b}_i = g(s_i)$ ، برداری مجهول در $\mathbb{R}^n$ است و w_i وزن نامیده می‌شود.

۲.۵.۲ روش گالرکین

فرض کنید تابع ψ_i ، پایه‌ای برای فضای هیلبرت X باشد و آن را به صورت

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_i-x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad (59.2)$$

تعریف کنید. بنابراین، چون $\varphi \in X$ است پس می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^M \varphi_i \psi_i(y). \quad (60.2)$$

در نتیجه، با جایگذاری (۶۰.۲) در (۵۶.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} \int k(s_j, y) \varphi(y) dy &= \int \sum_{i=1}^M \varphi_i \psi_i(y) k(s_j, y) dy \\ &= \sum_{i=1}^M \varphi_i \int \psi_i(y) k(s_j, y) dy, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (61.2)$$

در این روش گسسته‌سازی نیز، به دستگاه خطی از معادلات

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} + \xi, \quad (62.2)$$

دست می‌یابیم که در آن، $A_{M \times N} = A_{i,j} = \int \psi_i(y) k(s_j, y) dy$ ، ماتریس ضرایب و $\mathbf{x}_{M \times 1}$ بردار مجهول است.

انتخاب روش گسسته‌سازی به نوع مساله، بستگی دارد. روش‌های انتگرال‌گیری عددی، چون فقط به محاسبه‌ی هسته‌ی k در برخی نقاط، نیاز دارند قدری آسان‌تر هستند اما، در مقایسه با روش‌های گالرکین، از دقت کمتری برخوردارند.

(۵۶.۲) را می‌توان، به صورت دستگاهی خطی از معادلات مانند

$$Ax = b, \quad (63.2)$$

تبدیل کرد. در این دستگاه، ماتریس $A_{M \times N}$ ، مدل را توصیف می‌کند، $x \in \mathbb{R}^N$ بردار ورودی و $b \in \mathbb{R}^M$ بردار خروجی را نمایش می‌دهد. مساله‌ی معکوس مرتبط با این مدل، با داشتن خروجی b و مدل معلوم A ، ورودی x را محاسبه می‌کند.

به این ترتیب، باید جواب تقریبی مساله‌ی می‌نیم‌سازی کمترین مربعات وابسته به دستگاه خطی معادلات (۶۳.۲) را محاسبه کنیم:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|Ax - b\| \quad (64.2)$$

که در آن، $\|\cdot\|$ نورم اقلیدسی است.

اگر داده‌ی موجود، دقیق نباشد آن‌گاه خطایی کوچک در داده، ممکن است جواب را به مقدار زیادی آشفته کند. فرض کنید داده‌ی موجود b ، دارای خطای e باشد:

$$b = \hat{b} + e.$$

جواب مطلوب x ، جواب دستگاه خطی معادلات با داده‌ی بدون خطای b است:

$$Ax = b. \quad (65.2)$$

از آنجایی که این مساله، نسبت به اختلال در داده، حساس است حتی، یک بردار خطای کوچک، ممکن است جواب را به‌طور قابل ملاحظه‌ای، تغییر دهد و لذا، ممکن است جواب محاسبه شده، از جواب مطلوب بسیار دور و در نتیجه، بی‌معنا باشد.

همه‌ی مساله‌های بدوضع گسسته‌شده، از محک زیر پیروی می‌کنند:

۱. جواب، نسبت به آشفتگی در داده، حساس است.

۲. مقادیر تکیین ماتریس، به تدریج به صفر، میرا می‌شود.

به منظور تعیین تقریبی بامعنا برای جواب مطلوب (۶۴.۲) از (۶۳.۲)، ابتدا باید (۶۳.۲) را با مساله‌ی نزدیک، که جوابی با حساسیت کمتر نسبت به داده، داشته باشد، جایگزین کنیم. این جایگزینی، معمولاً به مفهومی با عنوان منظم‌سازی برمی‌گردد. در ادامه، به شرح دو روش منظم‌سازی تجزیه‌ی مقدار تکیین ناقص^{۱۳} و منظم‌سازی

^{۱۳}Truncated Singular Value Decomposition

تیخونف، می‌پردازیم.

قبل از پرداختن به منظم‌سازی مقدار تکین ناقص یا به اختصار TSVD، ابتدا خلاصه‌ای از روش SVD را بیان می‌کنیم.

۳.۵.۲ روش SVD

روش تجزیه‌ی مقادیر تکین یا به اختصار SVD، تجزیه‌ی ماتریس A به شکل

$$A = U \Sigma V^T, \quad (۶۶.۲)$$

است که در آن،

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_M] \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad (۶۷.۲)$$

ماتریس‌های متعامدی هستند که ستون‌های آن‌ها متعامد می‌باشند و

$$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] \in \mathbb{R}^{M \times N}, \quad (۶۸.۲)$$

ماتریسی است که درایه‌های قطر اصلی آن، σ_j ، مقادیر تکین ماتریس A هستند و به صورت

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0,$$

مرتب شده‌اند. فرض کنید $\text{rank}(A) = l$ باشد، آن‌گاه، مقادیر تکین به شکل زیر خواهد بود

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_l > \sigma_{l+1} = \dots = \sigma_N = 0,$$

و می‌توان A را با مجموع l ماتریس تک‌رتبه‌ای، بیان نمود:

$$A = \sum_{j=1}^l \sigma_j u_j v_j^T.$$

مهم‌ترین جنبه‌ی SVD، مقادیر تکین σ_j ها هستند. در مساله‌های بدوضع گسسته، مقادیر تکین ماتریس A ، به تدریج به سمت صفر، میرا می‌شود.

۴.۵.۲ روش منظم‌سازی TSVD

این روش، مشکل کوچک بودن مقادیر تکین مثبت را با برابر صفر قرار دادن آن‌ها، حل می‌کند. در تقریب TSVD ماتریس A ، کوچک‌ترین مقادیر تکین، نادیده گرفته می‌شود. بهترین تقریب k -رتبه‌ای A را برحسب نرم اقلیدسی، در نظر بگیرید که با مجموع k ماتریس تک‌رتبه‌ای اول در SVD، به دست می‌آید

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^T, \quad (۶۹.۲)$$

و شکل ماتریسی آن، به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$A_k = U \Sigma_k V^T, \quad \Sigma_k = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-k \text{ بار}}]. \quad (70.2)$$

ماتریس شبه معکوس مورپنروس^{۱۴} (۶۹.۲)، با

$$A_k^\dagger = V \Sigma_k^\dagger U^T, \quad \Sigma_k^\dagger = \text{diag}[\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-k \text{ بار}}], \quad (71.2)$$

تعریف می‌شود.

در روش TSVD، جواب‌های تقریبی (۶۴.۲) به شکل

$$\mathbf{x}_k = A_k^\dagger \mathbf{b} = V \Sigma_k^\dagger U^T \mathbf{b}, \quad (72.2)$$

است. می‌توان (۷۲.۲) را به صورت ترکیب خطی از بردارهای V نوشت:

$$\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^k \frac{u_j^T \mathbf{b}}{\sigma_j} v_j, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

با تعریف $\tilde{\mathbf{b}} = U^T \mathbf{b}$ و $\tilde{\mathbf{x}}_k = V^T \mathbf{x}_k$ ابتدا عبارت

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \left[\frac{\tilde{b}_1}{\sigma_1}, \frac{\tilde{b}_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\tilde{b}_k}{\sigma_k}, 0, 0, \dots, 0 \right]^T, \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

را به دست می‌آوریم و با استفاده از $\tilde{\mathbf{x}}_k = V^T \mathbf{x}_k$ و در نتیجه $\mathbf{x}_k = V \tilde{\mathbf{x}}_k$ بردار $\mathbf{x}$ را محاسبه می‌کنیم. در روش منظم‌سازی TSVD برای (۶۴.۲)، ماتریس A که عدد شرطی بزرگی دارد و بدوضع نیز می‌باشد با ماتریس مشابه A_k که عدد شرطی کوچک‌تری دارد، جایگزین می‌شود. عدد شرطی تقریب k -رتبه‌ای A_k ، به شدت به انتخاب k بستگی دارد؛ یعنی،

$$\mathcal{K}(A_k) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}.$$

با در نظر گرفتن نرم زیر، می‌توان میزان نزدیکی A_k به A را تعیین کرد،

$$\|A - A_k\| = \|U \Sigma V^T - U \Sigma_k V^T\| = \|\Sigma - \Sigma_k\| = \sigma_{k+1}.$$

^{۱۴}Moore-Penrose Pseudo Inverse

از این رو، اگر k را خیلی بزرگ، اختیار کنیم (چون مخرج، کوچک‌تر می‌شود) عدد شرطی، بزرگ‌تر می‌شود و متقابلاً، اگر k را خیلی کوچک در نظر بگیریم، ماتریس A_k حاصل، تقریب خوبی از ماتریس A نخواهد بود.

۵.۵.۲ روش منظم‌سازی تیخونف

در این روش، مساله‌ی می‌نیم‌سازی (۶۴.۲)، با مساله‌ی کمترین مربعات جریمه‌ی

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \|L_\mu \mathbf{x}\|^2 \} \quad (۷۳.۲)$$

جایگزین می‌شود که در آن، $L_\mu \in \mathbb{R}^{k \times N}$ ، $k \leq N$ ، ماتریس تنظیم و $\mu > 0$ پارامتر تنظیم نامیده می‌شود. ساده‌ترین شکل منظم‌سازی تیخونف، با انتخاب $L_\mu = \mu I$ برای μ ثابت، به دست می‌آید. بنابراین، مساله‌ی (۷۳.۲) به شکل

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \mu^2 \|\mathbf{x}\|^2 \} \quad (۷۴.۲)$$

بازنویسی می‌شود.

جواب‌های کمترین مربعات مساله‌های بدووضع، به جواب‌هایی با نورم بزرگ میل می‌کند؛ با جریمه کردن نورم بردار جواب $\mathbf{x}$ و وزن دار نمودن آن با ثابت μ ، برای (۷۴.۲)، جواب‌هایی با نورم کوچک‌تر به دست می‌آوریم.

فرض کنید $\mu > 0$ باشد. جواب مساله‌ی کمترین مربعات

$$\min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2,$$

با جواب دستگاه

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b},$$

برابر است. بنابراین، با تعریف (۷۴.۲)، به صورت

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} A \\ \mu I \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right\}, \quad (۷۵.۲)$$

جواب (۷۴.۲)، با جواب دستگاه

$$\begin{pmatrix} A \\ \mu I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ \mu I \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} A \\ \mu I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

برابر است. در نتیجه،

$$(A^T A + \mu^2 I) \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}. \quad (76.2)$$

چون $A^T A$ و $\mu^2 I$ متقارن هستند $A^T A + \mu^2 I$ نیز، متقارن است. برای اثبات یکتا بودن جواب دستگاه (76.2)، کافیت نشان دهیم $A^T A + \mu^2 I$ معین مثبت است. فرض کنیم $C \neq 0$ برداری در $\mathbb{R}^N$ باشد، با انتخاب $\mu > 0$ (بزرگتر اکید) داریم:

$$\begin{aligned} C^T (A^T A + \mu^2 I) C &= C^T A^T A C + \mu^2 C^T C \\ &= (AC)^T (AC) + \mu^2 C^T C \\ &= \|AC\|^2 + \mu^2 \|C\|^2, \end{aligned}$$

عبارت بالا، بزرگتر اکید از صفر است. لذا، جواب (76.2)، به صورت

$$\mathbf{x}_\mu = (A^T A + \mu^2 I)^{-1} A^T \mathbf{b}, \quad (77.2)$$

است، همان گونه که قبلاً گفته شد، $\mathbf{x}_\mu$ همان جواب (74.2) می باشد. اگر SVD ماتریس A موجود باشد، داریم:

$$A^T = (U \Sigma V^T)^T = V \Sigma^T U^T,$$

پس،

$$A^T A = V \Sigma^T \Sigma V^T. \quad (78.2)$$

با جایگذاری در (76.2) عبارت

$$(V \Sigma^T \Sigma V^T + \mu^2 V V^T) \mathbf{x}_\mu = V \Sigma^T U^T \mathbf{b},$$

حاصل می شود. در نتیجه،

$$V (\Sigma^T \Sigma + \mu^2 I) V^T \mathbf{x}_\mu = V \Sigma^T U^T \mathbf{b}.$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی بالا در V^T از سمت چپ و با قرار دادن $\mathbf{x} = V^T \mathbf{x}_\mu$ و $\tilde{\mathbf{b}} = U^T \mathbf{b}$ داریم

$$(\Sigma^T \Sigma + \mu^2 I) \mathbf{x} = \Sigma^T \tilde{\mathbf{b}},$$

و لذا،

$$\mathbf{x}_\mu = V(\Sigma^T \Sigma + \mu^2 I)^{-1} \Sigma^T \tilde{\mathbf{b}}. \quad (۷۹.۲)$$

با توجه به (۶۶.۲) در SVD، می‌بینیم که منظم‌سازی تیخونف، ثابت μ^2 را به مقدار ویژه‌ی $\sigma_i^2 = \lambda_i$ از ماتریس $A^T A$ ، اضافه می‌کند. این عمل، هموار کردن نامیده می‌شود. این کار، مشارکت هر بردار v_i را در جواب، کاهش می‌دهد.

۶.۵.۲ اصل اختلاف

هنگامی که نورم خطای b ، معلوم باشد یا بتوان آن را تقریب زد، می‌توان از اصل اختلاف^{۱۵}، برای تعیین پارامتر تنظیم در روش منظم‌سازی تیخونف و اندیس برش در روش منظم‌سازی TSVD استفاده نمود. فرض کنید نورم خطا در $\mathbf{b}$ ، $\|e\| = \xi$ باشد. اصل اختلاف پیشنهاد می‌کند، پارامتر تنظیم را طوری انتخاب کنیم که خطای مانده‌ی دستگاه منظم شده، کوچک‌تر یا مساوی $\eta \xi$ باشد، به طوری که $\eta > 1$ ثابت و مستقل از ξ است. برای روش منظم‌سازی TSVD، این گفته بدین معناست که، k را تا حد ممکن، کوچک انتخاب کنیم به طوری که،

$$\|A \mathbf{x}_k - \mathbf{b}\| \leq \eta \xi, \quad (۸۰.۲)$$

برقرار باشد. و برای روش منظم‌سازی تیخونف، بدین معناست که، μ را طوری اختیار کنیم که

$$\|A \mathbf{x}_\mu - \mathbf{b}\| = \eta \xi. \quad (۸۱.۲)$$

جزئیات این که چگونه چنین مقدار μ -ای را برای روش تیخونف با کمترین هزینه، می‌توان به دست آورد، هنگامی که SVD برای ماتریس A موجود باشد، در قسمت بعد، مورد بحث قرار خواهد گرفت. اصل اختلاف، مقدار بهینه‌ی μ را به ما نمی‌دهد بلکه، مقداری بزرگ‌تر از مقدار بهینه را برمی‌گرداند. با جایگذاری $A_k = U \Sigma V^T$ و $U \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ در (۸۰.۲)، می‌توان نوشت

$$\|U \Sigma V^T x_k - U \tilde{\mathbf{b}}\| \leq \eta \xi,$$

بنابراین، در اصل اختلاف برای تعیین کوچک‌ترین مقدار k در روش منظم‌سازی TSVD، از رابطه‌ی

^{۱۵}Discrepancy Principle

$$\|\Sigma V^T \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{b}}\| \leq \eta \xi,$$

استفاده می‌شود.

الگوریتم ۱۰.۵.۲. الگوریتم روش منظم‌سازی TSVD، به صورت زیر است:

۱. ابتدا، تجزیه‌ی مقدار تکین A را به دست می‌آوریم

$$A = U \Sigma V^T.$$

۲. برای $k = 1, 2, \dots, N$,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \left[\frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sigma_1}, \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sigma_2}, \dots, \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sigma_k}, \circ, \dots, \circ \right],$$

را محاسبه می‌کنیم.

۳. اگر $\|\Sigma V^T \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{b}}\| \leq \eta \xi$ باشد آنگاه، توقف می‌کنیم و جواب $\mathbf{x}_k = V \tilde{\mathbf{x}}_k$ را به دست می‌آوریم؛ در غیر

این صورت، به مرحله‌ی ۲، برمی‌گردیم.

تعیین پارامتر μ برای منظم‌سازی تیخونف

تابع Ψ را به صورت

$$\Psi(\mu) = \|A \mathbf{x}_\mu - \mathbf{b}\|^2, \quad (۸۲.۲)$$

تعریف می‌کنیم. همان‌گونه که گفتیم، در روش منظم‌سازی تیخونف، μ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\Psi(\mu) = \eta^2 \xi^2, \quad (۸۳.۲)$$

برقرار باشد. با جایگذاری (۷۹.۲) در (۸۲.۲)، داریم

$$\begin{aligned} \Psi(\mu) &= \|A \mathbf{x}_\mu - \mathbf{b}\|^2 \\ &= \|U \Sigma V^T V (\Sigma^T \Sigma + \mu^2 I)^{-1} \Sigma^T \tilde{\mathbf{b}} - U \tilde{\mathbf{b}}\|^2 \\ &= \|(\Sigma (\Sigma^T \Sigma + \mu^2 I)^{-1} \Sigma^T - I) \tilde{\mathbf{b}}\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \mu^2} - 1 \right)^2 \tilde{\mathbf{b}}_j^2. \end{aligned}$$

$\Phi(\nu) = \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ را با رابطه‌ی

$$\Phi(\nu) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{b}_j^2}{\nu \sigma_j^2 + 1},$$

تعریف می‌کنیم. به راحتی، می‌توان ثابت کرد که Φ برای $\nu \geq 0$ ، نزولی و محدب است. با روش نیوتون،

$$\Phi(\nu) = \eta^2 \xi^2, \quad (۸۴.۲)$$

به سادگی، حل می‌شود و به طور مربعی، همگراست. در تکرار اول این روش، $\nu_0 = 0$ را قرار می‌دهیم. در روش

نیوتون، به محاسبه‌ی مشتقات نیاز داریم که با رابطه‌ی

$$\Phi'(\nu) = \frac{-2\sigma_j^2}{(1 + \nu\sigma_j^2)^3} \tilde{b}_j^2,$$

محاسبه می‌شود.

خاطر نشان می‌کنیم که تابع $\Psi(\mu)$ ، لزوماً محدب نیست و تعیین جواب (۸۳.۲) با روش نیوتون، خیلی

پیچیده‌تر از محاسبه‌ی جواب (۸۴.۲) است.

فصل ۳

روش تطبیقی ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی برای مساله‌های پراکندگی معکوس

در این فصل، روش ترکیبی تطبیقی اجزای محدود و تفاضلات متناهی را برای مساله‌ی پراکندگی موج صوت وابسته به زمان، به صورت مساله‌ی شناسایی یک پارامتر، پیاده سازی می‌کنیم. در این مساله، می‌خواهیم سرعت صوت متغیر مجهول $c(x)$ را با استفاده از بازتاب موج اندازه‌گیری شده، تعیین کنیم. از کاربردهای این روش، می‌توان به آزمون نامخرب مواد، بازسازی شکل، عکس‌برداری عمق زیرسطحی ساختارهای زمین‌شناسی و نمودار لرزه‌ای، اشاره نمود.

برای حل این مساله، از روش کنترل بهینه استفاده می‌کنیم. در این روش، به دنبال سرعت صوت $c(x)$ هستیم که تفاضل بین داده‌ی خروجی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده را در یک نرم L_2 گسسته، می‌نیم کند؛ به عبارت دیگر، می‌خواهیم تابع هزینه‌ی

$$E(p) = \frac{1}{2} \|p - \tilde{p}\|^2, \quad (1.3)$$

را می‌نیم کنیم که به p وابسته است و با تغییر سرعت صوت $c(x)$ ، در معادله‌ی دیفرانسیلی حالت

$$A(p, c) = f, \quad (2.3)$$

صدق می‌کند که در آن، f تابع مفروض، $\tilde{p}$ داده‌ی مشاهده شده در مجموعه‌ای متناهی از نقاط مشاهده و $\|\cdot\|$ نرم L_2 گسسته است.

سپس، مساله‌ی می‌نیم‌سازی به صورت یافتن نقطه‌ی مانایی لاگرانژ^۱، فرمول بندی می‌شود. لاگرانژ، شامل یک معادله‌ی پیشرو (معادله‌ی حالت)، معادله‌ی موج پسرو (معادله‌ی الحاقی) و معادله‌ای است که بیان می‌کند، گرادیان برحسب سرعت موج c ، صفر می‌شود. برای اجرای موثر انتشار موج پیشرو و پسرو، از روش ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی استفاده می‌کنیم [۲۹].

در این روش، در دامنه‌ای که شی را شامل می‌شود، از انعطاف‌پذیری تظریف مش و تطابق^۲ روش اجزای محدود، و در دامنه‌ی محیط همگن، از کارایی مش ساختاریافته، استفاده می‌کنیم. در این فصل، تطبیق مش، روی تخمین خطا در لاگرانژ، پایه‌گذاری شده است که شامل مانده‌های^۳ معادله‌های حالت، الحاقی و گرادیان برحسب c است.

طرح کلی این فصل، بدین صورت است:

در بخش ۱۰.۳، مساله‌ی پراکندگی معکوس را برای معادله‌ی موج صوت، فرمول بندی می‌کنیم، در بخش ۳.۳، روش اجزای محدود را به کار می‌بریم و در بخش ۶.۳ تخمین خطای پسین را برای تطابق، به دست می‌آوریم. در بخش ۷.۳، الگوریتم تطبیقی را بیان می‌کنیم و در بخش آخر، خطای پیشین را برای معادله‌ی موج، به دست می‌آوریم. برای گردآوری این فصل، از [۴] استفاده شده است.

۱۰.۳ مساله‌ی پراکندگی معکوس

معادله‌ی اسکالر موج، که انتشار موج صوت را در دامنه کران دار $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ، $d = 2, 3$ ، با کران Γ ، مدل سازی می‌کند در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = f, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$p(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, 0) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.3)$$

$$p|_{\Gamma} = 0, \quad \text{on } \Gamma \times (0, T), \quad (5.3)$$

که $p(x, t)$ فشار، $c(x)$ سرعت صوت وابسته به $x \in \Omega$ ، t متغیر زمان، T زمان نهایی و $f(x, t)$ تابع منبع مفروض است.

مساله‌ی معکوس این معادله، به صورت مساله‌ی بهینه سازی غیرخطی

^۱Lagrangian

^۲Adaptivity

^۳Residual

$$\begin{aligned} \min_{p,c} \quad & E(p) \\ \text{s.t.} \quad & A(p, c) - f = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

فرمول‌بندی می‌شود، که در آن

$$E(p) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (p - \tilde{p})^2 \delta_{obs} dx dt,$$

$$A(p, c) := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p,$$

و $\delta_{obs} = \sum \delta(x_{obs})$ مجموعی از توابع δ مطابق با نقاط مشاهده است. $A(p, c) = f$ نیز، معادله حالت نامیده می‌شود.

برای حل مساله‌ی می‌نیم‌سازی (۶.۳)، از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. در ادامه، مفاهیم پایه‌ای این روش را برای بهینه‌سازی، به‌طور مختصر، بیان می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر، به [۲۷] مراجعه کنید.

۱.۱.۳ روش لاگرانژ

مساله‌ی می‌نیم‌سازی با محدودیت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

که در آن، $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ است. در روش لاگرانژ، با معرفی ضریب مجهول λ و تابع لاگرانژ

$$L(x, \lambda) = F(x) + \langle \lambda, h \rangle,$$

مساله‌ی (۷.۳)، به مساله‌ی بدون قید

$$\min_{x, \lambda} L(x, \lambda), \quad (8.3)$$

تبدیل می‌شود، $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، ضرب داخلی روی فضای ضرب داخلی $\mathbb{R}^m$ است. بنابراین، با تعریف

$$F := E(p), \quad h := A(p, c) - f,$$

تابع لاگرانژ برای مساله‌ی (۶.۳)، به شکل

$$L(\lambda, p, c) = E(p) + \langle A(p, c) - f, \lambda \rangle, \quad (9.3)$$

بازنویسی می‌شود که در آن،

$$\langle A(p, c) - f, \lambda \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \cdot \lambda - \lambda \cdot \nabla \cdot \nabla p - \lambda \cdot f \right) dx dt. \quad (10.3)$$

درواقع روش لاگرانژ، مساله‌ی می‌نیم‌سازی مقید را، به مساله‌ی می‌نیم‌سازی بدون محدودیت، تبدیل می‌کند. با اعمال انتگرال‌گیری جزیه‌جزی بر جمله‌ی اول سمت راست و فرمول گرین بر جمله‌ی دوم آن، داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \cdot \lambda dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \lambda \right)_0^T dx + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} dx dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \lambda(x, T) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \lambda(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} dx dt, \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \cdot \nabla \cdot \nabla p dx dt &= - \int_0^T \int_{\Gamma} \lambda_n \cdot \nabla p dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \nabla p dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \nabla p dx dt. \end{aligned} \quad (12.3)$$

با جایگذاری (۱۱.۳) و (۱۲.۳) در (۱۰.۳) به عبارت زیر می‌رسیم

$$\langle A(p, c) - f, \lambda \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \nabla \lambda \cdot \nabla p - f \cdot \lambda \right) dx dt. \quad (13.3)$$

و با قرار دادن (۱۳.۳) در (۹.۳)، تابع لاگرانژ به صورت

$$L(\lambda, p, c) = E(p) + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \nabla \lambda \cdot \nabla p - f \cdot \lambda \right) dx dt, \quad (14.3)$$

بازنویسی می‌شود.

لذا، باید می‌نیم تابع L را به دست آوریم. به عبارت دیگر، باید نقطه‌ی مانایی برحسب (λ, p, c) بیابیم، به طوری که برای هر $(\bar{\lambda}, \bar{p}, \bar{c})$ ، در

$$L'(\lambda, p, c)(\bar{\lambda}, \bar{p}, \bar{c}) = 0, \quad (15.3)$$

صدق کند، که در آن L' گرادیان L است. فرض می‌کنیم،

$$\lambda(\cdot, T) = \bar{\lambda}(\cdot, T) = \circ, \quad p(\cdot, T) = \bar{p}(\cdot, T) = \circ,$$

همراه با شرایط مرزی همگن دریکله، برقرار باشد. (۱۵.۳)، برای هر $(\bar{\lambda}, \bar{p}, \bar{c})$ ،

$$\circ = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, p, c)(\bar{\lambda}) = \int_{\circ}^T \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial t} + \nabla \bar{\lambda} \nabla p - f \bar{\lambda} \right) dx dt, \quad (16.3)$$

$$\begin{aligned} \circ = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, p, c)(\bar{p}) &= \int_{\circ}^T \int_{\Omega} (p - \bar{p}) \bar{p} \delta_{obs} dx dt \\ &+ \int_{\circ}^T \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \nabla \lambda \nabla \bar{p} \right) dx dt, \end{aligned} \quad (17.3)$$

$$\circ = \frac{\partial L}{\partial c}(\lambda, p, c)(\bar{c}) = \frac{2}{c^3} \int_{\circ}^T \int_{\Omega} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \bar{c} dx dt, \quad x \in \Omega. \quad (18.3)$$

را نتیجه می‌دهد. (۱۶.۳)، شکل ضعیف معادله حالت (۳.۳)، (۱۷.۳) شکل ضعیف معادله الحاقی:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \Delta \lambda &= -(p - \bar{p}) \delta_{obs}, & \text{in } \Omega \times (\circ, T), \\ \lambda(T) &= \frac{\partial \lambda}{\partial t}(T) = \circ, \\ \lambda &= \circ, & \text{on } \Gamma \times (\circ, T), \end{aligned} \quad (19.3)$$

و (۱۸.۳) نشان می‌دهد که مانایی برحسب c ، صفر است.

برای حل مساله‌ی می‌نیم‌سازی، از شکل گسسته‌ی روش گرادیان^۴ یا تندترین کاهش^۵، با شروع از حدس اولیه‌ی c° و محاسبه‌ی دنباله‌ی $\{c^n\}_n$ ، استفاده می‌کنیم که در بخش بعد، شرح مختصری از آن را آورده‌ایم [۲۷].

۲.۳ روش حداکثر کاهش

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید E در Z ، مشتق‌پذیر باشد. گرادیان E که با $\text{grad} E(p)$ ، نمایش داده می‌شود، در Z یکتاست و در

$$\langle \text{grad} E(z), t \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \circ} \frac{1}{\lambda} [E(z + \lambda t) - E(z)], \quad \forall t \in Z, \quad (20.3)$$

صدق می‌کند [۲۷].

^۴Gradient Method

^۵Steepest Descent Method

(۲۰.۳) را می‌توان به صورت

$$E(z + \delta z) = E(z) + \langle \text{grad} E(z), \delta z \rangle + o(\|\delta z\|), \quad \forall \delta z \in Z. \quad (21.3)$$

نوشت. فرض کنید مساله‌ی زیر، جوابی یکتا داشته باشد،

$$\min_{z \in Z} E(z)$$

نقطه‌ی z ، نقطه‌ی $z + \delta z$ را به گونه‌ای ساخت که، $\delta z = -\rho \text{grad} E(z)$ ، $\rho > 0$ را در (۲۱.۳)، قرار می‌دهیم لذا،

$$E(z + \delta z) = E(z) - \|\text{grad} E(z)\|^2 + o(\rho \|\text{grad} E(z)\|). \quad (22.3)$$

جمله‌ی دوم در سمت راست، مقداری منفی است و جمله‌ی سوم می‌تواند خیلی کوچک باشد. بنابراین، می‌توان از نقطه‌ی z ، نقطه‌ی $z + \delta z$ را به گونه‌ای ساخت که،

$$E(z + \delta z) < E(z).$$

الگوریتم ۲.۲.۳. الگوریتم روش حداکثر کاهش با میزان گام ثابت

۱. z^0, ρ, M و ε را به دلخواه، انتخاب کنید.

برای $m = 0, 1, \dots, M$:

۲. قرار دهید $h^m = -\text{grad} E(z^m)$.

۳. عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\rho^m = \arg_{\rho > 0} \min E(z^m + \rho h^m). \quad (23.3)$$

۴. قرار دهید $z^{m+1} = z^m + \rho^m h^m$.

۵. اگر $\|\text{grad} E(z^m)\| < \varepsilon$ باشد توقف کنید؛ در غیر این صورت، به گام ۲ برگردید.

اما به طور کلی، محاسبه‌ی دقیق ρ^m با رابطه‌ی (۲۳.۳)، ممکن نیست بنابراین، باید آن را تقرب بزنیم. از این رو، برای به دست آوردن نتایج منطقی‌تر، الگوریتم دیگری را ارائه می‌دهیم. فرض کنید

$$E(\rho) = E(z^m + \rho h^m) - E(z^m),$$

لذا، $E(0) = 0$ است و

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\rho}(0) &= \langle \text{grad} E(z^m), h^m \rangle \\ &= \langle \text{grad} E(z^m), -\text{grad} E(z^m) \rangle \\ &= -\|\text{grad} E(z^m)\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر E پیوسته و از پایین کران‌دار باشد، حداقل یک می‌نیم موضعی $E(\rho)$ دارد.

الگوریتم ۳.۲.۳ (الگوریتم جست‌وجوی یک‌بعدی). فرض کنید، $\frac{\partial E(\circ)}{\partial \rho} < 0$ ، $E(+\infty) = +\infty$ و به‌ازای هر ρ ، $E(\rho) \neq -\infty$ باشد.

۱. ρ را طبق فرضیات بالا اختیار کنید و قرار دهید $d = \rho > 0$.

۲. قرار دهید

$$\rho_{\frac{1}{2}} = \rho - d, \quad \rho_2 = \rho + d.$$

۳. اگر $E(\rho) > E(\rho_2)$ ، آنگاه قرار دهید $\rho = \rho + d$ و به گام ۲ بروید.

• اگر $E(\rho) > E(\rho_{\frac{1}{2}})$ ، آنگاه قرار دهید $\rho = \rho - \frac{d}{2}$ ، $d = \frac{d}{2}$ و به گام ۲ بروید؛ در غیر این صورت، به گام ۴ بروید.

۴. می‌نیم سهمی گذرنده از سه نقطه‌ی $\{(\rho_{\frac{1}{2}}, E(\rho_{\frac{1}{2}})), (\rho, E(\rho)), (\rho_2, E(\rho_2))\}$ را محاسبه کنید؛ یعنی قرار دهید

$$\rho = \rho + \frac{1}{2}(\rho - \rho_{\frac{1}{2}}) \frac{E(\rho_{\frac{1}{2}}) - E(\rho_2)}{E(\rho_{\frac{1}{2}}) + E(\rho_2) - 2E(\rho)}. \quad (24.3)$$

۵. اگر دقت بیشتری موردنیاز باشد، با جایگذاری $d = \frac{d}{2}$ به گام ۲ برگردید.

بنابراین، الگوریتم روش حداکثر کاهش برای (۱۵.۳)، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

۱. جواب p^n مساله‌ی پیشرو (۳.۳) را با $c = c^n$ ، محاسبه کنید.

۲. جواب λ^n مساله‌ی الحاقی را محاسبه کنید.

۳. سرعت را با فرمول زیر به‌روز کنید:

$$c^{n+1}(x) = c^n(x) - \alpha^n \frac{2}{(c^n(x))^3} \int_0^T \frac{\partial \lambda^n(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p^n(x, t)}{\partial t} dt, \quad (25.3)$$

طول گام α^n ، با الگوریتم جست‌وجوی یک‌بعدی ذکرشده، محاسبه می‌شود.

۳.۳ فرمول‌بندی روش اجزای محدود

در این بخش، روش اجزای محدود را برای (۱۵.۳)، فرمول‌بندی خواهیم کرد. می‌خواهیم جواب‌های تقریبی $p_h(x, t)$ و $\lambda_h(x, t)$ را به‌ترتیب، برای $p(x, t)$ در معادله‌ی حالت (۳.۳) و $\lambda(x, t)$ در معادله‌ی الحاقی (۱۹.۳)، برای t ثابت، به‌دست آوریم.

با گسسته‌سازی فضا و زمان، مطابق با فصل ۱، روش اجزای محدود برای (۱۵.۳)، به‌شکل یافتن $p_h \in W_h^p$ ، $\lambda_h \in W_h^\lambda$ و $c_h \in V_h$ به‌گونه‌ای است که،

$$L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\bar{\lambda}, \bar{p}, \bar{c}) = 0, \quad \forall \bar{c} \in V_h, \bar{\lambda} \in W_h^\lambda, \bar{p} \in W_h^p. \quad (۲۶.۳)$$

به‌عبارت دیگر، روش اجزای محدود برای معادله‌ی حالت (۳.۳) و معادله‌ی الحاقی حالت (۱۹.۳)، به‌ترتیب، به‌صورت

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{c^\gamma} p_{h,tt}, \varphi \right\rangle + \langle \nabla p, \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in V_h, \\ p_h(\circ) &= p_h(\cdot, \circ) = 0, \quad p_{h,t}(\circ) = 0. \end{aligned} \quad (۲۷.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{c^\gamma} \lambda_{h,tt}, \varphi \right\rangle + \langle \nabla \lambda, \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in V_h, \\ \lambda_h(\circ) &= \lambda_h(\cdot, \circ) = 0, \quad \lambda_{h,t}(\circ) = 0. \end{aligned} \quad (۲۸.۳)$$

است. فرض کنید p^k و λ^k به‌ترتیب، تقریبی برای $p(\cdot, t)$ و $\lambda(\cdot, t)$ در زمان $t = t_k$ باشند. با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه دوم نسبت به زمان و جایگذاری

$$\phi = \phi_j, \quad p_h^k(x, t) = \sum_{i=1}^n p_i^k(t) \phi_i(x), \quad \lambda_h^k(x, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k(t) \phi_i(x),$$

در (۲۷.۳) و (۲۸.۳)، دستگاه معادلات خطی

$$M(\mathbf{p}^{k+1} - \gamma \mathbf{p}^k + \mathbf{p}^{k-1}) = \tau^\gamma F^k - \tau^\gamma K \mathbf{p}^k, \quad (۲۹.۳)$$

$$M(\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \gamma \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\lambda}^{k-1}) = -\tau^\gamma F^k - \tau^\gamma K \boldsymbol{\lambda}^k, \quad (۳۰.۳)$$

به‌دست می‌آید که در آن، $M = (M_{i,j}) = (\frac{1}{c^\gamma} \phi_i, \phi_j)$ ماتریس جرم، $K = (K_{i,j}) = (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j)$ ماتریس سختی، $F = (F_j) = (f, \phi_j)$ و $S = (S_j) = (p - \tilde{p}, \phi_j)$ بردارهای بار^۶، $k = 1, 2, \dots$ سطح زمانی و $\mathbf{p}$

^۶Load Vector

و λ به ترتیب، قسمت‌های مجهول فرمول‌های گسسته p و λ می‌باشند. برای به دست آوردن شکلی صریح‌تر برای (۲۹.۳) و (۳۰.۳)، ماتریس M را با ماتریس فشرده M^L ، تقریب می‌زنیم ([۱۶] را ببینید). M^L ، ماتریسی قطری است که قطرهای آن مجموع‌های سطری ماتریس M می‌باشد. با ضرب (۲۹.۳) و (۳۰.۳) در $(M^L)^{-1}$ ، به شکل بهتری برای این عبارات می‌رسیم،

$$\mathbf{p}^{k+1} = \tau^2 (M^L)^{-1} F^k + \mathbf{p}^k - \tau^2 (M^L)^{-1} K \mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}, \quad (31.3)$$

$$\lambda^{k+1} = -\tau^2 (M^L)^{-1} F^k + \lambda^k - \tau^2 (M^L)^{-1} K \lambda^k - \lambda^{k-1}. \quad (32.3)$$

شکل گسسته (۱۸.۳) نیز، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\circ = \frac{\partial L}{\partial c}(\lambda_h, p_h, c_h)(\bar{c}) = \frac{2}{c_h^3} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} \bar{c} \, dx dt, \quad \forall \bar{c} \in V_h.$$

۴.۳ روش بهینه‌سازی نیوتون

روش نیوتون، ویژگی‌های بسیار خوبی دارد از جمله این‌که، بسیار سریع است، حداقل یک‌بار به می‌نیم، نزدیک می‌شود و با اصلاحات ساده می‌تواند به روشی نزولی تبدیل شود که به جای نقطه‌ی بحرانی کلی، می‌نیم را محاسبه کند. اما این روش، اشکالاتی نیز دارد. مهم‌ترین آن‌ها اینست که همه‌ی مشتقات جزئی مرتبه دوم، لازم است و از نظر محاسباتی، ممکن است دشوار باشد. همچنین، حل‌کننده‌های استاندارد به $O(n^3)$ عملیات برای محاسبه‌ی

$$H(x_k)h_k = -\nabla f(x_k) \quad (33.3)$$

نیاز دارد که می‌تواند وقت‌گیر باشد. از سویی ماتریس هسیان $H^{\wedge}$ ، باید ذخیره شود و به $O(n^2)$ حافظه نیاز دارد. روش گرادیان مزدوج بر این مشکل بزرگ، غلبه می‌کند، اما باز هم مشکلی وجود دارد. روش نیوتون به طور مربعی هم‌گراست در صورتی که، روش گرادیان مزدوج، به طور کلی، این گونه نیست.

در این جا، به گروه دیگری از روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی نامحدود، موسوم به روش‌های شبه‌نیوتون^۹ می‌پردازیم. این روش، مانند روش گرادیان مزدوج، یک الگوریتم جست‌وجوی خطی دنباله‌ای، روی توابع هدف درجه دوم و غیرمربعی هموار، دارد. در واقع، این روش‌ها، تنوعی از روش‌های نیوتون است که خواص خوب هم‌گرایی روش نیوتون را حفظ می‌کند ولی به محاسبات سخت ماتریس هسیان و حل‌های خطی، نیاز ندارد.

^۷Lumped Matrix

^۸Hessian

^۹Quasi-Newton

۱.۴.۳ روش‌های شبه‌نیوتون

روش‌های شبه‌نیوتون، الگوریتمی تکراری دارند و به‌طور کلی، فقط شامل محاسبه‌ی f و ∇f ، در هر تکرار هستند. درواقع، تنها چیزی که روش‌های شبه‌نیوتون را از یک‌دیگر مجزا می‌کند، چگونگی انتخاب جهت است. در k -امین مرحله‌ی الگوریتم، ماتریس معلوم H_k را محاسبه می‌کنیم؛ این محاسبات بسیار ساده و سریع است. فرض می‌کنیم H_k تقریبی برای $H^{-1}(x_k)$ (معکوس هسیان f در تکرار کنونی) باشد، اگرچه، در برخی از این روش‌ها، خود ماتریس هسیان را تقریب می‌زنند. با وجود تقریب H^{-1} ، دیگر به حل دستگاه خطی (۳۳.۳)، نیاز نداریم، و در عوض، به دنبال پیدا کردن جهت

$$h_k = -H \nabla f(x_k), \quad (34.3)$$

هستیم.

الگوریتم ۱.۴.۳. شکل اصلی الگوریتم روش‌های شبه‌نیوتون، بسیار شبیه به روش نیوتون است.

۱. ابتدا، حدس اولیه‌ی x_0 را، در می‌نیم بسازید، قرار دهید $k = 0$ و مقدار اولیه‌ی ماتریس هسیان را $H_0 = I_{n \times n}$ (ماتریس همانی) یا هر ماتریس معین مثبت مناسب دیگر قرار دهید.

۲. $\nabla f(x_k)$ را محاسبه کنید و جهت

$$h_k = -H_k \nabla f(x_k),$$

را جست‌وجو کنید (در روش نیوتون، از فرمول (۳۳.۳) جهت را به‌دست می‌آوریم).

۳. یک جست‌وجوی خطی از x_k در جهت h_k ، انجام دهید و قرار دهید

$$x_{k+1} = x_k + t^* h_k, \quad (35.3)$$

که t^* ، $f(x_k + t^* h_k)$ را می‌نیم می‌کند (در روش نیوتون، همیشه قرار می‌دهیم $t^* = 1$).

۴. h_{k+1} را با اصلاح h_k ، محاسبه کنید. این کار معمولاً با فرمول

$$H_{k+1} = H_k + U_k, \quad (36.3)$$

انجام می‌شود. قرار دهید $k = k + 1$ و به گام ۲ بروید.

فرض کنید می‌خواهیم می‌نیم تابع f را به‌دست آوریم، $g = \nabla f$ و H ماتریس هسیان f باشد. تعریف

می‌کنیم

$$s_k = c^{k+1} - c^k, \quad y_k = g_{k+1} - g_k. \quad (37.3)$$

روش‌های شبه‌نیوتون به تفکیک انتخاب U_k در گام ۴ الگوریتم، نام‌گذاری می‌شوند. در این پایان‌نامه، از روش شبه‌نیوتون BFGS^{۱۰} استفاده می‌کنیم. U_k در این روش، با فرمول

$$H_{k+1} = H_k + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k} \left[\frac{y_k^T H_k y_k}{y_k^T s_k} + 1 \right] - \frac{1}{y_k^T s_k} [s_k y_k^T H_k + H_k y_k s_k^T], \quad (38.3)$$

تعیین می‌شود.

۵.۳ بهینه‌سازی روش شبه‌نیوتون با ذخیره‌ی محدود

برای حل مساله‌ی (۱۵.۳)، روش BFGS را به‌کار می‌بریم. در این روش، دنباله‌ی $\{c_h^k\}_{k=0}^{\infty}$ از تقریب‌های c_h با مقادیر گره‌ای c^k را محاسبه می‌کنیم

$$c^{k+1} = c^k - \alpha^k H_k g_k. \quad (39.3)$$

در (۳۹.۳)، طول گام α^k توسط الگوریتم جست‌وجوی یک‌بعدی، که در بخش‌های قبل شرح داده شد، به‌دست می‌آید، ماتریس H_k با فرمول به‌روز رسانی BFGS ماتریس هسیان، محاسبه می‌شود [۲۰]،

$$H_{k+1} = (I - \rho s_k y_k^T) H_k (I - \rho y_k s_k^T) + \rho s_k s_k^T, \quad \rho = \frac{1}{(y_k^T s_k)}. \quad (40.3)$$

و g_k به‌صورت

$$g_k(x) = \nabla L(\lambda_h^k, p_h^k, c^k) = \frac{2}{(c^k(x))^3} \int_0^T \frac{\partial \lambda_h^k(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p_h^k(x, t)}{\partial t} dt, \quad (41.3)$$

است که در آن، λ_h^k و p_h^k به‌ترتیب، جواب‌های گسسته‌ی (۳.۳) و (۱۹.۳) هستند.

حال فرمول به‌روز رسانی BFGS ویژه را برای ماتریس هسیان با ذخیره‌سازی محدود، معرفی می‌کنیم. در این فرمول، فقط تعدادی متناهی از اصلاح^{۱۱} m ، ذخیره می‌شود. در این روش، برای $0 \leq i \leq k+1-m$ ، قرا می‌دهیم:

$$v_i = I, \quad \rho_i s_i s_i^T = 0. \quad (42.3)$$

^{۱۰} Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno

^{۱۱} Correction

برای مثال، فرض کنید،

$$H_0 = I, \quad \rho_i = \frac{1}{y_i^T s_i}, \quad v_i = (I - \rho_i y_i s_i^T), \quad (43.3)$$

باشد، ۳ تکرار را اجرا کرده باشیم و بخواهیم $m = 2$ اصلاح، ذخیره شود. BFGS معمولی به صورت

$$H_1 = v_0^T H_0 v_0 + \rho_0 s_0 s_0^T,$$

و

$$\begin{aligned} H_2 &= v_1^T H_1 v_1 + \rho_1 s_1 s_1^T \\ &= v_1^T (v_0^T H_0 v_0 + \rho_0 s_0 s_0^T) v_1 + \rho_1 s_1 s_1^T \\ &= v_1^T v_0^T H_0 v_0 v_1 + v_1^T \rho_0 s_0 s_0^T v_1 + \rho_1 s_1 s_1^T. \end{aligned}$$

نوشته می‌شوند. در BFGS ویژه با $m = 2$ درستی داریم

$$\bar{H}_2 = v_1^T H_0 v_1 + \rho_1 s_1 s_1^T.$$

به عبارت دیگر، قرار می‌دهیم،

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{1+1-2} = I, \\ \rho_0 s_0 s_0^T &= \rho_1 s_1 s_1^T = 0. \end{aligned}$$

و بنابراین،

$$\bar{H}_3 = v_2^T v_1^T H_0 v_1 v_2 + v_2^T \rho_1 s_1 s_1^T v_2 + \rho_2 s_2 s_2^T,$$

است.

در حالت کلی، اگر $k+1 \leq m$ باشد، از فرمول به روز رسانی BFGS معمولی

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= v_k^T v_{k-1}^T \cdots v_0^T H_0 v_0 \cdots v_{k-1} v_k \\ &\quad + v_k^T \cdots v_1^T \rho_0 s_0 s_0^T v_1 \cdots v_k \\ &\quad \vdots \\ &\quad + v_k^T v_{k-1}^T \rho_{k-2} s_{k-2} s_{k-2}^T v_{k-1} v_k \end{aligned} \quad (44.3)$$

$$+ v_k^T \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^T v_k \\ + \rho_k s_k s_k^T,$$

و اگر $m \geq K + 1$ باشد، از به‌روز رسانی BFGS ویژه‌ی

$$H_{k+1} = v_k^T v_{k-1}^T \cdots v_{k-m+1}^T H_{k-m+1} v_{k-m+1} \cdots v_{k-1} v_k \\ + v_k^T \cdots v_{k-m+2}^T \rho_{k-m+1} s_{k-m+1} s_{k-m+1}^T v_{k-m+2} \cdots v_k \\ \vdots \\ + v_k^T \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^T v_k \\ + \rho_k s_k s_k^T, \quad (45.3)$$

استفاده می‌کنیم.

دقت کنید که به‌جای محاسبه‌ی مستقیم ماتریس H_k در (39.3)، حاصل ضرب $H_{k+1} g_k$ را با رابطه‌ی (40.3)، محاسبه می‌کنیم

$$H_{k+1} g_k = ((I - \rho s y^k) H_k (I - \rho y s^T) + \rho s s^T) g_k \\ = (I - \rho s y^k) H_k (g_k - \rho y s^T g_k) + \rho s s^T g_k \quad (46.3)$$

(46.3)، شامل حاصل ضرب اسکالر بردارها و $H_k g_k$ است که $H_k g_k$ را مشابه $H_{k+1} g_k$ به‌دست می‌آوریم. روش گرادیان، حالتی خاص از روش شبه‌نیوتون با $m = 0$ ، است.

۶.۳ تخمین خطای پسین برای لاگرانژ

در این بخش، تخمین خطای پسین را برای لاگرانژ، اثبات می‌کنیم. این‌کار را با نوشتن معادله‌ای برای خطای e در لاگرانژ، شروع می‌کنیم،

$$e = L(\lambda, p, c) - L(\lambda_h, p_h, c_h) \\ = \frac{1}{\varphi} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda, p, c) - \frac{1}{\varphi} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda_h, p_h, c_h) \\ - \frac{1}{\varphi} \int_0^1 L''(\lambda_h, p_h, c_h)((\lambda_h, p_h, c_h) + s(\lambda - \lambda_h, p - p_h, c - c_h)) ds \\ = \frac{1}{\varphi} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda - \lambda_h, p - p_h, c - c_h) + R, \quad (47.3)$$

R در (۴۷.۳)، یک جمله‌ی مرتبه دوم کوچک و ناچیز را نشان می‌دهد. برای جزئیات بیشتر، به [۸] مراجعه کنید. قرار می‌دهیم

$$\lambda - \lambda_h = \lambda - \lambda_h^I + \lambda_h^I - \lambda_h,$$

$$p - p_h = p - p_h^I + p_h^I - p_h,$$

$$c - c_h = c - c_h^I + c_h^I - c_h.$$

$(\lambda_h^I, p_h^I, c_h^I)$ درونی‌یابی برای $(\lambda, p, c) \in W_h^\lambda \times W_h^p \times V_h$ است. با نادیده گرفتن R در (۴۷.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} e &\approx \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda - \lambda_h^I, p - p_h^I, c - c_h^I) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda_h^I - \lambda_h, p_h^I - p_h, c_h^I - c_h), \end{aligned} \quad (48.3)$$

از سویی چون $\lambda_h^I - \lambda_h \in W_h^\lambda$ ، $p_h^I - p_h \in W_h^p$ و $\lambda_h^I - \lambda_h$ است بنابراین، بنابه (۱۵.۳)،

$$L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda_h^I - \lambda_h, p_h^I - p_h, c_h^I - c_h) = 0,$$

می‌باشد. از این‌رو، (۴۸.۳) به صورت

$$\begin{aligned} e &\approx \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} L'(\lambda_h, p_h, c_h)(\lambda - \lambda_h^I, p - p_h^I, c - c_h^I) \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} (I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \quad (49.3)$$

نوشته می‌شود که در آن،

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{1}{c_h^I} \frac{\partial(\lambda - \lambda_h^I)}{\partial t} \frac{\partial p_h}{\partial t} + \nabla(\lambda - \lambda_h^I) \nabla p_h - f(\lambda - \lambda_h^I) \right) dx dt, \quad (50.3)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \int_\Omega (p_h - \tilde{p})(p - p_h^I) \delta_{obs} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{1}{c_h^I} \frac{\partial(p - p_h^I)}{\partial t} \frac{\partial \lambda_h}{\partial t} + \nabla \lambda_h \nabla (p - p_h^I) \right) dx dt, \end{aligned} \quad (51.3)$$

و

$$I_3 = \frac{2}{c_h^3} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} (c - c_h^I) dx dt, \quad (52.3)$$

است. حال به محاسبه‌ی I_1 می‌پردازیم. با انتگرال‌گیری جزیه‌جزی برای جمله‌ی اول و دوم (۵۰.۳)، داریم

$$\begin{aligned} |I_1| = & \left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{c_h^3} (\lambda - \lambda_h^I) \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} dx dt \right. \\ & - \sum_k \int_{\Omega} \frac{1}{c_h^3} \left[\frac{\partial p_h}{\partial t}(t_k) \right] (\lambda - \lambda_h^I)(t_k) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta p_h (\lambda - \lambda_h^I) dx dt \\ & \left. + \sum_K \int_0^T \int_{\partial K} \frac{\partial p_h}{\partial n_k} (\lambda - \lambda_h^I) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f (\lambda - \lambda_h^I) dx dt \right|. \end{aligned} \quad (53.3)$$

عبارت $\frac{\partial p_h}{\partial n_k}$ ، مشتق p_h در جهت نرمال خارجی n_k ، مرز عنصر K یعنی ∂K و $\left[\frac{\partial p_h}{\partial t} \right]$ ، پرش مشتق p_h در زمان است. در مجموع دوم (۵۳.۳)، مجموع روی مرزهای عناصر، گرفته می‌شود، هر سمت داخلی $S \in V_h$ ، دو بار اتفاق می‌افتد و مشتق تابع p_h در یکی از جهت‌های نرمال S را با $\partial_s p_h$ نشان می‌دهیم. لذا،

$$\sum_K \int_{\partial K} \frac{\partial p_h}{\partial n_k} (\lambda - \lambda_h^I) ds = \sum_S \int_S [\partial_s p_h] (\lambda - \lambda_h^I) ds, \quad (54.3)$$

که در آن $[\partial_s p_h]$ ، پرش در مشتق $\partial_s p_h$ محاسبه شده از دو مثلی است که در S ، اشتراک دارند. هر پرش را برای دو مثلث دارای اشتراک، توزیع می‌کنیم،

$$\sum_S \int_S [\partial_s p_h] (\lambda - \lambda_h^I) ds = \sum_K \frac{1}{2} h_K^{-1} \int_{\partial K} [\partial_s p_h] (\lambda - \lambda_h^I) h_K ds. \quad (55.3)$$

قرار می‌دهیم $dx = h_K ds$ بنابراین،

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \frac{1}{2} h_K^{-1} \int_{\partial K} [\partial_s p_h] (\lambda - \lambda_h^I) h_K ds \right| & \leq C \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} \sum_K \int_{\partial K} |[\partial_s p_h]| |\lambda - \lambda_h^I| dx \\ & = C \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} \int_{\Omega} |[\partial_s p_h]| |\lambda - \lambda_h^I| dx. \end{aligned} \quad (56.3)$$

و

$$[\partial_s p_h]|_K = \max_{S \subset \partial K} [\partial_s p_h]|_S.$$

با روندی مشابه می‌توان جمله‌ی دوم (۵۳.۳) را به‌صورت

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \int_{\Omega} \frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \left[\frac{\partial p_h}{\partial t}(t_k) \right] (\lambda - \lambda_h^I)(t_k) dx \right| &\leq \sum_k \int_{\Omega} \frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \tau^{-1} \cdot \left| \left[\frac{\partial p_h}{\partial t}(t_k) \right] \right| \cdot |(\lambda - \lambda_h^I)(t_k)| \tau dx \\ &\leq C \sum_k \int_{J_k} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \tau^{-1} \cdot \left| [\partial p_{h_{t_k}}] \right| \cdot |(\lambda - \lambda_h^I)| dx dt \\ &= C \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \tau^{-1} \cdot \left| [\partial p_{h_t}] \right| \cdot |(\lambda - \lambda_h^I)| dx dt, \end{aligned} \quad (57.3)$$

تخمین زد که در آن،

$$[\partial p_{h_{t_k}}] = \max_k \left(\left[\frac{\partial p_h}{\partial t}(t_k) \right], \left[\frac{\partial p_h}{\partial t}(t_{k+1}) \right] \right), \quad [\partial p_{h_t}] = [\partial p_{h_{t_k}}]_{|J_k}. \quad (58.3)$$

با جایگذاری (۵۶.۳) و (۵۷.۳) در (۵۳.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \frac{\partial^{\gamma} p_h}{\partial t^{\gamma}} - \Delta p_h - f \right) (\lambda - \lambda_h^I) dx dt \right| \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| |\lambda - \lambda_h^I| dx dt \\ &\quad + \frac{C}{c_h^{\gamma}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-1} \cdot \left| [\partial p_{h_t}] \right| \cdot |(\lambda - \lambda_h^I)| dx dt. \end{aligned} \quad (59.3)$$

از طرفی،

$$|\lambda - \lambda_h^I| \leq C \tau^{\gamma} \left| \frac{\partial^{\gamma} \lambda}{\partial t^{\gamma}} \right| + h^{\gamma} |D_x^{\gamma} \lambda|,$$

پس،

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\lambda}{c_h^{\gamma}} \frac{\partial^{\gamma} p_h}{\partial t^{\gamma}} - \Delta p_h - f \right| \left(\tau^{\gamma} \left| \frac{\partial^{\gamma} \lambda}{\partial t^{\gamma}} \right| + h^{\gamma} |D_x^{\gamma} \lambda| \right) dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| \left(\tau^{\gamma} \left| \frac{\partial^{\gamma} \lambda}{\partial t^{\gamma}} \right| + h^{\gamma} |D_x^{\gamma} \lambda| \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{c_h^{\gamma}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-1} \cdot \left| [\partial p_{h_t}] \right| \cdot \left(\tau^{\gamma} \left| \frac{\partial^{\gamma} \lambda}{\partial t^{\gamma}} \right| + h^{\gamma} |D_x^{\gamma} \lambda| \right) dx dt. \end{aligned} \quad (60.3)$$

چون p_h ، قطعه‌وار خطی پیوسته است در نتیجه،

$$\frac{\partial^{\mathfrak{V}} p_h}{\partial t^{\mathfrak{V}}} = \Delta p_h = 0,$$

برقرار است. و با تخمین‌های

$$\frac{\partial^{\mathfrak{V}} \lambda}{\partial t^{\mathfrak{V}}} \approx \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial t} \right]}{\tau}, \quad D_x^{\mathfrak{V}} \lambda \approx \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial n} \right]}{h}, \quad (61.3)$$

داریم:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} |f| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-1} \cdot |[\partial p_{h_t}]| \cdot \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt. \end{aligned} \quad (62.3)$$

به‌طور مشابه، I_2 را به‌شکل زیر تخمین می‌زنیم

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left| \left(-\frac{1}{c_h^{\mathfrak{V}}} \frac{\partial^{\mathfrak{V}} \lambda_h}{\partial t^{\mathfrak{V}}} (p - p_h^I) - \Delta \lambda_h (p - p_h^I) - (p_h - \tilde{p})(p - p_h^I) \right) \right| dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| |p - p_h^I| dx dt \\ &\quad + \frac{C}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-1} \cdot |[\partial p_{h_t}]| \cdot |p - p_h^I| dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} \left| \left(-\frac{1}{c_h^{\mathfrak{V}}} \frac{\partial^{\mathfrak{V}} \lambda_h}{\partial t^{\mathfrak{V}}} - \Delta \lambda_h - (p_h - \tilde{p}) \right) \right| |p - p_h^I| dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| |p - p_h^I| dx dt \\ &\quad + \frac{C}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-1} \cdot |[\partial p_{h_t}]| \cdot |p - p_h^I| dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} \left| \left(-\frac{1}{c_h^{\mathfrak{V}}} \frac{\partial^{\mathfrak{V}} \lambda_h}{\partial t^{\mathfrak{V}}} - \Delta \lambda_h - (p_h - \tilde{p}) \right) \right| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\partial^{\mathfrak{V}} p}{\partial t^{\mathfrak{V}}} \right| + h^{\mathfrak{V}} |D_x^{\mathfrak{V}} p| \right) dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-1} |[\partial_s p_h]| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\partial^{\mathfrak{V}} p}{\partial t^{\mathfrak{V}}} \right| + h^{\mathfrak{V}} |D_x^{\mathfrak{V}} p| \right) dx dt \end{aligned} \quad (63.3)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-\mathfrak{V}} \cdot |[\partial p_{h_t}]| \cdot \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\partial^{\mathfrak{V}} p}{\partial t^{\mathfrak{V}}} \right| + h^{\mathfrak{V}} |D_x^{\mathfrak{V}} p| \right) dx dt \\
 & \leq C \int_0^T \int_{\Omega} \left| \left(-\frac{\mathfrak{V}}{c_h^{\mathfrak{V}}} \frac{\partial^{\mathfrak{V}} \lambda_h}{\partial t^{\mathfrak{V}}} - \Delta \lambda_h - (p_h - \tilde{p}) \right) \right| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt \\
 & + C \int_0^T \int_{\Omega} \max_{S \subset \partial K} h_K^{-\mathfrak{V}} |[\partial_s p_h]| \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt \\
 & + \frac{C}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \tau^{-\mathfrak{V}} \cdot |[\partial p_{h_t}]| \cdot \left(\tau^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial t} \right]}{\tau} \right| + h^{\mathfrak{V}} \left| \frac{\left[\frac{\partial p_h}{\partial n} \right]}{h} \right| \right) dx dt.
 \end{aligned}$$

برای تخمین خطای I_3 ، تخمین تقریب استاندارد

$$c - c_h^I \approx h D_x c, \quad (64.3)$$

را به کار می‌بریم. در نتیجه،

$$\begin{aligned}
 |I_3| & \leq \frac{\mathfrak{V}}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} \right| \cdot h \cdot |D_x c| dx dt \\
 & \leq \frac{\mathfrak{V}}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} \right| \cdot h \cdot \left| \frac{[c_h]}{h} \right| dx dt \\
 & \leq \frac{\mathfrak{V}}{c_h^{\mathfrak{V}}} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} \right| \cdot |[c_h]| dx dt
 \end{aligned} \quad (65.3)$$

با تعریف مانده‌ها به صورت

$$\begin{aligned}
 R_{p_{\mathfrak{V}}} &= |f|, \quad R_{p_{\mathfrak{T}}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}} \max_{S \subset \partial K} h_k^{-\mathfrak{V}} |[\partial_s p_h]|, \quad R_{p_{\mathfrak{T}}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V} c_h^{\mathfrak{V}}} \tau^{-\mathfrak{V}} |[\partial p_{h_t}]|, \\
 R_{\lambda_{\mathfrak{V}}} &= |(p_h - \tilde{p})|, \quad R_{\lambda_{\mathfrak{T}}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}} \max_{S \subset \partial K} h_k^{-\mathfrak{V}} |[\partial_s \lambda_h]|, \quad R_{\lambda_{\mathfrak{T}}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V} c_h^{\mathfrak{V}}} \tau^{-\mathfrak{V}} |[\partial \lambda_{h_t}]|, \\
 R_c &= \frac{\mathfrak{V}}{c_h^{\mathfrak{V}}} \left| \frac{\partial p_h(x, t)}{\partial t} \right| \left| \frac{\partial \lambda_h(x, t)}{\partial t} \right|,
 \end{aligned}$$

و خطاهای درونیابی به شکل

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda &= C\tau \left| \left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial t} \right] \right| + Ch \left| \left[\frac{\partial \lambda_h}{\partial n} \right] \right|, \\ \sigma_p &= C\tau \left| \left[\frac{\partial p_h}{\partial t} \right] \right| + Ch \left| \left[\frac{\partial p_h}{\partial n} \right] \right|, \\ \sigma_c &= C|[c_h]|,\end{aligned}$$

تخمین خطای پسین را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|e| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_0^T \int_\Omega R_{p_l} \sigma_\lambda dx dt + \int_0^T \int_\Omega R_{p_r} \sigma_\lambda dx dt + \int_0^T \int_\Omega R_{p_r} \sigma_\lambda dx dt \right. \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega R_{\lambda_l} \sigma_p dx dt + \int_0^T \int_\Omega R_{\lambda_r} \sigma_p dx dt + \int_0^T \int_\Omega R_{\lambda_r} \sigma_p dx dt \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_\Omega R_c \sigma_c dx dt \right). \quad (66.3)\end{aligned}$$

۷.۳ الگوریتم تطبیقی

الگوریتم ۱۰.۷.۳. الگوریتم تطبیقی این روش، به صورت زیر است:

۱. مش اولیه K_h و افراز زمانی J_k برای بازه‌ی زمانی $(0, T)$ را در نظر بگیرید.
۲. قرار دهید $c = c^n$ و جواب p مساله‌ی پیشرو (۳.۳) را روی K_h و J_k ، به دست آورید.
۳. جواب λ را از معادله‌ی الحاقی، روی K_h و J_k ، محاسبه کنید.
۴. با استفاده از فرمول

$$c^{n+1}(x) = c^n(x) - \alpha^n \frac{2}{c^3} \int_0^T \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} dt, \quad (67.3)$$

سرعت صوت را روی K_h و J_k ، به روز کنید.

۵. برای هر عنصر، اگر $R_c \sigma_c > \text{tol}$ باشد، باید آن عنصر نظریف شود و مش جدید K_h و افراز زمانی J_k ، ایجاد شود.

۸.۳ تخمین خطای پیشین برای معادله‌ی موج

در این بخش، تخمین خطای پیشین برای تقریب معادله‌ی موج (۳۱.۳)، اثبات می‌شود. برای سادگی فرض می‌کنیم $c = 1$ و h ثابت باشد،

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = f, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (68.3)$$

$$p(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, 0) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (69.3)$$

$$p|_{\Gamma} = 0, \quad \text{on } \Gamma \times (0, T). \quad (70.3)$$

بنابراین، مساله‌ی اجزای محدود برای (۶۸.۳)، به شکل یافتن $p_h^n \in W_h^p$ برای $n = 1, 2, \dots, N$ ، به گونه‌ای است که:

$$\langle \partial_t^2 p_h^n, v \rangle + \langle \nabla p_h^n, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W_h^p, \quad (71.3)$$

و

$$\partial_t^2 p_h^n = \frac{p_h^{n+1} - 2p_h^n + p_h^{n-1}}{\tau^2}, \quad p_h^0 = p_h^1 = 0. \quad (72.3)$$

تعریف ۱۰.۸.۳ (نگاشت بیضوی). فرض کنید $w \in H_0^1(\Omega)$ و $v \in P_1(K), \forall K \in K_h$ و $V_{h,1} := \{v \in H_0^1 : v \in P_1(K), \forall K \in K_h\}$ باشد. نگاشت بیضوی πw را به صورت

$$\langle \nabla \pi w, \nabla v \rangle = \langle \nabla w, \nabla v \rangle, \quad \forall v \in V_{h,1}, \quad (73.3)$$

تعریف می‌کنیم.

می‌خواهیم تفاضل بین جواب گسسته‌ی $p_h^n \in W_h^n$ و نگاشت بیضوی $\pi p^n \in W_h^p$ را تخمین بزنیم. تعریف

می‌کنیم

$$\Theta^n = p_h^n - \pi p^n. \quad (74.3)$$

با به کار بردن تعریف (۷۳.۳) و رابطه‌ی (۷۱.۳)، داریم:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t^\gamma(\pi p^n), v \rangle + \langle \nabla(\pi p^n), \nabla v \rangle &= \langle \partial_t^\gamma(\pi p^n), v \rangle + \langle \nabla p^n, \nabla v \rangle \\
&\quad + \langle \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma}(t_n), v \rangle - \langle \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma}(t_n), v \rangle \\
&= \langle \partial_t^\gamma(\pi p^n) - \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma}(t_n), v \rangle \\
&\quad + \langle \nabla p^n, \nabla v \rangle + \langle \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma}(t_n), v \rangle \\
&= \langle \rho^n, v \rangle + \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W_h^p,
\end{aligned} \tag{۷۵.۳}$$

که،

$$\rho^n = \partial_t^\gamma(\pi p^n) - \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma}(t_n), \quad p^n = p(\cdot, t_n).$$

با کم کردن (۷۵.۳) از (۷۱.۳) و به‌کارگیری (۷۴.۳)، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\langle \partial_t^\gamma p_h^n - \partial_t^\gamma(\pi p^n), v \rangle + \langle \nabla p_h^n - \nabla(\pi p^n), \nabla v \rangle = -\langle \rho^n, v \rangle. \tag{۷۶.۳}$$

پس،

$$\langle \partial_t^\gamma(p_h^n - \pi p^n), v \rangle + \langle \nabla(p_h^n - \pi p^n), \nabla v \rangle = -\langle \rho^n, v \rangle, \tag{۷۷.۳}$$

در نتیجه،

$$\langle \partial_t^\gamma(\Theta^n), v \rangle + \langle \nabla \Theta^n, \nabla v \rangle = -\langle \rho^n, v \rangle, \quad \forall v \in W_h^n. \tag{۷۸.۳}$$

با توجه به خطای درون‌یابی استاندارد، نامساوی

$$\|\rho^n\| \leq C(\tau^\gamma \|(D_t^\gamma p)^n\| + h^\gamma \|(D_x^\gamma D_t^\gamma p)^n\|), \tag{۷۹.۳}$$

برقرار است. با انتخاب

$$v = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\tau} + \frac{\Theta^n - \Theta^{n-1}}{\tau} \right), \tag{۸۰.۳}$$

و بازنویسی $\partial_t^\gamma \Theta^n$ به‌صورت

$$\partial_t^\gamma \Theta^n = \frac{\Theta^{n+1} - 2\Theta^n + \Theta^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\tau} - \frac{\Theta^n - \Theta^{n-1}}{\tau} \right), \tag{۸۱.۳}$$

و جایگذاری در (۷۸.۳)، داریم:

$$\frac{1}{2\tau} \left\langle \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\tau} - \frac{\Theta^n - \Theta^{n-1}}{\tau}, \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\tau} + \frac{\Theta^n - \Theta^{n-1}}{\tau} \right\rangle \\ + \frac{1}{2\tau} \langle \nabla \Theta^n, \nabla(\Theta^{n+1} - \Theta^{n-1}) \rangle = \frac{1}{2\tau} \langle \rho^n, \Theta^{n+1} - \Theta^{n-1} \rangle,$$

و لذا،

$$\left(\frac{\|\Theta^{n+1} - \Theta^n\|^2}{\tau^2} - \frac{\|\Theta^n - \Theta^{n-1}\|^2}{\tau^2} \right) + \langle \nabla \Theta^n, \nabla(\Theta^{n+1} - \Theta^{n-1}) \rangle = \langle \rho^n, \Theta^{n+1} - \Theta^{n-1} \rangle. \quad (۸۲.۳)$$

با مجموع گرفتن روی n ، برای جمله‌ی اول (۸۲.۳)،

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\|\Theta^{n+1} - \Theta^n\|^2}{\tau^2} - \frac{\|\Theta^n - \Theta^{n-1}\|^2}{\tau^2} \right) = \frac{1}{\tau^2} [(\|\Theta^2 - \Theta^1\|^2 - \|\Theta^1 - \Theta^0\|^2) \\ + (\|\Theta^3 - \Theta^2\|^2 - \|\Theta^2 - \Theta^1\|^2) \\ \vdots \\ + (\|\Theta^{N-1} - \Theta^{N-2}\|^2 - \|\Theta^{N-2} - \Theta^{N-3}\|^2) \\ + (\|\Theta^N - \Theta^{N-1}\|^2 - \|\Theta^{N-1} - \Theta^{N-2}\|^2)] \\ = \frac{\|\Theta^N - \Theta^{N-1}\|^2}{\tau^2}, \quad (۸۳.۳)$$

و برای جمله‌ی دوم، عبارت

$$\sum_{n=1}^{N-1} \langle \nabla \Theta^n, \nabla(\Theta^{n+1} - \Theta^{n-1}) \rangle = \sum_{n=1}^{N-1} [\langle \nabla \Theta^n, \nabla \Theta^{n+1} \rangle - \langle \nabla \Theta^n, \nabla \Theta^{n-1} \rangle] \\ = \langle \nabla \Theta^1, \nabla \Theta^2 \rangle - \langle \nabla \Theta^1, \nabla \Theta^0 \rangle \\ + \langle \nabla \Theta^2, \nabla \Theta^3 \rangle - \langle \nabla \Theta^2, \nabla \Theta^1 \rangle + \dots \quad (۸۴.۳) \\ + \langle \nabla \Theta^{N-2}, \nabla \Theta^{N-1} \rangle - \langle \nabla \Theta^{N-2}, \nabla \Theta^{N-3} \rangle \\ + \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle - \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^{N-2} \rangle \\ = \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle,$$

به دست می‌آید. با جایگذاری (۸۳.۳) و (۸۴.۳) در (۸۲.۳)، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\|\Theta^N - \Theta^{N-1}\|^2}{\tau^2} + \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle = \sum_{n=1}^{N-1} \langle \rho^n, \Theta^{n+1} - \Theta^{n-1} \rangle. \quad (۸۵.۳)$$

از سویی،

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle &= \langle \nabla \Theta^N, \nabla \Theta^N \rangle - \langle \nabla \Theta^N, \nabla (\Theta^N - \Theta^{N-1}) \rangle + \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle \\ &= \langle \nabla \Theta^N, \nabla \Theta^N \rangle - \langle \nabla \Theta^N, \nabla (\Theta^N - \Theta^{N-1}) \rangle \\ &\geq \|\nabla \Theta^N\|^2 - \tau \left\| \frac{\nabla (\Theta^N - \Theta^{N-1})}{\tau} \right\| \cdot \|\nabla \Theta^N\| \end{aligned} \quad (۸۶.۳)$$

با توجه به اینکه،

$$\|\nabla (\Theta^N - \Theta^{N-1})\| \leq Ch^{-1} \|\Theta^N - \Theta^{N-1}\|, \quad (۸۷.۳)$$

و با فرض $\frac{c\tau}{h} \leq 1$ داریم

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle &\geq \|\nabla \Theta^N\|^2 - \frac{c\tau}{h} \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\| \cdot \|\nabla \Theta^N\|, \\ &\geq -\frac{c\tau}{h} \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\| \cdot \|\nabla \Theta^N\| \\ &\geq -\left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\| \cdot \|\nabla \Theta^N\|. \end{aligned} \quad (۸۸.۳)$$

از طرفی، از $(a-b)^2 \geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم،

$$-ab \geq -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}. \quad (۸۹.۳)$$

بنابراین،

$$\langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle \geq \frac{1}{2} \|\nabla \Theta^N\|^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\|^2. \quad (۹۰.۳)$$

در نتیجه،

$$\langle \nabla \Theta^{N-1}, \nabla \Theta^N \rangle + \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla \Theta^N\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\|^2. \quad (۹۱.۳)$$

لذا، بنا به (۸۵.۳)، به صورت

$$\|\nabla \Theta^N\|^2 + \left\| \frac{\Theta^N - \Theta^{N-1}}{\tau} \right\|^2 \leq 2\tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\langle \rho^n, \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^{n-1}}{2\tau} \right\rangle, \quad (۹۲.۳)$$

نوشته می‌شود. طبق (۷۹.۳) و تعریف ρ ، داریم

$$\sum_{n=1}^{N-1} \langle \rho^n, \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^{n-1}}{2\tau} \rangle \approx \sum_{n=1}^{N-1} (\tau^2 \| (D_t^* p)^n \|^2 + h^2 \| (D_x^* D_t^* p)^n \|^2) \partial_t \Theta, \quad (93.3)$$

(۹۳.۳) را در (۹۲.۳)، قرار می‌دهیم

$$\| \partial_t \Theta \|^2 + \| \nabla \Theta^N \|^2 \leq 2(\tau^2 \int_0^T \sum_{n=1}^{N-1} \| (D_t^* p)^n \|^2 dx + h^2 \int_0^T \sum_{n=1}^{N-1} \| (D_x^* D_t^* p)^n \|^2 dt \cdot \max_n \| \partial_t \Theta^n \|. \quad (94.3)$$

بنابراین، تخمین خطای پیشین زیر را برای Θ ، به‌دست می‌آوریم،

$$\max_n \left(\left\| \frac{\partial \Theta^n}{\partial t} \right\| + \| \nabla \Theta^n \|^2 \right) \leq C(\tau^2 + h^2). \quad (95.3)$$

در نتیجه،

$$\max_n (\| \partial_t (p - \pi p)^n \| + \| \nabla (p - \pi p)^n \|) \leq C_1(\tau + h), \quad (96.3)$$

و از این‌رو، با انتگرال گرفتن از عبارت بالا،

$$\max_n (\| (p - p_h)^n \| + \| \nabla (p - p_h)^n \|) \leq C_1(\tau + h), \quad (97.3)$$

حاصل می‌شود.

فصل ۴

نتایج عددی

در این فصل، ابتدا روش ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی را شرح می‌دهیم، سپس مثال‌های عددی را در دو و سه بعد، ارایه می‌دهیم. این مثال‌ها را با نرم‌افزار PETSc اجرا کرده و در پایان، نتایج را بیان می‌کنیم.

۱.۴ روش ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی

در بسیاری از کاربردهای معادله‌ی موج، فقط بخش کوچکی از دامنه‌ی محاسباتی Ω ، پیچیده است و به گسسته‌سازی پیچیده، نیاز دارد درحالی‌که، ناحیه‌ی بزرگی از دامنه‌ی محاسباتی، با شبکه‌ی دکارتی ساده، گسسته می‌شود. دامنه Ω در مدل ذکر شده، به دو ناحیه‌ی Ω_{FEM} و Ω_{FDM} تقسیم می‌شود. در Ω_{FDM} ، از شبکه‌ی دکارتی ساختاریافته استفاده می‌شود و شبکه Ω_{FEM} ، بدون ساختار در نظر گرفته می‌شود. در بخش درونی شبکه FEM، می‌توان گسسته‌سازی را بدون ساختار در نظر گرفت. برای توضیحات بیشتر، به شکل ۱.۴ مراجعه کنید.

۱.۱.۴ روش عددی

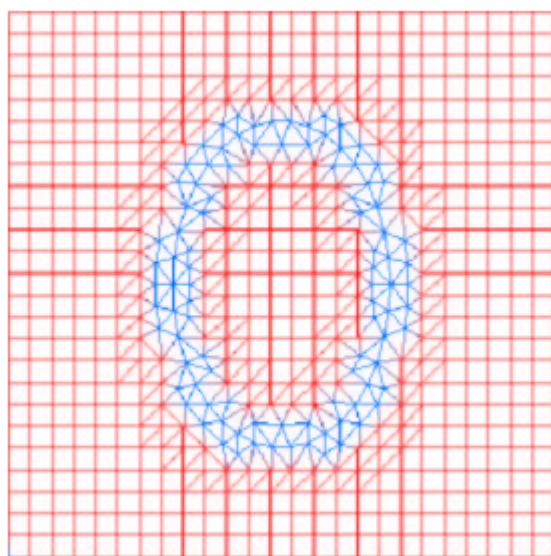
پس از گسسته‌سازی ترکیبی دامنه‌ی محاسباتی، الگوریتم ترکیبی، فرمول‌بندی می‌شود. طبق شکل ۲.۴، گره‌های درونی دامنه‌ی محاسباتی به یکی از مجموعه‌های زیر تعلق دارد:

ω_o : گره‌های درونی Ω_{FDM} و گره‌های مرزی Ω_{FEM} .

ω_x : گره‌های درونی Ω_{FEM} و گره‌های مرزی Ω_{FDM} .

ω_* : گره‌های درونی Ω_{FEM} که در Ω_{FDM} نیست.

ω_D : گره‌های درونی Ω_{FDM} که در Ω_{FEM} نیست.



شکل ۱۰۴: گسسته‌سازی دامنه Ω

شکل ۲.۴، موقعیت گره‌ها را برای دامنه دو بعدی نشان می‌دهد. برخی از گره‌ها به یک بیضی محدود شده‌اند. روی این گره‌ها، گسسته‌سازی بدون ساختار اعمال شده و برای درون و بیرون بیضی، می‌توان از گسسته‌سازی ساختاریافته، استفاده کرد. برای وضوح، گره‌های متعلق به ω_D در شکل، نشان داده نشده است. در این الگوریتم، گره‌های متعلق به $\omega_\circ$ و $\omega_\times$ را دو بار ذخیره می‌کنیم: یک‌بار، با عنوان گره‌های متعلق به Ω_{FEM} و بار دیگر با عنوان گره‌های متعلق به Ω_{FDM} .

حلقه‌ی اصلی مدل‌سازی این الگوریتم به صورت زیر، ترسیم می‌شود:

برای هر گام زمانی:

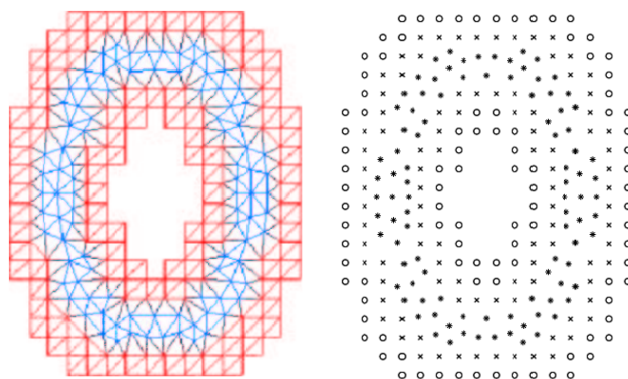
۱. جواب را در گره‌های درونی Ω_{FDM} ، به روز کنید؛ یعنی روی گره‌های $\omega_\circ$ و ω_D ، روش تفاضلات متناهی را به کار ببرید.

۲. جواب را در گره‌های درونی Ω_{FEM} ، به روز کنید؛ یعنی روی گره‌های $\omega_\times$ و ω_* ، روش اجزای محدود را به کار ببرید.

۳. مقادیر گره‌های $\omega_\times$ را از Ω_{FEM} در Ω_{FDM} ، کپی کنید.

۴. مقادیر گره‌های $\omega_\circ$ را از Ω_{FDM} در Ω_{FEM} ، کپی کنید.

فرمول‌بندی روش‌های اجزای محدود برای مساله (۳.۳)، در فصل قبل انجام شد. حال، روش تفاضلات متناهی را برای این مساله، فرمول‌بندی می‌کنیم.



شکل ۲.۴: موقعیت گره‌ها

۲.۱.۴ فرمول‌بندی روش تفاضلات متناهی

در دامنه Ω_{FDM} از تقریب تفاضلات متناهی استفاده می‌شود. با اعمال روش اجزای محدود بر شبکه‌ی دکارتی ساختاریافته، الگوی روش تفاضلات متناهی به‌دست می‌آید. پس برای مساله (۳.۳) داریم:

$$p_{i,j,k}^{l+1} = \tau^2 c^2 (F_{i,j,k}^l + \Delta p_{i,j,k}^l) + 2p_{i,j,k}^l - p_{i,j,k}^{l-1},$$

که در آن، $p_{i,j,k}^l$ جواب مساله روی تکرار زمانی l در نقطه‌ی (i, j, k) ، تابع منبع، $f_{i,j,k}^l$ تابع منبع، τ گام زمانی و $\Delta p_{i,j,k}^l$ لاپلاس گسسته است:

$$\Delta p_{i,j,k}^l = \frac{p_{i+1,j,k}^l + p_{i-1,j,k}^l + p_{i,j+1,k}^l - 6p_{i,j,k}^l + p_{i,j-1,k}^l + p_{i,j,k-1}^l + p_{i,j,k+1}^l}{h^2}$$

$h = 0.01$ ، گام مش روش تفاضلات متناهی در جهت x و y و z است.

۲.۴ مثال عددی

در این مثال‌ها، دامنه را $d = 2, 3$ ، $\Omega = [0, 1]^d$ ، در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی Ω ، به دو دامنه‌ی Ω_{FEM} و Ω_{FDM} با دو لایه گره متقاطع، تقسیم می‌شود. دامنه‌ی داخلی، $\Omega_{FEM} = [0.4, 0.6]^d$ در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی FEM، به شبکه‌ای بدون ساختار، افزاز می‌شود. این شبکه در دوبعدی، از مثلث و در سه‌بعدی از چهاروجهی تشکیل شده است. در دامنه‌ی Ω_{FDM} ، روش تفاضلات متناهی را همراه با شرایط همگن دریکله، روی شبکه‌ای ساختاریافته به‌کار می‌بریم.

در این فصل، برای همه‌ی آزمون‌های محاسباتی، گام زمانی τ را برحسب محک CFL^۱ انتخاب می‌کنیم. محک CFL، شرطی لازم برای وجود جواب روش تفاضلات متناهی، در حل عددی معادلات با مشتقات جزئی است. این محک به صورت

$$\tau \leq \frac{h}{ac}$$

تعریف می‌شود که در آن، h می‌نیم اندازه‌ی مش عناصر و a مقداری ثابت است. برای به دست آوردن بازسازی بهتر شکل شی موردنظر، نقاط مشاهده‌ی x_{obs} در Ω_{FDM} و نزدیک به دامنه‌ی Ω_{FEM} ، انتخاب می‌شود. صفحه‌ی موج

$$f(x, t) = \begin{cases} \sin(k(t - x_1) - \frac{\pi}{4}) + 1, & 0 \leq t - x_1 \leq \frac{2\pi}{k}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت,} \end{cases} \quad (1.4)$$

را که در جهت مثبت x_1 حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم.

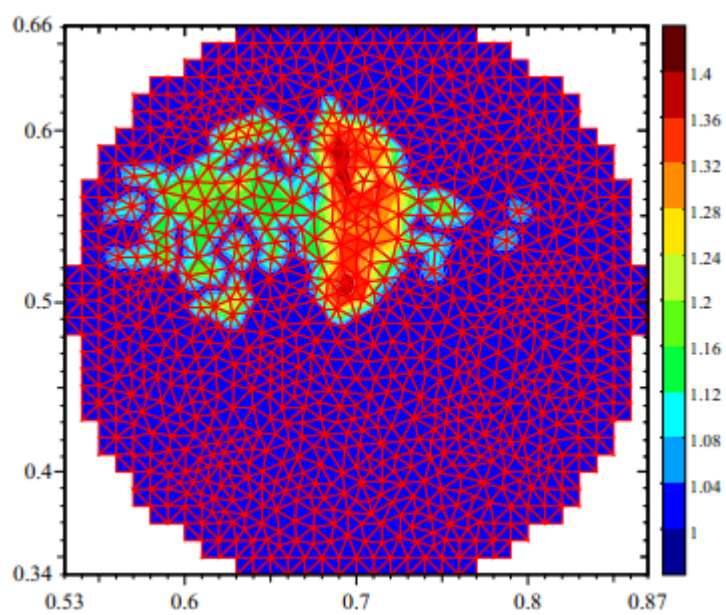
۱.۲.۴ مثال عددی دوبعدی

در این بخش، آزمایش را با یک صفحه‌ی موج و یک پراکنده‌ساز بیضوی، شرح می‌دهیم. این صفحه‌ی موج از سمت چپ مرز Ω_{FDM} آغاز می‌شود و با عبور از Ω_{FEM} در بازه‌ی زمانی $[0, t]$ ، به سمت راست مرز $x_1 = 1$ می‌رسد. مقدار اولیه‌ی پارامتر الگوریتم جست‌وجوی بهینه‌سازی یک‌بعدی را $\alpha = 0.001$ قرار می‌دهیم و ۱۱ گره را در نزدیکی مرز سمت راست Ω_{FDM} ، در $x = 0.88$ ، به عنوان نقاط مشاهده، انتخاب می‌کنیم.

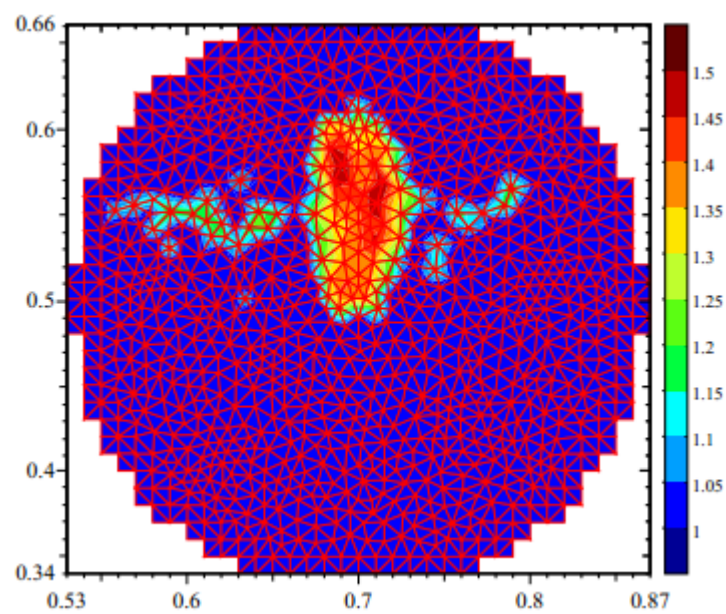
برای بازسازی شکل شی پراکنده‌ساز، به داده نیاز داریم. به همین منظور، $c = 1$ را در (۳.۳) قرار می‌دهیم و p را با رابطه‌ی (۲۹.۳) محاسبه می‌کنیم. سپس، p حاصل را در معادله‌ی الحاقی حالت (۱۹.۳) قرار می‌دهیم و λ را با فرمول (۳۰.۳) به دست می‌آوریم. p و λ به دست آمده را در رابطه‌ی (۲۵.۳) از الگوریتم ۲.۳، جایگزین می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، $R_c \sigma_c$ را برای هر عنصر افزاز، محاسبه می‌کنیم؛ با فرض $\epsilon = 0.001$ دلخواه، برای هر عنصر افزاز، عبارت $R_c \sigma_c$ را به دست می‌آوریم، اگر $R_c \sigma_c > \epsilon$ باشد، باید آن عنصر را تعریف کنیم؛ بدین صورت که در حالت ۲ بعدی، مثلث موردنظر به ۴ مثلث، تقسیم می‌شود. این عمل با انتخاب گره جدید، در هریک از اضلاع مثلث و اتصال این گره‌ها به یک‌دیگر انجام می‌پذیرد. مش جدید را به مش بندی قبلی وصل می‌کنیم و این مراحل را تکرار می‌کنیم تا زمانی که شرط $R_c \sigma_c < \epsilon$ برای همه‌ی عناصر مش، برقرار باشد.

در شکل زیر، بازسازی یک پراکنده‌ساز بیضوی، با اطلاعات بالا، $\tau = 0.002$ و زمان مشاهده‌ی $t = 0.5$ ، در تکرارهای ۱۰، ۳۱ و ۶۵، ارایه شده است.

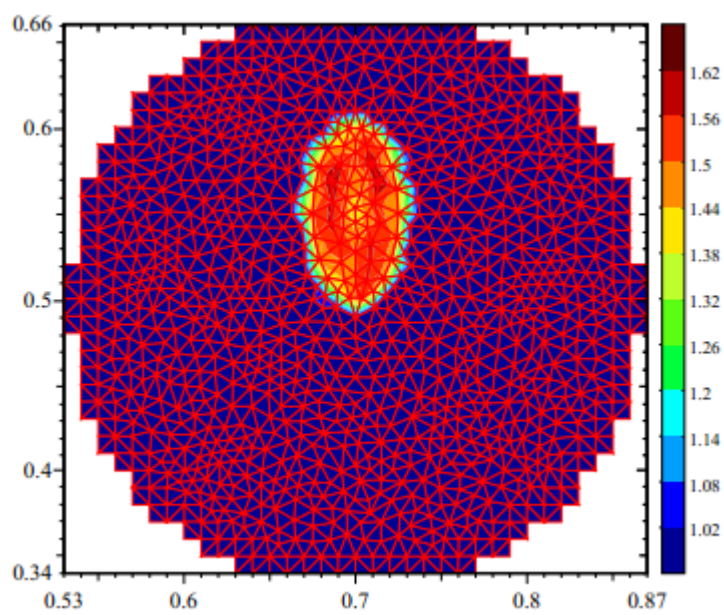
^۱Courant, Friedrichs and Lewy



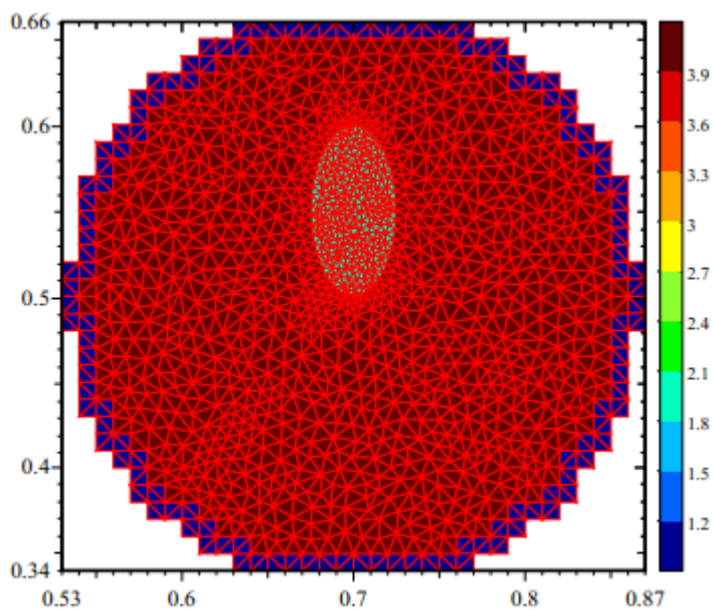
شکل ۳.۴: تکرار دهم



شکل ۴.۴: تکرار ۳۱



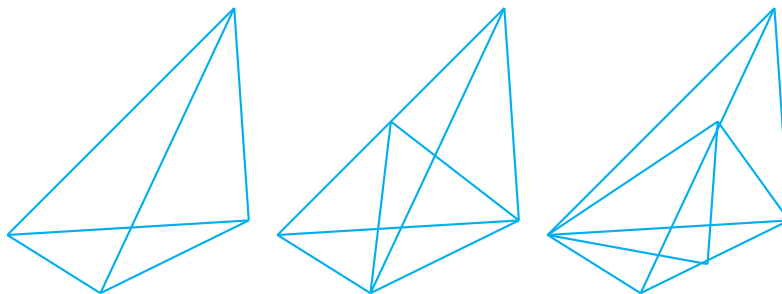
شکل ۵.۴: تکرار ۶۵



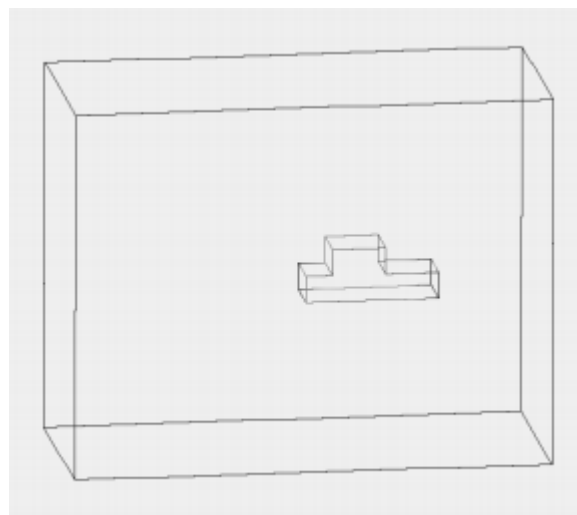
شکل ۶.۴: پراکنده‌ساز واقعی

۲.۲.۴ مثال عددی سه بعدی

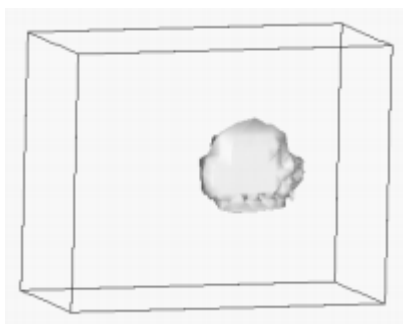
در این بخش، مثال سه بعدی را ارایه می دهیم. این مثال دقیقاً مشابه مثال دوبعدی حل می شود با این تفاوت که، در مثال سه بعدی برای به روز کردن سرعت c ، از روش شبه نیوتون BFGS، استفاده می کنیم و عناصر تشکیل دهنده مش، به جای مثلث، چهاروجهی است و به شکل زیر، به ۲ و ۳ چهاروجهی، تظریف می شود:



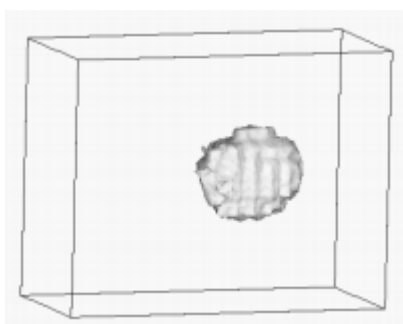
با فرض $m = 7$ در روش شبه نیوتون BFGS با ذخیره سازی محدود، برای پراکنده ساز ۷.۴، در تکرار چهارم، قبل و ۵ مرحله بعد از تظریف، شکل ۸.۴ و ۹.۴، و در تکرار ۶۰ و بعد از ۵ مرحله تظریف، شکل ۱۰.۴ به دست می آید:



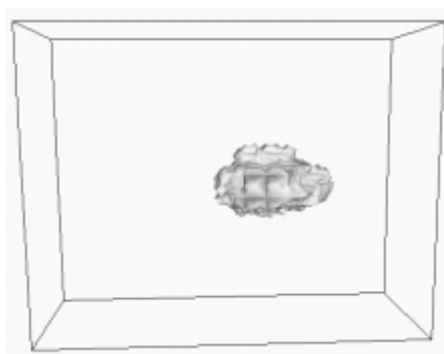
شکل ۷.۴: پراکنده ساز واقعی



شکل ۸.۴: تکرار چهارم روش شبه نیوتون قبل از انجام الگوریتم تطبیق



شکل ۹.۴: تکرار چهارم روش شبه نیوتون پس از ۵ مرحله نظریف



شکل ۱۰.۴: تکرار ۶۰ روش شبه نیوتون پس از ۵ مرحله نظریف

۳.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در روش تطبیقی ترکیبی اجزای محدود، ما مجبوریم کل دامنه را به صورت بدون ساختار، گسسته کرده، روی هر یک از اجزای مش، خطای مانده را محاسبه و با خطای قابل چشم‌پوشی tol ، مقایسه کنیم. اما، در روش تطبیقی ترکیبی اجزای محدود و تفاضلات متناهی، تنها، بخشی از دامنه، با شبکه‌ی پیچیده، گسسته می‌شود و الگوریتم تطبیق، فقط، روی قسمت کوچکی از دامنه، اجرا می‌شود. بنابراین، تعداد عملیات مورد نیاز، به صورت چشم‌گیری کاهش می‌یابد. در نتیجه، حافظه‌ی مورد نیاز، کاهش و متقابلاً، سرعت اجرا، افزایش می‌یابد. از مقایسه‌ی پراکنده‌سازهای واقعی در مثال‌های قبل، با نتایج به دست آمده از اجرای این روش، کارایی و دقت آن نیز، آشکار می‌شود.

در این پایان‌نامه، بخش درونی Ω_{FEM} را با استفاده از گسسته‌سازی پیچیده، شبکه‌بندی نموده‌ایم. پیش‌بینی می‌کنیم که اگر این بخش از دامنه‌ی Ω_{FEM} نیز، با شبکه‌ی دکارتی ساده، گسسته شود به نتایج بهتری از لحاظ کاهش حافظه‌ی مصرفی و سرعت اجرای این روش، دست می‌یابیم.

مراجع

- [1] M. Asadzadeh. *An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations*. January 2010.
- [2] G. Bal. Introduction to inverse problem. New York, April 2004.
- [3] R.E. Bank. Pltmg: A software package for solving elliptic partial differential equations. *SIAM*, 1990. Users Guid 6.0.
- [4] L. Beilina. *Adaptive hybrid FEM/FDM methods for inverse scattering problems*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 2002.
- [5] L. Debnath and P. Mikusinski. *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Inc., third edition edition, January 2005.
- [6] P. Docherty J.A. Scales and A. Gersztenkorn. Regularization of nonlinear inverse problems: imaging the near surface weathering layer. *Inverse Problems*, 6:115–131, 1990.
- [7] H.W. Engl and M. Hanke A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [8] D. Estep K. Eriksson and C. Johnson. *Computational Differential Equations*. Student litteratur, 1996.
- [9] R.E. Ewing. Effective adaptive procedures for fluid flow applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53:89–103, 1986.

- [10] M. Fuhry. *A New Thikonov Regularization Method*. PhD thesis, Kent State University Honors College, May 2011.
- [11] W. Gropp B. Smith, S. Balay and L-C. McInnes. *PETSc user manual*. <http://www.msc.anl.gov/petsc>.
- [12] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale Univercity Press, New Havan, 1923.
- [13] P.C. Hansen. Numerical tools for analysis and solution of fredholm integral equation of the first kind. *Inverse Problems*, 8:849–872, 1992.
- [14] P.C. Hansen. *Rank-deficient and Discrete Ill-posed Problem: Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM, 1998.
- [15] T. Hohage. *Inverse problem*. summer 2002.
- [16] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1986.
- [17] S. Larsson and V. Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York City, 2009.
- [18] A.E. McDonald I.M. Uhler J.C. Diaz R.E. Ewing, R.W. Jones and D.U.von Rosenberg. *Self-adaptive Local Grid-refinement for Time-dependent, Two-dimentional Simulation, Finite Elements in Fluids*, volume VI. Wiley, New York, 1984.
- [19] W. Menke. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Rpress, Orlando, 1984.
- [20] J. Nocedal. Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of Computation*, 35(151):773–782, 1980.
- [21] G. Nolet and R. Snider. Solving large inverse problems by projection. *Geophysical Journal International*, 103:565–568, 1990.
- [22] D.W. Oldenburg. An introduction to linear inverse theory. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 22:665–674, 1984.

- [23] D.W. Oldenburg. Inversion of geophysical data using an approximate inverse mapping. *Geophysical Journal International*, 105:325–353, 1991.
- [24] R.L. Parker. Understanding inverse theory. *Annal Review of Earth and Planetary Sciences*, 5:34–64, 1977.
- [25] R.L. Parker. *Geophysical Inverse Theory*. Prenceton University Press, New Jersey, 1994.
- [26] R.L. Parker and K.A. Whaler. Numerical methods for establishing solutions to inverse problem of electromagnetic induction. *Journal of Geophysical Reaserch*, 86:9574–9584, 1981.
- [27] O. Pironneau. *Optimal Shape Disign for Elliptic Systems*. Springer Verlarg, 1984.
- [28] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1953.
- [29] K. Samuelsson L. Beilina and K. Ahlander. *A hybrid method for the wave equation*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteberg, Sweden, 2002.
- [30] J.A. Scales. Tomographic inversion via the conjugate gradient method. *Geophysics*, 52:179–185, 1987.
- [31] A.N. Tichonov. Solutions of incorrectly formulated problems and regularization method. *Journal of Soviet Mathematical Dokl*, 3:1035–1038, 1963.
- [32] S. Twomey. *Introductionto the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1977.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Finite Element.....	اجزای محدود
Noise	اختلال
Scalar.....	اسکالر
Correction.....	اصلاح
Partition.....	افراز
Stencil	الگو
Partial Integration.....	انتگرال‌گیری جز به جز
Quadrature.....	انتگرال‌گیری عددی
Interval.....	بازه
Ill-posed	بدوضع
Unstructured.....	بدون ساختار
Frequency	بسامد
Dimention	بعد
Exterior.....	بیرونی
Stable	پایدار
Scattering	پراکندگی
Scatterer	پراکنده‌ساز

Tomography	پرتونگاری مقطعی
Jump	پرش
Backward	پسرو
Forward	پیشرو
Function	تابع
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
A Posteriore Error Estimate	تخمین خطای پسین
A Priore Error Estimate	تخمین خطای پیشین
Hybrid	ترکیبی
Adaptivity	تطابق
Adaptive	تطبیقی
Refinement	تظریف
Centered Finite Difference	تفاضلات متناهی مرکزی
Approximation	تقریب
Iteration	تکرار
Sepration Of Variable	جداسازی متغیرها
Tetrahedron	چهاروجهی
Steepest Descent	حداکثر کاهش
Residual Error	خطای مانده
Linear	خطی
Well-posed	خوش‌وضع
Interior	درونی
Interpolation	درون‌یابی

Temperature	دما
Vertex	راس
Structured	ساختار یافته
Indicator	شاخص
Moore-Penrose Pseudo Inverse	شبه معکوس مورینروس
Weak form	شکل ضعیف
Fourier Coefficient	ضریب فوریه
Conditional Number	عدد شرطی
Operator	عملگر
Nonlinear	غیرخطی
Assumption	فرض
Bilinear Form	فرم دوخطی
Green Formula	فرمول گرین
Trial Space	فضای آزمایش
Test Space	فضای آزمون
Banach Space	فضای باناخ
Vector Space	فضای برداری
Sobolev Space	فضای سوبولف
Inner Product Space	فضای ضرب داخلی
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Convolution Theorem	قضیه پیچش
Bounded	کران‌دار
Least Square	کمترین مربعات

Furnace	کوره
Conjugate Gradient	گرایان مزدوج
Node	گره
Semi-Discretization	گسسته‌سازی ناقص
Orthonormal	متعامد یکه
Symmetric	متقارن
Triangulation	مثلثی‌سازی
Convex	محدب
Criteria	محک
Medium	محیط
Bound	مرز
Direct Problem	مساله مستقیم
Inverse Problem	مساله معکوس
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Boundary Value Problem	مساله مقدار مرزی
Eigenvalue Problem	مساله مقدار ویژه
Partial Differential Equations	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Adjoint State Equation	معادله الحاقی حالت
Integral Equation	معادله انتگرالی
Elliptic Equation	معادله بیضوی
State Equation	معادله حالت
Parabolic Equation	معادله سهموی
Acoustic Wave Equation	معادله موج صوت

Hyperbolic Equation	معادله هذلولوی
Positive Definite	معین مثبت
Regular	منظم
Regularization	منظم‌سازی
Local	موضعی
Component	مولفه
Instable	ناپایدار
Irregular	نامنظم
Seminorm	نیم‌نورم
Norm	نورم
Kernel	هسته
Convergence	همگرا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A Posteriore Error Estimate	تخمین خطای پسین
A Priore Error Estimate	تخمین خطای پیشین
Acoustic Wave Equation	معادله موج صوت
Adaptive	تطبیقی
Adaptivity	تطابق
Adjoint State Equation	معادله الحاقی حالت
Approximation	تقریب
Assumption	فرض
Backward	پسرو
Banach Space	فضای باناخ
Bilinear Form	فرم دوخطی
Bound	مرز
Boundary Value Problem	مساله مقدار مرزی
Bounded	کران‌دار
Centered Finite Difference	تفاضلات متناهی مرکزی
Conjugate Gradient	گرادیان مزدوج
Convergence	همگرا

Convex	محدب
Convolution Theorem	قضیه پیچش
Correction	اصلاح
Criteria	محک
Dimension	بعد
Direct Problem	مساله مستقیم
Eigenvalue Problem	مساله مقدار ویژه
Elliptic Equation	معادله بیضوی
Exterior	بیرونی
Finite Element	اجزای محدود
Forward	پیشرو
Fourier Coefficient	ضریب فوریه
Frequency	بسامد
Function	تابع
Furnace	کوره
Green Formula	فرمول گرین
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Hybrid	ترکیبی
Hyperbolic Equation	معادله هذلولوی
Ill-posed	بدوضع
Indicator	شاخص
Initial Value Problem	مساله مقدار اولیه
Inner Product Space	فضای ضرب داخلی

Instable.....	ناپایدار
Integral Equation.....	معادله انتگرالی
Interior.....	درونی
Interpolation.....	درون‌یابی
Interval.....	بازه
Irregular.....	نامنظم
Iteration.....	تکرار
Jump.....	پرش
Kernel.....	هسته
Least Square.....	کمترین مربعات
Linear.....	خطی
Local.....	موضعی
Medium.....	محیط
Moore-Penrose Pseudo Inverse.....	شبه معکوس مورپنروس
Noise.....	اختلال
Node.....	گره
Norm.....	نورم
Operator.....	عملگر
Orthonormal.....	متعامد یکه
Parabolic Equation.....	معادله سهموی
Partial Differential Equations.....	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Partial Integration.....	انتگرال‌گیری جز به جز
Partition.....	افراز

Positive Definite	معین مثبت
Quadrature	انتگرال‌گیری عددی
Refinement	تظریف
Regular	منظم
Regularization	منظم‌سازی
Residual Error	خطای مانده
Scalar	اسکالر
Scatterer	پراکنده‌ساز
Scattering	پراکندگی
Semi-Discretization	گسسته‌سازی ناقص
Seminorm	نیم‌نورم
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
Sobolev Space	فضای سوبولف
Stable	پایدار
State Equation	معادله حالت
Steepest Descent	حداکثر کاهش
Structured	ساختار یافته
Temperature	دما
Test Space	فضای آزمون
Tetrahedron	چهاروجهی
Tomography	پرتونگاری مقطعی
Trial Space	فضای آزمایش
Triangulation	مثلثی‌سازی

Unstructured	بدون ساختار
Vertex	راس
Well-posed	خوش‌وضع

نمایه

ا	ض
اصل اختلاف، ۴۵	ضرب داخلی، ۲
ت	ع
تابعک خطی، ۱	عناصر متناهی، ۹
تابعک دوخطی، ۱	ف
تابعک دوخطی متقارن، ۱	فضای آزمایش، ۱۰
تابعک لاگرانژ، ۴۹	فضای آزمون، ۱۰
چ	فضای برداری، ۱
چنداندیشه، ۳	فضای ضرب داخلی، ۲
د	فضای ضرب داخلی کامل، ۲
دنباله‌ی کوشی، ۲	گ
دنباله‌ی همگرا، ۲	گرادیان مزدوج، ۵۵
ر	گسسته‌سازی کامل، ۹
روش تندترین کاهش، ۵۱	گسسته‌سازی ناقص، ۹
روش گرادیان، ۵۱	ل
روش لاگرانژ، ۴۹	لاپلاس، ۶

م

- ماتریس متقارن، ۱
- ماتریس معین مثبت، ۱
- ماتریس هسیان، ۵۵
- مثلی سازی، ۹
- محک CFL، ۷۵
- مسالهی معکوس خطی، ۱۵
- مسالهی معکوس غیرخطی، ۱۵
- معادلات با مشتقات جزئی، ۴
- معادله بیضوی، ۵
- معادله سهموی، ۵
- معادله هذلولوی، ۵

ن

- نورم، ۲
- نیمه معین مثبت، ۱

Surname: Jokar

Name: Maryam

Title: Adaptive hybrid finite elements/finite differences methods for scattering inverse problems

Supervisor: Dr. Ali Mesforush

Advisor: Dr. Mehdi Ghovvatmand Jazi

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Differential Equations

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013

Number of pages: 95

Keywords: Inverse Problem, Wave Equation, Finite Element, Finite Difference, Lagrange Method, Quasi-Newton, Optimization

Abstract

When simulatig partial differential equations in 2, 3 space dimention, it is important to use efficient implementation strategies, in particular with respect to memory usage. In the other hand, in many wave quation applications, only a small part of the computational domain is complex enough to motivate a more complex unstructured discretization, whewras quite large regions of the computational domain are sufficiently discretised with simple, Cartesian grids. For these reasons, hn this thesis, we present a hybrid approach, which combine the flexibility of the finite element method with the efficiency of the finite difference method.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Adaptive hybrid finite elements/finite differences methods for scattering inverse problems

Supervisor

Dr. Ali Mesforush

Advisor

Dr. Mehdi Ghovvatmand Jazi

by

Maryam Jokar

2013