دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آمار ، گرایش آمار ریاضی

عنوان

برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

پژوهشگر

سمیرا توره زاده

خرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: تورەزاده نام: سمیرا

عنوان: برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس

استاد راهنما: دکتر محمد آرشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: خرداد ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۷

واژگان کلیدی: برآوردگر بیز تعمیم یافته، زیان لینکس، زیان نرمال منعکس شده، مجاز، مینیماکس، موجک، آستانه نرم، برآورد انقباضی موجکی

چکیده

یکی از الگوهای اصلی مورد استفاده در استنباط‌های آماری روش بیزی می‌باشد، که در آن پارامتر θ یک متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال $\pi(\theta)$ می‌باشد. در این روش از توزیع پسین به عنوان معیاری برای تعیین براوردگر بیز استفاده می‌شود. با توجه به رشد سریع استفاده از روشهای بیزی از قرن ۲۰، در این پایان‌نامه به این نوع برآوردگرها می‌پردازیم. در این راستا، براوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان لینکس و نرمال منعکس شده می‌یابیم و برای توزیع نمونه‌ای نرمال و نرمال آمیخته مقیاسی، تحت تابع زیان لینکس، ثابت می‌کنیم که برآوردگر بیز تعمیم یافته، برآوردگر انقباضی موجکی نرم است. در ادامه با توجه به نقش مهمی که مفاهیم مجاز و مینیماکس، در استنباط و تصمیم‌های آماری ایفا می‌کنند، این برآوردگرها را از حیث این مفاهیم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با احترام و تواضع تقدیم به

مادرم، سرچشمه عشق و ایثار

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد آرشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از اساتید داور محترم، سرکار خانم دکتر ایرانمنش و جناب آقای دکتر نزاکتی که با حضور دلگرمشان تصحیح و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند سپاسگزارم.

همچنین، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس ایشان را و تشکر می‌کنم از خانواده و تمام دوستانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیرا توره زاده

خرداد ۱۳۹۲

پیش‌گفتار

تا کنون تلاش‌های فراوانی جهت بهبود و بهینه‌سازی برآوردگرها در مفهوم استنباط آماری صورت گرفته است. پس از آنکه در قرن ۱۸، ریاضیدان فرانسوی سیمون لاپلاس مفهوم بیز را بیان کرد، افراد زیادی به خصوص از قرن بیستم به بعد، راه حل‌های بیزی را در استنباط‌های آماری مورد توجه قرار دادند و با استفاده از روش‌های بیزی در پی برآوردگری با کمترین زیان ممکن بودند. از طرفی با توجه به اهمیت روزافزون استفاده از تابع زیان به خصوص در مسائل اقتصادی، بعد از بیان فلسفه تاگوچی در سال ۱۹۵۰، طی مطالعاتی، محققین پی به این مطلب بردند که گاهاً برای بررسی مسائل متفاوت نیاز به استفاده از تابع زیان‌های مختلف است و استنباط بر اساس تابع زیان درجه دوم (که در آن سال‌ها متداول بود) نمی‌تواند در تمامی مسائل نتایج مقبولی را ارائه دهد. از اینرو تابع زیان‌های کراندار و نامتقارنی همانند نرمال منعکس شده و لینکس معرفی شدند. بدین منظور در این پایان‌نامه برآوردگرهای انقباضی موجکی در حالت بیزی را تحت تابع زیان لینکس، برای حالتی که توزیع نمونه‌ای نرمال فرض شده مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین به بررسی برآوردگر بیز تعمیم یافته تحت تابع زیان نرمال منعکس شده پرداخته و در ادامه برآوردگر انقباضی موجک را برای تعمیمی از توزیع نرمال که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته، بدست می‌آوریم. این مجموعه شامل ۵ فصل می‌باشد. مطالب هر فصل به طور مختصر عبارتست از

- در فصل ۱، مقدمات، مروری بر تاریخچه موضوع مورد بررسی و یک سری تعاریف و مفاهیم اولیه آورده شده‌اند. همچنین برخی لم‌ها و قضایایی که در این پایان‌نامه استفاده شده است نیز آمده است.

- در فصل ۲، به معرفی موجک‌ها، مروری بر تاریخچه موجک‌ها، روش‌های آستانه‌ای موجک‌ها و بیان برخی مفاهیم موجکی مرتبط با این پایان‌نامه پرداخته شده است.

- در فصل ۳، برآوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان لینکس برای توزیع نمونه‌ای نرمال چند متغیره بدست آورده و به بررسی مجاز و مینیماکس بودن آن پرداخته می‌شود. همچنین، نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن حالت خاصی از تابع زیان برآوردگر بیز تعمیم‌یافته، برآوردگر انقباضی موجکی می‌باشد.

- در فصل ۴، موارد بدست آمده در فصل ۳، برای حالتی که توزیع نمونه‌ای نرمال آمیخته مقیاسی فرض شده بررسی شده‌اند.

- در فصل ۵، برآوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان نرمال منعکس شده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نمادها

A^T: ترانهاده ماتریس A

A^{-1}: معکوس ماتریس A

$\mathbb{R}^+$: فضای حقیقی مثبت

$\mathbb{R}^n$: فضای n بعدی حقیقی

$\mathcal{X}$: فضای نمونه

Θ: فضای پارامتر

$\forall$: به ازای هر

$\wedge$: و

$\vee$: یا

$I(A)$: تابع نشانگر مجموعه A

$sign\ a$: تابع علامت a

$(a)_+$: ماکزیمم a و ۰

$< f, g >$: حاصلضرب داخلی f و g

$|f|$: قدر مطلق تابع f

$\|f\|$: نرم تابع f

$\sup f$: سوپریمم تابع f

$\inf f$: اینفیموم تابع f

$Supp\ f$: تکیه‌گاه f

$ess \sup f$: سوپریمم اساسی تابع f

$L^2(\mathbb{R})$: فضای توابع انتگرال پذیر

$C^s(\mathbb{R})$: فضای هولدر

$B^s_{p,q}$: فضای بسوف

$\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$: توزیع نرمال n−متغیره با میانگین μ و مقیاس Σ

$\Gamma(r, v)$: توزیع گاما با پارامترهای r و v

$\mathcal{B}(r, v)$: توزیع بتا با پارامترهای r و v

$T_n(\mu, \Sigma, v)$: توزیع t−استیودنت n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ و درجه آزادی v

$\mathcal{SL}_n(\mu, \Sigma, v)$: توزیع اسلش n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ و پارامتر شکل v

$\mathcal{CN}_n(\mu, \Sigma, v, \gamma)$: توزیع نرمال آلایشی n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ، v پارامتر نشان دهنده درصد داده‌های دور افتاده و γ می‌تواند تفسیری از فاکتور مقیاس باشد

$\mathcal{L}(\theta,\delta)$: تابع زیان

$R(\theta,\delta)$: تابع مخاطره

$r(\pi,\delta)$: مخاطره بیز

$\rho\left(\pi(\theta|x),\delta(x)\right)$: مخاطره پسین

$\mathcal{M}_X(t)$: تابع مولد گشتاور X در نقطه t

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

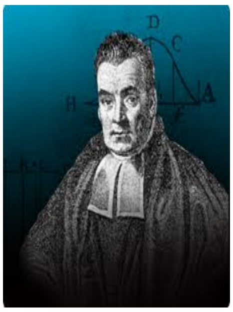
یکی از مسائلی که در آمار بسیار مورد توجه است مسئله برآورد و یافتن برآوردگر مناسب است. در دنیای پیرامون ما در علوم و زمینه‌های مختلف اعم از اجتماعی، اقتصادی، روانشناختی، سیاسی، زمین‌شناسی، پزشکی، نجوم و ... با پارامترهای مجهولی روبرو هستیم که همواره برآورد این پارامترها از اهداف اصلی می‌باشد. یافتن برآوردگرهای مناسب در عین سادگی در ظاهر، پیچیدگی‌های خاص خود را داراست و همواره در یافتن آنها نیاز است جوانب امر سنجیده شود. در استنباط‌های آماری دو الگو عمده کلاسیک[۱] و بیزی[۲] مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روشهای کلاسیک برای برآورد پارامتر مجهول θ آن را یک مقدار ثابت در نظر گرفته و بر اساس یک نمونه تصادفی $X = (X_1, \ldots, X_n)$ بدست آمده از خانواده توزیع‌های $F = \{f : f_\theta(x) > 0, \theta \in \Theta\}$ برآوردگرهایی برای θ بدست می‌آوردیم. در روشهای غیر کلاسیک بیزی، θ را کمیتی در نظر می‌گیریم که خود یک متغیر تصادفی است و تغییرات آن توسط یک تابع که به آن توزیع پیشین[۳] می‌گویند توجیه می‌شود. روشهای بیزی یک الگوی کامل برای استنباط آماری و تصمیم گیری تحت عدم قطعیت[۴] فراهم می‌کند.

رشد سریع استفاده از روش‌های آماری بیزی در بررسی مسائل اقتصادی از سال ۱۹۵۰، کاربردهای

[۱] Classical
[۲] Bayesian
[۳] Prior
[۴] Uncertainty

بسیاری از استنباط بیزی و تکنیک‌های تصمیم گیری را در طیف وسیعی از مسائل، وارد کرد و باعث توسعه برنامه‌های کامپیوتری بیزی شد. برای اطلاعات بیشتر پرس[۵] (۱۹۸۰) را ببینید. به تجربه نشان داده شده که راه‌حل‌های بیزی در مسائل کاربردی به خوبی و یا بهتر از راه حل‌های غیر بیزی (کلاسیک) عمل می‌کند. در واقع بسیاری از نتایج غیر بیزی می‌توانند به وسیله روشهای بیزی تحت فرضیات خاص بدست آیند. اگر چه این فرضیات خاص اغلب نامطلوب بوده و در نتیجه راه‌حل‌های کاملا بیزی که این فرضیات را کمرنگ می‌کنند ترجیح داده می‌شوند. بعلاوه یکی از دلایل شهرت خوب رویکردهای بیزی، جواز استفاده از اطلاعات پیشین در بدست آوردن راه حل‌هایی در اعمال استنباط و مسئله تصمیم گیری است، بخصوص این مسئله زمانی ارزشمند است که اطلاعات نمونه محدود باشد. روشهای بیزی ترکیب فرضیه‌های علمی را در تجزیه و تحلیل (با استفاده از توزیع پیشین) ممکن می‌سازد و اغلب در مسائلی که ساختار آنها برای روشهای کلاسیک پیچیده است بکار می‌رود. اساس الگوی بیزی به عنوان اندازه‌گیری کسر شرطی، عدم قطعیت که در زبان عادی با کلمه احتمال مطابقت دارد، می‌باشد. استنباط آماری در مورد کمیت مورد علاقه، به عنوان تعدیلی از عدم قطعیت در پرتو شواهد بیان می‌شود وتئوری بیز بطور دقیق چگونگی ساخته شدن این تعدیلات را مشخص می‌کند (برناردو[۶]، ۲۰۰۳).

اصطلاح بیز اشاره به ریاضیدان و الهیات شناس قرن ۱۸ توماس بیز[۷] دارد.



شکل ۱.۱: توماس بیز

اگر چه اولین پیشگام آنچه امروزه ما به عنوان احتمال بیزی می‌شناسیم سیمون لاپلاس[۸]

[۵] Press
[۶] Bernardo
[۷] Bayes
[۸] Laplace

(۱۸۲۷ – ۱۷۴۹) است. برخی افراد تلاش‌ها قابل تقدیری در ارائه راه‌حل‌های بیزی در استنباط و

شکل ۲.۱: سیمون لاپلاس

مسئله تصمیم و برخی کاربردها انجام داده‌اند که می‌توان تحقیقات گود[۹](۱۹۵۰, ۱۹۶۵)، جفری [۱۰] (۱۹۵۷, ۱۹۶۷)، سویج[۱۱] (۱۹۵۴)، لیندلی[۱۲](۱۹۶۵, ۱۹۷۱)، زلنر[۱۳](۱۹۷۱, ۱۹۸۴)، دگروت[۱۴] (۱۹۷۰)، لیمر[۱۵] (۱۹۷۸) و برگر[۱۶](۱۹۸۰) را نام برد. همچنین مقالاتی حاوی نظریه‌های با ارزش و کاربردی به چاپ رسیده که از آن جمله می‌توان به فینبرگ[۱۷] زلنر (۱۹۷۵)، برناردو[۱۸] و همکاران (۱۹۸۰)، زلنر (۱۹۸۰) و گول[۱۹] و زلنر (۱۹۸۵) اشاره کرد. برخی کاربردهای جالب از تجزیه وتحلیل‌های بیزی در اقتصاد عبارتند از پیک[۲۰](۱۹۷۴)، روش برآورد بیزی را در تحلیل وضع سرمایه‌گذاری شرکت‌ها در صنعت برق بکار برد. واریان[۲۱](۱۹۷۵)، روش‌های بیزی را برای حل مسئله ارزیابی مالیات املاک و مستغلات بکار گرفت. زلنر و ویلیامز[۲۲](۱۹۷۳)، روش‌ها بیزی را در مطالعات مدل‌های سری‌های زمانی برای تقاضا پول امریکا و سرمایه‌گذاری بکار بردند.

استنباط و تصمیم بر اساس برآوردگرها همواره ضرر و زیان‌هایی را به دنبال دارد که این زیان می‌تواند

[۹] Good
[۱۰] Jeffreys
[۱۱] Savage
[۱۲] Lidley
[۱۳] Zellner
[۱۴] Degroot
[۱۵] Leamer
[۱۶] Berger
[۱۷] Fienberg
[۱۸] Bernardo
[۱۹] Goel
[۲۰] Peck
[۲۱] Varian
[۲۲] Williams

در غالب زیان ناشی از بیش‌برآورد[۲۳] و کم‌برآورد[۲۴] نمایان شود، بعد از بیان فلسفه تاگوچی[۲۵] بر اهمیت استفاده از تابع زیان[۲۶] روز به روز افزوده شده است. از این‌رو استفاده از تابع زیان مناسب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و باید با توجه به موضوع تحت بررسی تابع زیان مناسب را برگزید. در گذشته استفاده از تابع زیان‌های متقارن[۲۷] مانند تابع زیان درجه دوم خطا[۲۸] مرسوم بود اما در رویارویی با مسائل کاربردی محققین پی به نواقص این تابع زیان برای برخی از مسائل بردند. از جمله نواقص این تابع زیان می‌توان به نامتناهی بودن آن و ضعف این تابع در تفکیک زیان حاصل از بیش‌برازش و کم برازش اشاره نمود. از این رو تابع زیان کراندار همانند نرمال منعکس شده[۲۹] و نامتقارن، همانند لینکس[۳۰] ارائه شدند.

با اذعان به این مطلب که ضرر و زیان ناشی از استفاده برآوردگرها در اکثر مسائل تقریبا اجتناب ناپذیر است همواره در پی آن هستیم که این زیان را تا حد امکان کاهش دهیم. لذا از این مطلب می‌توان به عنوان معیاری برای انتخاب براوردگر مناسب استفاده کرد. در این راستا با مفاهیمی همچون مجاز[۳۱] و مینیماکس[۳۲] مواجه می‌شویم.

با توجه به قابلیت انعطاف و محتوای غنی و کاربردهای بسیار تحلیل موجک[۳۳]، امروزه این توابع پایه متعامد[۳۴]، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. نکته قابل توجه در این میان اینست که برخی از برآوردگرهای مجاز و مینیماکس تحت شرایطی خاص برآوردگر انقباضی موجکی هستند.

[۲۳] Over-estimation
[۲۴] Under-estimation
[۲۵] Taguchi
[۲۶] Loss function
[۲۷] Symmetric
[۲۸] Quadratic error
[۲۹] Reflected normal
[۳۰] Linex
[۳۱] Admissible
[۳۲] Minimax
[۳۳] Wavelet
[۳۴] Orthogonal

در راستای مطالب ذکر شده به بیان یک سری تعاریف ومفاهیم می‌پردازیم.

۲.۱ مفاهیمی از استنباط و تصمیم‌های آماری

نظریه تصمیم آماری، مباحثی در مورد تصمیم‌گیری در حضور دانش آماری است که درک عدم قطعیت را آسان می‌کند. فرض کنید عدم قطعیت را می‌توان مقدار کمی نامعلوم در نظر گرفت و آن را با θ و مجموعه تمام مقادیر ممکن θ را با Θ نمایش دهیم، هدف استنباط آماری بدست آوردن اطلاعاتی در مورد θ یا توزیع F_θ از طریق مشاهدات (اطلاعات نمونه که از روش‌های آماری تهیه می‌شوند) است و پس از آن استنباط‌هایی روی θ (بدون در نظر گرفتن محل استفاده آن) صورت می‌گیرد. در نظریه تصمیم آماری این اطلاعات با اطلاعات جانبی دیگر به کار گرفته می‌شود. یعنی علاوه بر اطلاعات نمونه، اطلاعات مربوط به تصمیم‌های ممکن و همچنین اطلاعاتی مربوط به θ، که به اطلاعات پیشین موسوم هستند نیز در نظر گرفته می‌شود که این اطلاعات پیشین گاهاً از منابع غیر آماری و تجارب گذشته حاصل می‌شوند. در نهایت برای هر تصمیم مقداری سود و زیان متناسب با مقادیر مختلف θ در نظر می‌گیرند تا به بهترین تصمیم دست یابند.

۱.۲.۱ عناصر اصلی یک مسئله تصمیم آماری

همانطور که بیان کردیم مشاهدات ابزار سودمندی برای استنباط در مورد پارامتر θ (یا بردار θ) هستند. برای استفاده از این ابزار نیازمند به فرمول‌بندی و معرفی تمام مولفه‌ها در یک تصمیم آماری هستیم. برای این منظور در این بخش عنصرهای اصلی یک مسئله تصمیم آماری را معرفی می‌کنیم. عنصرهای اصلی یک مسئله تصمیم آماری عبارتند از:

۱. داده: یافته یک متغیر تصادفی X با فضای نمونه‌ای $\mathcal{X}$.

۲. وضع طبیعت: پارامتر واقعی و نامعلوم θ که می‌خواهیم در مورد آن استنباط انجام دهیم.

۳. فضای پارامتر: همه مقادیر قابل قبول وضع طبیعی که با Θ نمایش می‌دهیم.

۴. مدل[۳۵]: خانواده $F = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ از توزیع‌های احتمال ممکن، برای X، که به پارامتر θ وابسته‌اند.

۵. فضای عمل: مجموعه کلیه عمل‌های ممکن برای پارامتر نامعلوم θ را فضای عمل گفته و اغلب با نماد $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهند.

۶. قاعده تصمیم: شیوه به کار بردن داده‌ها بعنوان کمکی در تصمیم گیری شامل یک قاعده یا مجموعه‌ای از دستورات می‌باشد. در واقع، یک قاعده تصمیم تعیین می‌کند که با مشاهده $x \in \mathcal{X}$، کدام عمل $a \in \mathcal{A}$ بایستی انتخاب شود و معمولا آن را با نماد $\delta(x)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر یک قاعده تصمیم تابعی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{A}$ است.

۷. تابع زیان: اگر $\theta \in \Theta$ حالت واقعی طبیعت باشد، در اینصورت ممکن است عمل a، درست، تا اندازه‌ای نادرست و یا کلا نادرست باشد. میزان نادرستی را با تابع زیان $\mathcal{L}(\theta, a)$ اندازه گیری می‌کنند که میزان زیان به کار بردن a، زمانی که θ مقدار واقعی حالت طبیعت باشد را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر تابع زیان، تابعی از $\Theta \times \mathcal{A}$ به $\mathbb{R}^+$ است. برای آگاهی بیشتر در خصوص لزوم استفاده از تابع زیان بخش ۲.۵ را ببینید.

۸. تابع مخاطره[۳۶]: هنگامی که قاعده تصمیم معلوم $\delta(x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، نه تنها زیان حاصل به حالت واقعی طبیعت بستگی دارد بلکه به مقدار $X = x$ نیز وابسته است. از آنجایی که X یک متغیر تصادفی است، $\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)$ نیز یک متغیر تصادفی است. عموما در آمار متوسط زیان مورد نظر است که از آن تحت عنوان تابع مخاطره یاد می‌کنند و آن را با $R(\theta, \delta) = E_\theta\left[\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)\right]$ نمایش می‌دهند که در آن

$$E_\theta\left[\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)\right] = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(\theta, \delta(x))\, \mathrm{d}F_\theta(x), \qquad \theta \in \Theta. \tag{۱.۱}$$

در حقیقت میزان دقت و یا عدم دقت قاعده تصمیم با تابع مخاطره اندازه‌گیری می‌شود.

[۳۵] Model
[۳۶] Risk function

۹. فضای قواعد تصمیم: مجموعه تمام قواعد تصمیم ممکن را با $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهند و آن را فضای قواعد تصمیم می‌نامند، معمولا فضای قواعد تصمیم را حاوی تمام تصمیم‌های با مقادیر مخاطره متناهی در نظر می‌گیرند.

برای مشاهده توضیحات بیشتر در این زمینه به لهمن و رمانو[۳۷](۲۰۰۵) یا کریمی‌نژاد (۱۳۸۸) مراجعه کنید.

۳.۱ اصل بیز

در روش غیر کلاسیک بیزی، θ به عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال $\pi(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود، که π را توزیع پیشین می‌نامند.
$f(x|\theta)$ تابع چگالی احتمال شرطی از متغیر تصادفی X است که در آن $\theta \in \Theta$ ثابت فرض شده، و با توجه به اینکه π توزیع θ است، در نتیجه تابع چگالی توام θ و X به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f(x,\theta) = \pi(\theta)f(x|\theta). \tag{۲.۱}$$

لازم به ذکر است که توزیع پیشین، بر اساس اطلاعات قبلی، اعتقادات، باورها و تجربیات آزمایشگر تعیین می‌گردد. بر اساس نمونه جمع‌آوری شده از جامعه، توزیع پیشین تصحیح می‌گردد، توزیع پیشین تصحیح شده را توزیع پسین[۳۸] می‌نامند. به‌عبارتی ترکیبی از اطلاعات حاصل از مشاهدات بدست آمده از جامعه (تابع درستنمایی) و توزیع پیشین را بعنوان معیار توزیع پسین برای تعیین برآوردگر پارامتر نامعلوم بکار می‌برند.
با توجه به این که θ خود یک متغیر تصادفی بوده و تابع مخاطره $R(\theta,\delta) = E_\theta[L(\theta,\delta)]$ تابعی از θ است، بنابراین تابع مخاطره نیز یک متغیر تصادفی است.

تعریف ۱.۳.۱. (لهمن و کسلا[۳۹]، ۱۹۹۸) امید ریاضی $R(\theta,\delta)$ نسبت به تابع $\pi(\theta)$ را مخاطره

[۳۷] Lehman and Romano
[۳۸] Posterior
[۳۹] Casella

بیز[۴۰] نامیده و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$r(\pi,\delta) \;=\; E_\pi\left[R(\theta,\delta)\right]=\int_\Theta R(\theta,\delta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{D}$ کلاس کلیه برآوردگرها باشد، برآوردگر δ^* را برآوردگر بیز[۴۱] گویند هرگاه مخاطره بیز را مینیمم کند، بعبارتی δ^* برآوردگر بیز است اگر

$$r(\pi,\delta^*) \;=\; \inf_{\delta\in\mathcal{D}} r(\pi,\delta). \qquad (۴.۱)$$

با استفاده از قضیه زیر می‌توان برآوردگر بیز را تحت تابع زیان دلخواه بدست آورد.

قضیه ۳.۳.۱. *(لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) فرض کنید θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)\in\Pi$ و متغیر تصادفی X از خانواده توزیع‌های $F=\{f:f_\theta(x)>\circ,\theta\in\Theta\}$ باشد، همچنین فرض کنید در مساله برآوردیابی با تابع نامنفی $\mathcal{L}(\theta,\delta)$ شرایط زیر برقرار باشد*

الف : برآوردگر $\delta_\circ$ با مخاطره متناهی وجود داشته باشد.

ب : برای $x\in X$، برآورد $\delta^*(x)$ موجود باشد که مخاطره پسین

$$\rho\left(\pi(\theta|x),\delta(x)\right) \;=\; E\left[\mathcal{L}\left(\theta,\delta(X)\right)|X=x\right]=\int_\Theta \mathcal{L}\left(\theta,\delta(x)\right)\mathrm{d}\pi(\theta|x), \qquad (۵.۱)$$

را مینیمم کند که در آن

$$\pi(\theta|x) \;=\; \frac{\pi(\theta)\ f(x|\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta)\ \mathrm{d}\pi(\theta)} \qquad (۶.۱)$$

چگالی پسین θ به شرط $X=x$ است. در این صورت $\delta^*(x)$ برآوردگر بیز است.

تعریف ۴.۳.۱. (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) برآوردگر δ^* را یک برآوردگر مینیماکس می‌نامند هرگاه ماکسیمم مخاطره را می‌نیمم کند و یا به عبارتی

$$\inf_{\delta\in D}\ \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta)=\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta^*) \qquad (۷.۱)$$

[۴۰] Bayes risk
[۴۱] Bayes estimator

در حقیقت یک برآوردگر مینیماکس با می‌نیمم کردن ماکزیمم تابع مخاطره بهترین برآوردگر را در بدترین حالت (برآوردگرهایی با تابع مخاطره ماکزیمم) انتخاب می‌کند.

تعریف ۵.۳.۱. برآوردگر δ غیر مجاز[۴۲] است اگر

$$\exists\, \delta^* \in D \quad s.t \quad \forall\, \theta \in \Theta \qquad R(\theta,\delta^*) \leq R(\theta,\delta) \tag{۸.۱}$$

و حداقل به ازای یک مقدار $\theta \in \Theta$ نامساوی اکید باشد. هرگاه چنین برآوردگری وجود نداشته باشد آنگاه δ را مجاز می‌گویند. به‌عبارتی اگر δ غیرمجاز نباشد مجاز است.

با توجه به تعریف ۵.۳.۱، یک برآوردگر مجاز از یک دیدگاه برآوردگر خوبی است زیرا هیچ برآوردگری مخاطره کمتری نسبت به آن ندارد. حال اگر بدانیم که یک برآوردگر غیر مجاز است باید به دنبال برآوردگری بگردیم که مخاطره کمتری نسبت به آن داشته باشد.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید Π خانواده توزیع‌های پیشین θ باشد در این‌صورت توزیع پیشین $\pi \in \Pi$ را بی‌اطلاع[۴۳] گویند هرگاه حاوی هیچ اطلاعی در مورد پارامتر θ نباشد.

تعریف ۷.۳.۱. توزیع پیشین $\pi \in \Pi$ را ناسره[۴۴] گوییم اگر $\int_\Theta \mathrm{d}\pi(\theta) \neq ۱$ و سره[۴۵](مناسب) گوییم اگر π یک تابع احتمال باشد.

تعریف ۸.۳.۱. اگر توزیع پیشین ناسره باشد برآوردگری که مخاطره پسین را می‌نیمم می‌کند، برآوردگر بیز تعمیم یافته [۴۶] است.

در ادامه به بیان لم‌ها و قضایای مورد نیاز در این فصل می‌پردازیم.

قضیه ۹.۳.۱. (*روهاتکی و صالح*[۴۷]، ۲۰۰۱)

فرض کنید $F = \{f : f_\theta(x) > ۰, \theta \in \Theta\}$ یک خانواده از توزیع های احتمال و δ^* برآوردگر بیز باشد، اگر تابع مخاطره ثابت باشد δ^* برآوردگر مینیماکس است.

[۴۲] Inadmissible
[۴۳] Non-informative
[۴۴] Improper
[۴۵] Proper
[۴۶] Generalized Bayes estimator
[۴۷] Rohatgi and Saleh

برهان. طبق تعریف ۱.۳.۱ مخاطره بیز عبارتست از

$$\begin{aligned} r^* &= R(\pi,\delta^*) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\theta,\delta^*)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \inf_{\delta\in\mathcal{D}} \int R(\theta,\delta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}(\theta) \\ &\leq \sup_{\theta\in\Theta}\inf_{\delta\in\mathcal{D}} R(\theta,\delta) \ \leq \inf_{\delta\in\mathcal{D}}\ \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta) \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

از آن جایی که به ازای هر $\theta\in\Theta$ داریم $r^* = R(\theta,\delta^*)$، بنابراین

$$r^* = \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta^*) \geq \inf_{\delta\in\mathcal{D}}\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta) \tag{۱۰.۱}$$

از رابطه‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) می‌توان نتیجه گرفت

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta^*) = \inf_{\delta\in\mathcal{D}}\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta). \tag{۱۱.۱}$$

□

لم ۱۰.۳.۱. *(لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) اگر δ یک برآوردگر مجاز با مخاطره ثابت باشد آنگاه δ یک برآوردگر مینیماکس است.*

قضیه ۱۱.۳.۱. *(لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) فرض کنید $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$ و $R(\theta,\delta)$ برای هر برآوردگر δ ثابت یک تابع پیوسته از θ باشد. همچنین دنباله‌هایی از توزیع‌های پیشین Π_m با برآوردگرهای بیز متناظر δ^{Π_m} موجود است به طوری که برای برآوردگر مفروض $\delta_\circ$*

$$\begin{aligned} r_m^* &= r(\Pi_m,\delta_\circ), \\ r_m &= r(\Pi_m,\delta^{\Pi_m}), \end{aligned}$$

اگر برای هر $\theta\in\Theta, c>\circ$ وقتی $m\to\infty$ داشته باشیم

$$\frac{\Pi_m(\theta+c)-\Pi_m(\theta-c)}{r_m^*-r_m} \to \infty. \tag{۱۲.۱}$$

آنگاه $\delta_\circ$ یک برآوردگر مجاز است.

۴.۱ تعاریف

در این قسمت توزیع‌های آماری که در این مجموعه استفاده شده‌اند را آورده‌ایم.

تعریف ۱.۴.۱. (ایرانمنش، ۱۳۹۱) بردار n مولفه‌ای X دارای توزیع نرمال n-متغیره با میانگین $\mu \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس کواریانس Σ است، اگر و فقط اگر به ازای هر بردار n مولفه‌ای ثابت a، $a'X$ دارای توزیع نرمال یک متغیره باشد. از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌شود

$$X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma).$$

اگر Σ یک ماتریس معین مثبت[۴۸] باشد، آن‌گاه X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است

$$f(x) \;=\; \frac{|\Sigma|^{-\frac{۱}{۲}}}{(۲\pi)^{\frac{n}{۲}}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^T\Sigma^{-۱}(x-\mu)}{۲}\right],$$

که در آن $|\Sigma|^{\frac{۱}{۲}}$ ریشه دوم دترمینان Σ است. توجه کنید اگر $n = ۱$، آن‌گاه صورت درجه دوم در توان نمایی، به $\frac{(x-\mu)^۲}{\sigma^۲}$ تبدیل می‌شود و $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^۲)$. همچنین اگر Σ یک ماتریس نیمه معین مثبت باشد، آن‌گاه X دارای توزیع تباهیده است.

تعریف ۲.۴.۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع بتا با پارامترهای v و p است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد

$$f_{v,p}(x) \;=\; \frac{۱}{\mathcal{B}(v,p)} x^{v-۱}(۱-x)^{p-۱}, \quad ۰ < x < ۱, v > ۰, p > ۰, \tag{۱۳.۱}$$

که در آن

$$\mathcal{B}(v,p) = \int_۰^۱ x^{v-۱}(۱-x)^{p-۱}\mathrm{d}x,$$

تابع بتاست و آن را با نماد $X \sim \mathcal{B}(v,p)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۴.۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای ν و κ است، اگر تابع چگالی آن بصورت زیر باشد

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{\kappa^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-۱} e^{-\kappa x}, \qquad x > ۰, \quad \nu > ۰, \quad \kappa > ۰, \tag{۱۴.۱}$$

[۴۸] Positive definite matrix

که در آن

$$\Gamma(\nu) = \int_{\circ}^{\infty} x^{\nu-۱} e^{-۱} \mathrm{d}x,$$

تابع گاما است و آن را با نماد $X \sim \Gamma(\nu, \kappa)$ نشان می‌دهیم.

فصل ۲
برآوردگرهای موجکی کلاسیک

۱.۲ مقدمه

در این فصل برآنیم تا به بیان مختصری از تاریخچه موجک‌ها در علم آمار بپردازیم، سپس با بیان تعاریف مورد نیاز، اطلاعات کافی را در زمینه ارتباط موجک‌ها با برآوردگر بیز تعمیم یافته که در فصول بعدی از آن استفاده می‌کنیم، بدست آوریم.

۲.۲ تاریخچه

ایده نمایش یک تابع بر حسب مجموعه کامل از توابع، اولین بار توسط ژوزف فوریه[۱]، ریاضیدان و فیزیکدان، بین سال‌های ۱۸۰۲ تا ۱۸۰۶ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، بکار گرفته شد. در واقع برای اینکه یک تابع $f(x)$ به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود، فوریه ثابت کرد که می‌توان از محورهایی استفاده کرد که به کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوسی ساخته می‌شوند؛ به عبارت دقیق‌تر فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می‌توان بصورت حاصل جمع بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(ax)$ و $\cos(ax)$ نشان داد. در حقیقت او توابع سینوس و کسینوسی را به عنوان پایه‌هایی بر فضای توابع فوریه در نظر گرفت. با گذشت زمان ضعف پایه‌های فوریه نمایان شد. به عنوان مثال دانشمندان پی بردند پایه‌های فوریه و نمایش توابع

[۱] Fourier

سینوسی در مورد سیگنال‌های پیچیده تصاویر نه تنها ایده‌آل نیستند، بلکه از شرایط مطلوب دور است، زیرا به صورت کارآمدی قادر به نمایش ساختارهای گذرا، نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین آنها متوجه شدند تبدیل فوریه فقط برای توابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرد، و برای توابع غیر پایه کار آمد نیست.

شکل ۱.۲: آلفرد هار

اولین بار نظریه موجک‌ها توسط آلفرد هار[۲] در سال ۱۹۰۹ مطرح شد. اساس کار هار به این صورت بود که او برای تقریب یک تابع پیوسته مانند f در بازه $[۰,۱]$ از یک تابع پله‌ای واحد استفاده کرد. در حقیقت او نشان داد که اگر

$$\begin{aligned} f_n(x) &= <\phi_۰, f> \phi_۰(x) + <\phi_۱, f> \phi_۱(x) \\ &\quad + \ldots + <\phi_n, f> \phi_n(x), \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن

$$<\phi_i, f> = \int \phi_i(x) f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{۲.۲}$$

و $\phi_i(x)$ها، $i = ۱, \ldots, n$ توابع پله‌ای باشند به طوری که

$$\phi_۰(x) = I_{۰ \le x < ۱} = \begin{cases} ۱ & , \quad ۰ \le x < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

[۲]Haar

$$\phi_1(x) = I_{0\le x<\frac{1}{2}} - I_{\frac{1}{2}\le x<1} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = I_{0\le x<\frac{1}{4}} - I_{\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{4} \\ -1 & , \quad \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = I_{\frac{k}{2^j}\le x<\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}} - I_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}\le x<\frac{k+1}{2^j}} = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{k}{2^j} \le x < \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \\ -1 & , \quad \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \le x < \frac{k+1}{2^j} \quad j \ge 0, \\ & \quad k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1, n = 2^j + k \\ 0 & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

آنگاه f_nها بطور یکنواخت به f، وقتی $n \to \infty$ همگرا می‌شوند.

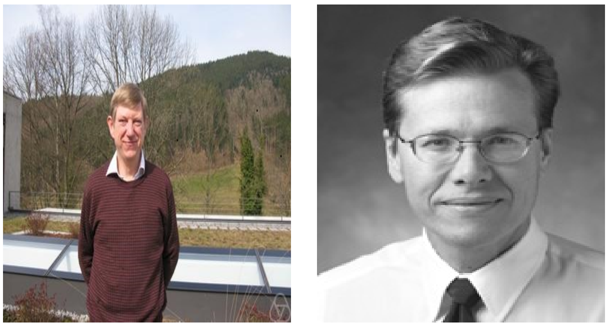
با توجه به ساختار رابطه (۲.۱)، می‌توان به این حقیقت پی برد که توابع $\phi_i(x)$، مجموعه‌ای از توابع پایه را بر حسب تابع f تشکیل می‌دهند. بعدا خواهیم دید که به توابع $\phi_i(x)$، تابع موجک می‌گویند. برای جزئیات بیشتر در خصوص موجک هار، فانگ و فانگ[۳](۲۰۰۸) و ویداکوویچ[۴](۱۹۹۹) را ملاحظه کنید.

در سال‌های ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین موضوعی، به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند. و بعد از آن در سال ۱۹۷۰، یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورلت[۵] متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشاف زیر زمین نیستند. در سال ۱۹۸۰، میر[۶] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد (تعامد ویژگی را بیان می‌کند که موجب تسهیلات فراوان در استدلال و محاسبه می‌شود). برای اولین بار کلمه موجک توسط مورلت و همکاران (۱۹۸۲) مورد استفاده قرار گرفت. مورلت مفهوم موجک و تبدیل موجک را به عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه معرفی نمود. از زمان معرفی موجک‌ها در اوایل دهه هشتاد قرن بیستم، این ابزار مورد توجه شدید محافل ریاضی و علوم کاربردی از جمله آمار قرار گرفت

[۳] Phang and Phang
[۴] Vidakovice
[۵] Morlet
[۶] Mayer

(عاملی، ۱۳۸۷).

همان‌طور که اشاره شد، موجک‌ها بنا به خواص متعددشان در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه



شکل ۲.۲: (راست به چپ)دونوهو و جانستون

قرار گرفتند. اولین بار موجک‌ها در سال ۱۹۹۲ توسط دونوهو و جانستون[7] در تحقیقات آماری بکار گرفته شد. در سال‌های اخیر تحقیقات فراوانی پیرامون نقش موجک‌ها در علم آمار انجام شده در این راستا می‌توان به منابع هاردل[8] و همکاران (۱۹۹۸) و ویداکوویچ (۱۹۹۹) اشاره کرد.

در آنالیز موجک‌ها، همانند آنالیز فوریه با بسط تابع سر و کار داریم ولی این بسط بر حسب موجک‌ها انجام می‌شود. موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال‌ها[9] و اتساع‌های[10] این تابع انجام می‌گیرد؛ بر خلاف چند جمله‌ای های مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به صورت موضعی بررسی می‌شوند و بدین ترتیب ارتباط نزدیک‌تری بین بعضی توابع و ضرایب آنها امکان‌پذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است، را می‌توان با استفاده از موجک‌ها فرمول‌بندی کرد. به طور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم‌های عددی سریع برای محاسبه عملگرهای انتگرالی اثر می‌گذارد.

آنالیز موجک حاصل ۵۰ سال ریاضی (نظریه لیتلوود - پیلی[11] و کالدرون - زیگموند[12]) است، که طی آن با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسش‌های مربوط به تبدیل فوریه

[7] Donoho and Johnston
[8] Hardel
[9] Translation
[10] Dilation
[11] Littlewood-Paley theory
[12] Calderon-Zigmond theory

وجود داشت، جانشین‌های انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز همساز ارائه شدند. مستقل از این نظریه که درون ریاضیات محض جا دارد، صورت‌های مختلفی از این رهیافت چند مقیاسی را در طی دهه‌ی گذشته در پردازش تصویر، اکوستیک، کد گذاری (به شکل فیلترهای آینه‌ای متعامد و الگوریتم‌های هرمی) و استخراج نفت دیده می‌شود (لی و یاماموتو[۱۳]، ۱۹۹۴).

۳.۲ کاربردها

آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنالهای گذرایی که سریعا تغییر می‌کنند، صدا و سیگنالهای صوتی، جریان‌های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه‌ای و داده‌های طیف نمایی (NMR)، و در کنترل نیروگاههای برق از طریق صفحه نمایش کامپیوتر بکار می‌رود و نیز به‌عنوان ابزار علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده‌ای که در تلاطم ظاهر می‌شوند، جریان‌های جوی و در بررسی ساختارهای ستاره‌ای و همچنین در تصویر برداری پزشکی (MRI) و سی‌تی اسکن (CAT)، جداسازی بافت‌های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تشخیص خودکار خوشه‌های میکروکلسیفیکاسیون، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی ($MR\ Spectroscopy$) و تشخیص مغناطیس تابعی ($FMRI$) به‌کار گرفته می‌شوند.
راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه‌هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوه‌ی بسیار کارا و فشرده‌سازی سیگنالها و تصاویرند. برای اطلاعات بیشتر ابوفادل و اسچلیکر[۱۴] (۱۹۹۹) را ببینید.

[۱۳] Lee and Yamamoto
[۱۴] Aboufadel and Schlicker

۴.۲ فضاهای برداری و تابعی

در این قسمت به معرفی اجمالی برخی از فضاهای برداری و تابعی مورد نیاز در این مبحث می‌پردازیم.
این مفاهیم را می‌توان در عاملی (۱۳۸۷)، رودین[۱۵] (۱۳۸۵) و ایرانمنش (۱۳۸۶) یافت.
در ابتدا به بیان تعاریفی که از مفاهیم آن‌ها در فضاهای زیر استفاده شده می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۲. مجموعه‌ی X که عنصرهایش را نقاط می‌نامیم، در صورتی یک فضای متری است که به هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی $d(p,q)$، به نام فاصله از p تا q، طوری مربوط شده باشد که

۱. $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$، و $d(p,p) = 0$؛

۲. $d(p,q) = d(q,p)$؛

۳. $\forall r \in X, d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

تعریف ۲.۴.۲. دنباله $\{p_n\}$، در فضای متری X را یک دنباله کشی می‌نامند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد به طوری که اگر $n \geq N$ و $m \geq N$، $d(p_n, p_m) < \epsilon$.

یک فضای برداری حقیقی، مجموعه‌ای از بردارها به همراه دو عمل جمع برداری و ضرب عدد در بردار است .
فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ متشکل از بردارهای ستونی با n مولفه است که مولفه‌های آنها اعداد حقیقی هستند به عبارتی $\mathbb{R}^n$ از حاصلضرب دکارتی فضای اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر ساخته می‌شود

$$\mathbb{R}^n \quad = \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n)' | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

$\mathbb{R}^1$ فضای برداری و متناظر با یک خط راست است. $\mathbb{R}^2$ فضای معمولی $X - Y$ را نشان می‌دهد و فضای $\mathbb{R}^\infty$، فضای برداری است که تعداد مولفه‌های بردارهای تشکیل دهنده آن نامتناهی است.
در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، اگر $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y' = (y_1, \ldots, y_n)$ دو بردار باشند آنگاه ضرب

[۱۵] Rudin

داخلی به صورت $<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ و نرم یا اندازه به صورت $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ تعریف می‌شوند.

تعریف ۳.۴.۲. (فضای توابع انتگرال‌پذیر $(L^2(\mathbb{R})$ گوییم تابع f متعلق به فضای $L^2(\mathbb{R})$ است هرگاه $\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x<\infty$.

در این فضا ضرب داخلی به صورت $<f,g>=\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ، و نرم f به صورت $\|f\|=\sqrt{\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۴.۲. تابع f متعلق به فضای لبگ[۱۶] است هرگاه

$$\|f\|_p=\left(\int |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \qquad , \qquad 0\leq p<\infty,$$

و اگر $p=\infty$ آنگاه $\|f\|_\infty = ess\sup_{x\in A}|f(x)|<\infty$.

تعریف ۵.۴.۲. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$\|x-z\| \quad \leq \quad \|x-y\|+\|y-z\|, \qquad (x,y,z\in H),$$

اگر فاصله بین x و y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. لذا H یک فضای متری است. هرگاه این فضای متری تام باشد یعنی هر دنباله کشی در H، در آن همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت[۱۷] است.

تعریف ۶.۴.۲. تابع $f(x)$ را متعلق به فضای هولدر[۱۸] $C^s(\mathbb{R})$ گوییم هرگاه

الف: اگر $s=n$ آنگاه $f(x)$ ، n بار مشتق‌پذیر باشد.

ب: اگر $0<s<1$ آنگاه

$$C^s(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{f: f\in L^\infty(\mathbb{R}), sup_h \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^s}<\infty\right\}$$

ج: اگر $s=n+s'$ ، $0<s'<1$ انگاه

$$C^s(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{f: f\in L^\infty(\mathbb{R})\cap C^n(\mathbb{R}) \Big| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f\in C^{s'}(\mathbb{R})\right\}$$

[۱۶] Lebesgue
[۱۷] Hilbert
[۱۸] Holder

تعریف ۷.۴.۲. در زیر یک تعریف از فضای بسوف[۱۹] غیر همگن را بر بازه $I \subset R$ بیان می‌کنیم. فرض کنید

$$\Delta_h^{(\circ)} f(t) = f(t)$$
$$\Delta_h^{(r)} = \Delta_h^{(r-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(r-1)} f(x)$$

که در آن $\Delta_h^{(\circ)} f(t)$ ، تفاضل مرتبه صفر و $\Delta_h^{(r)}$ تفاضل مرتبه rام هستند. $\Delta_h^{(r)}$ برای بازه $I_{rh} = \{x \in I | x + rh \in I\}$ تعریف شده است.

ضریب rام همواری تابع $f \in L^p(I)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{r,p}(f;t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^{(r)} f\|_{L^p(I_{rh})}$$

به ازای مقادیر $\circ < p \leq \infty, s > \circ$ و $\circ < q \leq \infty$ $r,$ راچنان انتخاب می‌کنیم که $r - ۱ \leq s \leq r$.

نرم نیمه فضای بسوف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم اگر $۱ \leq q < \infty$ آنگاه

$$|f|_{B^s_{p,q}} = \Big[\int_\circ^\infty \big(h^{-s} W_{r,p}(f;h)\big)^q \frac{\mathrm{d}h}{h} \Big]^{\frac{1}{q}}$$

اگر $q = \infty$ آنگاه

$$|f|_{B^s_{p,q}} = \sup W_{r,p}(f;h) \qquad (۳.۲)$$

نرم فضای بسوف بصورت $\|f\|_{L^p(I)} + |f|_{B^s_{p,q}}$ تعریف می‌کنیم.

فضای بسوف کلاس بزرگی از توابع است که دارای نرم بسوف متناهی‌اند و این کلاس را با $F^s_{p,q}$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه به بیان تعاریف مورد نیاز در این فصل می‌پردازیم.

تعریف ۸.۴.۲. فرض کنید $\{\phi_n\}$ خانواده‌ای از توابع در یک فضای هیلبرت باشد، این خانواده را متعامد گوییم هرگاه

$$< \phi_n, \phi_m > = \circ \quad , \quad \forall n \neq m$$

[۱۹] Bosov

که در آن $< \phi_n, \phi_m >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n \phi_m \mathrm{d}x$.

تعریف ۹.۴.۲. دو تابع f, g از $L^۲(R)$ را متعامد گوییم هرگاه $< f, g >= ۰$ و می‌نویسیم $f \perp g$.

تعریف ۱۰.۴.۲. دنباله $\{f_n\}_{n\in Z}$ از توابع را به طوری که $\|f_n\| = ۱$، متعامد یکه گوییم هرگاه به ازای هر n داشته باشیم

$$< f_n, f_m > \;\; = \;\; \delta_{m,n} = \begin{cases} ۱ & , \quad m = n, \\ ۰ & , \quad m \neq n. \end{cases}$$

تعریف ۱۱.۴.۲. هرگاه f یک تابع انتگرال پذیر بر $[-\pi, \pi]$ باشد در اینصورت

$$c_t \;\; = \;\; \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-itx} \mathrm{d}x,$$

که در آن i ثابت یکه با شرط $i^۲ = -۱$ می‌باشد را tامین ضریب فوریه تابع f گویند و $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} c_t\, e^{itx}$ را سری فوریه تابع f می‌نامند.

تعریف ۱۲.۴.۲. تبدیل فوریه تابع $f \in L^۱(\mathbb{R})$ عبارتست از

$$\hat{f}(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-itx} \mathrm{d}x, \qquad (t \in \mathbb{R}^۱).$$

۵.۲ موجک

موجک‌ها ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی و توانایی بالا در کاربرد هستند و برای تجزیه وتحلیل یک تابع نوسانی از زمان یا مکان که موج نامیده می‌شود بکار می‌روند، در واقع موجک‌ها، توابع پایه متعامد یکه هستند که از اتساع و انتقال یک موجک اصلی به‌نام موجک مادر حاصل می‌شوند. اساس روش تبدیل موجکی، اتساع (فشرده کردن) و انتقال (لغزاندن) تابع موجکی روی سیگنال یا تابع تحت بررسی است. برای بررسی بیشتر این تبدیل، ابتدا تعریف زیر را در نظر بگیرید

تعریف ۱.۵.۲. تابع $\phi(x) \in L^۲(\mathbb{R})$ را که به صورت

$$\phi(x) \;\; = \;\; I_{۰ \leq x < ۱} = \begin{cases} ۱ & , \quad ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

می‌باشد، یک تابع مقیاس[۲۰] هار و یا موجک پدر[۲۱] می‌نامند.

تعریف ۲.۵.۲. تابع

$$\psi(x) = I_{\circ\leq x<\frac{1}{2}} - I_{\frac{1}{2}\leq x<1} = \begin{cases} 1 & , \quad \circ \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \circ & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

را موجک مادر[۲۲] و یا موجک اساسی[۲۳] می‌نامند، چون اتساع‌های دوتایی و انتقال‌های صحیح می‌زاید.

به سادگی می‌توان دید که موجکهای پدر و مادر در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1), \qquad \psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1). \tag{۴.۲}$$

و همچنین برای $z \ni k, j \geq \circ, k,j \in z$ و $j \geq \circ$ و $k = \circ, 1, \ldots, 2^j - 1$، انتقال‌های مقیاس شده ϕ و ψ، به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\psi_{j,k}(x) = \psi\left(2^j x - k\right), \qquad \phi_{j,k}(x) = \phi\left(2^j x - k\right). \tag{۵.۲}$$

برای j ثابت، $\psi_{j,k}(x)$ را موجک نسل jام یا رده jام می‌نامند.

با توجه به رابطه (۵.۲)، می‌توان نوشت

$$Supp\ \psi_{j,k}(x) = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right],$$

که در آن $Supp$ تکیه‌گاه تابع می‌باشد. کار j، فشرده کردن تابع روی محور x (اتساع) و وظیفه k، لغزاندن و یا حرکت تابع (انتقال) روی محور xهاست.

در رابطه (۵.۲)، برای $k > \circ$ انتقال نمودار به سمت راست، و برای $k < \circ$ انتقال نمودار به سمت چپ می‌باشد، که موجک مادر تولید می‌شود. به همین ترتیب برای $k = \circ$ داریم $f_{j,\circ} = f\left(2^j x\right)$، که برای مقادیر مثبت j، تابع موجک منقبض یا فشرده و برای مقادیر منفی آن، منبسط یا کشیده

[۲۰] Scale function
[۲۱] Father wavelet
[۲۲] Mother wavelet
[۲۳] Basic wavelet

می‌شود.

همچنین $j=0$ متناظر با موجک مادر است و برای $j=1$ موجک‌های $\psi_{1,1}(x)=\psi(2x-1)$ و $\psi_{1,0}=\psi(2x)$ بدست می‌آیند که به موجک دختر[۲۴] معروف هستند. اگر همه موجکهای نسل jام را در نظر بگیریم، در این‌صورت

$$\cup_{k=0}^{2^j-1}\psi j,k \quad = \quad [0,1].$$

با توجه به تعریف توابع $\phi(x)$ و $\psi(x)$ و $\psi(2x)$ و $\psi(2x-1)$، دو عمل اساسی در آنها دیده می‌شود که انتقال و اتساع می‌باشند. گامی که از $\psi(2x)$ به $\psi(2x-1)$ برداشته می‌شود انتقال است و گامی که از $\psi(x)$ به $\psi(2x)$ برداشته می‌شود اتساع است.

با شروع از یک تابع مشخص، نمودارها انتقال یافته و فشرده می‌شوند. مرحله بعدی $\psi(4x)$، $\psi(4x-1)$، $\psi(4x-2)$ و $\psi(4x-3)$ است که هر یک از آنها درون بازه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ مخالف صفر هستند. بنابراین خانواده نامتناهی از توابع هار به‌صورت $\psi_{j,k}(x)=\psi\left(2^jx-k\right)$، همراه با $\phi(x)$ داریم. زمانی که $j\geq 0$ و $2^j\leq k\leq 0$ باشد، این توابع، پایه جالب توجهی برای $L^2([0,1])$ را ارائه می‌دهند.

چهار تابع $\phi(x)$، $\psi(x)$، $\psi(2x)$ و $\psi(2x-1)$ قطعه وار ثابت هستند. هر تابعی که در یکی از ربع بازه‌ها ثابت باشد ترکیبی از این چهار تابع است به عبارتی دقیق تر این توابع تشکیل پایه می‌دهند. همچنین ضرب داخلی $\int\phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x=0$ است. ضرب‌های داخلی دیگر توابع نیز مشابه است. استرامبرگ[۲۵] اولین کسی است که پایه‌های موجکی را بهبود بخشید و پایه‌های متعامد یکه به صورت $\psi_{j,k}(x)=2^j\psi\left(2^jx-k\right)$ را ساخت. ارزش عمده متعامد بودن به این است که محاسبه ضرایب بسط را آسان می‌سازد.

تعریف ۳.۵.۲. موجک مادر از رده m (میر، ۱۹۹۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید m یک عدد طبیعی باشد. تابع ψ را موجک مادر از رده m می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

[۲۴] Daughter wavelet

[۲۵] Strumberg

الف- اگر $m = ۰$، $\psi(X) \in L^\infty(R)$ و هرگاه $m \geq ۱$، تابع ψ و مشتق آن تا مرتبه m متعلق به $L^\infty(\mathbb{R})$ باشند.

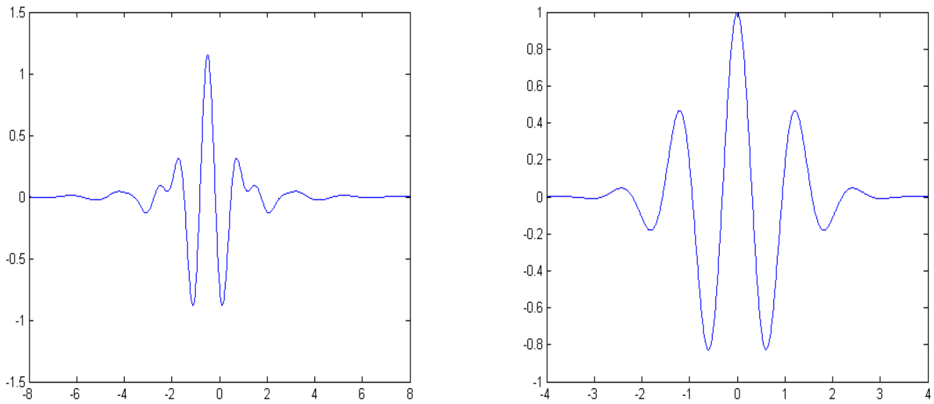
ب - ψ و تمام مشتق‌های آن تا مرتبه m وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ، سریعا نزولی باشند.

ج - برای $۰ \leq k \leq m$ داشته باشیم $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x)\mathrm{d}x = ۰$.

د - مجموعه توابع $۲^{j/۲}\psi(۲^j x - k)$ ، $j, k \in z$ یک پایه متعامد برای $L^۲(R)$ باشند.

موجک‌های مادر بسیاری مانند موجک مادر هار، موجک کلاه مکزیکی[۲۶]، موجک شانون[۲۷]، موجک لیتل وود ـ پالی[۲۸]، موجک مورلت و موجک میر وجود دارند که می‌توان آنها را در بخش ۴ – ۳ کتاب ویداکوویچ (۱۹۹۹) ملاحظه کرد.

چند نمونه از موجک مادر را در شکل ۳.۲ و ۴.۲ ملاحظه می‌کنید.



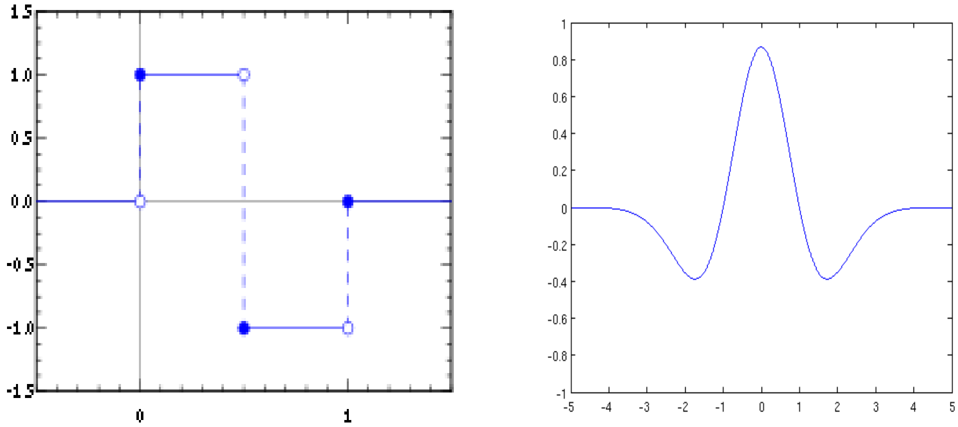
شکل ۳.۲: (راست به چپ) ، مورلت و میر

۱.۵.۲ تبدیل موجک

تعریف ۴.۵.۲. تبدیل موجک تجزیه یک تابع بر مبنای توابع موجک است.

تعداد زیادی تبدیل موجک وجود دارد دو نوع از معمول‌ترین آن‌ها عبارتند از

[۲۶] Mexico hat wavelet
[۲۷] Shanon wavelet
[۲۸] Little wood and Pally wavelet



شکل ۴.۲: (راست به چپ)،کلاه مکزیکی و هار

۱. تبدیل موجک گسسته[۲۹] (DWT): تبدیل موجکی است که توابع موجک آن نمونه‌برداری شده‌اند.

۲. تبدیل موجک پیوسته[۳۰] (CWT): تبدیلی است که تابعی پیوسته در زمان را به فضای زمان ـ فرکانس می‌برد. پایه‌های فضای جدید، توابع موجک هستند. در ریاضیات تبدیل موجک پیوسته برای تابع پیوسته $f(t)$ که مربع آن انتگرال پذیر باشد در مقیاس $a > 0$ و مکان $b \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌شود

$$f_w(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t,$$

که $\psi(t)$ تابعی پیوسته در زمان–فرکانس است و بنام موجک مادر شناخته می‌شود.

از دیگرتبدیل‌های موجک معمول می‌توان به تبدیل موجک سریع[۳۱] (FWT) و تبدیل موجک ساکن[۳۲] (SWT) و ... اشاره کرد.

[۲۹] Discrete wavelet transform
[۳۰] Countinuous wavelet transform
[۳۱] Fast wavelate transform
[۳۲] Stationary wavelet transform

۲.۵.۲ تقریب تابع f

فرض کنید $f \in L^2(R)$، همچنین V_j فضای تولید شده توسط انتقالهای $\phi(2^j x - k)$ برای j ثابت باشد، با توجه به مطالب ذکر شده می‌توان تقریب تابع f را بصورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{k\in z} \alpha_{j_0,k}\, \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in z} \beta_{j,k}\, \psi_{j,k}(x) \tag{۶.۲}$$

که در آن $\psi_{j,k}$ها پایه‌های موجکی و $\phi_{j_0,k}$ ، پایه برای V_{j_0} است،

همچنین ضرایب مقیاسی $\alpha_{j_0,k}$ و $\beta_{j,k}$ بصورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} \alpha_{j_0,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j_0,k}(x) f(x) \mathrm{d}x, \\ \beta_{j,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x) f(x) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

۳.۵.۲ هموار سازی در مبحث موجک‌ها

بحث هموارسازی در بخش برآورد توابع بر اساس موجک‌ها، بدین معنا است که برخی از ضرایب را در بسط موجکی برابر با صفر قرار دهیم. این کار به روش‌های مختلفی انجام می‌گیرد، یکی از این راه‌ها بریدن سری یا روش انقباضی کردن است. بعنوان مثال چندین جمله اول از بسط تابع را نگه داشته و بقیه را برابر صفر قرار می‌دهیم. این روش یک هموارسازی خطی است. راه دیگر نگه داشتن آن ضرایبی است که قدرمطلق اندازه آنها بیشتر از برخی آستانه‌ها باشد، که نتیجه یک تابع غیر خطی از ضرایب خواهد بود. به این روش آستانه‌ای کردن می‌گوییم. در ادامه به بررسی این دو روش می‌پردازیم.

بسط تابع f در $[0,1]$ (در رابطه ۶.۲ برای سادگی $j_0 = 0$ در نظر گرفته شده است) را به صورت زیردر نظر بگیرید

$$f(x) = \sum_{k\in z} \alpha_{j_0,k}\, \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=0}\sum_{k\in z} \beta_{j,k}\, \psi_{j,k}(x) \tag{۸.۲}$$

بدیهی است که نمی‌توان تعداد نامتناهی از β_{jk}ها را در یک نمونه متناهی برآورد کرد. بنابراین معمولا فرض می‌شود که تابع f متعلق به یک فضای تابعی خاص (معمولا فضای بسوف در نظر

گرفته می‌شود) بوده و یا تعدادی از جملات سری بصورت زیر بریده می‌شوند

$$f(x) = \sum_{k\in z}\alpha_{j_\circ,k}\ \phi_{j_\circ,k}(x)+\sum_{j=\circ}^{M}\sum_{k\in z}\beta_{j,k}\ \psi_{j,k}(x)$$

که در آن $M < ۲^j - ۱$. در این صورت برآوردگر خطی و بریده شده آن عبارتست از

$$\hat{f}_M(x)=\sum_{k\in z}\hat{\alpha}_{j_\circ,k}\ \phi_{j_\circ,k}(x)+\sum_{j=\circ}^{M}\sum_{k\in z}\hat{\beta}_{j,k}\ \psi_{j,k}(x)$$

که در آن ضرایب موجکی به صورت زیر برآورد می‌شوند

$$\hat{\alpha}_{jk}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\phi_{jk}(X_i),\qquad \hat{\beta}_{jk}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\psi_{jk}(X_i)$$

دسته وسیعی از برآوردگرهای آماری از نوع برآوردگرهای بریده شده هستند. عملکرد برآوردگر خطی و بریده شده فوق به انتخاب M بستگی دارد. اگر مقدار آن کوچک انتخاب شود برآورد بدست آمده به اندازه کافی هموار نخواهد بود و بلعکس اگر $M = j - ۱$ آنگاه تقریبا از تمام مشاهدات استفاده شده است. در واقع مسئله انتخاب این مقدار، مسئله انتخاب یک مدل مناسب برای تابع تحت بررسی است. دونوهو و جانستون و همکاران (۱۹۹۶) نشان دادند که هیچ کدام از برآوردگرهای خطی نمی‌تواند در برآورد توابع ناهمگن بهینه باشند. در مقابل دسته‌ای دیگری از برآوردگرهای غیر خطی آستانه‌ای را معرفی کردند که بصورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۵.۲. برآوردگرهای غیرخطی آستانه‌ای برآوردگرهایی هستند که در آن دسته‌ای از ضرایب موجکی که از یک مقدار معلوم و مشخص به نام آستانه بزرگ‌تر هستند انتخاب ودر مدل قرار می‌گیرند. یک آستانه مشخص می‌کند که کدامیک از ضرایب موجکی در مدل قرار گرفته و کدامیک از مدل حذف شوند. این روش، روش آستانه‌ای و برآوردگر بدست آمده، برآوردگر آستانه‌ای[۳۳] نامیده می‌شود.

بنابراین برآوردگر غیرخطی تابع f بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{f}(x) = \sum_{j}\hat{\alpha}_j\ \phi_j(x)+\sum_{i=\circ}^{q-۱}\sum_{j}\hat{\beta}_{ij}I(|\hat{\beta}_{ij}|>\lambda)\psi_{ij}(x) \qquad (۹.۲)$$

[۳۳] Threshold estimator

که در آن λ مقدار آستانه است.

آستانه‌ای کردن برآوردگرهای موجکی می‌تواند به عنوان یک مسئله آزمون فرضیه تلقی شود. در واقع برای هر یک از ضراب موجکی فرضیه زیر را آزمون می‌کنیم

$$\begin{cases} H_0 : \beta_{ij} = 0 \\ H_1 : \beta_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

اگر فرضیه H_0 رد شود، ضریب مورد بررسی در مدل قرار می‌گیرد. در غیر اینصورت از مدل حذف می‌شود.

برحسب اینکه مقدار آستانه چگونه انتخاب شود، روش‌های مختلفی برای آستانه‌ای کردن وجود دارد که معمول‌ترین آنها عبارتند از

۱. روش آستانه‌ای نرم[۳۴]: در این روش $\hat{\beta}_{jk}$ عبارتست از

$$\hat{\beta}^S_{jk} = \left(|\hat{\beta}_{jk}| - \lambda\right)_+ \times sign(\hat{\beta}_{jk}) \qquad (۱۰.۲)$$

که در آن $0 < \lambda$ آستانه معلوم است. برآوردگر موجک با روش آستانه‌ای نرم را برآوردگر انقباضی[۳۵] موجک نیز می‌نامیم.

۲. روش آستانه‌ای سخت[۳۶]: در روش آستانه‌ای سخت $\hat{\beta}_{jk}$ عبارتست از

$$\hat{\beta}^H_{jk} = \hat{\beta}_{jk} I\{|\hat{\beta}_{jk}| > \lambda\}. \qquad (۱۱.۲)$$

استفاده از یک آستانه سخت باعث ایجاد واریانس بزرگ‌تر در برآورد بدست آمده می‌شود در حالیکه استفاده از آستانه نرم اریبی را بیشتر می‌کند. برای اطلاعات بیشتر درباره ویژگی‌های آستانه‌های سخت و نرم و ایجاد توازن میان واریانس و اریبی به هال و پاتل (۱۹۹۵) مراجعه کنید.

از دیگر روش‌ها می‌توان به روش‌های آستانه‌ای محلی، عمومی و بلوکی اشاره کرد.

ملاحظه ۶.۵.۲. *نوع آستانه انتخاب شده تاثیر زیادی در دقت برآوردگر حاصل دارد، بدین ترتیب که یک آستانه بزرگ ممکن است قسمت مهمی از تابع تحت بررسی را حذف کند و برعکس،*

[۳۴] Soft thresholding method
[۳۵] Shrinkage estimator
[۳۶] Hard thresholding method

مقدار کوچک آن باعث ورود اغتشاش در برآورد می‌شود. برای جلوگیری از بروز این مشکلات در محاسبات آستانه عمومی به صورت زیر را استفاده می‌کنیم

$$\lambda_{un} = \frac{\sigma\sqrt{۲\log n}}{\sqrt{n}}$$

که در آن σ مجهول با برآورد آن یعنی $\hat{\sigma}$ جایگزین می‌شود (دونوهو و جانستون، ۱۹۹۴).

فصل ۳
برآوردگر موجکی بیزی در توزیع نرمال

۱.۳ مقدمه

در این فصل بر پایه برآوردگر موجکی، برآوردگر بیز تعمیم یافته را در توزیع نرمال چند متغیره، تحت تابع زیان لینکس می‌یابیم و به بررسی مجاز و مینیماکس بودن آن می‌پردازیم. همچنین با استفاده از موجک‌ها و روش آستانه‌ای نرم، یک نسخه تجربی برای برآوردگر بیز تعمیم یافته مجاز و مینیماکس پیدا می‌کنیم و همچنین در این راستا به معرفی و بررسی تابع زیان نامتقارن لینکس می‌پردازیم. نتایج این فصل عمدتا بر پایه مرجع هوآنگ[۱] (۲۰۰۲) است.

۲.۳ تابع زیان لینکس نامتقارن

در شرایطی که اریبی مثبت و اریبی منفی با اندازه‌های یکسان دارای اهمیت متفاوتی هستند، تابع زیان متقارن نامناسب است. همچنین در بسیاری از موقعیت‌های زندگی واقعی، بیش‌برآورد و کم‌برآورد با اندازه‌های یکسان، اغلب مفاهیم متفاوت اقتصادی و مادی دارند، به عبارتی خطای مثبت ممکن است جدی‌تر یا مهم‌تر از خطای منفی باشد و یا بالعکس. در این شرایط استفاده از یک تابع زیان متقارن مانند، تابع زیان درجه دوم خطا، که قادر به تفکیک بیش برازش و کم برازش نمی‌باشد نامناسب است. در این زمینه زلنر و گیسل[۲] (۱۹۶۸)، واریان (۱۹۷۵) و برگر (۱۹۸۰) مطالعاتی

[۱] Huang
[۲] Geisel

انجام داده‌اند . در این موارد تابع زیان مناسب، زیان نامتقارن می‌باشد.

تمامی مولفین ذکر شده در بالا به‌غیر از واریان، تابع زیان نامتقارن خطی را معرفی کردند. واریان در یک مطالعه کاربردی در ارزیابی مالیات املاک و مستغلات، تابع زیان نامتقارن بسیار مفیدی به نام لینکس را معرفی کرد که در یک طرف صفر تقریبا بصورت نمایی افزایش می‌یابد، در حالی که در سمت دیگر آن بصورت خطی رفتار می‌کند. برای اطلاعات بیشتر واریان (۱۹۷۵) را ببینید.

همچنین به عنوان مثال عینی می‌توان به این مورد اشاره کرد که در ساخت و ساز سد کم‌برآورد حداکثر سطح آب، بسیار مهمتر و جدی‌تر از بیش برآورد آن است چون ممکن است در اثر کم برآورد سطح آب، در یک طوفان سیل آسا آب پشت سد از دیواره آن بالاتر آمده و از آن خارج شود و خسارات مالی و جانی به دنبال داشته باشد این در حالی است که پیش برآورد حداکثر سطح آب فقط ممکن خسارت ناشی از هزینه‌های ساخت و ساز را در پی داشته باشد (زلنر، ۱۹۸۶).

۱.۲.۳ فرمول ریاضی

فرض کنید $\hat{\theta}$ براوردگری طبیعی برای $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\Delta = \hat{\theta} - \theta$، نشان‌دهنده خطای برآورد می‌باشد. واریان (۱۹۷۵)، تابع زیان محدبی به صورت زیر معرفی کرد

$$\mathcal{L}(\Delta) \;=\; be^{a\Delta} - c\Delta - b, \quad a, c \neq 0, b > 0. \tag{۱.۳}$$

در رابطه (۱.۳) مشاهده می‌شود که $\mathcal{L}(0) = 0$ است. برای وجود مینیمم در $\Delta = 0$، کافیست $ab = c$ در نظر بگیریم که با این تبدیل می‌توانیم رابطه (۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی کنیم

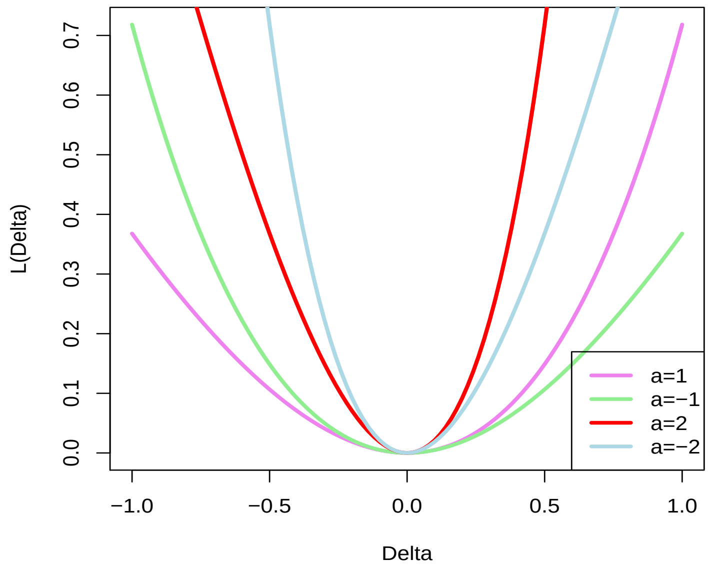
$$\mathcal{L}(\Delta) \;=\; b[e^{a\Delta} - a\Delta - 1], \quad a \neq 0, b > 0. \tag{۲.۳}$$

در رابطه بالا b پارامتر مقیاس[۳] و a پارامتر شکل[۴] است. در شکل ۱.۳ نمودار $\mathcal{L}(\Delta)$ را به ازای مقادیر متفاوتی از a با فرض $b = 1$ مشاهده می‌کنید.

همانطور که در شکل ۱.۳ ملاحظه می‌کنید برای $a = 1$ تابع، کاملا نامتقارن و ارزش بیش‌برآورد نسبت به کم‌برآورد بیشتر است. و برای $a = -1$ عکس آن برقرار است به عبارتی ارزش کم‌برآورد

[۳] Scale parameter

[۴] Shape parameter



شکل ۱.۳: تابع زیان لینکس

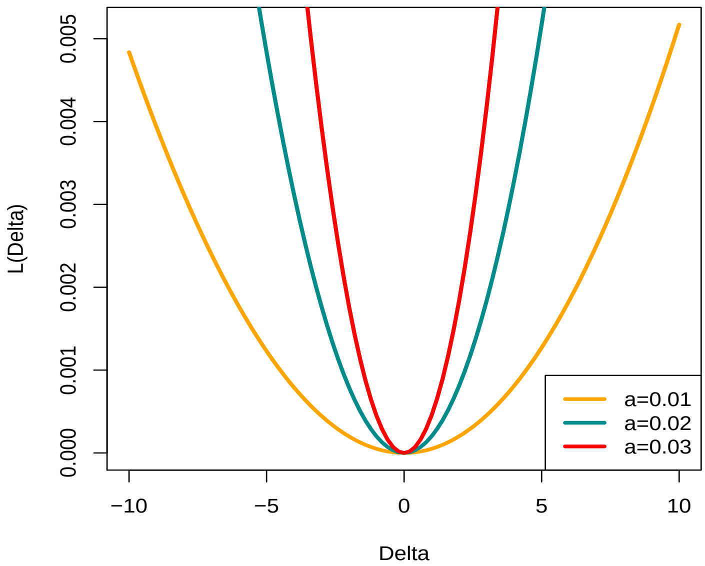
بیشتر از بیش‌برآورد است. بطور کلی زمانی که $a > ۰$ باشد در صورتی که $\Delta > ۰$ تابع زیان به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد و در صورتیکه $\Delta < ۰$ تابع زیان بصورت خطی افزایش می‌یابد. بنابراین a مثبت، بیش‌برازش را کم کرده و در نتیجه برآوردها را به سمت چپ، جابجا می‌کند. زمانی که $a < ۰$، معکوس حالت فوق اتفاق می‌افتد یعنی در صورتی که $\Delta < ۰$ تابع زیان به‌صورت نمایی افزایش یافته و در حالی که $\Delta > ۰$ زیان به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. بنابراین a منفی اثر کم‌برازش را کم کرده و در نتیجه برآوردها را به سمت راست جابجا می‌کند.

برای مقادیر کوچک $|a|$، همانطور که در شکل ۲.۳ مشاهده می‌کنید تابع زیان تقریبا متقارن است و اختلاف چندانی با تابع زیان درجه دوم خطا ندارد. در واقع با استفاده از بسط نمایی به صورت

$$e^{a\Delta} \simeq ۱ + a\Delta + \frac{a^۲\Delta^۲}{۲},$$

داریم

$$\mathcal{L}(\Delta) = \frac{a^۲\Delta^۲}{۲}.$$



شکل ۲.۳: نمودار تابع زیان لینکس به ازای برخی مقادیر کوچک a

که یک تابع زیان درجه دوم است. بنابراین برای مقادیر کوچک $|a|$، برآوردهای بهینه و پیش‌بینی‌ها تفاوت چندانی با برآوردها و پیش‌بینی‌های بدست آمده از تابع زیان درجه دوم خطا ندارند. اگر چه زمانی که برای $|a|$ مقادیر محسوسی فرض شود، برآورد بهینه و پیش‌بینی‌ها کاملا متفاوت از برآوردهای بدست آمده از تابع زیان درجه دوم متقارن هستند. جهت اطلاعات بیشتر به واریان (۱۹۷۵) و زلنر (۱۹۸۶) مراجعه کنید.

تعمیمی از تابع زیان لینکس در حالت چند متغیره بصورت زیر است.

فرض کنید $\Delta_i = \hat{\theta}_i - \theta_i$ خطای برآورد θ_i توسط $\hat{\theta}_i, (i = 1, 2, \ldots, k)$ باشد، در اینصورت تابع زیان لینکس چند متغیره به‌صورت زیر است (آرشی[۵] و همکاران، ۲۰۰۸)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta) &= \sum_{i=1}^{k} b_i(\exp(a_i\Delta_i) - a_i\Delta_i - 1), \\ a_i &\neq 0, b_i > 0, i = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

که در آن $\Delta^T = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$.

[۵] Arashi

این یک تابع زیان محدب می‌باشد به طوری که $\mathcal{L}(\circ) = \circ, \mathcal{L}'(\circ) = \circ$ و $\Delta = \circ$ برابر مینیمم است.

۳.۳ برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس نامتقارن

یک مدل سیگنال گسسته بدست آمده از تبدیل موجکی گسسته را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$w \;=\; \theta + \epsilon,$$

که در آن $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ ضرایب تجربی موجک، $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)^T$ خطا تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 و $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)^T$ ضرایب واقعی موجک هستند.
فرض کنید که $\delta(w) = (\delta_1(w), \ldots, \delta_n(w))$ برآوردگری برای θ باشد. با توجه به روش آستانه‌ای نرم که در فصل دوم بیان کردیم برآورد انقباضی موجکی آستانه نرم که توسط دونوهو و جانستون (۱۹۹۴) معرفی شده عبارت است از

$$\delta_i^{soft}(w, \lambda) = sign(w_i)\ (|w_i| - \lambda)\ I(|w_i| \geq \lambda), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{۴.۳}$$

که در آن $\lambda > \circ$ پارامتر آستانه است.

(*) **قضیه ۱.۳.۳.** *(سویان هوآنگ، ۲۰۰۲) فرض کنید* $w|\theta \sim \mathcal{N}_n(\theta, \sigma^2 I_n)$ ، $\sigma \in \mathbb{R}^+$، *همچنین فرض کنید θ دارای توزیع پیشین یکنواخت $\pi(\theta) = 1$ است، که در آن $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت تحت تابع زیان لینکس چند متغیره*

$$\mathcal{L}(\theta, \delta(w)) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\{\delta_i(w) - \theta_i\} - 1, \quad a_i \neq \circ \tag{۵.۳}$$

برآوردگر بیز تعمیم یافته برای θ برابر است با

$$\delta_i^{GB} \;=\; w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}. \tag{۶.۳}$$

برهان. توزیع پسین عبارتست از

$$\begin{aligned}\theta|w &\propto w|\theta \times \pi(\theta)\\ &\propto w|\theta.\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

در نتیجه

$$\theta|w \sim \mathcal{N}_n(w, \sigma^۲ I_n).$$

بنابراین مخاطره پسین برابر است با

$$\begin{aligned}\rho(\pi(\theta|w), \delta(w)) &= \int_\Theta L(\theta, \delta(w)\ d\pi(\theta|w)\\ &= \int_\Theta \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\} - ۱\right)\right]\\ &\quad f(\theta_i|w_i)\mathrm{d}\theta_i\\ &= I_۱ - I_۲ - I_۳\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \exp\{a_i(\delta_i(w)-\theta_i)\}\, f(\theta_i|w_i)\mathrm{d}\theta_i\\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \exp\{a_i(\delta_i(w)-\theta_i)\} \times \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\theta_i - w_i)^۲}{۲\sigma^۲}\right\}\mathrm{d}\theta_i\\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \frac{۱}{(۲\pi)^{۱/۲}\sigma}\exp\left\{a_i\delta_i - a_i\theta_i - a_iw_i + a_iw_i + \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲} - \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right.\\ &\quad \left.-\frac{(\theta_i^۲ + w_i^۲ - ۲\theta_iw_i)}{۲\sigma^۲}\right\}\mathrm{d}\theta_i\\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\exp\left\{a_i\delta_i - a_iw_i + \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\}\\ &\quad \times \int_\Theta \frac{۱}{(۲\pi)^{۱/۲}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\theta_i - (w_i - \sigma^۲a_i)^۲}{۲\sigma^۲}\right\}\ \mathrm{d}\theta_i\\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\exp\left\{a_i(\delta_i - w_i) + \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\}, \qquad (۸.۳)\\ I_۲ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta a_i\{\delta_i - w_i\}f(\theta_i|w)\mathrm{d}\theta_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\Theta} a_i\delta_i f(\theta_i|w_i)\mathrm{d}\theta_i - \int_{\Theta} a_i\theta_i f(\theta_i|w_i)\mathrm{d}\theta_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a_i\delta_i - a_iE(\theta_i)] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a_i\delta_i - a_iw_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i(\delta_i - w_i), \qquad (۹.۳)\\
I_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta} f(\theta_i|w_i)\mathrm{d}\theta \\
&= 1. \qquad (۱۰.۳)
\end{aligned}$$

از رابطه‌های (۸.۳)، (۹.۳) و (۱۰.۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\rho(\pi(\theta|w),\delta(w)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\exp\left\{a_i(\delta_i-w_i)+\frac{a_i^2\sigma^2}{2}\right\} - a_i(\delta_i-w_i) - 1\right]. \qquad (۱۱.۳)$$

با توجه به تعریف ۸.۳.۱، برآوردگر بیز، برآوردگری است که رابطه ۱۱.۳ را می‌نیمم کند، بنابراین از رابطه ۱۱.۳ نسبت به δ_i مشتق گرفته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم

$$a_ie^{a_i(\delta_i-w_i)+\frac{a_i^2\sigma^2}{2}} - a_i = 0,$$

لذا

$$a_i(\delta_i - w_i) + \frac{a_i^2\sigma^2}{2} = 0,$$

در نهایت برآوردگر بیز برابر است با

$$\delta_i^{GB} = w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}.$$

□

(*) **قضیه ۲.۳.۳.** *فرض کنید $\pi \in \Pi$ توزیع پیشین سره دلخواه باشد، در این صورت تحت تابع زیان لینکس ۵.۳، مخاطره برآوردگر بیز δ^{GB} در قضیه ۱.۳.۳ ، برابر است با*

$$r(\pi,\delta^{GB}) = \frac{\sigma^2}{2n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \qquad (۱۲.۳)$$

برهان. با توجه به تعریف ۱.۳.۱ مخاطره بیز برابر است با

$$\begin{aligned} r(\pi,\delta^{GB}) &= \int_{\Theta} R(\theta,\delta^{GB})\, \mathrm{d}\pi(\theta) \\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\int_{\Theta}\pi(\theta)\int_{W}\exp\left\{a_i\left(\left(w_i-\frac{a_i\sigma^۲}{۲}\right)-\theta_i\right)\right\}\right. \\ &\quad \left. -a_i\left(\left(w_i-\frac{a_i\sigma^۲}{۲}\right)-\theta_i\right)-۱\right] f(w_i|\theta_i)\, \mathrm{d}w_i \mathrm{d}\theta_i \\ &= I_۱ - I_۲ - I_۳ \end{aligned}$$

در ادامه داریم

$$\begin{aligned} I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi(\theta)\int_{W}\exp\left\{a_i\left(\left(w_i-\frac{a_i\sigma^۲}{۲}\right)-\theta_i\right)\right\} f(w_i|\theta_i)\, \mathrm{d}w_i\, \mathrm{d}\theta_i \\ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi(\theta)\mathcal{M}_{w_i}(a_i)\times\exp\left\{-\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\, \mathrm{d}\theta_i, \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{M}_{w_i}(a_i)$ تابع مولد گشتاور w_i می‌باشد.

از آن جایی که

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{w_i}(a_i) &= E(e^{a_i w_i}) \\ &= \exp\left\{a_i\theta_i+\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\}. \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi(\theta)\exp\left\{a_i\theta_i+\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\} \\ &\quad \times\exp\left\{-\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\right\}\times\exp\left\{-a_i\theta_i\right\}\, \mathrm{d}\theta_i \\ &= ۱, \qquad (۱۳.۳) \\ I_۲ &= -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi(\theta)\int_{W}a_i\left(\left(w_i-\frac{a_i\sigma^۲}{۲}\right)-\theta_i\right) f(w_i|\theta_i)\, \mathrm{d}w_i\, \mathrm{d}\theta_i \\ &= \int_{\Theta}\pi(\theta)\left\{a_iE(w_i)-\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}-a_i\theta_i\right\}\, \mathrm{d}\theta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Theta} \pi(\theta) \left\{ a_i\theta_i - \frac{a_i^{۲}\sigma^{۲}}{۲} - a_i\theta_i \right\} \, \mathrm{d}\theta_i \\ &= -\frac{a_i^{۲}\sigma^{۲}}{۲}, \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

$$\begin{aligned} I_{۳} &= \int_{\Theta} \pi(\theta) \int_{W} f(w_i|\theta_i) \, \mathrm{d}w_i \, \mathrm{d}\theta_i \\ &= ۱. \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

از رابطه‌های (۱۳.۳)، (۱۴.۳) و (۱۵.۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$r(\pi, \delta^{GB}) = \frac{\sigma^{۲}}{۲n} \sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲}.$$

□

(*) **قضیه ۳.۳.۳.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۳.۳ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ_i^{GB} مجاز می‌باشد.*

برهان. فرض کنید $\phi(w, \theta, \sigma^{۲}I)$ تابع توزیع $\mathcal{N}_n(\theta, \sigma^{۲}I)$ باشد آنگاه

$$R(\theta, \delta) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\{\delta_i(w) - \theta_i\} - ۱ \right) \, \mathrm{d}\phi(w, \theta, \sigma^{۲}I).$$

برای هر δ در θ پیوسته است.

فرض می‌کنیم δ^{GB} غیر مجاز بوده و $\mathcal{D}$ کلاس کلیه برآوردگرها باشد، آنگاه

$$\exists\, \delta \in \mathcal{D} \quad s.t \quad \forall\, \theta \in \Theta \qquad R(\theta, \delta) \leq R(\theta, \delta^{GB}),$$

و حداقل یک مقدار $\theta_{۰} \in \Theta$ وجود داشته باشد به طوری که نامساوی اکید برقرار باشد. چون $R(\theta, \delta)$ و $R(\theta, \delta^{GB})$ در θ پیوسته هستند، ثابت‌های $c_{۱}$ و $c_{۲}$ مثبتی وجود دارند، به طوری که

$$R(\theta, \delta) < R(\theta, \delta^{GB}) - c_{۱} \quad for \quad \theta \in \{\theta : |\theta - \theta_{۰}| < c_{۲}\}.$$

دنباله‌ای از توزیع‌های پیشین $\lim_{k\to\infty} \tau_k^{۲} = \infty, \pi_k(\theta) \sim \mathcal{N}_n(۰, \tau_k^{۲}I_n)$ را در نظر بگیرید، لذا توزیع پسین تحت پیشین π_k به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\pi(\theta|w) \propto f(w|\theta)\pi_k(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\ \exp\left\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲\sigma^۲}\right\} \times \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\tau_k}\ \exp\left\{-\frac{\theta_i^۲}{۲\tau_k^۲}\right\}\\
&\propto\ \exp\left\{-\frac{(w_i^۲+\theta_i^۲-۲w_i\theta_i)}{۲\sigma^۲}-\frac{\theta_i^۲}{۲\tau_k^۲}\right\}\\
&\propto\ \exp\left[-\frac{۱}{۲}\theta_i^۲\left(\frac{۱}{\sigma^۲}+\frac{۱}{\tau_k^۲}\right)+\theta_i\left(\frac{w_i}{\sigma^۲}\right)\right]\\
&=\ \exp\left[-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sigma^۲}+\frac{۱}{\tau_k^۲}\right)\left(\theta_i^۲-۲\theta_i\ \frac{w_i\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)\right]\\
&\propto\ \exp\left[-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sigma^۲}+\frac{۱}{\tau_k^۲}\right)\left(\theta_i-\frac{w_i\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)^۲\right].
\end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$\theta_i|w_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{\tau_k^۲ w_i}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\ ,\ \frac{\sigma^۲\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)$$

مخاطره پسین، تحت توزیع پیشین π_k و تابع زیان ۵.۳ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\rho(\pi(\theta|w),\delta(w)) \ = \ \int_\Theta L(\theta,\delta(w)\ d\pi(\theta|w)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Theta \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}-a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}-۱\right)\right]\\
&\quad f(\theta_i|w_i)d\theta_i\\
&= I_۱-I_۲-I_۳
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \exp\{a_i(\delta_i(w)-\theta_i)\}\, f(\theta_i|w)d\theta_i\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \exp\{a_i(\delta_i(w)-\theta_i)\}\ \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^۲+\tau_k^۲}}\right)}\\
&\quad \times\exp\left[-\frac{(\theta_i-\frac{\tau_k^۲ w_i}{\sigma^۲+\tau_k^۲})^۲}{۲(\frac{\sigma^۲\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲})}\right]\ d\theta_i\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}\ \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^۲+\tau_k^۲}}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i^2+\frac{\tau_k^4 w_i^2}{(\sigma^2+\tau_k^2)^2}-\frac{2\theta_i\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)}\right\}\right] \mathrm{d}\theta_i \\
= &\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^2+\tau_k^2}}\right)} \exp\Bigg[a_i\delta_i - a_i\theta_i + a_i w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} \\
&-a_i w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} + a_i^2\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)} - a_i^2\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\Bigg] \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i^2+\frac{\tau_k^4 w_i^2}{(\sigma^2+\tau_k^2)^2}-\frac{2\theta_i\tau^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)}\right\}\right] \mathrm{d}\theta_i \\
= &\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left[a_i\delta_i - a_i w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} + a_i^2\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\right]\int_\Theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^2+\tau_k^2}}\right)} \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i - \left(w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} - a_i\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)}\right\}^2\right] \mathrm{d}\theta_i \\
= &\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left[a_i\left(\delta_i - w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) + a_i^2\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\right], \qquad (16.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta a_i\{\delta_i-\theta_i\}f(\theta_i|w)\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a_i\delta_i - a_i E(\theta_i)] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\delta_i - a_i\left(\frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right], \qquad (17.3) \\
I_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta\int_0^\infty f(\theta_i|w_i)d\theta_i = 1. \qquad (18.3)
\end{aligned}
$$

لذا از رابطه‌های (۱۶.۳)، (۱۷.۳) و (۱۸.۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$
\begin{aligned}
\rho(\pi(\theta|w),\delta(w)) = &\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\exp\left\{a_i\left(\delta_i - w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) + a_i^2\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\right\} \\
&-a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) - 1\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\exp\left\{a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\left(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}\right)\right)\right\} \\ &\quad -a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) - 1\Bigg]. \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

با توجه به تعریف ۸.۳.۱، برآوردگر بیز تعمیم یافته، برآوردگری است که رابطه ۱۹.۳ را می‌نیمم کند، بنابراین از رابطه ۱۹.۳ نسبت به δ_i مشتق گرفته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم در این صورت

$$a_i \exp\left\{a_i\left[\delta_i - \frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\left(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}\right)\right]\right\} - a_i = 0,$$

که در نتیجه

$$a_i\left[\delta_i - \frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\left(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}\right)\right] = 0,$$

لذا برآوردگر بیز با توزیع پیشین π_k برابر است

$$\delta_i^{\pi_k}(w) = \frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\left(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}\right), \qquad i = 1,\ldots,n \tag{۲۰.۳}$$

حال در ادامه مخاطره بیز برآوردگر $\delta_i^{\pi_k}(w)$ را با توجه به تعریف ۱.۳.۱ محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} r(\pi_k,\delta^{\pi_k}) &= \int_\Theta R(\theta,\delta^{\pi_k})\, \mathrm{d}\pi_k(\theta) \\ &= \int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\exp\left\{a_i\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}) - \theta_i\right)\right\} \\ &\quad -a_i\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}) - \theta_i\right) - 1\Bigg]\, f(w|\theta)\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}\theta_i \\ &= I_1 - I_2 - I_3 \end{aligned}$$

در ادامه داریم

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W \exp\left\{a_i\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}(w_i - \frac{a_i\sigma^2}{2}) - \theta_i\right)\right\} f(w_i|\theta_i)\, \mathrm{d}w_i\, \mathrm{d}\theta_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta) E\left(\exp\left\{\left(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) w_i\right\}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \exp\left\{-a_i^2\frac{\sigma^2}{2}\times\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right\}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\,\mathrm{d}\theta_i\\
=\;&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\;\mathcal{M}_{w_i}\big(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\big)\\
&\times \exp\left\{-a_i^2\frac{\sigma^2}{2}\times\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right\}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\,\mathrm{d}\theta_i,
\end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{M}_{w_i}\big(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\big)$ تابع مولد گشتاور w_i در نقطه $\big(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\big)$ است. از آن جایی که

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{w_i}(a_i) &= E\left[e^{w_i\left(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)}\right]\\
&= \exp\left\{\left(a_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\theta_i+\frac{1}{2}a_i^2\sigma^2\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}
I_1 =\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\exp\left\{\left(\frac{a_i\tau_k^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)\theta_i+\frac{1}{2}\sigma^2a_i^2\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2\right\}\\
&\times\exp\left\{-a_i^2\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right\}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\mathrm{d}\theta_i\\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{a_i^2\sigma^2}{2}\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}-1\right)\right\}\\
&\times E\left(\exp\left\{a_i\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}-1\right)\theta_i\right\}\right)\\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{a_i^2\sigma^2}{2}\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}-1\right)\right\}\\
&\times\exp\left\{\frac{\tau_k^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}-1\right)^2a_i^2\right\}\\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{\sigma^2a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2-\frac{\sigma^2a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{a_i^2\tau_k^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2+\frac{a_i^2\tau_k^2}{2}-a_i^2\left(\frac{\tau_k^4}{\tau_k^2+\sigma^2}\right)\right\}\\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2(\sigma^2+\tau_k^2)-\frac{\sigma^2a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{a_i^2\tau_k^2}{2}-a_i^2\left(\frac{\tau_k^4}{\tau_k^2+\sigma^2}\right)\right\}\\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^4}{\tau_k^2+\sigma^2}\right)-\frac{\sigma^2a_i^2}{2}\left(\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{a_i^۲\tau_k^۲}{۲} - a_i^۲\left(\frac{\tau_k^۴}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right)\Bigg\} \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\exp\left\{\left(-\frac{\tau_k^۴}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right)\frac{a_i^۲}{۲} - \frac{\sigma^۲ a_i^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right) + \frac{a_i^۲\tau_k^۲}{۲}\right\} \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\exp\left\{-\frac{a_i^۲\tau_k^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_K^۲+\sigma^۲} + \frac{\sigma^۲}{\tau_K^۲+\sigma^۲}\right) + \frac{a_i^۲\tau_k^۲}{۲}\right\} \\
&= ۱, \qquad (۲۱.۳)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_۲ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W a_i\left(\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\left(w_i - \frac{a_i\sigma^۲}{۲}\right) - \theta_i\right) f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\times\left\{a_i\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right)E(w_i) - \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right) - a_i\theta_i\right\}\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\times\left\{a_i\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right)\theta_i - \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right) - a_i\theta_i\right\}\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[a_i E\left\{\theta_i\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲} - ۱\right)\right\} - \frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right)\right] \\
&= -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i^۲\sigma^۲}{۲}\left(\frac{\tau_k^۲}{\tau_k^۲+\sigma^۲}\right), \qquad (۲۲.۳)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_۳ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= ۱. \qquad (۲۳.۳)
\end{aligned}
$$

از رابطه‌های (۲۱.۳)، (۲۴.۳) و (۲۵.۳) نتیجه می‌شود

$$r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) = \frac{\sigma^۲\tau_k^۲}{۲n(\sigma^۲+\tau_k^۲)}\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲.$$

مخاطره بیزبرآوردگر δ^{GB}، تحت توزیع پیشین π_k، طبق قضیه ۲.۳.۳ برابر است با

$$r(\pi_k, \delta^{GB}) = \frac{\sigma^۲}{۲n}\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲.$$

فرض کنید

$$c_۳ = \lim\inf_{k\to\infty}\int_{|\theta-\theta_۰|<c_۲}\pi_k(\theta).\,\mathrm{d}\theta$$

با توجه باینکه $\lim_{k\to\infty} \tau_k^2 = \infty$، داریم

$$c_3 = \lim \inf_{k\to\infty} \int_{|\theta-\theta_0|<c_2} \pi_k(\theta)\, d\theta > 0.$$

بنابراین برای k به اندازه کافی بزرگ می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} r(\pi_k, \delta^{GB}) - r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) &\geq r(\pi_k, \delta^{GB}) - r(\pi_k, \delta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(R(\theta, \delta^{GB}) - R(\theta, \delta)\big)\pi_k(\theta)\, d\theta \\ &\geq \int_{|\theta-\theta_0|<c_2} \big(R(\theta, \delta^{GB}) - R(\theta, \delta)\big)\pi_k(\theta)\, d\theta \\ &> c_1 c_3 > 0. \end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ r(\pi_k, \delta^{GB}) - r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) \right\} = 0. \tag{۲۵.۳}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه (۲۴.۳) با رابطه (۲۵.۳) در تناقض است، از اینرو فرض غیر مجاز بودن برآوردگر δ^{GB} رد می‌شود. □

(*) **قضیه ۴.۳.۳.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۳.۳ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ^{GB} مینیماکس می‌باشد.*

برهان. با توجه به قضیه ۳.۳.۳، برآوردگر δ^{GB} مجاز بوده و دارای مخاطره ثابت به صورت

$$r(\pi, \delta^{GB}) = \frac{\sigma^2}{2n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

می‌باشد از اینرو با توجه به قضیه ۹.۳.۱ و لم ۱۰.۳.۱ ، δ^{GB} برآوردگر مینیماکس است. □

۱.۳.۳ نسخه تجربی برآوردگر بیز تعمیم یافته

در این قسمت فرض کنید در تابع زیان لینکس چند متغیره ۵.۳ مقادیر a_i وابسته به علامت θ_i باشند به عبارتی داشته باشیم

$$a_i = \begin{cases} c & , \quad \theta_i \geq 0 \quad , i = 1, \cdots, n, \\ -c & , \quad \theta_i < 0 \quad , i = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

که در آن $c > \circ$ عدد ثابت است. در این‌صورت برآوردگر بیز تعمیم یافته مجاز و مینیماکس در قضیه ۱.۳.۳ بصورت زیر بدست می‌آید

$$\delta_i^{GB} = w_i - sign(\theta_i)\lambda, \qquad \lambda = \frac{c\sigma^{۲}}{۲}.$$

غالبا علامت پارامتر θ_i مجهول است، می‌توان علامت w_i را برای برآورد علامت θ_i بکار برد و برشی در صفر ایجاد کرد. در این‌صورت نسخه تجربی از برآوردگر δ^{GB} برابر است با

$$\begin{aligned}\delta_i^{soft}(w) &= \begin{cases} (w_i - \lambda) \vee \circ & , \quad w_i \geq \circ, \\ \\ (w_i + \lambda) \wedge \circ & , \quad w_i < \circ, \end{cases} \\ &= sign(w_i)(|w_i| - \lambda)_+. \end{aligned} \qquad (۲۶.۳)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید برآوردگر بدست آمده در رابطه (۲۶.۳)، همان برآوردگر انقباضی موجکی نرم رابطه (۴.۳) می‌باشد.

به عنوان نتیجه مهم از این بخش می‌توان گفت برای حالت خاصی از تابع زیان لینکس نامتقارن، برآورد انقباضی موجکی نرم را می‌توان به عنوان نسخه تجربی از برآوردگر بیز تعمیم یافته مجاز و مینیماکس بکار برد.

فصل ۴
برآوردگر موجکی بیزی در توزیع نرمال آمیخته مقیاسی

۱.۴ مقدمه

معمول است که توزیع مربوط به خصوصیات مورد بررسی یک جامعه آماری را نرمال فرض کنیم، اما ممکن است همیشه چنین فرضی صحیح نباشد. از اینرو بر آن شدیم که توزیع نرمال را تعمیم داده و توزیعی را در نظر بگیریم که دارای خصوصیاتی مشابه توزیع نرمال باشد که در آن توزیع نرمال به عنوان یک مولفه اصلی در تابع چگالی وجود دارد. در این راستا در این بخش به معرفی رده‌ای از توزیع‌های آمیخته مقیاسی[۱] می‌پردازیم و در ادامه توزیع نرمال آمیخته مقیاسی[۲] را که در سالهای اخیر مورد توجه بسیار قرار گرفته، به عنوان یک حالت خاص، از این خانواده معرفی می‌کنیم. خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی اولین بار توسط آندرو و مالو[۳](۱۹۷۴) معرفی شد. در ادامه با توجه به نتایج جالب فصل سوم، در پی تعمیم این نتایج برای این رده از توزیع‌ها هستیم.

۲.۴ توزیع آمیخته مقیاسی

فرض کنید T یک متغیر مثبت تک نمایی با تابع توزیع $G(t,\alpha)$ (α می‌تواند یک عدد یا یک بردار باشد) و $f(x|\theta,\beta)$ یک تابع چگالی از خانواده مکانی-مقیاسی یا مقیاسی، با پارامتر مکان θ و

[۱] Scale mixture distribution
[۲] Scale mixture of normal distribution
[۳] Andrews and Mallows

پارامتر مقیاس β باشد که θ, β می‌توانند یک عدد یا یک بردار باشند. همچنین لازم به ذکر است که متغیر تصادفی T می‌تواند پیوسته، گسسته و یا آمیخته باشد. بنابراین یک مدل آمیخته مقیاسی بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲.۴. (آندرو و مالو، ۱۹۷۴) متغیرتصادفی X دارای توزیع آمیخته مقیاسی است اگر بتوان تابع چگالی آن را به صورت زیر نوشت

الف) اگر T یک متغیر تصادفی پیوسته باشد

$$\int_t f(x|\theta, t^{-1}\beta)\ \mathrm{d}G(t,\alpha), \tag{۱.۴}$$

ب) اگر T یک متغیر تصادفی گسسته باشد

$$\sum_{\{t:\sum G(t,\alpha)=1\}} f(x|\theta, t^{-1}\beta), \tag{۲.۴}$$

که در آن $G(t,\alpha)$ تابع توزیع متغیر تصادفی مثبت T با پارامتر α است.

در ادامه به عنوان عضوی معروف از خانواده آمیخته مقیاسی، مدل نرمال آمیخته مقیاسی را به همراه خصوصیات مهمی از این خانواده معرفی خواهیم نمود.

۳.۴ مدل نرمال آمیخته مقیاسی

خانواده نرمال آمیخته مقیاسی در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این خانواده شامل توزیع‌های مهمی از جمله t-استیودنت[۴]، اسلش[۵]، نمایی-توانی[۶] و نرمال آلایشی[۷] است. لانگ و سینشمر[۸](۱۹۹۳) توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی را، که شامل گروهی از توزیع‌های دم ضخیم[۹] است و اغلب برای مدل‌بندی‌های دقیق در مورد داده‌های متقارن استفاده می‌شوند، گسترش دادند. بنابراین، متقارن بودن و داشتن دم‌های ضخیم از خصوصیات اصلی این خانواده است. به گونه‌ای که این خانواده نسبت به توزیع نرمال، به عنوان یک توزیع متقارن دارای دنباله‌های پهن‌تری است.

[۴]Student -t distibution
[۵]Slash distribution
[۶]Power-exponential distribution
[۷]Contaminated normal distribution
[۸]Lange and Sinsheimer
[۹]Thick tailed

در عمل ممکن است با داده‌هایی سروکار داشته باشیم که انباشتگی در دنباله‌های هیستوگرام این داده‌ها نسبت به سایر نقاط بیشتر باشد، (داده‌های مربوط به درآمد خانوار از این دسته هستند) در اینصورت توزیع‌های خانواده نرمال آمیخته مقیاسی نسبت به توزیع نرمال، می‌توانند مدل مناسب‌تری برای برازش به این نوع از داده‌ها باشند.

تعریف ۱.۳.۴. اگر تابع f معرفی شده در تعریف ۱.۲.۴ با تابع چگالی نرمال n-متغیره جایگزین شود، آنگاه مدل نرمال آمیخته مقیاسی بصورت زیر بدست می‌آید.

الف) اگر متغیر تصادفی T پیوسته باشد در اینصورت داریم

$$\int_t \Phi_n(x|\mu, t^{-1}\Sigma)\ \mathrm{d}G(t,\alpha), \tag{۳.۴}$$

ب) اگر متغیر تصادفی T گسسته باشد داریم

$$\sum_{\{t:\sum G(t,\alpha)=1\}} \Phi_n(x|\mu, t^{-1}\Sigma). \tag{۴.۴}$$

در این صورت می‌گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال آمیخته مقیاسی با پارامترهای مکان μ، مقیاس Σ و G است و با نماد زیر نمایش می‌دهیم

$$X \sim \mathcal{SMN}_n(\mu, \Sigma, G). \tag{۵.۴}$$

نتیجه ۲.۳.۴. (موسوی، ۱۳۹۱) *فرض کنید* $X \sim SMN_p(\mu, \Sigma, G)$، *در این صورت داریم*

$$X|T = t \sim \mathcal{N}_n(\mu, t^{-1}\Sigma). \tag{۶.۴}$$

۴.۴ مثالهایی از توزیع نرمال آمیخته مقیاسی

حال به معرفی اجمالی سه توزیع مهم از خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی، که در تحلیل‌های آماری نقش مهمی ایفا می‌کنند، می‌پردازیم.

۱.۴.۴ توزیع t-استیودنت

یکی از توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی، توزیع t-استیودنت است. استفاده از این توزیع در بسیاری از موارد به جای توزیع نرمال پیشنهاد شده است. برای اطلاعات

بیشتر لیتل[۱۰](۱۹۸۸) را ببینید. همچنین لانگ و همکاران (۱۹۸۹) برای مدل بندی‌های قوی، توزیع t-استیودنت را به عنوان یک پیشنهاد مناسب به کار برده‌اند. برای آگاهی بیشتر و مشاهده برخی تعمیم‌های این توزیع ایرانمنش (۱۳۹۱) را ببینید.

روش ساخت

فرض کنید متغیر تصادفی T معرفی شده در تعریف ۱.۳.۴ دارای توزیع گاما، $\Gamma(\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ باشد. آنگاه تابع چگالی توزیع t-استیودنت n-متغیره به صورت زیر می‌باشد.

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+v}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\pi^{\frac{n}{2}}} v^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{d}{v}\right)^{-(\frac{n+v}{2})},$$

که در آن $d = (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma > 0$ و v پارامتر درجه آزادی است.

نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می‌شود.

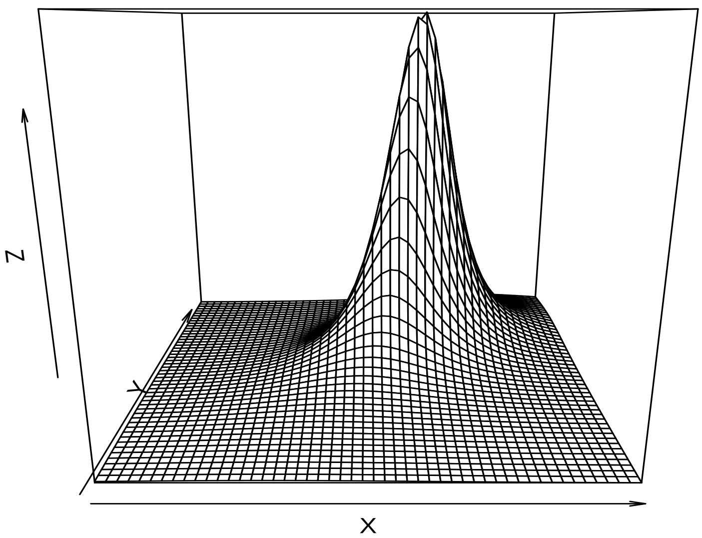
$$X \sim T_n(\mu, \Sigma, v), \qquad v > 0.$$

پارامتر درجه آزادی v در توزیع t-استیودنت نقش مهمی را ایفا می‌کند، برای این منظور شکل‌های (۱.۴) و (۲.۴) زیر را ببینید. همانطور که در شکل‌های مذکور ملاحظه می‌کنید با افزایش درجه آزادی، توزیع t-استیودنت به توزیع نرمال نزدیک‌تر می‌شود.

۲.۴.۴ توزیع اسلش

یکی دیگر از توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی توزیع اسلش با پارامتر شکل v است. این توزیع نیز نسبت به توزیع نرمال دارای دنباله‌های ضخیم‌تری است. و زمانی که $v \to \infty$، توزیع نرمال به عنوان توزیع حدی اسلش در نظر گرفته می‌شود.

[۱۰] Little



شکل ۱.۴: نمودار تابع چگالی t-استیودنت دو متغیره برای $v=1$

روش ساخت

فرض کنید متغیر تصادفی T معرفی شده در تعریف ۱.۳.۴، دارای توزیع بتا، $\mathcal{B}(v,1)$ باشد آنگاه تابع چگالی توزیع اسلش n-متغیره به صورت زیر معرفی می‌شود.

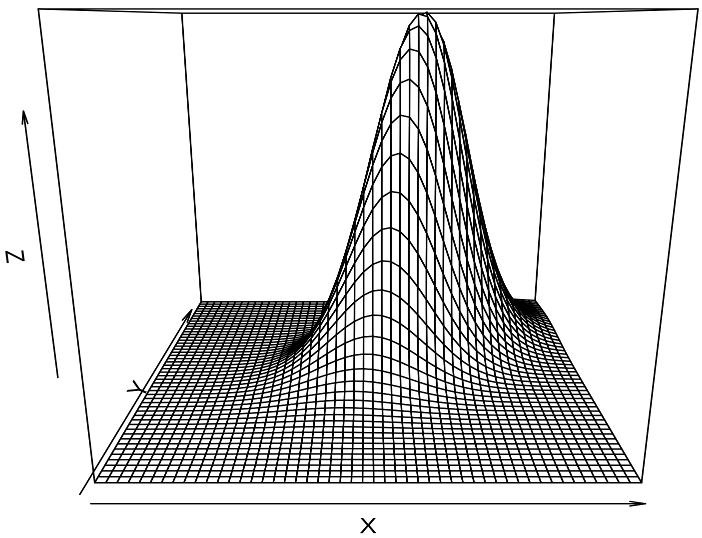
$$f_X(x) \;=\; v\int_0^1 t^{v-1}\Phi_n(x|\mu, t^{-1}\Sigma)\;\mathrm{d}t,$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌کنیم.

$$X\sim \mathcal{SL}_n(\mu,\Sigma,v).$$

۳.۴.۴ توزیع نرمال آلایشی

یکی دیگر از خانواده توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی، توزیع نرمال آلایشی است. معمولا از این توزیع برای مدل بندی داده‌های متقارن با مشاهدات پرت نیز استفاده می‌شود برای جزئیات بیشتر لیتل (۱۹۸۸) را ببینید.



شکل ۲.۴: نمودار تابع چگالی t-استیودنت دو متغیره برای $v = ۱۰$

روش ساخت

فرض کنید متغیر تصادفی T معرفی شده در تعریف ۱.۳.۴ دارای تابع چگالی زیر باشد.

$$h(t, v) \quad = \quad vI_{(t=\gamma)} + (۱ - v)I_{(t=۱)}, \qquad v = (v, \gamma)^T.$$

آنگاه با استفاده از رابطه(۱.۴) تابع چگالی نرمال آمیخته n-متغیره بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_X(x) \quad = \quad v\Phi_n\left(x|\mu, \frac{\Sigma}{\gamma}\right) + (۱ - v)\Phi_n(x|\mu, \Sigma),$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌کنیم

$$X \sim \mathcal{CN}_n(\mu, \Sigma, v, \gamma), \qquad ۰ \leq v \leq ۱, \quad ۰ < \gamma \leq ۱,$$

که در آن v پارامتر نشان دهنده درصد مشاهدات دور افتاده و γ پارامتر مقیاس است. برای جزئیات بیشتر موسوی (۱۳۹۱) را ببیند.

۵.۴ برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس نامتقارن

مدل سیگنال نوفه گسسته فصل ۳ را در نظر بگیرید

$$w = \theta + \epsilon,$$

که در این قسمت بردار خطا دارای توزیع $\mathcal{SMN}_n(0, \sigma^2, G)$ است.

(**) **قضیه ۱.۵.۴.** *فرض کنید* $\sigma \in \mathbb{R}^+, w|\theta \sim \mathcal{SMN}_n(\theta, \sigma^2, G)$، *همچنین فرض کنید* θ *دارای توزیع پیشین یکنواخت* $\pi(\theta) = 1$ *است، که در آن* $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$، *در این صورت تحت تابع زیان*

$$\mathcal{L}(\theta, \delta(w)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\left\{\delta_i(w)-\theta_i\right\} - 1\right], a_i \neq 0, \qquad (۷.۴)$$

برآوردگر بیز تعمیم یافته برای θ *برابر است با*

$$\delta_i^{GB} = w_i - \frac{\ln \alpha(a_i^2, \sigma^2)}{a_i}, \qquad (۸.۴)$$

که در آن

$$\alpha(a_i, \sigma^2) = \int_0^\infty e^{\frac{a_i^2 t^{-1}\sigma^2}{2}}\, \mathrm{d}G(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (۹.۴)$$

برهان. توزیع پسین عبارتست از

$$\begin{aligned}\theta|w &\propto w|\theta \times \pi(\theta)\\ &\propto w|\theta.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\theta|w \sim \mathcal{SMN}_n(w, \sigma^2, G).$$

لذا مخاطره پسین به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\rho(\pi(\theta|w), \delta(w)) &= \int_{\Theta} L(\theta, \delta(w)\ \mathrm{d}\pi(\theta|w) \\
&= \int_{\Theta} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\} - 1 \right) \right\} \\
&\quad \left(\int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w_i, t) g(t)\ \mathrm{d}t \right)\ \mathrm{d}\theta_i \\
&= I_1 - I_2 - I_3
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Theta} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} \int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w_i, t) g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Theta} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{-1/2}} e^{-\frac{(\theta_i-w_i)^2}{2\sigma^2 t^{-1}}} g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Theta} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t^{-1/2}} \exp\Big\{ a_i\delta_i - a_i\theta_i - a_i w_i + a_i w_i \\
&\quad + \frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2} - \frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2} - \frac{(\theta_i^2 + w_i^2 - 2\theta_i w_i)}{2\sigma^2 t^{-1}} \Big\} g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \exp\left\{ a_i\delta_i - a_i w_i + \frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2} \right\} \\
&\quad \times \int_{\Theta} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t^{-1/2}} \exp\left\{ -\frac{(\theta_i - (w_i - \sigma^2 t^{-1} a_i)^2}{2\sigma^2 t^{-1}} \right\} d\theta_i\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \exp\left\{ a_i(\delta_i - w_i) + \frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2} \right\} g(t)\ \mathrm{d}t, \qquad (۱۰.۴) \\
I_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Theta} a_i\{\delta_i - w_i\} \int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w, t) g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big[\int_{\Theta} a_i\delta_i \int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w, t) g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \\
&\quad - \int_{\Theta} a_i\theta_i \int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w, t) g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i \Big] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [a_i\delta_i - a_i E(\theta_i)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [a_i(\delta_i - w_i)], \qquad (۱۱.۴)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} I_{۳} &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\int_{۰}^{\infty} f(\theta_i|w_i)g(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i. \\ &= ۱. \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

رابطه‌های (۱۰.۴)، (۱۱.۴) و (۱۲.۴) نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} \rho(\pi(\theta|w),\delta(w)) &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\Bigg[e^{a_i(\delta_i-wi)} \times \underbrace{\int_{۰}^{\infty} e^{a_i^{۲}t^{-۱}\sigma^{۲}/۲}g(t)dt}_{\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲})} \\ &\quad -a_i(\delta_i-w_i)-۱\Bigg]. \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

با توجه به تعریف ۸.۳.۱ در فصل اول، برآوردگر بیز تعمیم یافته، برآوردگری است که مخاطره پسین را می‌نیمم کند، لذا از رابطه (۱۳.۴) نسبت به δ_i مشتق گرفته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم

$$a_i e^{a_i(\delta_i-w_i)} \times \alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲}) - a_i = ۰,$$

لذا

$$\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲}) + a_i(\delta_i-w_i) = ۰,$$

در نهایت برآوردگر بیز تعمیم یافته برابر است با

$$\delta_i^{GB} = w_i - \frac{\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲})}{a_i}. \tag{۱۴.۴}$$

□

(**) **قضیه ۲.۵.۴.** *فرض کنید $\pi\in\Pi$ توزیع پیشین سره دلخواه باشد، تحت تابع زیان لینکس ۷.۴، مخاطره بیز برآوردگر δ^{GB} در قضیه ۱.۵.۴ ، برابر است با*

$$r(\pi,\delta^{GB}) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲}), \tag{۱۵.۴}$$

که در آن

$$\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲}) \;=\; \int_{۰}^{\infty} e^{\frac{a_i^{۲}t^{-۱}\sigma^{۲}}{۲}}\,\mathrm{d}G(t), \qquad i=۱,\ldots,n.$$

برهان. با توجه به تعریف ۱.۳.۱ در فصل اول، مخاطره بیز عبارتست از

$$\begin{aligned}
r(\pi,\delta^{GB}) &= \int_{\Theta} R(\theta,\delta^{GB})\,\mathrm{d}\pi(\theta)\\
&= \int_{\Theta}\pi(\theta)\int_{W}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\Big[\exp\left\{a_i\left(w_i-\frac{\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲})}{a_i}-\theta_i\right)\right\}\\
&\quad -a_i\big(w_i-\frac{\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲})}{a_i}-\theta_i\big)-۱\Big]\,f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= I_۱-I_۲
\end{aligned}$$

در ادامه محاسبات می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi_k(\theta)\int_{W}\exp\{a_i(\,w_i-\frac{\ln\alpha(a_i^{۲},\sigma^{۲})}{a_i}-\theta_i\,)\}\,f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi_k(\theta)\mathcal{M}_{w_i}(a_i)\times\exp\left\{-\ln\alpha(a_i,\sigma^{۲})\right\}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\mathrm{d}\theta_i,
\end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{M}_{w_i}(a_i)$ تابع مولد گشتاور w_i می‌باشد.

از آن جایی که

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{w_i}(a_i) &= E(e^{a_iw_i})\\
&= E_t\left[\underbrace{E\left(e^{a_iw_i|t}\right)}_{A(t)}\right]\\
&= \int_t A(t)g(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
A(t) &= \mathcal{M}_{w_i|t}(a_i)\\
&= \exp\left\{a_i\theta_i+\frac{a_i^{۲}\sigma^{۲}t^{-۱}}{۲}\right\}.
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \exp\left\{\frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2}\right\} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad\times\left(\int_0^\infty \exp\left\{\frac{a_i^2\sigma^2 t^{-1}}{2}\right\} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W\left[a_i\left(w_i-\frac{\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2)}{a_i}-\theta_i\right)+1\right] f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}\theta_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)E(a_iw_i)\times(-a_i\theta_i)\times\left(-\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2)\right)\,\mathrm{d}\theta_i \\ &\quad -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2)+1. \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

با توجه به رابطه‌های (۱۶.۴) و (۲۵.۴)، مخاطره بیز برابر است با

$$r(\pi_k,\delta^{GB}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2).$$

□

(**) **قضیه ۳.۵.۴.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۵.۴ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ_i^{GB} مجاز می‌باشد.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{H}(w,\theta,\sigma^2G)$ تابع توزیع $\mathcal{SMN}_n(\theta,\sigma^2I,G)$ باشد آنگاه

$$R(\theta,\delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}-a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}-1\right)\mathrm{d}\mathcal{H}(w,\theta,\sigma^2GI),$$

برای هر δ در θ پیوسته است.

فرض می‌کنیم δ^{GB} غیر مجاز بوده و $\mathcal{D}$ کلاس کلیه برآوردگرها باشد، آنگاه

$$\exists\,\delta\in\mathcal{D}\qquad s.t\qquad \forall\theta\in\Theta\qquad R(\theta,\delta)\le R(\theta,\delta^{GB}),$$

و حداقل یک مقدار $\theta_0 \in \Theta$ وجود دارد به طوری که نامساوی اکید برقرار باشد. با توجه به این که $R(\theta,\delta)$ و $R(\theta,\delta^{GB})$ در θ پیوسته هستند، ثابت‌های c_1, c_2 مثبتی وجود دارند، به طوری که

$$R(\theta,\delta) < R(\theta,\delta^{GB}) - c_1 \quad for \quad \theta \in \{\theta : |\theta-\theta_0| < c_2\}.$$

دنباله‌ای از توزیع‌های پیشین $\pi_k(\theta) \sim \mathcal{SMN}_n(0,\tau_k^2 I_n, G)$ را در نظر بگیرید، به طوری که $\lim_{k\to\infty}\tau_k^2 = \infty$ و به طور یکنواخت داشته باشیم $\lim_{k\to\infty}\pi_k(\theta) \to \pi(\theta)$، که در آن $\pi(\theta) < \infty$ یک توزیع سره باشد. در این صورت با توجه به نتیجه ۲.۳.۴، توزیع پسین به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|w) &\propto f(w|\theta)\pi_k(\theta)\\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{-\frac{1}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{(w_i-\theta_i)^2}{2\sigma^2 t^{-1}}\right\}\\
&\quad \times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_k t^{-\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{\theta_i^2}{2\tau_k^2 t^{-1}}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\\
&\propto \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(w_i^2+\theta_i^2-2w_i\theta_i)}{2\sigma^2 t^{-1}} - \frac{\theta_i^2}{2\tau_k^2 t^{-1}}\right\}\ g(t)\ \mathrm{d}t\\
&\propto \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\theta_i^2\left(\frac{1}{\sigma^2 t^{-1}}+\frac{1}{\tau_k^2 t^{-1}}\right)+\theta_i\left(\frac{w_i}{\sigma^2 t^{-1}}\right)\right]\ g(t)\ \mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2 t^{-1}}+\frac{1}{\tau_k^2 t^{-1}}\right)\left(\theta_i^2 - 2\theta_i\ \frac{w_i\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)\right]\\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2 t^{-1}}+\frac{1}{\tau_k^2 t^{-1}}\right)\left(\theta_i - \frac{w_i\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$\theta|w \sim \mathcal{SMN}_n\left(\frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}\ ,\ \frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}, G\right).$$

مخاطره π_k پسین تحت تابع زیان ۷.۴ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\rho(\pi_k(\theta|w),\delta(w)) &= \int_\Theta \mathcal{L}(\theta,\delta(w)\ \mathrm{d}\pi_k(\theta|w)\\
&= \int_\Theta \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}} - a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}-1\right)\right\}\\
&\quad \left(\int_0^\infty f(\theta_i|w_i)g(t)dt\right)\ \mathrm{d}\theta_i\\
&= I_1 - I_2 - I_3
\end{aligned}$$

در ادامه داریم

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}\left(\int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w_i)g(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^2+\tau_k^2}}\right)t^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad \times\exp\left[-\frac{(\theta_i-\frac{\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2})^2}{2\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)t^{-1}}\right] g(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\int_{0}^{\infty} e^{a_i\{\delta_i(w)-\theta_i\}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau_k^2}}\right)t^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad \times\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i^2+\frac{\tau_k^4 w_i^2}{(\sigma^2+\tau_k^2)^2}-\frac{2\theta_i\tau_k^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)t^{-1}}\right\}\right]\ g(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)t^{-\frac{1}{2}}}\ \exp\Bigg[a_i\delta_i-a_i\theta_i+a_iw_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} \\
&\quad -a_iw_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}+a_i^2t^{-1}\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}-a_i^2t^{-1}\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\Bigg] \\
&\quad \times\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i^2+\frac{\tau_k^4 w_i^2}{(\sigma^2+\tau_k^2)^2}-\frac{2\theta_i\tau^2 w_i}{\sigma^2+\tau_k^2}}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)t^{-1}}\right\}\right]\ g(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\theta_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty}\exp\left[a_i\delta_i-a_iw_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}+a_i^2t^{-1}\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\right] \\
&\quad \times\int_{\Theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma\tau_k}{\sqrt{\sigma^2+\tau_k^2}}\right)t^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad \times\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\theta_i-\left(w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}-a_i\frac{\sigma^2\tau_k^2t^{-1}}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)^2}{\left(\frac{\sigma^2\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right)t^{-1}}\right\}\right]\ \mathrm{d}\theta_i\ g(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty}\exp\Bigg[a_i\left(\delta_i-w_i\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}\right) \\
&\quad +a_i^2t^{-1}\frac{\sigma^2\tau_k^2}{2(\sigma^2+\tau_k^2)}\Bigg]\ g(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$$
I_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta} a_i\{\delta_i-\theta_i\}\int_{0}^{\infty} f(\theta_i|w)g(t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\int_{\Theta} a_i\delta_i \int_{\circ}^{\infty} f(\theta_i|w)g(t)dtd\theta_i - \int_{\Theta} a_i\theta_i \int_{\circ}^{\infty} f(\theta_i|w_i)g(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta_i\right]\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[a_i\delta_i - a_iE(\theta_i)\right]\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[a_i(\delta_i - \frac{\tau_k^۲ w_i}{\sigma^۲+\tau_k^۲})\right], \qquad (۱۹.۴)\\
I_۳ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\int_{\circ}^{\infty} f(\theta_i|w_i)g(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\theta_i\\
&= ۱. \qquad (۲۰.۴)
\end{aligned}
$$

از رابطه‌های (۱۸.۴)، (۱۹.۴) و (۲۰.۴) می‌توان نتیجه گرفت

$$
\begin{aligned}
\rho(\pi(\theta|w),\delta(w)) &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\Bigg[\int_{\circ}^{\infty}\exp\Bigg\{a_i\left(\delta_i - w_i\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)\\
&\quad + a_i^۲ t^{-۱}\frac{\sigma^۲\tau_k^۲}{۲(\sigma^۲+\tau_k^۲)}\Bigg\} g(t)\mathrm{d}t\\
&\quad - a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^۲ w_i}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right) - ۱\Bigg]\\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\Bigg[\exp\left\{a_i\left(\delta_i - w_i\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)\right\}\\
&\quad \times \underbrace{\int_{\circ}^{\infty}\exp\left\{a_i^۲ t^{-۱}\frac{\sigma^۲\tau_k^۲}{۲(\sigma^۲+\tau_k^۲)}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t}_{\beta(a_i^۲,\sigma^۲,\tau_k^۲)}\\
&\quad - a_i\left(\delta_i - \frac{\tau_k^۲ w_i}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right) - ۱\Bigg]. \qquad (۲۱.۴)
\end{aligned}
$$

با توجه به تعریف ۸.۳.۱ در فصل سوم برآوردگر بیز برآوردگری است که رابطه (۲۱.۴) را می‌نیمم کند، از اینرو از این رابطه نسبت به δ_i مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم بنابراین

$$
a_i \exp\left\{a_i\left(\delta_i - w_i\tfrac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right)\right\} \times \beta(a_i^۲,\sigma^۲,\tau_k^۲) - a_i = \circ,
$$

که در نتیجه

$$
\ln\beta(a_i^۲,\sigma^۲,\tau_k^۲) + a_i\left(\delta_i - w_i\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right) = \circ,
$$

لذا برآوردگر بیز، تحت توزیع پیشین π_k برابر است با

$$\delta_i = w_i \frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} - \frac{\ln\beta(a_i^2,\sigma^2,\tau_k^2)}{a_i}.$$

در ادامه مخاطره بیز برآوردگر $\delta_i^{\pi_k}(w)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} r(\pi_k,\delta^{\pi_k}) = & \int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Bigg[\exp\Bigg\{a_i\Big(w_i\,\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} \\ & -\frac{\ln\beta(a_i^2,\sigma^2,\tau_k^2)}{a_i}-\theta_i\Big)\Bigg\} - a_i\Big(w_i\,\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2} \\ & -\frac{\ln\beta(a_i^2,\sigma^2,\tau_k^2)}{a_i}-\theta_i\Big)-1\Bigg] f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}w_i. \end{aligned} \quad (۲۲.۴)$$

همچنین با توجه به قضیه ۲.۵.۴، مخاطره بیز برآوردگر δ^{GB} به صورت زیر مفروض است

$$r(\pi_k,\delta^{GB}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\alpha(a_i^2,\sigma^2).$$

فرض کنید

$$c_3 = \lim_{k\to\infty}\inf \int_{|\theta-\theta_0|<c_2} \pi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

با توجه به این که $lim_{k\to\infty}\tau_k^2=\infty$ داریم

$$c_3 = \lim_k \inf \to\infty \int_{|\theta-\theta_0|<c_2} \pi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta > 0. \quad (۲۳.۴)$$

بنابراین برای k به اندازه کافی بزرگ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} r(\pi_k,\delta^{GB}) - r(\pi_k,\delta^{\pi_k}) & \geq r(\pi_k,\delta^{GB}) - r(\pi_k,\delta) \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \big(R(\theta,\delta^{GB})-R(\theta,\delta)\big)\pi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ & \geq \int_{|\theta-\theta_0|<c_2} \big(R(\theta,\delta^{GB})-R(\theta,\delta)\big)\pi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ & > c_1c_3 > 0. \end{aligned} \quad (۲۴.۴)$$

حال از رابطه (۲۲.۴) حد گرفته لذا

$$\lim_{k\to\infty} r(\pi_k,\delta^{\pi_k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lim_{k\to\infty}\int_\Theta\int_W \pi_k(\theta)\Bigg[\exp\Bigg\{a_i\Big(w_i\,\frac{\tau_k^2}{\sigma^2+\tau_k^2}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲}}{a_i}-\theta_i\Big)\Big\} - a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}} \\
& -\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲})}{a_i}-\theta_i\Big)-۱\Big] f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i\ \mathrm{d}w_i \\
= \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\int_W \lim_{k\to\infty}\pi_k(\theta) \\
& \times\lim_{k\to\infty}\Big[\exp\Big\{a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}}-\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲}}{a_i}-\theta_i\Big)\Big\} \\
& -a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}}-\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲})}{a_i}-\theta_i\Big)-۱\Big] f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i\ \mathrm{d}w_i \\
= \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\pi(\theta)\int_W \lim_{k\to\infty}\Big[\exp\Big\{a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}} \\
& -\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲}}{a_i}-\theta_i\Big)\Big\} - a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}} \\
& -\frac{\ln\beta(a_i^{۲},\sigma^{۲},\tau_k^{۲})}{a_i}-\theta_i\Big)-۱\Big] f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i\ \mathrm{d}w_i \\
= \ & I_۱ - I_۲ - I_۳
\end{aligned}
$$

در ادامه محاسبات می‌توان نتیجه گرفت

$$
\begin{aligned}
I_۱ = \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\pi(\theta)\int_W \lim_{k\to\infty}\exp\Big\{a_i\Big(w_i\ \frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}} \\
& -\frac{\ln\beta(a_i,\sigma^{۲},\tau_k^{۲})}{a_i}-\theta_i\Big)\Big\} f(w_i|\theta_i)\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\
= \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\pi(\theta)\int_W \lim_{k\to\infty}\exp\Big\{a_iw_i\frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}}\times\exp\{-a_i\theta_i\}\Big\} \\
& \times\Big(\int_۰^\infty\exp\Big\{a_i^{۲}t^{-۱}\frac{\sigma^{۲}}{۲}\frac{\tau_k^{۲}}{\sigma^{۲}+\tau_k^{۲}}\Big\} g(t)\ \mathrm{d}t\Big)^{-۱} f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\
= \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\pi(\theta)\int_W \exp\{a_iw_i\}\times\exp\{-a_i\theta_i\} \\
& \times\Big(\int_۰^\infty\exp\Big\{a_i^{۲}t^{-۱}\frac{\sigma^{۲}}{۲}\Big\} g(t)\ \mathrm{d}t\Big)^{-۱} f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\
= \ & \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta\pi(\theta)\ M_w(a_i)\times\exp\{-a_i\theta_i\} \\
& \times\Big(\int_۰^\infty\exp\Big\{a_i^{۲}t^{-۱}\frac{\sigma^{۲}}{۲}\Big\} g(t)\ \mathrm{d}t\Big)^{-۱} f(w_i|\theta_i)\ \mathrm{d}\theta_i,
\end{aligned}
$$

که در آن $M_{w_i}(a_i)$ تابع مولد گشتاور w_i می‌باشد.

از آن جایی که

$$
\begin{aligned}
M_{w_i}(a_i) &= E\left(e^{a_i w_i}\right) \\
&= E_t\left[E\left(e^{a_i w_i | t}\right)\right] \\
&= \int_t \exp\left\{a_i\theta_i + \frac{a_i^۲\sigma^۲ t^{-۱}}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
I_۱ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\left(\int_۰^\infty \exp\left\{a_i\theta_i + \frac{a_i^۲\sigma^۲ t^{-۱}}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&\quad \times \exp\{-a_i\theta_i\} \times \left(\int_۰^\infty \exp\left\{\frac{a_i^۲\sigma^۲ t^{-۱}}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right)^{-۱} \mathrm{d}\theta_i \\
&= ۱, \qquad (۲۵.۴) \\
I_۲ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \lim_{k\to\infty}\left(a_i w_i \frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right) - (a_i\theta_i) \\
&\quad - \ln\left(\int_۰^\infty \exp\left\{\frac{a_i^۲ t^{-۱}\sigma^۲}{۲}\frac{\tau_k^۲}{\sigma^۲+\tau_k^۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right) f(w_i|\theta_i)\mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}w_i \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \Bigg[(a_i w_i) - (a_i\theta_i) \\
&\quad - \ln\left(\int_۰^\infty \exp\left\{\frac{a_i^۲ t^{-۱}\sigma^۲}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right)\Bigg] f(w_i|\theta_i)\mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}w_i \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\Bigg[E(a_i w_i) - (a_i\theta_i) \\
&\quad - \ln\left(\int_۰^\infty \exp\left\{\frac{a_i^۲ t^{-۱}\sigma^۲}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right)\Bigg]\ \mathrm{d}\theta_i \\
&= -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln\left(\int_۰^\infty \exp\left\{\frac{a_i^۲ t^{-۱}\sigma^۲}{۲}\right\} g(t)\ \mathrm{d}t\right), \qquad (۲۶.۴) \\
I_۳ &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \lim_{k\to\infty} f(w_i|\theta_i)\mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}w_i \\
&= ۱. \qquad (۲۷.۴)
\end{aligned}
$$

حال با توجه به رابطه‌های (۲۵.۴)، (۲۶.۴) و (۲۷.۴) داریم

$$
r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln\alpha(a_i^۲, \sigma^۲).
$$

در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty}\{r(\pi_k,\delta^{GB})-r(\pi_k,\delta^{\pi_k})\}=0. \qquad (۲۸.۴)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه (۲۴.۴) با رابطه (۲۸.۴) در تناقض است، بنابراین فرض غیرمجاز بودن برآوردگر δ^{GB} رد می‌شود. □

(**) **قضیه ۴.۵.۴.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۵.۴ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ^{GB} مینیماکس می‌باشد.*

برهان. با توجه به قضیه ۳.۵.۴، برآوردگر δ^{GB} مجاز بوده و دارای مخاطره ثابت به صورت

$$r(\pi,\delta^{GB})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2).$$

می‌باشد از اینرو با توجه به قضیه ۹.۳.۱ و لم ۱۰.۳.۱ ، δ^{GB} برآوردگر مینیماکس است. □

۶.۴ برآوردگر انقباضی موجکی نرم

در این بخش می‌خواهیم با در نظر گرفتن حالت خاص از تابع زیان ۷.۴ نشان دهیم برآوردگر بیز تعمیم یافته ۸.۴ برآوردگر انقباضی موجکی نرم است.

(**) **قضیه ۱.۶.۴.** *در تابع زیان لینکس چند متغیره ۷.۴ برای حالت خاصی که مقادیر a_i به صورت زیر باشند*

$$a_i = \begin{cases} c \quad , \quad \theta_i\geq 0 \qquad i=1,\cdots,n, \\ \\ -c \quad , \quad \theta_i<0 \qquad i=1,\cdots,n, \end{cases} \qquad (۲۹.۴)$$

که در آن $c>0$ عدد ثابت است، برآوردگر بیز تعمیم یافته مجاز و مینیماکس در قضیه ۱.۵.۴ ، برآوردگر انقباضی موجکی نرم است.

برهان. همانطور که در قضیه ۱.۵.۴ ملاحظه شد، برآوردگر بیز تعمیم یافته بصورت زیر مفروض است

$$\delta_i^{GB} \;=\; w_i-\frac{\ln\alpha(a_i^2,\sigma^2)}{a_i},$$

با توجه به رابطه (۲۹.۴) می‌توان نتیجه گرفت

$$\delta_i^{GB} = w_i - sign(\theta_i)\lambda, \qquad (۳۰.۴)$$

که در آن

$$\lambda = \frac{\ln \alpha(c^۲, \sigma^۲)}{c}.$$

می‌باشد. با توجه به اینکه غالبا علامت θ_i مجهول است، می‌توان در رابطه (۳۰.۴)، علامت w_i را برای برآورد علامت θ_i بکار برد و با ایجاد برشی در صفر داریم

$$\begin{aligned} \delta_i^{soft}(w) &= \begin{cases} (w_i - \lambda) \vee \circ & , \quad w_i \geq \circ, \\ (w_i + \lambda) \wedge \circ & , \quad w_i < \circ, \end{cases} \\ &= sign(w_i)(|w_i| - \lambda)_+. \qquad (۳۱.۴) \end{aligned}$$

همان طور که مشاهده می‌شود برآوردگر بدست آمده در رابطه (۳۱.۴)، همان برآوردگر انقباضی موجکی نرم رابطه (۴.۳) است. □

(**)**نتیجه ۱.۶.۴.** *برای حالتی خاصی از تابع زیان لینکس نامتقارن برآورد انقباضی موجکی نرم را می‌توان بعنوان نسخه تجربی از برآوردگر بیز تعمیم یافته بکار برد.*

فصل ۵

برآوردگر بیز تعمیم یافته تحت تابع زیان نرمال منعکس شده

۱.۵ مقدمه

همانطور که در فصل سوم و چهارم ملاحظه شد با در نظر گرفتن حالت خاصی از تابع زیان لینکس به نتایج جالبی در خصوص پیدا کردن نسخه تجربی برای برآوردگر بیز تعمیم یافته دست یافتیم که این اذعان کننده این مطلب است که انتخاب تابع زیان نقش مهمی در استنباط‌های آماری ایفا می‌کند، از این رو در این فصل ضمن معرفی اجمالی تابع زیان نرمال منعکس شده برآوردگر بیز تعمیم یافته را تحت این زیان بدست آورده و به بررسی مجاز و مینیماکس بودن آن می‌پردازیم.

۲.۵ تابع زیان

در ابتدا این بخش برای بیان تاریخچه‌ای از پیدایش تابع زیان نرمال منعکس شده، ابتدا نگاهی مختصر به نظریه تاگوچی می‌اندازیم.

۱.۲.۵ نظریه تاگوچی

پر واضح است که کیفیت بالای محصول یا خدمات و همسو با آن رضایتمندی مشتری، کلید بقای یک موسسه اقتصادی هستند. همچنین آزمایش‌های پیش از تولید با فرض اینکه بدرستی طراحی و تحلیل شده باشند، ما را به سمت کیفیت بالای محصولات سوق می‌دهد. تاگوچی یک مهندس

ژاپنی است که ایده‌ها و اقدامات انقلابی را به حوزه کیفیت جامع وارد کرده است.

شکل ۱.۵: جینیچی تاگوچی

کار او در زمینه طراحی آزمایش‌ها که ژاپن از اوایل دهه ۱۹۵۰ بدین‌سو به آن اقدام می‌کند، روش‌هایی قوی را در طراحی محصولات و فرآیندهای جدید ارائه کرده است. در این روشها آزمایش‌هایی برای تشخیص پارامترهای طراحی که اثر اغتشاش (عواملی چون دما، فشار و خطای انسانی را بر عملکرد موثرند) را به حداقل می‌رسانند انجام می‌شود. روش تاگوچی این امکان را ایجاد کرده است که این اطلاعات حیاتی با تعداد آزمایش و تجربه بسیار کمتری فراهم شود، که در نتیجه آن محصول و فرآیندها به منظور مقاومت در برابر اغتشاش ایجاد می‌شوند. تاگوچی مبحث مدیریت کیفیت را با پیشنهاد اینکه کیفیت می‌بایست در مرحله طراحی مورد توجه قرار گیرد یک گام به پیش راند، زیرا قبل از او عنصر کیفیت تا مرحله فرآیند تولید مطرح بود. از نظر تاگوچی طراحی، جزء اصلی هزینه نهایی است. فلسفه کیفیت تاگوچی مبتنی بر چهار اصل است.

۱. کیفیت باید در بطن محصول تولیدی گنجانده شود، نه اینکه بعد از تولید مورد بازرسی قرار گیرد.

۲. محصولات می‌بایست دارای یک طرح قوی باشند.

۳. هزینه کیفیت بایستی بر اساس انحراف استاندارد سنجیده شود.

۴. خسارت ناشی از پایین بودن کیفیت باید در چارچوب سیستم اندازه‌گیری شود.

برای ساختن یک طرح قوی، تاگوچی ساخت یک پیش الگو را طی سه مرحله بصورت زیر پیشنها کرد.

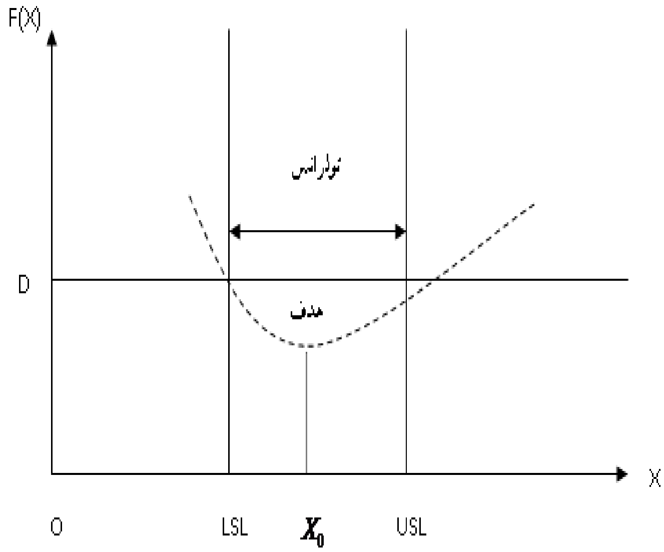
۱. طراحی سیستم: طراحی سیستم توأم با نوآوری است و نیاز به دانش مهندسی دارد.

۲. طراحی پارامتر: مرحله کلیدی است که در آن مقادیر پارامتری محصول و سطوح عمل عوامل فرآیند، بطوریکه حداقل حساسیت را به عوامل اغتشاش داشته باشد تعیین می‌شود.

۳. طراحی تلورانس: به معنی صرف پول برای مواد، اجزاء یا ماشین آلات مرغوبتر است اما تنها در صورتی که انحرافات کاهش یافته حاصل از طراحی پارامتر، کفایت لازم را نداشته باشد.

مفهوم مهم آماری که تاگوچی در این راستا بیان می‌کند تابع زیان است که تاثیر بسیاری در اندیشه وعمل کیفیت داشته است. این ایده جایگزین دیدگاه سنتی که بر اساس آن محصولات در صورتی که حدهای مشخص را محقق کنند قابل قبولند، می‌شود. در چنین دیدگاه سنتی حدی وجود دارد که محصول به علت ناتوانی برای تحقق مشخصات در آن حد، غیر قابل قبول می‌شود به‌عبارتی در این دیدگاه ضرر هنگامی رخ می‌دهد که یک ویژگی خارج از مختصات مورد نظر باشد. تاگوچی استدلال می‌کند که انحراف در محصول حتی در حیطه‌های مشخص شده زیانی برای اجتماع در دوره عمر محصول ایجاد می‌کند و هر چه محصول از ایده‌آل مورد نظر خود دورتر باشد انحطاط در عملکرد آن بیشتر خواهد بود، تاگوچی بر این باور است که زیان متناسب با مربع انحراف از ارزش مورد نظر است. محصولی که به مشتری می‌رسد اگر نتواند کارکرد خود را داشته باشد زیانی وارد می‌کند، این زیان از طرف مشتری در هزینه‌های تعمیر و جایگزینی و از طرف سازنده در هزینه‌های تضمین، افت اعتبار شرکت و از دست رفتن شغل و بازار جلوه می‌کند. این بیان کننده این موضوع است که به محض اینکه ویژگی از میزان هدف منحرف مي‌شود ضرر به مشتری و جامعه وارد می‌شود. در شکل ۱.۲.۵ تابع زیان تاگوچی را ملاحظه می‌کنید.

برای به حداقل رساندن این زیان، بهبود کیفیت باید تا رسیدن به کمال هدف ادامه یابد، دیگر حدهای مشخصات فنی هدف نیستند. فعالیت بهبود هرگز نباید متوقف شود، بهبود کیفیت مشهورترین اثر کاربرد روش‌های تاگوچی است. اما قدرت واقعی این سیستم، توانایی توجه آن به نتایج مهم نهایی،



شکل ۲.۵: تابع زیان تاگوچی

چه بر حسب سرمایه گذاری و چه از نظر هزینه کیفیت است.

۲.۲.۵ تابع زیان نرمال منعکس شده

استفاده از تابع زیان در تضمین کیفیت، با معرفی فلسفه تاگوچی بطور مداوم رشد کرده است. تابع زیان درجه دوم در نظریه تصمیم توسط آماردان‌ها و اقتصاددان‌ها سالهای زیادی مورد استفاده قرار می‌گرفت. تاگوچی برای نشان دادن نیاز به در نظر گرفتن نزدیکی به هدف در ارزیابی کیفیت، از فرم تعدیل شده تابع زیان درجه دوم استفاده کرد. تابع زیان درجه دوم، با ماکزیمم زیان نامتناهی اغلب در توصیف زیان مرتبط با یک محصول ناکافی است و توسط برخی از محققین مورد انتقاد قرار گرفته است. تابع زیان جدیدی بر اساس انعکاسی از تابع چگالی نرمال ارائه شد (اسپیرینگر[1]، ۱۹۹۳).

تابع زیان کراندار اولین بار توسط اسپیرینگر معرفی شد. این زیان یک تابع کراندار و افزایشی درجه دوم است.

تعریف ۱.۲.۵. اگر θ پارامتر مجهول باشد و δ برآوردگری برای θ باشد، آنگاه تابع زیان نرمال

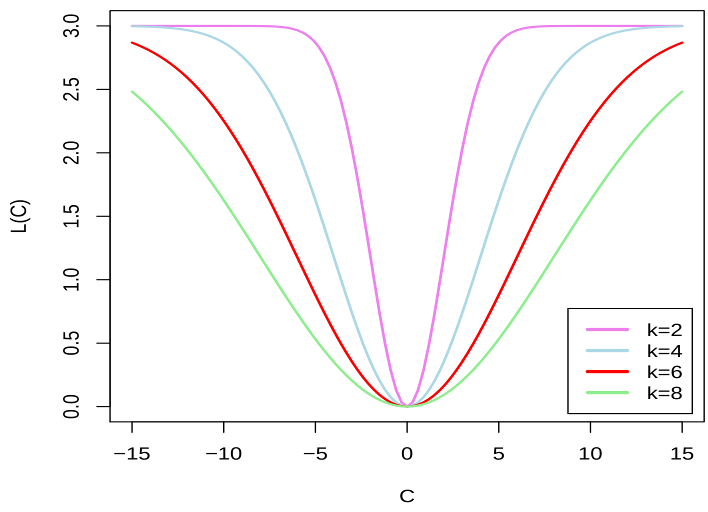
[1] Spiringer

منعکس شده بصورت زیر مفروض می‌باشد

$$\mathcal{L}(\delta,\theta) \;=\; p\left[1-\exp\left\{-\frac{(\delta-\theta)^2}{2k^2}\right\}\right], \qquad (۱.۵)$$

که در آن $p>0$ نشان دهنده ماکزیمم زیان و k پارامتر شکل است که سرعت رسیدن به کران بالای زیان را کنترل می‌کند. (توحیدی و بهبودیان[۲]، ۲۰۰۲)

در عمل ماکزیمم زیان تابعی از هر چیز می‌تواند باشد (منابع تولید، هزینه شناسایی، دوباره‌کاری و بدهی) اما بطور کلی متناهی است. در شکل ۳.۵ ، $C=\delta_i-\theta_i$ می‌باشد. همانطور که در شکل



شکل ۳.۵: تابع زیان نرمال منعکس شده

ملاحظه می‌کنید به ازای مقادیر مختلف k سرعت رسیدن به ماکزیمم زیان تغییر کرده است.

تعمیمی از تابع زیان نرمال منعکس شده بصورت زیر می‌باشد.

فرض کنید $\Delta_i=\delta_i-\theta_i$ خطای برآورد θ_i توسط δ_i، $(i=1,\dots,n)$ باشد، در اینصورت تابع زیان نرمال منعکس شده چند متغیره بصورت زیر است

$$\mathcal{L}(\Delta) \;=\; \sum_{i=1}^{k} p\left[1-\exp\left\{-\frac{(\Delta_i)^2}{2k^2}\right\}\right], \qquad i=1,\dots,n, \qquad (۲.۵)$$

که در آن $\Delta^T=(\Delta_1,\dots,\Delta_n)$. (قاری[۳] و همکاران، ۲۰۰۹)

[۲] Towhidi and Behboodian
[۳] Ghari

۳.۵ برآوردگر بیز تحت تابع زیان نرمال منعکس شده

مدل سیگنال نوفه گسسته فصل ۳ (با فرضیات مشابه)، را در نظر بگیرید

$$w = \theta + \epsilon.$$

(**) **قضیه ۱.۳.۵.** *فرض کنید* $w|\theta \sim \mathcal{N}_n(\theta, I_n)$ *،* $\sigma \in \mathbb{R}^+,$ *همچنین فرض کنید* θ *دارای توزیع پیشین یکنواخت* $\pi(\theta) = ۱$ *است، که در آن* $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$*. در این صورت تحت تابع زیان نرمال منعکس شده (۲.۵)، برآوردگر بیز تعمیم یافته برابر است با*

$$\delta_i^{GB} = w_i. \tag{۳.۵}$$

برهان. توزیع پسین برابر است با

$$\theta|w \propto w|\theta \times \pi(\theta) \propto w|\theta.$$

در نتیجه

$$\theta|w \sim \mathcal{N}_n(w, I_n).$$

بنابراین مخاطره پسین برابر است با

$$\begin{aligned}
\rho\left(\pi(\theta), \delta(w)\right) &= \int_\Theta \mathcal{L}(\theta, \delta(w)\, \mathrm{d}\pi(\theta|w) \\
&= p\int_\Theta \sum_{i=۱}^{n} \left[۱ - \exp\left\{-\frac{(\delta_i-\theta_i)^۲}{۲k^۲}\right\}\right] \\
&\quad \times \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta_i - w_i)^۲}{۲}\, \mathrm{d}\theta_i\right\} \\
&= I_۱ - I_۲
\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}
I_۱ &= p\sum_{i=۱}^{n} \int_\Theta \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta_i - w_i)^۲}{۲}\right\}\, \mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=۱}^{n} ۱ \qquad\qquad (۴.۵)\\
I_۲ &= p\sum_{i=۱}^{n} \int_\Theta \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{(\delta_i - \theta_i)^۲}{۲k^۲} - \frac{(\theta_i - w_i)^۲}{۲}\right\}\, \mathrm{d}\theta_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\delta_i^2+\theta_i^2+2\delta_i\theta_i}{2k^2}-\frac{\theta_i^2+w_i^2-2w_i\theta_i}{2}\right\}\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_i^2\left[\frac{1}{k^2}+1\right]+\theta_i\left[\frac{\delta_i}{k^2}+w_i\right]\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\frac{\delta_i^2}{2k^2}-\frac{w_i^2}{2}\right\}\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= p\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{\delta_i^2}{2k^2}-\frac{w_i^2}{2}\right\}\int_{\Theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+1\right]\right.\\
&\quad\left.\times\left(\theta_i^2-2\theta_i\frac{\frac{\delta_i}{k^2}+w_i}{\frac{1}{k^2}+1}\right)\right\}\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= p\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\exp\left\{\frac{\delta_i^2}{2k^2}-\frac{w_i^2}{2}\right\}\int_{\Theta}\frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{2\pi}k}\\
&\quad\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+1\right]\times\left(\theta_i^2-2\theta_i\left(\frac{\delta_i+w_ik^2}{k^2+1}\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\left(\frac{\delta_i+w_ik^2}{k^2+1}\right)^2-\left(\frac{\delta_i+w_ik^2}{k^2+1}\right)^2\right)\right\}\,\mathrm{d}\theta_i\\
&= p\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\exp\left\{\frac{\delta_i^2}{2k^2}-\frac{w_i^2}{2}\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+1\right]\left(\frac{\delta_i+w_ik^2}{k^2+1}\right)^2\right\}\\
&= p\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_i^2+w_i^2-2\delta_iw_i}{k^2+1}\right)\right\}. \qquad (۵.۵)
\end{aligned}
$$

از رابطه‌های (۴.۵) و (۵.۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$
\rho\left(\pi(\theta),\delta(w)\right) = p\sum_{i=1}^{n}\left[1-\frac{k}{\sqrt{K^2+1}}\exp\left\{-\frac{(\delta_i^2+w_i^2-2w_i\delta_i)}{2(k^2+1)}\right\}\right]. \qquad (۶.۵)
$$

با توجه به تعریف ۸.۳.۱ در فصل اول، برآوردگر بیز برآوردگری است که مخاطره پسین را می‌نیمم کند، لذا از رابطه (۶.۵) نسبت به δ_i مشتق گرفته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم در نتیجه

$$
\frac{pk}{(K^2+1)^{3/2}}(\delta_i-w_i)\exp\left\{-\frac{(\delta_i^2+w_i^2-2w_i\delta_i)}{2(k^2+1)}\right\}=0,
$$

در نهایت برآوردگر بیز برابر است با

$$
\delta_i^{GB}=w_i.
$$

□

(**) **قضیه ۲.۳.۵.** *فرض کنید $\pi \in \Pi$ توزیع پیشین سره دلخواه باشد، تحت تابع زیان نرمال منعکس شده (۲.۵)، مخاطره بیز برآوردگر δ^{GB} در قضیه ۱.۳.۵، برابر است با*

$$r(\pi,\delta^{GB}) = p\Big(۱ - \frac{k}{\sqrt{k^۲+۱}}\Big)^n. \qquad (۷.۵)$$

برهان. با توجه به تعریف ۱.۳.۱، مخاطره بیز عبارتست از

$$\begin{aligned} r(\pi,\delta^{GB}) &= \int_\Theta R(\theta,\delta^{GB})\,\mathrm{d}\pi(\theta) \\ &= p\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \sum_{i=۱}^{n}\Big[۱-\exp\Big\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲k^۲}\Big\}\Big] \\ &\quad f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= I_۱ - I_۲ \end{aligned}$$

در ادامه می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} I_۱ &= p\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= p\sum_{i=۱}^{n} ۱ \qquad (۸.۵) \\ I_۲ &= p\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \exp\Big\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲k^۲}\Big\} f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= p\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\Big\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲k^۲}\Big\} \\ &\quad \times\exp\Big\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲}\Big\}\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= p\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\Big\{-\frac{۱}{۲k^۲}\Big[(w_i^۲(۱+k^۲) \\ &\quad +\theta_i^۲(۱+k^۲) - ۲w_i\theta_i(۱+k^۲)\Big]\Big\}\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= p\sum_{i=۱}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^۲+۱}}\int_\Theta \pi(\theta)\int_W \frac{\sqrt{k^۲+۱}}{\sqrt{۲\pi}k} \\ &\quad \times\exp\Big\{-\frac{k^۲+۱}{۲k^۲}(w_i-\theta_i)\Big\}\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i \\ &= p\sum_{i=۱}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^۲+۱}}. \qquad (۹.۵) \end{aligned}$$

از رابطه‌های (۸.۵) و (۹.۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$r(\pi, \delta^{GB}) \;=\; p\sum_{i=۱}^{n}\left(۱-\frac{k}{\sqrt{k^{۲}+۱}}\right).$$

□

(**) **قضیه ۳.۳.۵.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۳.۵ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ_i^{GB} مجاز می‌باشد.*

برهان. فرض کنید $\phi(w, \theta, I_n)$ تابع توزیع $\mathcal{N}_n(\theta, I_n)$ باشد آنگاه

$$R(\theta, \delta) \;=\; p\sum_{i=۱}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[۱-\exp\left\{-\frac{(\delta_i(w)-\theta_i)^{۲}}{۲k^{۲}}\right\}\right]\,\mathrm{d}\phi(w, \theta, I_n).$$

برای هر δ در θ پیوسته است.

فرض می‌کنیم δ^{GB} غیر مجاز بوده و $\mathcal{D}$ کلاس کلیه برآوردگرها باشد، آنگاه

$$\exists\, \delta \in \mathcal{D} \qquad s.t \qquad \forall \theta \in \Theta \qquad R(\theta, \delta) \leq R(\theta, \delta^{GB}), \tag{۱۰.۵}$$

و حداقل یک مقدار $\theta_۰ \in \Theta$ وجود دارد بطوریکه نامساوی اکید برقرار باشد. با توجه باینکه $R(\theta, \delta)$ و $R(\theta, \delta^{GB})$ در θ پیوسته هستند، ثابت‌های $c_۱, c_۲$ مثبتی وجود دارند، به طوری که

$$R(\theta, \delta) < R(\theta, \delta^{GB}) - c_۱ \quad for \quad \theta \in \{\theta : |\theta - \theta_۰| < c_۲\}.$$

دنباله‌ای از توزیع‌های پیشین $\pi_k(\theta) \sim \mathcal{N}_n(۰, \tau_k^{۲})$ را در نظر بگیرید به طوری که $\lim_{k\to\infty}\tau_k^{۲} = \infty$ و به طور یکنواخت داشته باشیم $\lim_{k\to\infty}\pi_k(\theta) \to \pi(\theta)$، که در آن $\pi(\theta) < \infty$ یک توزیع سره می‌باشد. در این صورت توزیع پسین، تحت توزیع پیشین π_k بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|w) &\propto f(w|\theta)\pi_k(\theta)\\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(w_i-\theta_i)^{۲}}{۲}\right\} \times \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\tau_k}\,\exp\left\{-\frac{\theta_i^{۲}}{۲\tau_k^{۲}}\right\}\\
&\propto \exp\left\{-\frac{(w_i^{۲}+\theta_i^{۲}-۲w_i\theta_i)}{۲} - \frac{\theta_i^{۲}}{۲\tau_k^{۲}}\right\}\\
&\propto \exp\left[-\frac{۱}{۲}\theta_i^{۲}\left(۱+\frac{۱}{\tau_k^{۲}}\right) + \theta_i w_i\right]\\
&= \exp\left[-\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{\tau_k^{۲}}\right)\left(\theta_i^{۲} - ۲\theta_i\,\frac{w_i\tau_k^{۲}}{۱+\tau_k^{۲}}\right)\right]\\
&\propto \exp\left[-\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{\tau_k^{۲}}\right)\left(\theta_i - \frac{w_i\tau_k^{۲}}{۱+\tau_k^{۲}}\right)^{۲}\right].
\end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$\theta|w \sim \mathcal{N}_n\left(\frac{\tau_k^2 w_i}{1+\tau_k^2}\,,\ \frac{\tau_k^2}{1+\tau_k^2}\right).$$

مخاطره پسین تحت توزیع پیشین π_k و تابع زیان (۲.۵) به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
\rho\left(\pi(\theta),\delta(w)\right) &= \int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta,\delta(w)\,\mathrm{d}\pi(\theta|w) \\
&= p\int_{\Theta}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\exp\left\{-\frac{(\delta_i-\theta_i)^2}{2k^2}\right\}\right) f(\theta_i|w_i)\,\mathrm{d}\theta_i\right] \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

در ادامه داریم

$$\begin{aligned}
I_1 &= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta} f(\theta_i|w_i)\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=1}^{n} 1 \qquad (11.5) \\
I_2 &= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\exp\left\{-\frac{(\delta_i-\theta_i)^2}{2k^2}\right\} f(\theta_i|w_i)\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\frac{\sqrt{\tau_k^2+1}}{\sqrt{2\pi}\tau_k}\exp\left\{-\frac{(\delta_i-\theta_i)^2}{2k^2}-\frac{\left(\theta_i-\frac{\tau_k^2 w_i}{\tau_k^2+1}\right)^2}{\frac{\tau_k^2}{\tau_k^2+1}}\right\}\mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\int_{\Theta}\frac{\sqrt{\tau_k^2+1}}{\sqrt{2\pi}\tau_k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_i^2\left[\frac{1}{k^2}+\frac{\tau_k^2+1}{\tau_k}\right]+\theta_i\left[\frac{\delta_i}{k^2}+w_i\right]\right\} \\
&\quad \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_i^2}{k^2}+\frac{(\tau_k^2 w_i)^2}{(\tau_k^2+1)\tau_k^2}\right)\right\}\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\tau_k^2+1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_i^2}{k^2}+\frac{(\tau_k^2 w_i)^2}{(\tau_k^2+1)\tau_k^2}\right)\right\} \\
&\quad \times\int_{\Theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_k}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_k^2+k^2+\tau_k^2k^2}{\tau_k^2k^2}\right]\Bigg[\theta_i^2-2\theta_i \\
&\quad \times\left(\frac{\frac{\delta_i}{k^2}+w_i}{\frac{\tau_k^2+k^2+\tau_k^2k^2}{\tau_k^2k^2}}\right)+\left(\frac{\frac{\delta_i}{k^2}+w_i}{\frac{\tau_k^2+k^2+\tau_k^2k^2}{\tau_k^2k^2}}\right)^2-\left(\frac{\frac{\delta_i}{k^2}+w_i}{\frac{\tau_k^2+k^2+\tau_k^2k^2}{\tau_k^2k^2}}\right)^2\Bigg]\Bigg\}\,\mathrm{d}\theta_i \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{(\tau_k^2+1)(\tau_k^2+k^2+\tau_k^2k^2)}}{k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_i^2}{k^2}+\frac{\tau_k^2 w_i^2}{\tau_k^2+1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \exp\left\{\frac{(\delta_i\tau_k^۲+w_i\tau_k^۲k^۲)^۲}{۲\tau_k^۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}\right\}\\
=\ & p\sum_{i=۱}^{n}\frac{\sqrt{(\tau_k^۲+۱)(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}}{k}\exp\left\{\frac{-\delta_i^۲-\delta_i^۲\tau_k^۲-w_i^۲\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+۱)}\right.\\
&\left.+\frac{\delta_i^۲\tau_k^۲+w_i^۲\tau_k^۲k^۴+۲\delta_iw_i\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}\right\}\\
=\ & p\sum_{i=۱}^{n}\frac{\sqrt{(\tau_k^۲+۱)(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}}{k}\\
&\times \exp\left\{\frac{-\delta_i^۲k^۲-۲\delta_i^۲\tau_k^۲k^۲-\delta_i^۲\tau_k^۴k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right.\\
&\left.+\frac{-w_i^۲\tau_k^۴k^۲+۲\delta_iw_i\tau_k^۴k^۲+۲\delta_iw_i\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right\}. \qquad (۱۲.۵)
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌های (۱۱.۵) و (۱۲.۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
\rho\big(\pi(\theta),\delta(w)\big) \ =\ & p\sum_{i=۱}^{n}\left[۱-\left(\frac{\sqrt{(\tau_k^۲+۱)(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}}{k}\right.\right.\\
&\times \exp\left\{\frac{-\delta_i^۲k^۲-۲\delta_i^۲\tau_k^۲k^۲-\delta_i^۲\tau_k^۴k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{-w_i^۲\tau_k^۴k^۲+۲\delta_iw_i\tau_k^۴k^۲+۲\delta_iw_i\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right\}\right)\right]. \qquad (۱۳.۵)
\end{aligned}$$

با توجه به این مطلب که برآوردگر بیز، برآوردگری است که مخاطره پسین را می‌نیمم می‌کند، لذا از رابطه (۱۳.۵) نسبت به δ_i مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
& p\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{\sqrt{(\tau_k^۲+۱)(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)}}{k}\right.\\
&\times\left(\frac{۲\delta_ik^۲+۴\delta_i\tau_k^۲k^۲+۲\delta_i\tau_k^۴k^۲-۲w_i\tau_k^۴k^۲-۲w_i\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right)\\
&\times \exp\left\{\frac{-\delta_i^۲k^۲-۲\delta_i^۲\tau_k^۲k^۲-\delta_i^۲\tau_k^۴k^۲-w_i^۲\tau_k^۴k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right.\\
&\left.\left.+\frac{+۲\delta_iw_i\tau_k^۴k^۲+۲\delta_iw_i\tau_k^۲k^۲}{۲k^۲(\tau_k^۲+k^۲+\tau_k^۲k^۲)(\tau_k^۲+۱)}\right\}\right]\\
&=۰.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\delta_i(k^۲ + ۲\tau_k^۲ k^۲ + \tau_k^۴ k^۲) - w_i(k^۲\tau_k^۲ + k^۲\tau_k^۴) = ۰,$$

لذا برآوردگر بیز، تحت پیشین π_k عبارتست از

$$\delta_i^{\pi_k}(w) = w_i\left(\frac{\tau_k^۲ + \tau_k^۴}{۱ + ۲\tau_k^۲ + \tau_k^۴}\right), \quad i = ۱, \dots, n,$$

با مخاطره بیز

$$\begin{aligned} r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) &= \int_\Theta R(\theta, \delta^{\pi_k})\, \mathrm{d}\pi(\theta) \\ &= p\sum_{i=۱}^{n}\int_\Theta \pi_k(\theta)\int_W \Bigg[۱ - \exp\left\{-\frac{\left(w_i\left(\frac{\tau_k^۲+\tau_k^۴}{۱+۲\tau_k^۲+\tau_k^۴}\right) - \theta_i\right)^۲}{۲k^۲}\right\} \\ &\quad f(w_i|\theta_i)\Bigg]\, \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}w_i. \end{aligned} \tag{۱۴.۵}$$

همچنین طبق قضیه ۲.۳.۵ مخاطره بیز، برآوردگر تعمیم یافته δ^{GB} به صورت زیر مفروض است

$$r(\pi_k, \delta^{GB}) = p\Big(۱ - \frac{k}{\sqrt{k^۲ + ۱}}\Big)^n.$$

حال فرض کنید

$$c_۳ = \lim\ \inf_{k\to\infty} \int_{|\theta-\theta_۰|<c_۲} \pi_k(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

با توجه باینکه $\lim_{k\to\infty} \tau_k^۲ = \infty$ داریم

$$c_۳ = \lim\ \inf_{k\to\infty} \int_{|\theta-\theta_۰|<c_۲} \pi_k(\theta)\, \mathrm{d}\theta > ۰.$$

بنابراین برای k به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\begin{aligned} r(\pi_k, \delta^{GB}) - r(\pi_k, \delta^{\pi_k}) &\geq r(\pi_k, \delta^{GB}) - r(\pi_k, \delta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(R(\theta, \delta^{GB}) - R(\theta, \delta)\big)\, \pi_k(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &\geq \int_{|\theta-\theta_۰|<c_۲} \big(R(\theta, \delta^{GB}) - R(\theta, \delta)\big)\, \pi_k(\theta)\, \mathrm{d}\theta > c_۱ c_۳ > ۰. \end{aligned} \tag{۱۵.۵}$$

در ادامه از رابطه (۱۴.۵) حد گرفته و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} r(\pi_k,\delta^{\pi_k}) &= p\lim_{k\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\int_{W}\pi_k(\theta)\\
&\quad\times\left[۱-\exp\left\{-\frac{\left(w_i\left(\frac{\tau_k^۲+\tau_k^۴}{۱+۲\tau_k^۲+\tau_k^۴}\right)-\theta_i\right)^۲}{۲k^۲}\right\}\right] f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i\\
&= \int_W\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\int_{W}\lim_{k\to\infty}\pi_k(\theta)\\
&\quad \lim_{k\to\infty}\times\left[۱-\exp\left\{-\frac{\left(w_i\left(\frac{\tau_k^۲+\tau_k^۴}{۱+۲\tau_k^۲+\tau_k^۴}\right)-\theta_i\right)^۲}{۲k^۲}\right\}\right] f(w_i\ \theta_i)\mathrm{d}\theta_i\ \mathrm{d}w_i\\
&= p\sum_{i=۱}^{n}\int_{\Theta}\pi(\theta)\int_{W}\left[۱-\exp\left\{-\frac{(w_i-\theta_i)^۲}{۲k^۲}\right\}\right]\\
&\quad\times f(w_i|\theta_i)\,\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}w_i\\
&= r(\pi_k,\delta^{GB}). \qquad (۱۶.۵)
\end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه (۱۵.۵) با رابطه (۱۶.۵) در تناقض است لذا فرض غیر مجاز بودن برآوردگر δ^{GB} رد می‌شود. □

$(**)$ **قضیه ۴.۳.۵.** *تحت مفروضات قضیه ۱.۳.۵ ، برآوردگر بیز تعمیم یافته δ^{GB} مینیماکس است.*

برهان. با توجه به قضیه ۳.۳.۵ ، برآوردگر δ^{GB} مجاز بوده و دارای مخاطره ثابت به‌صورت

$$r(\pi,\delta^{GB}) = p\left(۱-\frac{k}{\sqrt{k^۲+۱}}\right)^n.$$

می‌باشد از اینرو با توجه به قضیه ۹.۳.۱ و لم ۱۰.۳.۱ ، δ^{GB} برآوردگر مینیماکس است. □

پیوست آ

خلاصه و پیشنهادات برای آینده تحقیق

همان طور که در مقدمه به آن اشاره شد، در یافتن برآوردگرها، اصولا یافتن برآوردگری با حداقل مخاطره نسبت به سایر برآوردگرها، یکی از ایده‌آل‌ها می‌باشد که این امر دلالت بر اهمیت ویژه مفهوم مجاز دارد. از سویی دیگر گاه شرایط ایجاب می‌کند که مجبور به انتخاب بهترین برآوردگر در بدترین حالت شویم، در این زمان است که اهمیت برآورگر مینیماکس که در بردارنده مفهوم فوق می‌باشد، نمایان می‌شود. لذا نقش مهمی که مفاهیم فوق در استنباط و تصمیم‌گیری‌های آماری ایفا می‌کنند، اذعان کننده اهمیت نتایج حاصل شده از این پایان‌نامه می‌باشد. که در آن با در نظر گرفتن تابع زیان لینکس و نرمال منعکس شده در حالت بیزی، موفق به یافتن برآوردگرهایی شدیم که توأما هر دو ویژگی مجاز و مینیماکس را دارا بودند. و همچنین با در نظر گرفتن حالت خاصی برای تابع زیان لینکس برای توزیع‌های نرمال و نرمال آمیخته مقیاسی، در حالتی که $\sigma^۲$ را معلوم، و توزیع پیشین را ناسره ($\pi(\theta) = ۱$) در نظر گرفتیم، قادر به یافتن برآوردگرهای انقباضی موجکی نرمی گشتیم که مجاز و مینیماکس نیز بودند. لذا می‌توان با دقت نظر بیشتری در خصوص انتخاب تابع زیان و توزیع پیشین، به نتایج جالب و یا مشابه‌ای در یافتن برآوردگری با خواص بهینه، دست یافت.

از این رو تعمیم‌های زیر را می‌توان در آینده مورد توجه قرار داد.

۱. پیدا برآوردگرهایی تحت توابع زیان دیگر از جمله، لینکس کراندار[۱]، استاین [۲] و ...

[۱] Bounded linex

۲. با توجه به اینکه در اکثر موارد در واقعیت، σ^2 مجهول می‌باشد، بررسی مسئله فوق برای σ^2 مجهول می‌تواند از اهمیت خاصی برخوردار باشد.

۳. استفاده از توزیع‌های پیشین ناسره دیگر از جمله توزیع پیشین پایای جفری.

۴. استفاده از توزیع‌های پیشین مزدوج که منجر به سادگی محاسبات می‌گردد.

۵. با توجه به اینکه آستانه نرم اریبی را افزایش می‌دهد، در مواردی که در موضوع تحت بررسی، افزایش واریانس اهمیت کمتری نسبت به افزایش اریبی داشته باشد، می‌توان با تغییر شرایط مسئله توجه‌مان را به یافتن برآوردگر موجکی سخت مجاز و مینیماکس معطوف کنیم.

۶. تعمیم برای کلاس‌های دیگری از توزیع‌ها، از جمله کلاس توزیع‌های بیضی‌گون.

[۲]Stein

مراجع

[۱] ایرانمنش، ا. (۱۳۹۱)، رساله دکتری، *مباحثی در توزیع بیضی‌گون با تاکید بر توزیع t-استیودنت چندمتغیره*، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] ایرانمنش، م. (۱۳۸۶)، *آنالیز ریاضی*، انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

[۳] رودین، و. (۱۳۸۵)، *اصول آنالیز ریاضی*، عالم‌زاده، ع. ا. چاپ بیستم، انتشارات علمی و فنی، تهران.

[۴] کریم‌نژاد، ع. (۱۳۸۸)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، *برآورد یابی میانگین کران‌دار توزیع نرمال*، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی تهران.

[۵] عاملی، س. (۱۳۸۷)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، *برآورد غیر خطی موجکی تابع چگالی*، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[6] E. Aboufadel and S. Schlicker, *Discovering Wavelets*, Wiley, 1999.

[7] D. F. Andrews and C. L. Mallows, *Scale mixtures of normal distributions*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 36 (1974) 99-102.

[8] M. Arashi, S. M .M. Tabatabaey and S. Khan, *Estimation in multiple regression model with elliptically contoured errors under MLINEX loss*, Journal of Applied Probablity and Statistics, 3 (2008) 23-35.

[9] J. O. Berger, *Statistical Decision Theory*, Springer, NewYork, 1980.

[10] J. M. Bernardo, *Bayesian statistic* , this is an update and abridged version of the chapter Bayesian statistics published the volum Probablity and Statistics (R. Viertl, ed) of the Encyclopedia of life support system (EOLSS). Oxford, UK: UNESCO, 2003.

[11] J. M Bernardo, M. Degroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith, *Bayesian Statistics*: Proceedings of the First International Meting Held in Valencia (Spain), May 28 to June 2, 1979, University Press, Spain, 1980.

[12] M. Degroot, *Optimal Statistical Decisons*, Mcgraw Hill Book Co, NewYork, 1970.

[13] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by Wavelet shirinkage*, Biometrica, 81 (1994) 425-455.

[14] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian and D. Picard, *Density estimation by wavelet thresholding*, Annals of Statistics, 24 (1996) 508-539

[15] S. E. Fienberg and A. Zellner, *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage*, Amsterdam: North-Holland, 1975.

[16] B. Ghari, M. Arashi and S.M.M Tabatabaey, *Estimation of the mean vector of a multivariate normal model under reflected normal loss*, Journal of Statistical Research, 43 (2009) 41-52.

[17] P. K. Goel and A. Zellner, *Bayesian Inference and Decision Techniques with Applications*: Essay in Honor of Bruno Definetti, Amsterdam: North- Holland, 1985.

[18] I. J. Good, *Probablity and the Weighting of Evidence*, C. Griffin and Co, London, 1950.

[19] I. J. Good, *The Estimation of Probablities*, MA: MIT Press, Combridge, 1965.

[20] P. Hall and P. Patill, *Formulae for mean integrated squared error of non-linear wavelet based density estimation*, Annals of Statistics, 23 (1995) 905-928.

[21] W. Hardel, G. Kerkyacharian, D. Picard and A. Tsybakov, *Wavelets, Approximation and Statistical Applications*, Lecture Note in Statistics, Springer, NewYork, 1998.

[22] S. Y. Huang, *On a Bayesian aspect for soft wavelet shrinkage estimation under an asymmetric linex loss*, Statistics and Probability Letter, 56, (2002) 171-175.

[23] H. Jeffreyes, *Scientific Inference*, 2nd Ed., Combridge U. Press, Combridge, 1957.

[24] H. Jeffreyes, *Theory of Probablity*, 3rd rev. Ed., Oxford U. Press, London, 1967.

[25] K. L. Lange, J.A. Little and M.G.J Taylor, *Robust statistical modeling using the t distribution*, Journal of the American Statistical Association, 84 (1989) 881-896.

[26] K. Lange and J. S. Sinsheimer, *Normal independent distributions and their applications in robust regression*, Journal of Computational and Graphical statistics, 2 (1993) 175-198.

[27] E. E. Leamer, *Specification Searches*, Wiley, NewYork, 1978.

[28] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory Of Point Estimation*, 2nd Ed., Springer, New York , 1998.

[29] E. L. Lehmann and J. P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd Ed., Springer, New York , 2005.

[30] D. T. L. Lee and A. Yamamoto, *Wavelet analysis: Theory and applications*, Hewlett Packard Journal, 6 (1994) 44-54.

[31] D. V. Lindley, *Bayesian Statistics*, A review, Society Industrial And Applied Mathematics, Philadelphia, 1971.

[32] D. V. Lindley, *Introduction to Probablity and Statistics from a Bayesian View Point*, Combridge U. Press, Combridge, 1965.

[33] R. J. A. Little, *Robust Estimation of the mean and covariance matrix from data with missing value*, Applied Statistics, 37 (1988) 23-38.

[34] S. C. Peck, *Alternative investment models for firms in electric utilities industry*, Bell Journal of Economics and Management Scinece, 5 (1974) 420-548.

[35] S. J. Press, *Bayesian computer programs*, in A. Zellner (ed.), *Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics*: Essays in Honor of Harold Jeffreys, Amsterdam: North-Holland, 1980.

[36] C. Phang, P. Phang, *Simple procedure for the designation of haar wavelet matrices for differential equations*, Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, 2 (2008) 19-21.

[37] K. Rohatgi and E. Saleh, *An Introduction To Probaility And Statistics* , 2nd Ed., Wiley, 2001.

[38] L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, Wiley, NewYork, 1954.

[39] F. A. Spiring , *The reflected normal loss function*, The Canadian Journal of Statistic, 3 (1993) 321-330.

[40] M. Towhidi and J. Behboodian , *Estimation of the multivariate normal mean under the extended reflected normal loss function* , Bulletin of the Iranian Mathematical Society , 28, (2002) 57-65.

[41] H. R. Varian, *A Bayesian approach to real estate assessment.* In: S. E. Fienberg, A. Zellner, (eds.), Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honour of Leonard J. Savage, North-Holland, Amesterdam, (1975) 195-208.

[42] B. Vidakovic, *Statistical Modeling By Wavelets*, Wiley, 1999.

[43] A. Zellner, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley, NewYork, 1971.

[44] A. Zellner, *Basic Issues in Econometrics*, Chicago U. Press, Chicago 1984.

[45] A. Zellner, *Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss function*, Journal of American Statistical Asoociation, 81 (1986) 446-451.

[46] A. Zellner, M. S. Geisel, *Sensitivity of Control to Uncertainty and from of the Criterion function*, in D. G. Watts(Ed.), The Future of Statistics, Academic Press, Inc., NewYork, (1968) 269-289.

[47] A. Zellner and A. D. Williams, *Bayesian analysis of the federal Reserve-MIT-Penn model's almon lag consumption function*, Journal of Econometrics, 1 (1973) 267-299.

Surname: Torehzade Name: Samira

Title: Bayesian Wavelet Shrinkage Estimation Under the Linex Loss

Supervisor: Dr. Mohammad Arashi

Degree: Master of Science Subject: Statistic
Field: Shirinkage Estimator

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: June 2013 Number of pages: 87

Keywords: Generalized Bayes estimator, Linex loss , reflected normal, Admissible, Minimax, Wavelet, Soft threshold, Wavelet shirankage estimation

Abstract

Bayesian method is one of the paradigms used in statistical inference , where the parameter θ is a random variable with probablity distribution function $\pi(\theta)$ on Θ. In this method, the posterior distribution is used as a criterion to detrmine the Bayes estimator. Due to the rapid growht of Bayesian method, since twenties century, in this thesis we will focuse on this type of estimator. In this regard, we find the generalized Bayes estimator under the linex loss as well as the reflected normal loss. Then, we show that for the normal and the scale mixture of normal distributions, under the linex loss, the generalized Bayes estimator is a soft wavelet shirinkage estimator. Furthermore, taking this importance, that admissible and minimax concepts play an important role in the statistical inference and decision making, we will investigate these estimators in terms of the concepts.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Statistic

Bayesian Wavelet Shrinkage Estimation Under the Linex Loss

Supervisor
Dr. Mohammad Arashi

by
Samira Torehzade

June 2013