دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

مکانیابی فازی روی شبکه‌ها

دانشجو: **مصطفی حیدری**

استاد راهنما:
دکتر صادق رحیمی شعرباف

استاد مشاور:
دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

بهمن ماه ۱۳۸۷


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم خالصانه به پدر و مادرم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی و تشکر

اگر خزان را امید بهاری نبود، اگر درد را امید شفائی نبود، بی شک تلاش که مهمترین عامل سازندگی و رشد انسان است در گرداب تنبلی هلاک می‌گشت. اما تقدیر این نبود، تا زندگی معنا یابد و آنانکه می‌خواهند همیشه زنده بمانند به تلاشی بزرگ برای رسیدن به امیدی در دوردست واداشته شوند. خداوند متعال را شاکرم که به من توفیق داد تا نگارش این رساله را به پایان برسانم. در به فرجام رسانیدن این مهم، از گنجینه علم و حکمت و سرچشمه بذل و معرفت بزرگانی بهره برده‌ام که بر خود واجب می‌دانم از تمامی آن بزرگواران کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. با اینکه می‌دانم فراتر از توان بیان من است، ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

لذا بر خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر صادق رحیمی شعرباف** به خاطر زحمات فراوان و راهنمائی‌های ایشان و جناب آقای **دکتر جعفر فتحعلی** که در انجام این مهم مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم و برایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. همچنین از آقایان **دکتر مهدی زعفرانیه** و **دکتر نادر جعفری راد** که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را به عهده گرفته‌اند تشکر می‌نمایم. در پایان از خانوادۀ عزیزم به خصوص پدر و مادرم که همیشه و در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند و تمامی موفقیّت‌های من مرهون زحمات و فداکاری ایشان می‌باشد، سپاسگزارم. امیدوارم این پایان نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

چکیده

مسائل مکانیابی یکی از مهمترین مسائل در تحقیق در عملیات است و کاربردهای زیادی در دنیای امروز دارد. از مهمترین کاربردهای آن می‌توان به مکانیابی ایستگاه‌های آتش‌نشانی و پلیس، مراکز اورژانس، بیمارستان‌ها، مراکز توزیع کالا، ایستگاه‌های اتوبوس و مترو، مراکز اداری، شبکه‌های کامپیوتری، مراکز پستی، مراکز دفع زباله، نیروگاه‌های هسته‌ای و... اشاره کرد. دو نمونه از مسأله‌های مهم در تئوری مکانیابی، مسأله‌های $p-$میانه و $p-$مرکز هستند. در بیشتر مسائل مکانیابی که در دهه‌های اخیر مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته، داده‌ها و اطلاعات ما در مورد شرایط مسأله دقیق و مشخص بوده است. ولی در حالت‌ها و کاربردهای واقعی، داده‌ها و اطلاعات ما از مسأله، غیر قطعی و مبهم است. بنابراین **مسائل مکانیابی فازی روی شبکه‌ها** می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. در این پایان نامه ما به توصیف و تشریح این مسائل و روش‌های حل آنها در حالت فازی پرداخته، و برای مسأله $p-$میانه وقتی وزن رأس‌های شبکه اعداد فازی هستند روش حلی را ارائه می دهیم.

کلید واژه: مکانیابی، برنامه ریزی خطی فازی، شبکه‌های فازی، مجموعه‌های فازی، $p-$میانه فازی، $p-$مرکز فازی.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

فصل ۱

مکانیابی

در این فصل ابتدا چارچوب و زمینهٔ تاریخی مسائل مکانیابی و کاربردهای آن را معرفی می‌کنیم. آنگاه به معرفی دو مسأله مهم مکانیابی (مسأله میانه و مسأله مرکز) می‌پردازیم.

۱.۱ مقدمه

مسائل مکانیابی از جمله مسائل مهمی است که امروزه کاربرد زیادی در رشته‌ها و علوم مختلف دارد، و در دهه‌های اخیر مقالات فراوانی در این زمینه به چاپ رسیده است. پیدایش مسأله مکانیابی را به قرن هفدهم میلادی نسبت می‌دهند، زمانی که فرما [۱] مسأله زیر را مطرح کرد:

فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را بگونه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌ها تا سه نقطه داده شده مینیمم شود. این مسأله در سال ۱۶۴۰ در ایتالیا توسط توریچلی [۲] حل شد، به همین دلیل این نقطه را نقطه توریچلی می‌نامند. مطالعات در علم مکانیابی مدرن در سال ۱۹۰۹ توسط وبر [۳] پایه ریزی شد[۹۶]. او مسأله پیدا کردن مکان یک سرویس دهنده را که مجموع فاصله آن تا چند مشتری کمترین مقدار ممکن باشد را معرفی نموده و مورد بررسی قرار داد. تحقیقات جدی بر روی مسائل مکانیابی در سال ۱۹۶۴ توسط حکیمی [۳۹] شروع شد، و از آن زمان به بعد مطالعه روی این مسائل وارد مرحله جدیدی شد. حکیمی مسأله مکانیابی بر روی شبکه را به منظور یافتن مکان بهینه گشت‌های پلیس در بزرگراهها و مناطق شهری مورد استفاده قرار داد. او برای رسیدن به هدف، مسأله مکانیابی را در حالت کلی‌تر مطرح کرد، او فرض کرد که اگر تعداد سرویس دهنده‌ها بیشتر از یکی باشد بنابراین مشتری‌ها از بین سرویس‌دهنده‌ها کسی را انتخاب می‌کنند که کمترین فاصله را با او داشته‌باشند. بعضی از افراد مدل‌های مختلف مسائل مکانیابی را طبقه بندی کرده‌اند، اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر [۴] و میرچندانی [۵][۳۷] ارائه شد. همچنین طبقه‌بندی‌های دیگری

[۱] Fermat

[۲] Torricelli

[۳] Weber

[۴] Handler

[۵] Mirchandani

در این زمینه توسط کراروپ [۶] و پروزن [۷] [۵۹]، هانس [۸] و همکاران [۴۱]. میرچندانی و فرانسیس [۹] [۶۳]، فرانسیس و همکاران [۲۷]، اُون [۱۰] و دسکین [۱۱] [۷۲]، اسکاپارا [۱۲] و اسکاتلا [۱۳] [۸۶] و درزنر [۱۴] و هاماخر [۱۵] [۲۰] انجام شده است. هال [۱۶] [۳۶] لیستی از مقاله‌های مختلف در مورد مسائل مکانیابی را در یک سایت اینترنتی جمع آوری کرده است.

مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها به چگونگی انتخاب یک مجموعه از نقاط برای تعیین مکانهای مشخصی در شبکه می‌پردازند. در حقیقت ما در این مسائل با تخمین زدن معیارهای مختلف و با استفاده از مجموعه مشخصی از قیدها، بطور بهینه نیازهای مشتری‌ها را برآورده می‌کنیم. بنابراین در مسائل مکانیابی که روی شبکه یا گراف مدل می‌شوند، رأس‌های شبکه نشان دهنده نقاطی هستند که استفاده کننده‌های آن متقاضی وسیله‌ای هستند و یالها نشان دهنده وجود ارتباط بین رأس‌ها هستند(برای مثال جاده هائی که شهرها را به هم وصل می کنند). اگر چه می‌توان گفت که اکثر مسائل مکانیابی دارای ماهیّت یکسانی هستند(عناصری که تعریف می شوند اغلب یک مجموعه از گره‌ها، یک مجموعه از یال‌ها و یک ماتریس مجاورت هستند)، ولی بررسی‌هائی که روی آنها انجام می‌شود با هم متفاوت است. به عبارتی حوزه وسیعی از وضعیت‌ها و شرایط واقعی وجود دارد که کاملاً در این مسائل واقع می‌شوند ولی در حالت معمولی مورد بررسی و مطالعه قرار نمی‌گیرند. به عبارت دقیقتر ما ابهامات مختلفی که با توجه به شکل مسأله می توانند رخ دهند را در حالت قطعی لحاظ نمی‌کنیم. بنابراین باید در کنار مشخصات اصلی مسأله، یک سری خصوصیات جدید که به محیط اطراف مربوط می‌شوند را نیز تعریف کنیم. برای

---

[۶] Krarup
[۷] Pruzan
[۸] Hansen
[۹] Francis
[۱۰] Owen
[۱۱] Daskin
[۱۲] Scaparra
[۱۳] Scutella
[۱۴] Drezner
[۱۵] Hamacher
[۱۶] Hale

توضیح این مطلب فرض کنید نقشه‌ای در اختیار داریم که شهرهای روی آن رأس‌های شبکه و جاده‌های بین شهرها نقش یال‌های شبکه را دارند، و ما از آن برای تعیین مسیر استفاده می‌کنیم. بوضوح همه نقاط روی نقشه با توجه به علاقه و سایر ملاک‌هایی که در نظر می‌گیریم، از اهمیّت یکسانی برخوردار نیستند. برای مثال هر چند همه رأسهای روی نقشه نشان دهنده شهرها هستند ولی همه آنها خصوصیات و ویژگی‌های مراکز استان‌ها و شهرستان‌های بزرگ را ندارند. بنابراین از این نظر همه نقاط روی نقشه بررسی نمی‌شوند زیرا ممکن است دلایل مختلفی برای بررسی شدن شهرها وجود داشته باشد.

فرض کنید که علاقه‌مندیم یک راه پر هزینه بسازیم و همه گره‌هائی (شهرها) که یک معیار مشخص را دارند روی نقشه مشخص می‌کنیم (برای مثال تعداد افراد بیشتر از ۱۰۰۰ نفر) و بقیه شهرهائی که این معیار را ندارند از نقشه حذف می کنیم. در اینجا مفهوم مجموعه‌های فازی و شبکه‌های فازی پایه‌ریزی می‌شوند و گراف‌ها با این مفهوم ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعه فازی رأس‌ها طوری بررسی می‌شوند که رأس‌های مجموعه نشان دهنده خاصیت فرض شده‌ای با یک درجه عضویت مشخص هستند. مشابه این بحث می‌تواند در مورد یال‌های گراف بکار گرفته شود. بطور مثال ما می‌توانیم مجموعه فازی را روی کیفیّت جاده‌ها تعریف کنیم. بنابراین یک بزرگراه و یک مسیر جنگلی هر دو خاصیت جاده بودن را دارند ولی درجه عضویت آنها با هم متفاوت است. در بخش های آینده مفاهیم مهم مسائل مکانیابی و مدل‌های مهم مکانیابی روی گراف‌های فازی را شرح می‌دهیم.

۲.۱ مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها

دو نمونه از مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها، مسأله‌های میانه و مرکز هستند. در هر دو مسأله هدف پیدا کردن نقاطی از شبکهٔ N است بطوریکه فاصله وزنی این نقاط (سرویس دهنده‌ها) تا نقاط تقاضا(مشتری‌ها) بهینه شود.

۱.۲.۱ مسأله p—میانه

مسأله p—میانه یکی از مهمترین مسائل در تئوری مکانیابی است و کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف دارد. در مسأله p—میانه روی شبکه‌ها هدف پیدا کردن مجموعه $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ شامل مکان p سرویس دهنده روی شبکه $N = (V, E)$ است بطوری که اگر هر رأس v_i دارای وزن w_i باشد، مجموع فاصله‌های وزنی از این مجموعه تا تمام رئوس روی شبکه N مینیمم شود. به عبارتی در این حالت هدف کمینه کردن مجموع وزنی فاصله‌ها خواهد بود. یعنی:

$$\min \ f(x) = \sum_{v_i \in N} w_i d(X, v_i)$$

فاصله هر رأس $v \in V$ از مجموعه X بصورت فاصله v تا نزدیکترین وسیله در X تعریف می‌شود. یعنی:

$$d(X, v) = \min_{x_i \in X} \{d(x_i, v)\}$$

و $d(v_i, v_j)$ فاصله کوتاهترین مسیر بین دو رأس v_i و v_j روی شبکه می‌باشد.

هرچند مقاله‌های اندکی در زمینه مکانیابی روی شبکه‌ها در دهه ۱۹۵۰ منتشر شد، ولی به این مسائل از اواسط دهه ۱۹٦۰ به بعد بطور جدی پرداخته شد. حکیمی[۱۷] [۳۹، ۴۰] در سالهای ٦۵—۱۹٦۴ نتایج مقدماتی درباره مینیمم فاصله وزنی موقعیت p وسیله روی شبکه از n نقطه تقاضا بدست آورد، اگرچه او نتوانست روش حلی برای این مسائل ارائه دهد ولی ثابت کرد که حداقل یک مجموعه متشکل از p رأس از N رأس وجود دارد که یک جواب بهینه برای مسأله p—میانه است. این نتیجه به «**قضیّه حکیمی**» یا «**خاصیت بهینگی رأسی** » معروف است. کمکی که قضیّه حکیمی در حل مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها انجام داد شبیه کار دانتزیگ[۱۸] در مسائل برنامه‌ریزی خطی است به عبارتی به کمک این قضیّه مجموعه جواب های بهینه، از یک مجموعه نامتناهی به یک مجموعه متناهی کاهش پیدا می‌کند. گلدمن[۱۹] [۳۳] در سال ۱۹۷۱ نشان داد که مساله ۱—میانه روی شبکه‌ها با استفاده از روش شمارشی

---

[۱۷] Hakimi

[۱۸] Dantzig

[۱۹] Goldman

دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ می‌باشد. همچنین او نشان داد هنگامی که وزن یکی از رأس‌های تقاضا از نصف وزن کل سیستم بیشتر باشد جواب بهینه ۱–میانه همان گره است. با استفاده از این قضیّه (خاصیت اکثریت وزنی) ۱–میانه روی درخت دارای پیچیدگی زمانی $O(n)$ است. این نتیجه مشابه شرایط بهینگی برای میانه در فضای دو بعدی با نرم l_1 است.

قضیّه: اگر T یک درخت باشد و زیردرخت T_1 خاصیّت زیر را دارا باشد، آنگاه یک جواب بهینه برای مسأله در T_1 وجود دارد.

$$W(T_1) \geq \frac{1}{2}W(T)$$

که $W(T)$ و $W(T_1)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$W(T) = \sum_{\{i:v_i\in T\}} w_i \quad , \quad W(T_1) = \sum_{\{i:v_i\in T_1\}} w_i.$$

الگوریتم اکثریّت وزنی :

۱ – اگر T شامل تنها یک رأس است توقف کنید، همان رأس جواب بهینه است.

۲ – به ازای هر رأس انتهائی مانند v، اگر $W(v) \geq \frac{W(T)}{2}$ آنگاه v جواب مسأله است. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

۳ – فرض کنید u رأس مجاور v باشد، وزن v را به u اضافه کرده و رأس v و کمان (u,v) را حذف کنید و به گام ۱ بروید.

کریو[۲۰] و حکیمی [۵۳] در سال ۱۹۷۹ ثابت کردند که p–میانه در حالت کلی NP–سخت[۲۱] است. با این حال با توجه به قضیّه حکیمی، برای بدست آوردن جواب بهینه کافی است روی مجموعه رأسهای شبکه تحقیق کنیم. با استفاده از این نتیجه ریول و اسوین[۲۲][۷۵] در سال ۱۹۷۰ اولین فرمولبندی مساله

[۲۰] Kariv

[۲۱] NP-hard

[۲۲] ReVelle & Swain

p—میانه را با برنامه‌ریزی خطی صفر و یک ارائه دادند. یک مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک برای مسأله p—میانه بصورت زیر است:

$$
\begin{array}{lllll}
min\ z = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i d_{ij} x_{ij} & & & \\
s.t. & & & & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1,...,n & (a) & \\
& x_{ij} \leq y_j & i = 1,...,n\ j = 1,...,n & (b) & (1.1) \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = p & & (c) & \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 & i = 1,...,n\ j = 1,...,n & (d) & \\
& y_j = 0 \vee 1 & j = 1,...,n & (e) &
\end{array}
$$

در فرمول فوق متغیرهای x_{ij} و y_j بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر راس } i \text{ به سرویس دهنده } j \text{ اختصاص داده شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر راس } j \text{ بعنوان مکان سرویس دهنده انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در مدل (۱.۱) مجموعه قیدهای (a) بیانگر این مسأله هستند که هر رأس باید تنها به یک سرویس دهنده اختصاص یابد. مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که رأس‌ها را تنها می‌توان به رئوسی اختصاص داد که به عنوان مکان یک سرویس دهنده در نظر گرفته شده باشد، یعنی به ازای آن رأس $y_j = 1$ باشد. مجموعه قیدهای (b) را می توان با قیدهای $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq My_j$ جایگزین کرد که M یک عدد بزرگتر از $n - p + 1$ است. و محدودیت (c) نشان دهنده این مطلب است که p سرویس دهنده مورد نیاز است. از جمله الگوریتم‌های دقیق اعمال شده بر روی مسأله p—میانه می‌توان به روش گالوا[۲۳][۲۹] با استفاده از روش کاهشی لاگرانژ[۲۴] در سال ۱۹۹۳ و برنامه‌ریزی خطی ریول و اسوین اشاره کرد. همچنین

[۲۳] Galvao
[۲۴] Lagrangean Relaxatin

ارلنکاتر[۲۵][۲۲] در سال ۱۹۷۸ با استفاده از تکنیک کاهشی دوگان (روش $DUALOC$)الگوریتمی برای مسأله p—میانه ارائه داد. برای درک بهتر موضوع به دسکین در [۱۶] مراجعه کنید. روشهای ابتکاری که برای مسأله p—میانه بکار گرفته می شود، روشهائی بر پایه آزمون و خطا هستند. این روشها تضمین نمی‌کنند که جواب بدست آمده یک جواب بهینه باشد و زمانی بکار می‌روند که یک جواب، نزدیک به جواب بهینه در اختیار داشته باشیم. این روشها به دو گروه **روش‌های ابتکاری کلاسیک**[۲۶] و **روش‌های فراابتکاری** [۲۷] تقسیم می‌شود که گروه اول به سه گروه، **برنامه ریزی ریاضی**[۲۸]، **جستجوی محلی**[۲۹] و **روش‌های ابتکاری سازنده**[۳۰] تقسیم می‌شود.

اولین روش‌های ابتکاری برای مساله p—میانه را کوهن و هامبورگر[۳۱][۵۸] در الگوریتمی مبتنی بر روش‌های آزمند[۳۲] و بهبود بخشنده ارائه دادند. از دیگر روش‌های اولیه می‌توان جستجوی همسایگی [۳۳] مارانزانا[۳۴][۶۱] در سال ۱۹۶۴ و روش جانشینی رأس‌ها [۳۵] توسط تیتز و بارت[۳۶][۹۴] در سال ۱۹۶۸ اشاره کرد. تقسیم بندی این روش‌ها در جدول ۱.۱ آمده است. (تمامی مطالب جدول با توجه به سال و نام نویسندگان در مراجع ذکر شده است.)

روش‌های دیگری مبتنی بر تئوری گراف برای حل مساله p—میانه روی درخت ارائه شده است که می‌توان به الگوریتم دقیق با پیچیدگی زمانی $O(p^2n^2)$ برای p—میانه روی درخت توسط کریو و حکیمی[۵۳] اشاره کرد که تمیر[۳۷][۹۰] آنرا به الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(pn^2)$ بهبود بخشید.

[۲۵] Erlenkotter
[۲۶] Classical heuristics
[۲۷] Metaheuristics(MH)
[۲۸] Mathematical programing(MP)
[۲۹] Local search(LS)
[۳۰] Constructive heuristics(CH)
[۳۱] Kuhen & Hamburger
[۳۲] Greedy
[۳۳] Neighborhood search
[۳۴] Maranzana
[۳۵] Vertex substitution
[۳۶] Teitz & Bart
[۳۷] Tamir

جدول ۱.۱: روش‌های ابتکاری و فراابتکاری برای مسأله p–میانه

Type	*Heuristic*	*References*
CH	*Greedy*	Kuhen and Hamburger (1963) , Whitaker (1983)
	Stingy	Feldman et al.(1966),Moreno-perez et al(1991) Salhi and Atkinson (1995)
	Dual ascent	Galvao (1980,1993) , Erlenkotter (1978) ,Captivo (1991)
	Composite	Pizzolato (1994) , Salhi (1997)
LS	*Alternate*	Maranzana (1964)
	Interchange	Titz and Bart(1968),Dansham and Rushton(1992) Hansen and Mladenovic (1997), Resende and Werneck (2003) Kochetov et al (2005)
MP	*Dynamic programing*	Hribar and Daskin (1997) Cornuejols et al(1977),Mulvey and Crowder(1979) ,Galvao (1980)
	Lagrangian relaxation	Beasley (1993), Daskin (1995), Senne and Lorena(2000) Barahona and Anbil(2000), Beltran et al (2004)
	Aggregation	Hillsman and Rhoda (1978) , Goodchild (1979) Current and Schilling (1987), Hodgson and Neuman (1993) Erkut and Bozkaya (1999),Hodgson and Salhi (1998) Bowerman et al(1999),Francis et al(2000,2003)
MH	*Tabu search*	Mladenovic et al (1995, 1996) , Voss (1996) ,Rolland et al (1996) Salhi (2002) ,Kochetov (2001),Goncharov and Kochetov (2002)
	Variable neighborhood search	Hansen and Mladenovic(1997), hansen et al(2001) Garcia-Lopez et al(2002), Crainic et al(2004)
	Genetic search	Hosage and Goodchild (1986), Dibbi and Densham (1993) Moreno-Perez et al(1994), Estivill-Castro (1999) , Alp et al (2003) Chaudhry et al (2003), Correa et al (2004)
	Simulated annealing	Murray and Church (1996) , Chiyoshi and Galvao (2000) Levanova and Loresh (2004)
	Heuristic concentration	Rosing et al (1998) , Rosing and Revelle (1997) , Rosing et al (1999)
	Scatter search	Garcia-Lopez et al (2003)
	Ant colony	Levanova and Loresh (2004)
	Decomposition	Dai and cheung (1997) , Taillard (2003)
	Hybrids	Resende and Werneck (2004)

۲.۲.۱ مسأله p—مرکز

مسأله p—مرکز به تعیین مکان p وسیله(مرکزها) روی شبکه می‌پردازد، بطوری که ماکزیمم فاصله هر مشتری(نقاط تقاضا) تا نزدیکترین وسیله مینیمم شود(کریو و حکیمی [۵۴]، هندلر[۳۸] و میرچندانی [۳۷]، هندلر [۳۸]، داسکین [۱٦]). فرض کنید $X_p = \{x_۱, x_۲, ..., x_p\}$ یک مجموعه شامل مکان p سرویس دهنده از شبکه G (روی رأس‌ها یا روی یال‌ها) باشد. فاصله بین هر رأس شبکه و مجموعه X_p را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(v, X_p) = \min_{۱\leq i \leq p} \{d(v, x_i)\} \tag{۲.۱}$$

$d(v, x_i)$ فاصله کوتاهترین مسیر بین دو نقطه v و x_i روی شبکه می‌باشد. فرض کنید

$$F(X_p) = \max_{v \in V} \{w(v) \,.\, d(v, X_p)\} \tag{۳.۱}$$

حال فرض کنید X_p^* بگونه‌ای باشد که

$$F(X_p^*) = \min_{X_p \in G} \{F(X_p)\} \tag{۴.۱}$$

بنابراین باتوجه به (۴.۱) X_p^* یک p—**مرکز مطلق**[۳۹] برای G و $F(X_p^*)$ یک p—**شعاع مطلق**[۴۰] برای G نامیده می‌شود، و معمولاً با $r_p(G)$ نشان داده می‌شود. اگر مجموعه X_p در (۲.۱) فقط شامل رأس‌های G باشد آنگاه X_p^* یک p—**مرکز رأسی**[۴۱] برای G و $F(X_p^*)$ یک p—**شعاع رأسی**[۴۲] برای G نامیده می‌شود.

اگر همه رأس‌های شبکه دارای وزن c باشد بدون از دست دادن کلیّت مسأله می‌توان فرض کرد که $c = ۱$ و در این صورت شبکه را بدون وزن در نظر می‌گیریم. همچنین باید فرض کرد که $p < n$، زیرا در غیر

[۳۸] Handler
[۳۹] Absolute p-center
[۴۰] Absolute p-radius
[۴۱] Vertex p-center
[۴۲] Vertex p-radius

اینصورت اگر $p = n$ باشد آنگاه $X_p^* = V$ و $r_p(G) = ۰$. و اگر $p > n$ باشد، مسأله بی معنی است و مفهوم ریاضی ندارد[۵۴]. مسأله p—مرکز کاربردهای فراوانی دارد که برای مثال می توان به تعیین محل تاسیسات صنعتی، انبارها، ایستگاههای آتش نشانی و پلیس، بیمارستان‌ها، مدارس و مراکز فروش اشاره کرد.

تعریف ۱.۱: در مسأله مکانیابی روی شبکه اگر هدف بدست آوردن موقعیت سرویس دهنده‌ها روی رأس‌های شبکه باشد، مسأله را مکانیابی گسسته می‌نامند و اگر هدف بدست آوردن موقعیت سرویس دهنده‌ها در امتداد یال‌ها و رأس‌ها باشد مسأله را مکانیابی پیوسته می‌نامند(منیکا[۴۳] [۶۲]).

مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک مساله p—مرکز بصورت زیر است.

$$\begin{array}{lllr}
\min & (\max_{i,j}\ w_i d_{ij} x_{ij}) & & \\
s.t. & & & \\
& \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱ & i = ۱,...,n & (a) \\
& \sum_{i=۱}^{n} x_{ij} \leq n y_j & j = ۱,...,n & (b) \\
& \sum_{j=۱}^{n} y_j = p & & (c) \\
& x_{ij}\ ,\ y_j \in \{۰, ۱\} & i = ۱,...,n\ \ j = ۱,...,n & (d)
\end{array} \qquad (۵.۱)$$

در مدل (۵.۱) مجموعه قیدهای (a) نشان می‌دهند که هر رأس باید تنها به یک سرویس دهنده اختصاص یابد. مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که رأس‌ها را تنها می‌توان به رئوسی اختصاص داد که به عنوان مکان یک سرویس دهنده در نظر گرفته شده باشد. محدودیت (c) نشان می‌دهد که p سرویس دهنده مورد نیاز است.

الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسأله p—مرکز ارائه شده است، ولی در حالت کلی گری و جانسن[۴۴] [۳۲] نشان دادند که این مسأله برای گراف ها در حالت کلی NP—سخت است . کریو و حکیمی [۵۴] نیز در سال ۱۹۷۹ ثابت کردند که مسالهp—مرکز (مطلق و رأسی) برای هر $۱ < p < n$ ، NP—سخت است والگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O([n^{۲p-۱} m^p/(p-۱)!] \log n)$ برای گراف‌های وزن‌دار و الگوریتمی با

[۴۳] Minieka

[۴۴] Garey and Johnson

پیچیدگی زمانی $O(n^{2p-1}m^p/(p-1)!)$ برای گراف‌هائی با رأسهای بدون وزن ارائه دادند .
آنها همچنین برای پیدا کردن ۱—مرکز روی شبکه‌های وزن‌دار و بدون وزن بترتیب الگوریتم‌هائی با پیچیدگی زمانی $O(mn \log n)$ و $O(mn + n^2 \log n)$ برای گراف‌های کلی، والگوریتم‌هائی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ و $O(n)$ بترتیب برای درخت‌های وزن‌دار و بدون وزن ارائه دادند[۵۴]. همچنین الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2 \log n)$ برای پیدا کردن p—مرکز روی درخت ارائه دادند[۵۴]. آنها در همان سال موفق شدند نتایج خود را توسعه دهند و برای پیدا کردن p—مرکز مطلق برای هر $2 < p < n$ الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log^{p-2} n)$، و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log^{p-2} n)$ برای پیدا کردن p—مرکز رأسی برای هر $1 < p < n$ ارائه دهند[۵۴]. تمیر در [۹۱] باارائه الگوریتمی توانست X_p^* را برای گراف‌های وزن‌دار و بدون وزن به ترتیب در زمان‌های $O(n^p m^p \log^2 n)$ و $O(n^{p-1} m^p \log^3 n)$ بدست آورد . روش‌های ابتکاری زیادی برای حل مسأله p—مرکز پیشنهاد شده که می‌توان به روشهای پیشنهاد شده توسط پلگرین[۴۵] [۷۳]، درزنر[۴۶] [۱۹]، چندرساکرن[۴۷] و تمیر [۹] اشاره کرد.

[۴۵] Pelegrin
[۴۶] Drezener
[۴۷] Chandrasekaran

فصل ۲

منطق فازی و مجموعه‌های فازی

در این فصل ما ابتدا تعاریف کلی ([۹۸]،[۷۰]، [۵۲]) مجموعه‌های فازی و آن دسته از تعاریفی که برای حل مسائل مکانیابی روی شبکه به آن نیازمندیم را بیان کرده، و در نهایت اعداد فازی و گراف‌های فازی را تعریف می‌کنیم.

۱.۲ منطق فازی

تئوری مجموعه‌های فازی و منطق فازی را اولین بار پرفسور لطفی زاده[۱] درمقاله ای بنام «مجموعه‌های فازی، اطلاعات و کنترل»[۹۸] در سال ۱۹٦۵ معرفی نمود. هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارامدتر برای توصیف فرایند پردازش زبان‌های طبیعی بود. او مفاهیم و اطلاعاتی همچون مجموعه‌های فازی، رویدادهای فازی، اعداد فازی و فازی سازی را وارد علوم ریاضیات و مهندسی نمود. از آن زمان تاکنون، پرفسور لطفی زاده بدلیل معرفی نظریه بدیع و سودمند منطق فازی و تلاش‌هایش در این زمینه، موفق به کسب جوایز بین‌المللی متعددی شده است.

ریاضیات فازی یک فرا مجموعه از منطق دودوئی است که بر مفهوم درستی نسبی، دلالت می‌کند. منطق کلاسیک هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد(درست یا غلط، ۰ یا ۱، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را با عدد یک نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی بین صفر و یک خواهد بود. منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است. بر خلاف دیگران که معتقد بودند که باید تقریب‌ها را دقیق‌تر کرد تا بهره‌وری افزایش یابد، دکتر لطفی زاده معتقد بود که باید به دنبال ساختن مدل‌هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کند. در منطق ارسطویی، یک دسته بندی درست و نادرست وجود دارد. تمام گزاره‌ها درست یا نادرست هستند. برای مثال جمله« هوا سرد است» در منطق ارسطویی اساساً یک گزاره نمی‌باشد، چرا که مقدار سرد بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساساً همیشه درست یا همیشه نادرست نیست.

[۱] Lotfi zadeh

در منطق فازی جملاتی هستند که درستی آن گاهی کم وگاهی زیاد است، گاهی همیشه درست و گاهی همیشه نادرست وگاهی تا حدودی درست است. منطق فازی می تواند پایه‌ریز بنیانی برای فن‌آوری جدیدی باشد که تا کنون هم دست آوردهای فراوانی داشته است.

۲.۲ مجموعه‌های فازی

بنیاد منطق فازی بر شالوده نظریه مجموعه‌های فازی استوار است. این نظریه تعمیمی ازنظریه کلاسیک مجموعه‌ها در علوم ریاضی است. در تئوری کلاسیک مجموعه‌ها، یک عنصر یا عضو مجموعه هست یا نیست در حقیقت عضویت عناصر از یک الگوی صفر و یک (دودوئی) تبعیت می‌کند. اما تئوری مجموعه‌های فازی این مفهوم را بسط می‌دهد و عضویت درجه بندی شده را مطرح می کند. به این ترتیب یک عنصر می‌تواند تا درجاتی و نه کاملاً عضو یک مجموعه باشد.

تعریف ۱.۲ اگر X یک مجموعه باشد آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را تابع عضویت یا تابع سازگاری می نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [۰, ۱]$$

که صفر به این معنا است که شیء مورد نظر عضو مجموعه نیست و یک به معنای عضویت کامل شیء نسبت به مجموعه است.

مثال ۱.۲ یک بنگاه مسکن میزان راحتی و مناسب بودن منازل ارائه شده برای فروش را با تعداد اتاق خواب های آن می‌سنجد. فرض کنید تعداد اتاق خواب های منازل یکی از اعضای مجموعه $X = \{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰\}$ باشد. در این صورت می‌توان مجموعه فازی «**خانه راحت برای ۴ نفر**» را به صورت

زیر بیان نمود.

$$\tilde{A} \;=\; \{\; (۱, ۰/۲)\;,\; (۲, ۰/۵)\;,\; (۳, ۰/۸)\;,\; (۴, ۱)\;,\; (۵, ۰/۷)\;,\; (۶, ۰/۳)\;\}$$

چون منازل با تعداد اتاق خواب‌های ۷, ۸, ۹, ۱۰ دارای درجه عضویت صفر هستند، در مجموعه بالا نشان داده نشده‌اند.

تعریف ۲.۲ پشتیبان[۲] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $S(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}) \;=\{\; x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \;>\; ۰\}$$

در مثال ۱.۲ پشتیبان مجموعه A برابر است با: $S(\tilde{A}) \;=\; \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

تعریف ۳.۲ مجموعه همه عناصری که در میان مجموعه $\tilde{A}$ درجه عضویت آنها حد اقل α باشد را مجموعه α—برش ضعیف می‌نامیم و بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A_\alpha \;=\; \{x \;\in\; X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \;\geq\; \alpha\}$$

و مجموعه $\acute{A}_\alpha \;=\; \{x \;\in\; X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \;>\; \alpha\}$ را α—برش قوی می نامیم .

برای مثال ۱.۲ مجموعه α—برش‌ها بصورت زیر است.

$$\begin{array}{lcl} A_{۰/۲} & = & \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \\ A_{۰/۵} & = & \{۲, ۳, ۴, ۵\} \\ A_{۰/۸} & = & \{۳, ۴\} \\ A_{۱} & = & \{۴\} \end{array}$$

α—برش قوی برای $\alpha \;=\; ۰/۸$ برابر است با مجموعه $\acute{A}_{۰/۸} \;=\{۴\}$.

[۲] Support

تعریف ۴.۲ فرض کنید A یک مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع X باشد آنگاه A نرمال است اگر

$$\max_{x\in X} \mu_A(x) = ۱$$

تعریف ۵.۲ فرض کنید A یک مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع $X \subseteq R$ باشد آنگاه A محدب است اگر

$$\forall \quad x_۱, x_۲ \in X, \forall \quad \lambda \in [۰, ۱] \qquad \mu_A(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_A(x_۱), \mu_A(x_۲)\}$$

تعریف ۶.۲ اگر $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ آنگاه تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{C}$ برابر است با:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = min\ \{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ , \qquad x \in X$$

تعریف ۷.۲ اگر $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ آنگاه تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{C}$ برابر است با:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = max\ \{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ , \qquad x \in X$$

تعریف ۸.۲ تابع عضویت متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x)\ , \qquad x \in X$$

۳.۲ اعداد فازی

اعداد فازی مجموعه‌های فازی هستند که با راهبردهای خاص به منظور ساده سازی محاسبات استفاده می‌شوند[۹۸].

تعریف ۹.۲ اگر مجموعه فازی A بر روی مجموعه مرجع R از اعداد حقیقی، در شرایط زیر صدق نماید آن را عدد فازی می‌نامیم.

الف) A یک مجموعه فازی محدب باشد.

ب) یک $x_{\circ}$ موجود باشد که به ازای آن $\mu_A(x_{\circ}) = ۱$

ج) μ_A پیوسته باشد.

تعریف ۱۰.۲ اگر عدد فازی A شرط زیر را دارا باشد، آن را عدد فازی مسطح می‌نامیم

$$(m_۱, m_۲) \in R, m_۱ \leq m_۲; \quad \forall\, x \in [m_۱, m_۲] \quad \mu_A(x) = ۱ \ .$$

۱.۳.۲ اعداد فاصله‌ای و عملیات بر روی آن‌ها

در بیشتر مواقع با کلماتی همچون «در حدود، تقریباً و ... » سروکار داریم. برای مثال فاصله در حدود ۵ کیلومتر را با [۴/۵، ۵/۵] ، [۴/۶، ۵/۵] و بازه‌هائی از این قبیل نمایش می‌دهیم و بنابراین در حالت کلی یک عدد فاصله‌ای را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_r\} \ .$$

که a_L و a_R اعدادی حقیقی هستند و به ترتیب نقطه انتهائی چپ و نقطه انتهائی راست فاصله A نامیده می‌شوند. عدد فاصله‌ای A را بصورت $A = \langle m(A), w(A) \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم که $m(A)$ و

$w(A)$ بصورت زیر است

$$m(A) = \frac{a_L + a_R}{۲} \qquad , \qquad w(A) = \frac{a_R - a_L}{۲} \; .$$

اگر $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ آنگاه عملیات بر روی این دو عدد بصورت زیر است.

مجموع دو عدد A و B:

$$A \oplus B = [a_L + b_L, a_R + b_R] \quad or \quad A \oplus B = \langle m_۱ + m_۲, w_۱ + w_۲ \rangle$$

ضرب دو عدد A و B:

$$A \odot B = [\min\{a_L.b_L, a_R.b_L, a_L.b_R, a_R.b_R\}, \max\{a_L.b_L, a_R.b_L, a_L.b_R, a_R.b_R\}]$$

اگر A و B هر دو مثبت باشند آنگاه حاصل‌ضرب A و B بصورت زیر است

$$A \odot B = [a_L.b_L, a_R.b_R] \; .$$

تفریق دو عدد A و B:

با توجه به اینکه منفی عدد $B = [a_L, a_R]$ بصورت $-B = [-a_R, -a_L]$ می‌باشد پس

$$A \ominus B = [a_L - b_R, a_R - b_L]$$

تقسیم دو عدد A و B:

$$A \oslash B = [\min\{a_L/b_L, a_R/b_L, a_L/b_R, a_R/b_R\}, \max\{a_L/b_L, a_R/b_L, a_L/b_R, a_R/b_R\}]$$

اگر A و B هر دو مثبت باشند آنگاه تقسیم A و B بصورت زیر است

$$A \oslash B = [a_L/b_L, a_R/b_R] \; .$$

۲.۳.۲ مقایسه اعداد فاصله‌ای

اعداد فاصله‌ای مقایسه دو عدد فازی در مسائل مکانیابی فازی روی شبکه‌ها از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است که بطور کامل به تشریح آن می‌پردازیم. اگر $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ آنگاه داریم.

$$\begin{array}{lcll}
A < B & \iff & a_R < b_L & \\
A \subseteq B & \iff & a_L \geq b_L & and \quad a_R \leq b_R \\
A \leq_{LR} B & \iff & a_L \leq b_L & and \quad a_R \leq b_R \\
A \leq_{MW} B & \iff & m_۱ \leq m_۲ & and \quad w_۱ \geq w_۲ \\
A <_{LR} B & \iff & A \leq_{LR} B & and \quad A \neq B \\
A <_{MW} B & \iff & A \leq_{MW} B & and \quad A \neq B
\end{array}$$

تعریف ۱۱.۲ شاخص شایستگی[۳] (A—اندیس) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم‌شاخص شایستگی

$$\mathcal{A}(A \prec B) = \frac{m_۲ - m_۱}{w_۱ + w_۲}$$

با توجه به شاخص شایستگی، «**تسلط کلّی**[۴] » و «**تسلط جزئی**[۵]» را برای دو عدد فاصله‌ای $A = \langle m_۱, w_۱ \rangle$ و $B = \langle m_۲, w_۲ \rangle$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۲ اگر $\mathcal{A}(A \prec B) \geq ۱$ آنگاه عدد A به عدد B در حالت مینیمم سازی و عدد B به عدد A در حالت ماکسیمم سازی تسلط کلّی دارد. و با $A \prec B$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲ اگر $۰ < \mathcal{A}(A \prec B) < ۱$ آنگاه عدد A به عدد B در حالت مینیمم سازی و عدد B به عدد A در حالت ماکسیمم سازی تسلط جزئی دارد. و با $A \prec_p B$ نشان داده می‌شود.

اما اگر $\mathcal{A}(A \prec B) = ۰$ باشد یعنی $m_۱ = m_۲$، ما نمی توانیم با استفاده از تعاریف ۱۲.۲ و ۱۳.۲ در مورد دو عدد A و B نتیجه گیری کنیم. بنابراین با استفاده از طول از مرکز بازه $(w_۱, w_۲)$ این دو عدد

---
[۳] Acceptability index
[۴] Total dominance
[۵] Partial dominance

داریم:

اگر $w_۲ < w_۱$ باشد آنگاه نقطه انتهائی چپ عدد A کوچکتر از نقطه انتهائی B است و وقتی می خواهیم مینیمم را پیدا کنیم این شانس را داریم که نقطه مینیمم در A واقع شود. بنابراین وقتی هدف مینیمم دو عدد باشد در بدترین حالت B را بر A ترجیح می‌دهند. در این موقعیت‌ها دو حالت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

۱) خوش‌بینانه: در این حالت A بر B ترجیح داده می‌شود.

۲) بدبینانه: در این حالت B بر A ترجیح داده می‌شود.

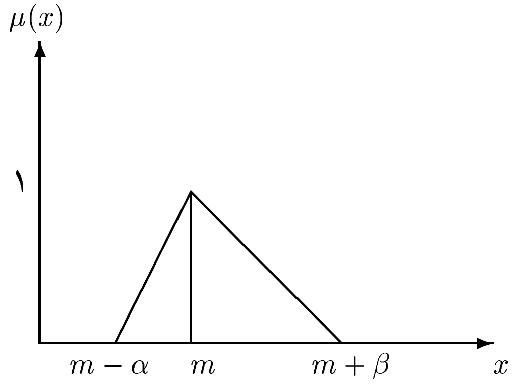
مثال ۲.۲ فرض کنید $\langle ۱۶۵,۵ \rangle = [۱۶۰, ۱۷۰] = A$ و $\langle ۱۸۳,۳ \rangle = [۱۸۰, ۱۸۶] = B$ آنگاه $\mathcal{A}(A \prec B) = \frac{۱۸۳-۱۶۵}{۵+۳} = ۲/۲۵ > ۱$. بنابراین در حالت مینیمم سازی A تسلط کلی بر B دارد.

مثال ۳.۲ فرض کنید $\langle ۱۶۵,۵ \rangle = [۱۶۰, ۱۷۰] = A$ و $\langle ۱۷۳,۷ \rangle = [۱۶۶, ۱۸۰] = B$ آنگاه $\mathcal{A}(A \prec B) = \frac{۱۷۳-۱۶۵}{۵+۷} = ۰/۶۷ < ۱$. بنابراین در حالت مینیمم سازی A تسلط جزئی بر B با درجه رضایت مندی $۰/۶۷$ دارد.

مثال ۴.۲ فرض کنید $\langle ۱۷۰, ۱۰ \rangle = [۱۶۰, ۱۸۰] = A$ و $\langle ۱۷۰, ۵ \rangle = [۱۶۵, ۱۷۵] = B$ آنگاه $\mathcal{A}(A \prec B) = \frac{۱۷۰-۱۷۰}{۵+۱۰} = ۰$. بنابراین در حالت مینیمم سازی با دید خوش‌بینانه A بر B ترجیح داده می‌شود و با دید بدبینانه B بر A ترجیح داده می‌شود.

۳.۳.۲ اعداد فازی مثلثی و عملیات بر روی آن‌ها

در قسمت قبلی ما فاصله «درحدود ۵ کیلومتر» را در بازه $[۴/۵, ۵/۵]$ بررسی کردیم. بطور مشابه می‌توان فاصله «درحدود ۵ کیلومتر» را با اعداد فازی مثلثی مورد بررسی قرار داد، بطوریکه فاصله ۵ کیلومتر درجه عضویت ۱ و فاصله بین $۴/۵ - ۵$ کیلومتر و $۵ - ۵/۵$ کیلومتر درجه عضویت بین ۰ و



شکل ۱.۲: تابع عضویت $\tilde{A} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$

۱ را می‌گیرد.

بطور کلی یک عدد فازی مثلثی را با سه‌تائی $\tilde{A} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ و با درجه عضویت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰ & for\ x \leq m - \alpha \\ ۱ - \frac{m-x}{\alpha} & for\ m - \alpha < x < m \\ ۱ & for\ x = m \\ ۱ - \frac{x-m}{\beta} & for\ m < x < m + \beta \\ ۰ & for\ x \geq m + \beta \end{cases} \tag{۱.۲}$$

اعداد فازی مثلثی را با $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a})$ نیز نمایش می‌دهند که $\alpha = a - \underline{a}$ و $\beta = \bar{a} - a$ است. اگر $\tilde{M} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{N} = \langle n, \gamma, \delta \rangle$ آنگاه عملیات بر روی این دو عدد بصورت زیر است.

مجموع دو عدد $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$:

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = \langle m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta \rangle$$

ضرب دو عدد $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$:

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} = \begin{cases} \langle mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta \rangle & when\ \ m \geq ۰, n \geq ۰ \\ \langle mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma \rangle & when\ \ m \leq ۰, n \geq ۰ \\ \langle mn, -m\delta - n\beta, -m\gamma - n\alpha \rangle & when\ \ m \leq ۰, n \geq ۰ \end{cases}$$

تفریق دو عدد $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$:

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = \langle m-n, \alpha-\delta, \beta-\gamma \rangle$$

تقسیم دو عدد $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$:

$$\tilde{M} \oslash \tilde{N} = \langle \frac{m}{n}, \frac{m\delta+n\alpha}{n^{۲}}, \frac{m\gamma+n\beta}{n^{۲}} \rangle$$

اگر $\tilde{N}$ یک عدد قطعی مانند K باشد آنگاه

به ازای هر $\lambda > ۰$ $\quad \tilde{M} \odot \tilde{N} = \tilde{M}.k = \langle m.k, \alpha.k, \beta.k \rangle$

به ازای هر $\lambda < ۰$ $\quad \tilde{M} \odot \tilde{N} = \tilde{M}.k = \langle m.k, -\beta.k, -\alpha.k \rangle$

۴.۳.۲ مقایسه اعداد فازی مثلثی

مقایسه اعداد فازی مثلثی در حالت کلی مانند اعداد فاصله‌ای است ولی برای حالت های ویژه اُکادا و ساپر[۶] [۷۰] با استفاده از نمادهای $\preceq_h, \preceq, \prec$ به مقایسه این اعداد پرداختند.

اگر $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b, \gamma, \delta \rangle$ آنگاه روابط زیر را داریم

$$\begin{array}{lll} \tilde{a} \preceq \tilde{b} & iff & a \leq b,\ a-\alpha \leq b-\gamma,\ a+\beta \leq b+\delta \\ \tilde{a} \prec \tilde{b} & iff & \tilde{a} \preceq \tilde{b}, \tilde{a} \neq \tilde{b} \\ \tilde{a} \preceq_h \tilde{b} & iff & a \leq b,\ a-\alpha(۱-h) \leq b-\gamma(۱-h),\ a+\beta(۱-h) \leq b+\delta(۱-h)\ . \end{array}$$

بنابراین برای $h = ۱$ داریم $\tilde{a} \preceq_{۱} \tilde{b}$ اگر و تنها اگر $a \leq b$. یعنی در این حالت تصمیم گیرنده با سطح رضایت‌مندی یک، $\tilde{a}$ را بر $\tilde{b}$ ترجیح می‌دهد. اما اگر از $\mathcal{A}$—اندیس‌ها استفاده کنیم درجه رضایتمندی‌های مختلفی برای اعداد با طول‌های مختلف بدست می‌آید.

تعریف ۱۴.۲ شاخص شایستگی (A—اندیس) را برای دو عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b, \gamma, \delta \rangle$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{A}(\tilde{a} \prec \tilde{b}) = \frac{b-a}{\beta+\gamma}\ .$$

[۶] Okada and Soper

با توجه به شاخص شایستگی، «**تسلط کلّی**» و «**تسلط جزئی**» را برای دو عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b, \gamma, \delta \rangle$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۲ اگر $\mathcal{A}(\tilde{a} \prec \tilde{b}) \geq ۱$ آنگاه عدد$\tilde{a}$ تسلط کلی به عدد $\tilde{b}$ در حالت مینیمم سازی و عدد $\tilde{b}$ تسلط کلی به عدد $\tilde{a}$ در حالت ماکسیمم سازی دارد. و با $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲ اگر $۰ < \mathcal{A}(\tilde{a} \prec \tilde{b}) < ۱$ آنگاه عدد $\tilde{a}$ تسلط جزئی به عدد $\tilde{b}$ در حالت مینیمم سازی و عدد $\tilde{b}$ تسلط جزئی به عدد $\tilde{a}$ در حالت ماکسیمم سازی دارد. و با $\tilde{a} \prec_p \tilde{b}$ نشان داده می‌شود.

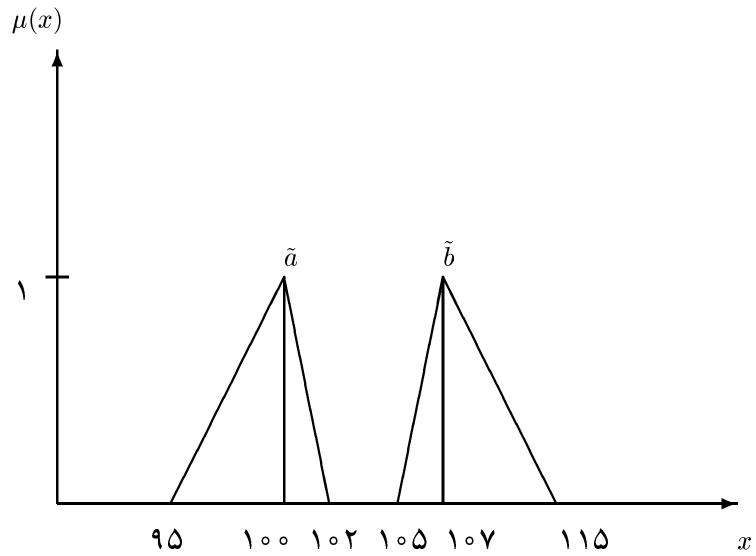
حال به مقایسه دو عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b, \gamma, \delta \rangle$، وقتی که $a = b$ می‌پردازیم. در این حالت چپ و راست این دو عدد برای ما اهمیّت دارد.

تعریف ۱۷.۲ فرض کنید $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle a, \gamma, \delta \rangle$. اگر $\alpha = \gamma$ و $\beta < \delta$ آنگاه در حالت مینیمم سازی $\tilde{a}$ بر $\tilde{b}$ از چپ تسلط دارد و در حالت ماکسیمم سازی $\tilde{b}$ بر $\tilde{a}$ از چپ تسلط دارد. و با $\tilde{a} \prec_L \tilde{b}$ نمایش می‌دهیم.

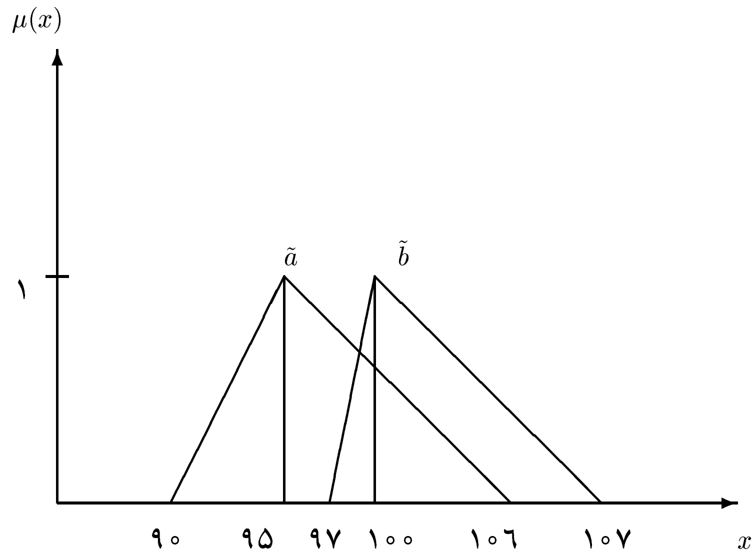
تعریف ۱۸.۲ فرض کنید $\tilde{a} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{b} = \langle a, \gamma, \delta \rangle$. اگر $\alpha > \gamma$ و $\beta = \delta$ آنگاه در حالت مینیمم سازی $\tilde{a}$ بر $\tilde{b}$ از راست تسلط دارد و در حالت ماکسیمم سازی $\tilde{b}$ بر $\tilde{a}$ از راست تسلط دارد. و با $\tilde{a} \prec_L \tilde{b}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۵.۲ فرض کنید $\tilde{a} = (۹۵, ۱۰۰, ۱۰۲)$ و $\tilde{b} = (۱۰۵, ۱۰۷, ۱۱۵)$ دو عدد فازی مثلثی باشند آنگاه $\mathcal{A}(\tilde{a} \prec \tilde{b}) = \frac{۱۰۷-۱۰۰}{۲+۲} = ۱/۷۵ > ۱$. بنابراین $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ (شکل ۲.۲)

مثال ۶.۲ فرض کنید $\tilde{a} = (۹۰, ۹۵, ۱۰۶)$ و $\tilde{b} = (۹۷, ۱۰۰, ۱۰۷)$ دو عدد فازی مثلثی باشند آنگاه $\mathcal{A}(\tilde{a} \prec \tilde{b}) = \frac{۱۰۰-۹۵}{۱۱+۳} = \frac{۵}{۱۴} < ۱$. بنابراین $\tilde{a} \prec_p \tilde{b}$ با درجه رضایت‌مندی ۰/۳۶ است.(شکل ۳.۲)



شکل ۲.۲: نمایش حالت $\tilde{a} \prec \tilde{b}$



شکل ۳.۲: نمایش حالت $\tilde{a} \prec_p \tilde{b}$

۴.۲ گراف‌های فازی

اولین تعریف گراف‌فازی توسط کافمن[۷] [۵۵] از روی رابطه‌های فازی دکتر لطفی زاده ارائه شد. ولی اساسی‌ترین تعریف گراف‌های فازی توسط رزنفلد[۸] [۷۹] ارائه گردید.

تعریف ۱۹.۲ یک گراف فازی (f−گراف) دارای ساختار $G = (V, E, \sigma, \mu)$ می‌باشد.

V نشان دهنده مجموعه رأس‌ها

E نشان دهنده مجموعه یال‌ها

$\sigma : V \longrightarrow [۰, ۱]$ نشان دهنده تابع عضویت مجموعه رأس‌ها($\sigma(v) > ۰$ برای هر $v \in V$)

$\mu : E \longrightarrow [۰, ۱]$ نشان دهنده تابع عضویت مجموعه یال‌ها می‌باشد، و برای هر $u, v \in V$ باید داشته باشیم:

$$\mu(u, v) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v)$$

به عبارتی درجه عضویت هر یال از درجه عضویت رأس‌های آن یال کمتر و یا حداکثر برابر است.

تعریف ۲۰.۲ f−گراف $H = (V, E, \tau, \nu)$ یک زیرگراف فازی (f−زیرگراف[۹]) از G است اگر

۱− برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\tau(v) \leq \sigma(v)$

۲− برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم $\nu(u, v) \leq \mu(u, v)$

تعریف ۲۱.۲ f−گراف G متقارن است اگر برای هر دو رأس $u, v \in V$ داشته باشیم

$$\mu(u, v) = \mu(v, u) .$$

تعریف ۲۲.۲ یک α−برش، از f−گراف $G = (V, E, \sigma, \mu)$، گراف کلاسیک $G^\alpha = (V^\alpha, E^\alpha)$ می‌باشد بطوری که

1. $V^\alpha = \{v \in V \mid \sigma(v) \geq \alpha\}$
2. $E^\alpha = \{e \in E \mid \mu(v) \geq \alpha\}$

---

[۷] Kaufmann

[۸] Rosenfeld

[۹] $f - subgraph$

تعریف ۲۳.۲ یک مسیر p بین رأسهای u,v در یک $f-$گراف $G=(V,E,\sigma,\mu)$، یک دنباله مانند $e_1e_2e_3...e_k$ می‌باشد بطوری که

$$\begin{array}{ll} x^{e_i}(0)=u & i=1 \\ x^{e_i}(1)=x^{e_{i+1}}(0) & i=1,2,...,k-1 \\ x^{e_i}(1)=v & i=k \end{array}$$

تعریف ۲۴.۲ توان یک مسیر p در یک $f-$گراف G را با $\mu(p)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$\mu(p) \;=\; \min_{e_i\in p}\mu(e_i)$$

برای هر دو رأس u و v از گراف، مجموعه مسیرهای بین u و v را با $p(u,v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۲ فرض کنید $G=(V,E,\sigma,\mu)$ یک $f-$گراف باشد، سطح همبندی بین $u,v\in V$ برابر است با:

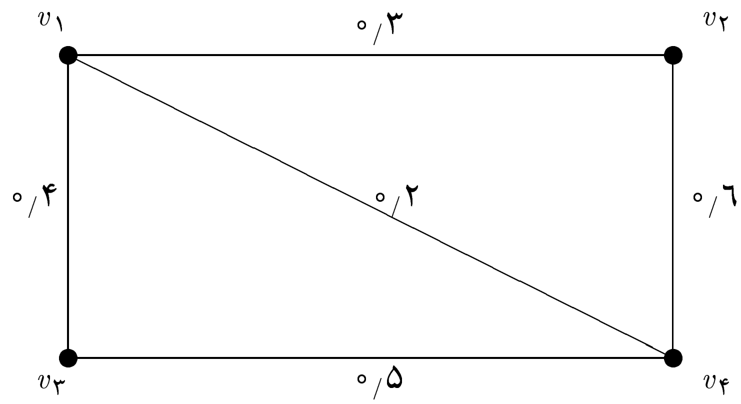
$$C(u,v) \;=\; \max_{p\in p(u,v)}\mu(p)$$

اگر $u=v$ باشد آنگاه $C(u,v) \;=\; \infty$

تعریف ۲۶.۲ فرض کنید $G=(V,E,\sigma,\mu)$ یک $f-$گراف باشد ، سطح همبندی G را با $C(G)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$C(G) \;=\; \min_{u,v\in V}C(u,v)$$

برای مثال در $f-$گراف نشان داده شده در شکل ۴.۲، سطح همبندی بین رأسهای v_1 و v_4 در جدول ۱.۲ آمده است. چون مسأله‌های مکانیابی روی شبکه، روی گراف‌های همبند تعریف می‌شوند. یکی از نیازهای ما بدون شک استفاده از $\alpha-$برش ها روی گراف های همبند است، برای این منظور ما از نظریه و مفهوم سطح همبندی گراف ($C(G)$) استفاده می‌کنیم.



شکل ۴.۲: f—گراف G

$[u,v]$	$l(u,v)$	$\mu(u,v)$	$p(u,v)$	$\mu(p_i)$	$C(v_1,v_4)$	C(G)
$e_1=[v_1,v_2]$	(۱/۵, ۲, ۲/۵)	۰/۳	$p_1=\{e_5\}$	۰/۲	۰/۴	۰/۴
$e_2=[v_2,v_4]$	(۱/۵, ۲, ۳)	۰/۶	$p_2=\{e_1e_2\}$	۰/۳		
$e_3=[v_1,v_3]$	(۱, ۲, ۳)	۰/۴	$p_3=\{e_3e_4\}$	۰/۴		
$e_4=[v_3,v_4]$	(۰/۵, ۱, ۱/۵)	۰/۵				
$e_5=[v_1,v_4]$	(۳, ۴, ۵)	۰/۲				

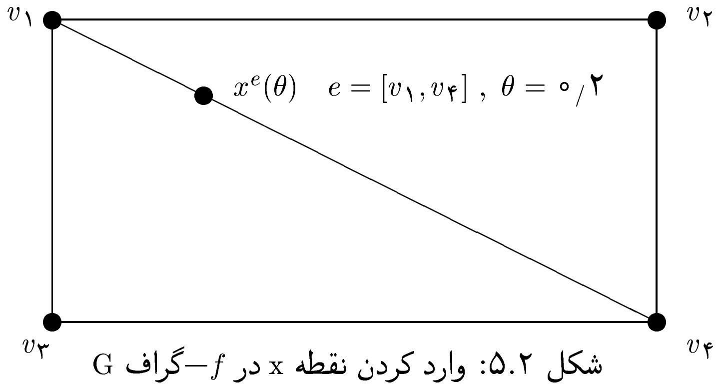
جدول ۱.۲: سطح همبندی بین دو راس v_1 و v_4 در f —گراف G

تعریف ۲۷.۲ فرض کنید $N=(V,E,w,\tilde{l})$ یک شبکه با طول‌های فازی باشد و نقطه $x=x^e(\theta)$ روی یال $e=[u,v]$ باشد، با وارد کردن x در شبکه N یک گراف جدید بدست می آید که بصورت $N_{.x}=(V_{.x},E_{.x},w_{.x},\tilde{l}_{.x})$ نمایش می‌دهیم بطوریکه:

$$
\begin{aligned}
&V_{.x}=V\cup\{x\}\\
&E_{.x}=(E-\{e\})\cup\{e_1,e_2\}\quad e_1=[u,x]\quad \{e_2\}=[x,v]\\
&\forall v\in V\quad w_{.x}(v)=w(v)\qquad \&\qquad w_{.x}(x)=0\\
&\forall e'\in E\cap E_{.x}\quad \tilde{l}_{.x}(e')=\tilde{l}(e')\quad \&\quad \tilde{l}_{.x}(e_1)=\theta\tilde{l}(e)\ ,\ \tilde{l}_{.x}(e_2)=(1-\theta)\tilde{l}(e)
\end{aligned}
$$

اگر $\tilde{l}_{.x}(e)=\infty$ آنگاه یال e از گراف G خارج می شود.

داخل کردن نقطه‌ها در شبکه با طول‌های فازی به ما اجازه می دهد تا مفاهیم را برای رأس‌هائی که بکار گرفته می شوند گسترش دهیم. شکل ۵.۲ و جدول ۲.۲ را ببینید. فرض کنید p یک مسیر بین



شکل ۵.۲: وارد کردن نقطه x در f—گراف G

E	$\tilde{l}(e)$	$E_{.x}$	$\tilde{l}_{.x}(e)$
$e_۱ = [v_۱, v_۲]$	$(۱/۵, ۲, ۲/۵)$	$e_۱ = [v_۱, v_۲]$	$(۱/۵, ۲, ۲/۵)$
$e_۲ = [v_۲, v_۴]$	$(۱/۵, ۲, ۳)$	$e_۲ = [v_۲, v_۴]$	$(۱/۵, ۲, ۳)$
$e_۳ = [v_۱, v_۳]$	$(۱, ۲, ۳)$	$e_۳ = [v_۱, v_۳]$	$(۱, ۲, ۳)$
$e_۴ = [v_۳, v_۴]$	$(۰/۵, ۱, ۱/۵)$	$e_۴ = [v_۳, v_۴]$	$(۰/۵, ۱, ۱/۵)$
$e_۵ = [v_۱, v_۴]$	$(۳, ۴, ۵)$	$e_۶ = [v_۱, x^e(\theta)]$	$(۰/۶, ۰/۸, ۱)$
		$e_۷ = [x^e(\theta), v_۴]$	$(۲/۴, ۳/۲, ۴)$

جدول ۲.۲: طول‌های فازی f—گراف G

رأسهای u و v در شبکه $N = (V, E, w, \tilde{l})$ باشد. طول مسیر p عبارت است از:

$$\tilde{l}(p) = \sum_{e_i \in p} \tilde{l}(e_i)$$

فرض کنید $p(v_i, v_j)$ مجموعه همه مسیر های بین v_i و v_j باشد.

تعریف ۲۸.۲ یک مسیر p^* متعلق به $p(v_i, v_j)$ کوتاهترین مسیر بین v_i و v_j است اگر و تنها اگر

$$\tilde{l}(p^*) = \min\{\tilde{l}(p) \ ; \ p \in p(v_i, v_j)\} \ .$$

از این به بعد روی کوتاهترین مسیر بین v_i و v_j که بصورت $p_{\min}(v_i, v_j)$ هست کار می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۲ فاصله $\tilde{d}(v_i, v_j)$ (طول کوتاهترین مسیر بین v_i و v_j) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{d}(v_i, v_j) = \tilde{l}(p) \qquad \forall p \in p_{\min}\{v_i, v_j\}$$

فصل ۳

بهینه‌سازی فازی

در مسائل تصمیم گیری فازی، اولین بار بلمن[۱] و زاده مفهوم کلی هدف فازی و قیدهای فازی را ارائه دادند[۴]. این مفهوم از مسائل برنامه‌ریزی ریاضی فازی تاناکا[۲] و همکاران گرفته شده بود[۹۲]. زیمرمن[۳] یک تقریب فازی از برنامه ریزی خطی چند هدفه را پیشنهاد داد[۹۹] و نگویتا[۴] برنامه ریزی خطی فازی با ضرائب فازی را مورد تجزیه وتحلیل قرار داد[۷۱]. تاناکا و آسائی[۵] یک فرمولبندی برای برنامه ریزی خطی با قیدهای فازی ارائه کردند و روش حلی برای آن ارائه دادند[۹۳]. در نهایت شائوچنگ[۶] مسأله برنامه ریزی خطی با قیدهای فازی و حالت خاصی از تابع هدف فازی را ارائه داد[۸۸]. در این فصل ما مدل برنامه ریزی خطی فازی را تشریح می‌کنیم و مدل‌های فازی مختلف را برای مسائل برنامه ریزی عدد صحیح معرفی و راه حل‌های آن را شرح می‌دهیم.

۱.۳ برنامه ریزی خطی فازی

در بیشتر مسائل دنیای واقعی، مقادیر ضرائب مسأله تصمیم گیری، برای تصمیم گیرنده مشخص و قطعی نیست و این ابهام و عدم قطعیت ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در چنین حالتی تصمیم گیرنده می‌تواند عدم قطعیت را در مفهوم پارامترهای فازی نشان دهد. فرض کنید مدل برنامه ریزی خطی قطعی به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = c^T x \\ s.t. \quad & \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \\ c, x \in \mathbb{R}^n \quad & , b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad . \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

---

[۱] Bellman
[۲] Tanaka
[۳] Zimmermann
[۴] Negoita
[۵] Asai
[۶] Shaocheng

۱.۱.۳ مدل LP در یک محیط فازی

در مدل (۱.۳) همه ضرائب A, b, c اعداد قطعی هستند و $\leq$ یک مفهوم مشخص و قطعی دارد و ماکسیمم سازی یک دستور اکید و محض می‌باشد. حال فرض کنید مدل LP در یک محیط فازی ساخته شود. به عنوان مثال ممکن است تصمیم گیرنده واقعاً نخواهد که تابع هدف را ماکسیمم یا مینیمم کند، بلکه او می‌خواهد تا به بعضی سطح های آرزو دست یابد، که با تعاریف فعلی ممکن نیست. برای مثال تصمیم گیرنده ممکن است بخواهد تا «**هزینه یا سود موجود را به نحو قابل توجه بهبود بخشد**». می‌دانیم علامت $\leq$ در ریاضیات حالت محض و قطعی دارد ولی در محیط فازی تخلفات و تجاوزهای کوچک قابل قبول است. این حالت زمانی رخ می‌دهد که قیدها نشان دهنده سطح آرزو یا احساس نیاز(سلیقه، رنگ، طعم و مزه، کوچکی و بزرگی و...)باشند که نمی‌توان بوسیله یک قید قطعی نوشت. همچنین ضرائب بردار b, c یا ماتریس A می‌توانند اعدادی فازی باشند. بنابراین با کمک گرفتن از مدل قطعی اولیه برای بدست آوردن LP فازی باید فرض کنیم که ما یک سطح آرزو(بهینگی) از z داریم(مقداری از z که تصمیم گیرنده دوست دارد تا به آن دست پیدا کند)، با این فرض تابع هدف بصورت یک قید در مجموعه قیدهای فازی مدل می‌شود. و LP فازی برای مدل (۱.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$
\begin{array}{ll}
Find & x \\
s.t. & c^T x \gtrsim z \\
 & Ax \lesssim b \\
 & \;\; x \geq 0 \\
 & c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}
\end{array}
\qquad (۲.۳)
$$

که علامت " $\gtrsim$ " نسخه فازی $\geq$ رامشخص می‌کند و به معنی « **در اصل و ضرورتاً بزرگتر یا مساوی با**» است.

و علامت " $\lesssim$ " نسخه فازی $\leq$ رامشخص می‌کند و به معنی « **در اصل و ضرورتاً کوچکتر یا مساوی با**» است.

بنابراین برای تابع هدف در مدل قطعی (۱.۳) یک هدف مینیمم در نظر گرفته و آن را بصورت یک قید

در مسأله قرار می‌دهیم و کران بالاهای z را بررسی می‌کنیم و درنهایت مدل (۲.۳) بصورت زیرنمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned} & Find \quad x \\ & s.t. \quad Bx \lessapprox d \\ & \qquad x \geq 0 \\ & \qquad x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{m+1}, B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n} \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

که $B = \begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix}$ و $d = \begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix}$ و هر یک از (m+1)سطر از مدل (۳.۳) باید بوسیله یک مجموعه فازی، که تابع عضویت هر یک از آنها $\mu_i(x)$ است نشان داده شود. تابع عضویت مجموعه فازی مدل (۳.۳) با توجه به تعریف بلمن و زاده در [۴] بصورت زیر است.

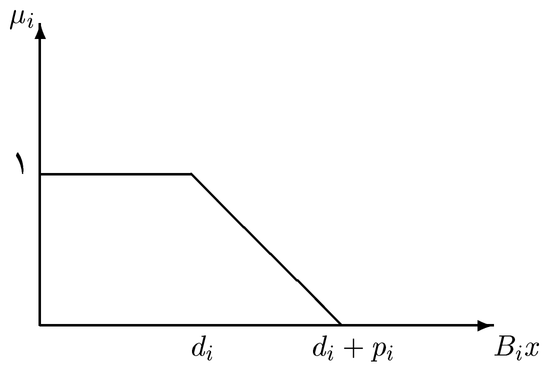
$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x) \tag{۴.۳}$$

$\mu_i(x)$: درجه شدنی بودن هر x در نابرابری فازیd_i $B_i x \lessapprox$ را نشان می دهد(B_i iامین سطر B است). بنابراین مسأله (۳.۳) به مسأله برنامه ریزی غیر خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$\max_{x \geq 0} \mu_{\tilde{D}}(x) = \max_{x \geq 0} \min_i \mu_i(x) \tag{۵.۳}$$

تابع عضویت $\mu_i(x)$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم(شکل ۱.۳).

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & if \quad B_i x \leq d_i \\ \in [0, 1] & if \quad d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & if \quad B_i x > d_i + p_i \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, m+1 \tag{۶.۳}$$



شکل ۱.۳: تابع عضویت قید iام

برای اینکه مدل از خطی بودن خارج نشود با استفاده از نوع ساده تابع عضویت، فرض می‌کنم که $\mu_i(x)$ها بطور خطی روی « فاصله مجاز[۷]» کاهش یابند، بنابراین:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & if \quad B_i x \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} & if \quad d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & if \quad B_i x > d_i + p_i \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, m+1 \tag{۷.۳}$$

که p_iها بطور دلخواه انتخاب می شوند، طوری که از محدودهٔ تجاوز های قابل قبول قید ها و تابع هدف خارج نشود[۱۰۰].

با جایگذاری تابع عضویت (۷.۳) در مساله (۵.۳) داریم:

$$\max_{x \geq 0} \min_i \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}\right) \tag{۸.۳}$$

متغییر جدید λ را بصورت $\min \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}\right)$ معرفی می‌کنیم، بنا براین مسأله زیر را داریم.

$$\begin{array}{l} \max \quad \lambda \\ S.t \\ \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i \qquad i = 1, \cdots, m+1 \\ \qquad x \geq 0 \end{array} \tag{۹.۳}$$

[۷] فاصله ای که هر قید در آن فاصله می‌تواند نوسان داشته باشد، $[d_i, d_i + p_i]$

جواب بهینه مسأله بردار$(\lambda^*, x_\circ^*)$ می‌باشد، که $x_\circ^*$ جواب بهینه مدل (۲.۳) است. اگر تابع عضویت را به شکل زیر تغییر دهیم مدل (۸.۳) و (۹.۳) را می‌توان اصلاح کرد

$$\mu_i(x) = ۱ - \frac{t_i}{p_i} \quad , \quad \circ \le t_i \le p_i \;\; i = ۱, \cdots, m+۱ \qquad (۱۰.۳)$$

متغیر t_i را اندازه درجه تخلف قید iام می‌نامیم. با توجه به (۱۰.۳) مدل قطعی هم ارز با مدل (۹.۳) بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&\max \quad \lambda \\
&S\ .\ t \\
&\quad \lambda p_i \ + \ t_i \ \le \ p_i \qquad i \ = \ ۱, \cdots, m+۱ \\
&\quad B_i x \ - \ t_i \ \le \ d_i \\
&\qquad\quad t_i \ \le \ p_i \\
&\qquad\quad x \ \ge \ \circ
\end{aligned} \qquad (۱۱.۳)$$

این مدل از مدل (۹.۳) بزرگتر است، حتی مجموعه قیدهای $t_i \le p_i$ اضافی هستند ولی در زمان انجام دادن تحلیل حساسیت که روی جواب های دیگر بهین در محیط فازی بحث می‌کند این مدل کاراتر و بهتر از مدل (۹.۳) می‌باشد[۹۹].

مثال ۱.۳ شرکتی می‌خواهد روی اندازه و ساختار کامیونهای ناوگان حمل ونقل خود تصمیم گیری کند. کامیونها در چهار اندازه مختلف خریداری می شوند. هدف مسأله مینیمم کردن هزینه‌ها می‌باشد، و قیدهای مسأله تامین کننده تقاضای همه مشتریان است (تقاضاها نوسان‌های فصلی شدیدی دارند). این نشان می‌دهد که تقاضاها ثابت نیستند و تغییر می‌کنند(قیدهای کمی). همچنین تعداد کمی از مشتری‌ها هر روز برای سفارشات خود تماس می‌گیرند (قید های مسیریابی). به دلایل مختلف حداقل ۶ عدد از کوچکترین نوع کامیون در ناوگان حمل و نقل نیاز است. شرکت می‌خواهد هزینه‌های مربوط

به حمل و نقل مینیمم شود. همچنین بودجه شرکت هزینه ۴۲۰۰۰۰۰ دلار را نشان می دهد که نباید هزینه‌های ما از این رقم بالاتر رود. مدیریت با استفاده از آنالیزهای کمی و پذیرفته شده مدل خطی زیر را پیشنهاد می کند[۱۰۰].

$$\begin{array}{ll} \min & ۴۱۴۰۰x_۱ + ۴۴۳۰۰x_۲ + ۴۸۱۰۰x_۳ + ۴۹۱۰۰x_۴ \\ \textit{such that} & \\ & ۰/۸۴x_۱ + ۱/۴x_۲ + ۲/۱۶x_۳ + ۲/۴x_۴ \quad \geq ۱۷۰ \\ & ۱۶x_۱ + \ ۱۶x_۲ + \ ۱۶x_۳ + \ ۱۶x_۴ \quad \geq ۱۳۰۰ \\ & x_۱ \quad \geq ۶ \\ & x_۲, x_۳, x_۴\ ,\ \lambda \quad \geq\ ۰ \end{array}$$

جواب حالت قطعی مسأله بصورت زیر است.

$$x_۱ = ۶\ ,\ x_۲ = ۱۶.۲۹\ ,\ x_۳ = ۰\ ,\ x_۴ = ۵۸.۹۶\ ,\ min\ cost = ۳۸۴۶۷۹۵$$

مدیریت می‌خواهد بعضی راه های گریز را در قیدها داشته باشد، تا قیدها انعطاف پذیرتر از حالت قطعی باشند. او احساس می‌کند که چون تقاضاهای پیش بینی شده در قیدها استفاده شده است و چون پیش بینی‌ها هرگز درستی یک موضوع را اثبات نمی‌کنند، این خطر وجود دارد که با تقاضای بالاتر توسط مشتریان مواجه نشود. علی رقم اینکه روی بعضی فاصله‌ها مدل رضایت‌بخش است ولی مدیریت احساس می‌کند که قیدها دقیق و جامع نیستند. بنابر این پارامتر های زیر را تخمین می‌زند.

کران پایین فاصله مجاز(حد قابل قبول خطا):

$$d_۱ = ۳۷۰۰۰۰۰\ ,\ d_۲ = ۱۷۰\ ,\ d_۳ = ۱۳۰۰\ ,\ d_۴ = ۶$$

طول فاصله مجاز:

$$p_۱ = ۵۰۰۰۰۰\ ,\ p_۲ = ۱۰\ ,\ p_۳ = ۱۰۰\ ,\ p_۴ = ۶$$

باتوجه به مسأله (۹.۳)، بعد از تقسیم همه سطر ها بر p_i های مربوط به خودشان و بعد از ساده کردن مسأله داریم:

	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	z	λ
قطعی	۶	۱۶/۲۹	۰	۵۸/۹۶	۳۸۶۴۹۷۵	
فازی	۱۷/۴۱۴	۰	۰	۶۶/۵۴	۳۹۸۸۲۵۰	۴۳/۳%

جدول ۱.۳: مقایسه جواب فازی و غیر فازی

	قید اول	قید دوم	قید سوم
قطعی	۱۷۰	۱۳۰۰	۶
فازی	۱۷۷/۳۳	۱۳۴۳/۳۲۸	۱۷/۴۴

جدول ۲.۳: مقایسه قیدهای فازی و غیر فازی

$$\max\ \lambda$$

$$\begin{array}{l}
such\ that \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
۰/۰۸۳x_{۱} & + & ۰/۰۸۹x_{۲} & + & ۰/۰۹۶x_{۳} & + & ۰/۰۹۸x_{۴} & + & \lambda & \leq & ۸/۴ \\
۰/۰۸۴x_{۱} & + & ۰/۱۴۴x_{۲} & + & ۰/۲۱۶x_{۳} & + & ۰/۲۴x_{۴} & - & \lambda & \geq & ۱۷ \\
۰/۱۶x_{۱} & + & ۰/۱۶x_{۲} & + & ۰/۱۶x_{۳} & + & ۰/۱۶x_{۴} & - & \lambda & \geq & ۱۳ \\
۰/۱۶۷x_{۱} & & & & & & & - & \lambda & \geq & ۱ \\
 & & & & & & & & \lambda & \leq & ۱ \\
 & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}\ ,\ \lambda \geq ۰}
\end{array}
\end{array}$$

جواب حالت‌های فازی و غیر فازی را در جدول ۱.۳ داریم. با توجه به جواب مسأله در حالت فازی می‌بینیم که هزینه ما ۳/۲% نسبت به حالت قطعی افزایش یافته است.

۲.۳ برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی

برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی[۸] ($FILP$) کاربردهای زیادی در رشته‌های مختلف(هوش مصنوعی، تحقیق در عملیات و ...) دارد و چون مدل برنامه ریزی ریاضی مسائل مکانیابی فازی روی شبکه‌ها بصورت برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی است، ازاین مدل برای حل مسأل مکانیابی فازی نیزاستفاده می شود. مسائل برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی در حالت کلی به ۳ دسته تقسیم می‌شوند. که در این بخش آنها را معرفی و مورد ارزیابی قرار می دهیم. فرض کنید مدل قطعی برنامه ریزی عدد صحیح بصورت زیر باشد:[۴۵]

$$\begin{array}{lll} \max & z=\sum_j c_j x_j & \\ s\ .\ t & \sum_j a_{ij}x_j \leq b_i & i\in M=\{1,\cdots,m\} \\ & x_j \geq 0 & \\ & x_j \in \mathbb{Z} & \end{array} \tag{۱۲.۳}$$

۱.۲.۳ مسأله $FILP$ با قیدهای فازی

مدل فازی مسأله (۱۲.۳) می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{array}{lll} \max & z=\sum_j c_j x_j & \\ s\ .\ t & \sum_j a_{ij}x_j \lesseqqgtr b_i & i\in M=\{1,\cdots,m\} \\ & x_j \geq 0 & \\ & x_j \in \mathbb{Z} & \end{array} \tag{۱۳.۳}$$

و همان طور که در بخش (۱.۱.۳) بیان شد، علامت $\lesssim$ یعنی تصمیم گیرنده از بعضی تخلفات و تجاوزات کوچک در قیدها چشم پوشی می‌کند. قیدهای فازی مسأله بوسیله تابع عضویت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_i\ :\ \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ (0,1]$$

---

[۸] *Fuzzy integer linear programing*

$\mu_i(x)$ درجه شدنی بودن هر $x \in \mathbb{R}^n$ را برای قید iام نشان می‌دهد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} ۱ & if \quad a_i x \leq b_i \\ \frac{(b_i+d_i)-a_i x}{d_i} & if \quad b_i < a_i x \leq b_i + d_i \\ ۰ & if \quad a_i x > b_i + d_i \end{cases} \qquad (۱۴.۳)$$

برای هر قید، مجموعه X_i را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum a_{ij} x_j \lessapprox b_i, x_j \geq ۰,\ x_j \in \mathbb{Z}\} \quad i \in M$$

اگر $X = \bigcap_{i \in M} X_i$ آنگاه مسأله $FILP$ (۱۳.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\max \{z = cx \mid x \in X\}$$

با توجه به تعریف α—برش‌ها، برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ یک α—برش دلخواه از مجموعه قیدهای X، مجموعه کلاسیک زیر می‌باشد:

$$X(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}$$

که $\mu_X(x)$ طبق تعریف ۶.۲ بصورت زیر می‌باشد:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad \mu_X(x) = \min\{\mu_i(x)\ ,\ i \in M\}$$

در این حالت $X_i(\alpha)$، α—برش iامین قید است. سپس برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $S(\alpha)$ را بصورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$S(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \max cy\ , y \in X(\alpha)\}$$

که $\bigcup_\alpha S(\alpha)$ جواب فازی مسأله $FILP$ در حالت قیدهای فازی است. برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ داریم:

$$X(\alpha) = \bigcap_{i \in M} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \leq r_i(\alpha)\ , x_j \geq ۰, x_j \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad r_i(\alpha) = b_i + d_i(۱ - \alpha)$$

بنابراین مسأله $FILP$ (۱۳.۳) به‌مسأله ILP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{lll} \max & z=\sum_j c_j x_j & \\ s.t & \sum a_{ij}x_j \le b_i + d_i(1-\alpha) & i\in M=\{1,\cdots,m\} \\ & x_j \ge 0 & \\ & x_j \in \mathbb{Z} \quad \& \quad \alpha\in(0,1] & \end{array} \qquad (۱۵.۳)$$

مثال ۲.۳ جواب فازی مسأله $FILP$ زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{ll} \max & z=2x_1+5x_2 \\ s.t & 2x_1 - x_2 \lessapprox 9 \\ & 2x_1-8x_2 \lessapprox 31 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \\ & x_1,x_2\in\mathbb{Z} \end{array}$$

با $d_1=3, d_2=4$ که حد اکثر تخلفاتی که تصمیم گیرنده می‌تواند داشته باشد را نشان می‌دهند.

با توجه به (۱۵.۳) مسأله برنامه ریزی قطعی عدد صحیح متناظر بصورت زیر است:

$$\begin{array}{ll} \max & z=2x_1+5x_2 \\ s.t & 2x_1 - x_2 \le 9+3(1-\alpha) \\ & 2x_1-8x_2 \le 31+4(1-\alpha) \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \\ & x_1,x_2\in\mathbb{Z} \\ & 0<\alpha\le 1 \end{array}$$

که بعد از حل مسأله جواب مسأله بالا بصورت زیر است:

$$\begin{array}{lll} S(\alpha)=(5,3) & z(\alpha)=25 & \forall\alpha\in(0,0/25] \\ S(\alpha)=(4,3) & z(\alpha)=23 & \forall\alpha\in(0/25,0/75] \\ S(\alpha)=(3,3) & z(\alpha)=21 & \forall\alpha\in(0/75,1] \end{array}$$

و در پایان جواب فازی مسأله، مجموعه فازی زیر است:

$$\tilde{S}=\left\{\frac{(5,3)}{0/25},\frac{(4,3)}{0/75},\frac{(3,3)}{1}\right\}$$

۲.۲.۳ مسأله $FILP$ با ضرائب فازی در تابع هدف

مدل فازی مسأله بصورت زیر است:

$$\begin{array}{lll} \max & z = \sum_j \tilde{c}_j x_j & \\ s\ .\ t & \quad \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i & i \in M = \{1, \cdots, m\} \\ & \quad x_j \ \geq \ 0 & \\ & \quad x_j \in \mathbb{Z} & \end{array} \qquad (۱۶.۳)$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ و $\tilde{c_j} \in F(\mathbb{R})$ که $F(\mathbb{R})$ **مجموعه اعداد فازی حقیقی** است. برای هر جواب شدنی فوق یک مقدار فازی وجود دارد که از تابع هدف فازی بدست می‌آید.

دو روش حل برای این مدل $FILP$ وجود دارد، روش اول روشی است مبتنی بر قضیّه نمایش [۹] و روش دوم روشهای رتبه بندی اعداد فازی [۱۰] است. که در این قسمت ما روشهای رتبه‌بندی اعداد فازی را بررسی می‌کنیم[۴۵].

استفاده از روش رتبه‌بندی اعداد فازی

فرض کنید X مجموعه جواب‌های شدنی مسأله (۱۶.۳) باشد و g یک نگاشت از مجموعه جواب‌های شدنی به مجموعه اعداد فازی باشد بطوری که:

$$g : X \longrightarrow F(\mathbb{R}) \qquad , \quad g(x) = \tilde{c}x = \sum \tilde{c_j} x_j \quad , \quad \tilde{c_j} \in F(R)$$

باتوجه به اصل توسیع [۱۱] در مجموعه‌های فازی داریم:

$$\sum \tilde{c_j} x_j \in F(\mathbb{R})$$

[۹] Representation theorem

[۱۰] Fuzzy number ranking methods

[۱۱] Extension Principle

بنابراین کافی است مجموعه اعداد فازی زیر را برای بدست آوردن جواب بهینه بررسی کنیم.

$$A = \{g(x) \mid x \in X\}$$

بنابراین $X^* \in X$ یک جواب بهینه است اگر عدد فازی $g(x^*)$ بزرگترین عدد در مجموعه فازی A باشد، پس هدف ما پیدا کردن بزرگترین عدد در مجموعه فازی A می‌باشد. حال با استفاده از روش رتبه‌بندی اعداد فازی $(FNRM)$ جواب بهینه را بدست می آوریم.
روشهای رتبه‌بندی زیادی برای بدست آوردن بزرگترین عدد فازی مجموعه A وجود دارد، ما روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که بصورت یک تابع رتبه‌بندی تعریف می‌شوند، مخصوصاً روش‌هایی که تابع رتبه‌بندی آنها خطی[۱۲] (LRF) است.
فرض کنید $A, B \in F(R)$ آنگاه برای مقایسه دو عدد کافی است تابعی خطی مانند $f : F(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف کنیم، اگر $f(A) = f(B), f(A) < f(B), f(A) > f(B)$ آنگاه به ترتیب $A < B, A = B, A > B$ می‌باشد.

تعریف ۱.۳ تابع f تابع رتبه‌بندی خطی است اگر

$$\forall A, B \in F(\mathbb{R})\ ; \forall r \in \mathbb{R}\ , r > 0 \qquad f(A+B) = f(A) + f(B)\ and\ f(rA) = rf(A)$$

فرض کنید از اعداد فازی مثلثی استفاده می‌کنیم، هر عدد فازی مثلثی را بصورت $\tilde{c_j} = (r_j, c_j, R_j)$ نمایش می دهیم و تابع عضویت آنها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall u \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}, \quad \mu_{c_j}(u) = \begin{cases} (u - r_j)/(c_j - r_j) & r_j \leq u \leq c_j \\ (R_j - u)/(R_j - c_j) & c_j \leq u \leq R_j \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (۱۷.۳)$$

[۱۲] Linear ranking function

حال فرض می‌کنیم $\tilde{y} = \sum \tilde{c_j} x_j$ باشد، بطوری که $\tilde{c_j}$ ها اعداد فازی مثلثی و برای هر $j \in \mathbb{N}$ ، $x_j \geq 0$ باشد، آنگاه تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{y}$ بصورت زیر مشخص می‌شود:

$$\mu(z) = \begin{cases} h_j(z) = (z - rx)/(cx - rx) & if\ x > 0, \quad rx \leq z \leq cx \\ g_j(z) = (Rx - z)/(Rx - cx) & if\ x > 0, \quad cx \leq z \leq Rx \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{۱۸.۳}$$

بطوری که $R = (R_1, ..., R_n)$، $c = (c_1, ..., c_n)$، $r = (r_1, ..., r_n)$. اگر $d = R - c$ و $d' = c - r$ آنگاه dx و $d'x$ اختلاف راست و چپ عدد فازی $\tilde{c}x$ را نشان می‌دهند. حال یک نگاشت رتبه‌بندی را از هر مجموعه فازی به مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم.

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

بنابراین یک جواب بهینه (۱۶.۳) با حل مسأله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \max & f(\tilde{c}x) \\ s.t & Ax \leq b \\ & x_j \geq 0 \\ & x_j \in \mathbb{Z} \end{array} \tag{۱۹.۳}$$

بنابراین با استفاده از تابع رتبه‌بندی خطی (LRF) مسأله کمکی (۱۹.۳) به مسأله (ILP) زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \left\{ \sum f(\tilde{c_j}) x_j \mid j \in \mathbb{N}\ ,\ x \in X \right\} \tag{۲۰.۳}$$

بعضی از این مدل‌های کمکی عبارتند از:

الف) با استفاده از اندیس چانگ[13] مسأله زیر بدست می‌آید:

$$\max \left\{ \frac{(dx + d'x)(3cx + dx - d'x)}{6} \mid\ Ax \leq b\ ,\ x_j \in \mathbb{Z} \right\} \tag{۲۱.۳}$$

[13] Chang

ب) بااستفاده از اندیس اول، دوم و سوم یاگر[۱۴] به ترتیب روشهای زیر بدست می‌آید:

$$\max\left\{\ (c+\frac{d-d'}{۳})x \mid\ Ax\leq b\ ,\ x_j\geq ۰\ ,\ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \qquad (۲۲.۳)$$

$$\max\left\{\frac{(cx+dx)}{dx+۱}\mid\ Ax\leq b\ ,\ x_j\geq ۰\ ,\ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \qquad (۲۳.۳)$$

$$\max\left\{(c+\frac{d-d'}{۴})x\mid\ Ax\leq b\ ,\ x_j\geq ۰\ ,\ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \qquad (۲۴.۳)$$

مثال ۳.۳ مسأله $FILP$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & z=\tilde{c_۱}x_۱+۵x_۲ \\ s\ .\ t \quad & ۲x_۱-\ \ x_۲\leq ۱۲ \\ & ۲x_۱-۸x_۲\leq ۳۵ \\ & x_۱,\ x_۲\geq ۰ \\ & x_۱,x_۲\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

که $\tilde{c}=(۱,۳,۵)$. با استفاده از توابع رتبه‌بندی داریم:

الف) استفاده از تابع رتبه‌بندی چانگ :

$$\max\left\{۲x_۱^۲+۳/۳۳x_۱x_۲\mid ۲x_۱-\ \ x_۲\leq ۱۲\ ,\ ۲x_۱-۸x_۲\leq ۳۵\ ,x_j\geq ۰,j\in\mathbb{N}\right\}$$

در این حالت جواب بهینه برابر$x^*=(۷,۲)$

ب)استفاده از تابع رتبه بندی یاگر:

$$\max\{۳x_۱+۵x_۲\mid ۲x_۱-\ \ x_۲\leq ۱۲\ ,\ ۲x_۱-۸x_۲\leq ۳۵\ ,x_j\geq ۰,x_j\in\mathbb{Z}\}$$

$$\max\left\{\frac{۵x_۱+۵x_۲}{۲x_۱+۱}\mid ۲x_۱-\ \ x_۲\leq ۱۲\ ,\ ۲x_۱-۸x_۲\leq ۳۵\ ,x_j\geq ۰,x_j\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\max\{۳x_۱+۵x_۲\mid ۲x_۱-\ \ x_۲\leq ۱۲\ ,\ ۲x_۱-۸x_۲\leq ۳۵\ ,x_j\geq ۰,x_j\in\mathbb{Z}\}$$

[۱۴] Yager

جواب بهینه با استفاده از اندیس‌های اول، دوم و سوم یاگر بترتیب عبارتند از:

$$x^* = (۷, ۲), x^* = (۰, ۴), x^* = (۷, ۲)$$

مشاهده می‌کنیم بر حسب اینکه از چه مدلی استفاده کنیم، جواب‌های مختلفی بدست می‌آوریم که در نهایت تصمیم گیرنده یکی از جواب‌ها را انتخاب می‌کند.

۳.۲.۳ مسأله $FILP$ با اعداد فازی در ماتریس ضرائب

در این بخش ما مسأله $FILP$ با اعداد فازی تعریف شده در ماتریس ضرائب را بررسی می‌کنیم. مدل این مسأله بصورت زیر است.

$$\begin{array}{lll} \max & z = \sum_j c_j x_j & \\ s\ .\ t & \sum_j \tilde{a_{ij}} x_j \lesseqq \tilde{b_i} & i \in M = \{۱, \cdots, m\} \\ & x_j \ \geq \ ۰ & \\ & x_j \in \mathbb{Z} & \end{array} \qquad (۲۵.۳)$$

در مدل بالا $\tilde{a_{ij}}\ ,\tilde{b_i} \in F(\mathbb{R})$ و $\lesseqq$ نشان می‌دهد که تصمیم گیرنده اجازه می‌دهد تا قیدها انعطاف پذیرتر باشند. بنابراین توابع عضویت زیر را بررسی می‌کنیم.
برای هر قید در (۲۵.۳) داریم:

$$\exists\ \mu_i \quad s.t \quad \mu_i : \mathbb{R} \longrightarrow [۰, ۱]$$

که تابع عضویت اعداد فازی مقادیر سمت راست را تعریف می‌کند. و برای هر $i \in N$ و $j \in N$ داریم:

$$\exists\ \mu_{ij} \quad s.t \quad \mu_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow [۰, ۱]$$

که تابع عضویت اعداد فازی در ماتریس ضرائب می‌باشد. و برای هر سطر از قیدها داریم:

$$\exists\ \mu^i \quad s.t \quad \mu^i : F(\mathbb{R}) \longrightarrow (۰, ۱]$$

که درجه شدنی بودن هر $x \in \mathbb{R}^n$ نسبت به iامین قید را نشان می‌دهد. فرض کنید $\tilde{t_i}$ یک عدد فازی باشد که تصمیم گیرنده در نظر می گیرد و بیشترین تخلّف مجاز در iامین قید را نشان می‌دهد. بنابر این مسأله (۲۵.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \max & z = \sum_j c_j x_j \\ s.t & \sum_j \tilde{a_{ij}} x_j \leq \tilde{b_i} + \tilde{t_i}(1-\alpha) \qquad i \in M = \{1, \cdots, m\} \\ & x_j \geq 0 \\ & x_j \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \alpha \in (0, 1] \end{array} \tag{۲۶.۳}$$

با استفاده از تابع رتبه‌بندی، مدل کمکی زیر بدست می آید:

$$\begin{array}{ll} \max & z = \sum_j c_j x_j \\ s.t & f(\sum \tilde{a_{ij}} x_j) \leq f(\tilde{b_i} + \tilde{t_i}(1-\alpha)) \qquad i \in M = \{1, \cdots, m\} \\ & x_j \geq 0 \\ & x_j \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \alpha \in (0, 1] \end{array} \tag{۲۷.۳}$$

حال اگر از LRF استفاده کنیم مدل (۲۷.۳) بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \max & z = \sum_j c_j x_j \\ s.t & \sum f(\tilde{a_{ij}}) x_j \leq f(\tilde{b_i}) + f(\tilde{t_i})(1-\alpha) \qquad i \in M = \{1, \cdots, m\} \\ & x_j \geq 0 \\ & x_j \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \alpha \in (0, 1] \end{array} \tag{۲۸.۳}$$

مثال ۴.۳ مسأله $FILP$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 5x_2 \\ s.t & \tilde{2}x_1 - \tilde{1}x_2 \leq \tilde{9} \\ & \tilde{2}x_1 + \tilde{8}x_2 \leq \tilde{31} \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

ماتریس ضرائب مسأله بصورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}(۱,۲,۳) & (۰/۵,۱,۲)\\ (۱/۵,۲,۳/۵) & (۷,۸,۱۰)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}(۷,۹,۱۰)\\ (۲۹,۳۱,۳۵)\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}(۲/۵,۳,۴)\\ (۳,۴,۶)\end{bmatrix}.$$

با توجه به (۲۶.۳) داریم:

$$\begin{array}{ll}\max & z=۲x_۱+۵x_۲\\ s.t & \tilde{۲}x_۱-\tilde{۱}x_۲\leq\tilde{۹}+\tilde{۳}(۱-\alpha)\\ & \tilde{۲}x_۱+\tilde{۸}x_۲\leq\tilde{۳۱}+\tilde{۴}(۱-\alpha)\\ & x_۱,\ x_۲\geq ۰\\ & x_۱,x_۲\in\mathbb{Z}\quad,\quad\alpha\in(۰,۱]\,.\end{array}$$

با بکار بردن توابع رتبه‌بندی برای اعداد فازی داریم:

الف) استفاده از اندیس اول یاگر

$$\begin{array}{ll}\max & z=۲x_۱+۵x_۲\\ s.t & ۲/۰۰۰x_۱-۱/۱۶۶x_۲\leq\ ۸/۶۶۶+۳/۱۶۶(۱-\alpha)\\ & ۲/۳۳۳x_۱+۸/۳۳۳x_۲\leq ۳۱/۶۶۶+۴/۳۳۳(۱-\alpha)\\ & x_۱,\ x_۲\geq ۰\\ & x_۱,x_۲\in\mathbb{Z}\quad,\quad\alpha\in(۰,۱]\,.\end{array}$$

جواب بهینه فازی عبارت است از

$$\tilde{S}=\left\{\frac{(۷,۲)}{۰/۰۵۲},\ \frac{(۴,۳)}{۰/۳۸۴},\ \frac{(۶,۲)}{۰/۶۸۳},\ \frac{(۳,۳)}{۰/۹۲۳},\ \frac{(۵,۲)}{۱}\right\}.$$

استفاده از تابع رتبه‌بندی چانگ:

$$\begin{array}{ll}\max & z=۲x_۱+۵x_۲\\ s.t & (۲x_۱-۱/۵x_۲)(x_۱-۰/۵۸۳x_۲)\leq\ [۳+۱/۵(۱-\alpha)][۴/۳۳۳+۱/۵۸۳(۱-\alpha)]\\ & (۲x_۱+۳x_۲)(۱/۶۶۶x_۱-۴/۱۶۶x_۲)\leq\ [۶+۳(۱-\alpha)][۱۵/۸۳۳+۲/۱۶۶(۱-\alpha)]\\ & x_۱,\ x_۲\geq ۰\\ & x_۱,x_۲\in\mathbb{Z}\quad,\quad\alpha\in(۰,۱]\end{array}$$

جواب بهینه فازی عبارت است از

$$\tilde{S}=\left\{\frac{(۱,۳)}{۰/۰۸},\ \frac{(۰,۳)}{۰/۷۱},\ \frac{(۱,۲)}{۱}\right\}.$$

فصل ۴

مکانیابی فازی روی شبکه‌ها

در این فصل مدل‌های مختلف مکانیابی فازی روی شبکه‌ها را معرفی می‌کنیم، و مسائل $p-$میانه و $p-$مرکز را روی شبکه‌های فازی معرفی و روش‌های حل آنها را بیان می‌کنیم و در پایان برای حل مسأله $p-$میانه روی شبکه‌ها وقتی که وزن رأس‌ها اعداد فازی هستند الگوریتمی را ارائه می‌دهیم.
فرض کنید $G(V,E)$ یک گراف ساده، همبند و بدون جهت با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ باشد، هر یال $e\in E$ را بوسیله $e\in[u,v]$ نشان می‌دهیم. به هر یال $e\in E$ یک عدد مثبت $l(e)$ نسبت می‌دهیم که نشان دهنده طول یال است و به هر رأس $v\in V$ یک وزن $w(v)\geq 0$ نسبت می‌دهیم که اهمیّت و ارزش رأس را نشان می‌دهد. فرض کنید توابع $w(.)$ و $l(.)$ بترتیب توابع وزن و طول روی V و E هستند. بنابر این مدل مدل مورد بحث یک شبکه با چهار مؤلفه $N=(V,E,w,l)$ می‌باشد. نقطه x روی یال $e\in[u,v]$ بوسیله متغیّر θ تعیین می‌شود که $0\leq\theta\leq 1$ بخشی از یال بین انتهای u و نقطه x را نشان می‌دهد و این نقطه را بوسیله $x^e(\theta)$ نشان می‌دهیم. با توجه به این تعریف نقطه‌های انتهائی یال را بصورت $u=x^e(0)$ و $v=x^e(1)$ و نقطه های داخلی e را با $I(e)=\{x=x^e(\theta)\ ;\ 0\leq\theta\leq 1\}$ نمایش می‌دهیم[۵۲].
همانطور که در فصل ۱ بیان شد دو نمونه از مسأله‌های مهم در نظریه مکانیابی، مسأله‌های میانه و مرکز هستند. که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\min_{x\in N}\sum_{v\in V}w(v)d(x,v) \qquad\qquad \min_{x\in N}\max_{v\in V}w(v)d(x,v)\ .$$

در اولین مرحله از حل یک مساله مکانیابی همه نقاط شبکه جواب‌های شدنی هستند، که در یک **مجموعه غالب متناهی**[۱] (یک مجموعه متناهی که حداقل یک جواب شدنی مسأله را شامل می‌شود) قرار دارند [۴۹]. با توجه به مقاله حکیمی [۳۹] ، مجموعه غالب متناهی برای مسأله$p-$میانه مجموعه رأس‌ها و برای مسأله $p-$مرکز مجموعه رأس‌ها و نقاط داخلی بین رأس‌ها(یال‌ها) می‌باشد. برای بررسی مفهوم فازی در مسائل مکانیابی، ما به مفهوم گراف فازی نیازمندیم. بنابراین از گراف $G=(V,E)$، یک شبکه فازی بوجود می آید اگر تابع عضویت مناسب برای اجزای شبکه تعریف کنیم.

[۱] Finite dominat set

۱.۴ مدلهای مختلف مسائل مکانیابی فازی

در مسائل مکانیابی کلاسیک، اطلاعات در مورد تمامی عناصر شبکه (رأس‌ها، یال‌ها، وزن رأس‌ها، وزن یال ها)دقیق و کامل است ولی در دنیای واقعی این اطلاعات مبهم و نادقیق هستند. بنابراین قبل از ارائه و معرفی مدل‌های مختلف مکانیابی روی شبکه‌های فازی به بیان چگونگی حالت‌هائی که این عناصر فازی در نظر گرفته می‌شوند می‌پردازیم.

۱) **شبکه با رأس‌های فازی**

در این مسائل رأس‌های تقاضا، موقعیت مکانهائی را نشان می‌دهند که این مکانها یک شرط مشخص و معینی برای رأس بودن دارند. برای مثال اگر شبکه ما یک نقشه‌ی شهری باشد و رأس‌ها شهرهای روی نقشه باشند، شهرهائی را بررسی کنیم که یک جمعیت کافی و مناسب دارند.

۲) **شبکه با یال‌های فازی:**

در این مسائل مانند حالت قبل یال‌ها با یک درجه اهمیّت در مدل ظاهر می شوند، به عنوان مثال اگر یال‌های شبکه نشان دهنده خیابان‌های بین شهرها باشند، مجموعه فازی می تواند به صورت «خوب بودن خیابان » تعریف شود. مثلاً اتوبان‌ها و مسیرهای جنگلی هر دو جاده هستند ولی درجه اهمیّت مختلف دارند.

۳) **شبکه با وزن‌های فازی:**

در بسیاری از حالت‌ها اطلاعات موجود اجازه نمی‌دهد که ارزش قطعی وزن‌هائی که نشان دهنده اهمیّت رأس‌ها هستند را تعیین کنیم، در این حالت‌ها برای مثال بکار می‌بریم «وزن رأس v در حدود w است » که نشان می‌دهد وزن $w(v)$ یک عدد فازی است.

۴) **شبکه با طول‌های فازی :**

در این مسائل طول یال‌ها معلوم نیست و آنها بوسیله تابع $\tilde{l}(e)$ ارزش فازی پیدا می‌کنند. به

عنوان مثال اگر یال‌های ما جاده‌های بین شهرها باشند طول فازی می تواند زمان پیمودن جاده‌ها باشد.

در شرایط فازی حالت‌های فوق می‌تواند با هم نیز رخ دهد. که با توجه به شرایط مسأله می‌توان این مسائل را در حالت‌های زیر تقسیم بندی کرد.

- مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها هر دو مجموعه‌های فازی هستند و توابع وزن و طول نیز مقادیری فازی اختیار می‌کنند. $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{w}, \tilde{l})$.

- مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها هر دو مجموعه‌هائی فازی هستند و یکی از توابع وزن یا طول و یا هر دو مقادیر قطعی اختیار می‌کنند. $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{w}, l)$ ، $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, w, \tilde{l})$ یا $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, w, l)$.

- مجموعه رأس‌ها یک مجموعه قطعی، مجموعه یال‌ها یک مجموعه فازی و توابع وزن و طول مقادیر فازی اختیار می‌کنند. $N = (V, \tilde{E}, \tilde{w}, \tilde{l})$.

- مجموعه رأس‌ها یک مجموعه قطعی، مجموعه یال‌ها یک مجموعه فازی و یکی از توابع وزن یا طول و یا هر دو مقادیر قطعی اختیار می‌کنند. $N = (V, \tilde{E}, \tilde{w}, l)$ ، $N = (V, \tilde{E}, w, \tilde{l})$ یا $N = (V, \tilde{E}, w, l)$.

- مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها هر دو مجموعه‌هائی قطعی هستند و توابع وزن و طول هر دو مقادیری فازی اختیار می‌کنند. $N = (V, E, \tilde{w}, \tilde{l})$.

- مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها هر دو مجموعه‌هائی قطعی هستند و یکی از توابع وزن و طول مقادیر فازی اختیار می‌کند. $N = (V, E, \tilde{w}, l)$ ، $N = (V, E, w, \tilde{l})$

در ادامه به معرفی روشهائی می‌پردازیم که برای حل مدل‌های مشابه‌ای که در قسمت بالا ذکر شدند مناسب هستند. یک روش حل برای مدل‌هائی که مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها و یا هر دو مجموعه (رأس‌ها

و یال‌ها)، مجموعه‌هائی فازی هستند استفاده از نمایش α−برشها می‌باشد. این روش شامل حل یک سری متناهی از مسائل قطعی با استفاده از α−برشها است.

۱.۱.۴ مسأله مکانیابی با مجموعه رأس‌ها یا مجموعه یال‌های فازی

یک روش حل برای این نوع مسائل مکانیابی، شامل حل یک مجموعه متناهی از مسائل قطعی مربوط به α−برشها برای $\alpha \in (\circ, C(G)]$ می‌باشد. روش حل آنها شامل حل مسأله‌های مکانیابی برای گراف‌های G^{α_i} با مقادیر مختلف α_i می‌باشد.

بهترین راه حل این است که ما مسأله‌های قطعی را برای دنباله نزولی $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_k$ حل کنیم، زیرا رأس‌ها مکرراً در در گراف‌های بعدی ظاهر می شوند و چون در مسأله‌های مکانیابی اغلب از الگوریتم‌هائی استفاده می‌کنیم که وقتی یال جدید به گراف اضافه شود به آسانی بتوانیم ماتریس فاصله جدید رابدست آوریم ، از دنباله نزولی α_i استفاده می‌کنیم. با این روش زمان کمتری برای محاسبه ماتریس فاصله نیاز است.

با استفاده از روش فوق، یک مجموعه متناهی از مسائل قطعی وابسته به درجه عضویت بدست می آید، که با حل این مسائل قطعی یک مجموعه متناهی از جواب‌های قطعی بدست می آید با در جه عضویت مشخص که جواب‌های فازی مسأله نامیده می‌شود.

۲.۱.۴ مسأله مکانیابی با وزن‌ها و طول‌های فازی

در هر دو مسأله (مکانیابی با وزن‌ها و طول‌های فازی) تابع هدف یک مقدار فازی را برای هر جواب شدنی معرفی می‌کند، بعد با مقایسه این اعداد و مینیمم گرفتن روی همه مقادیر تابع هدف و با استفاده از توابع رتبه بندی خطی، جواب بهینه بدست می آید.

۲.۴ مسأله p—میانه در شبکه‌های فازی

در این بخش ما مسأله p—میانه روی شبکه‌های $N=(V,E,\tilde{w},l)$ و $N=(V,E,w,\tilde{l})$ را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم و در پایان با ارائه مثالی روش حل آن‌ها را توضیح می‌دهیم[۵۲].

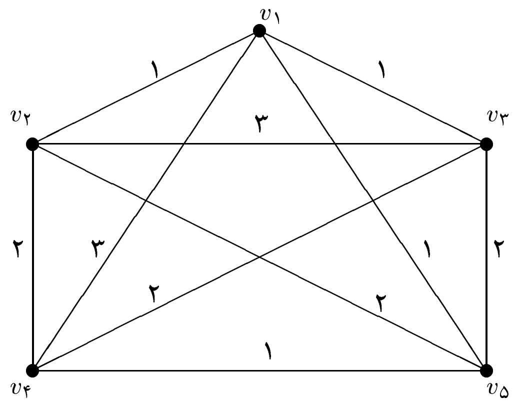
۱.۲.۴ مسأله p—میانه با وزن‌های فازی

یک شبکه با وزن‌های فازی را بصورت $N=(V,E,\tilde{w},l)$ نمایش می‌دهیم که یک شبکه با مجموعه رأس‌های $V=\{v_۱,v_۲,...,v_n\}$، مجموعه یال‌های $E=\{e_۱,e_۲,...,e_m\}$، طول هر یال e_i برابر $l(e_i)$ و وزن هر رأس برابر $\tilde{w_i}$ است. برای مسأله p—میانه در گراف‌های قطعی با وزن‌های فازی، اگر فرض کنیم وزن‌ها اعداد فازی مثلثی بصورت $\tilde{w_i}=(w_i^l,w_i^m,w_i^r)$ باشند، تابع عضویت هدف با استفاده از (۱۸.۳) بصورت زیر نوشته می شود.

$$\forall u\in R, i\in N,\quad \mu_{w_i}(u)=\begin{cases}(u-w_i^l)/(w_i^m-w_i^l) & w_i^l\leq u\leq w_i^m\\ (w_i^r-u)/(w_i^r-w_i^m) & w_i^m\leq u\leq w_i^r\\ ۰ & otherwise\end{cases}\qquad (۱.۴)$$

حال فرض می‌کنیم $\tilde{z}=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\tilde{w}_i d_{ij}x_{ij}$ باشد، بطوری که $\tilde{w}_i$ها اعداد فازی مثلثی باشد، آنگاه تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{z}$ بصورت زیر مشخص می شود:

$$\mu(z)=\begin{cases}h_i(z)=(z-w_i^l d_{ij}x_{ij})/(w_i^m d_{ij}x_{ij}-w_i^l d_{ij}x_{ij}) & if\quad w_i^l d_{ij}x_{ij}\leq z\leq w_i^m d_{ij}x_{ij}\\ g_i(z)=(w_i^r d_{ij}x_{ij}-z)/(w_i^r d_{ij}x_{ij}-w_i^m d_{ij}x_{ij}) & if\quad w_i^m d_{ij}x_{ij}\leq z\leq w_i^r d_{ij}x_{ij}\\ ۰ & otherwise\end{cases}\qquad (۲.۴)$$



شکل ۱.۴: شبکه برای مثال ۱.۴

مدل مسأله p—میانه با وزن‌های فازی با توجه به مدل (۱.۱) بصورت زیر است

$$\begin{array}{lll} min\ z = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_i d_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1,...,n \\ & x_{ij} \leq y_j & i = 1,...,n\ j = 1,...,n \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = p & \\ & x_{ij} = 0 \vee 1 & i = 1,...,n\ j = 1,...,n \\ & y_j = 0 \vee 1 & j = 1,...,n\ . \end{array} \quad (۳.۴)$$

بنابر این مدل p—میانه باوزن‌های فازی با استفاده از توابع رتبه‌بندی به مدل p—میانه قطعی تبدیل شده و حل می‌کنیم.

مثال ۱.۴ : ۱— میانه‌ی شبکه نشان داده شده در شکل ۱.۴ را وقتی وزن رأس‌ها اعداد فازی مثلثی تعریف شده در جدول ۱.۴ هستند را بیابید.

لازم به ذکر است که مقادیر مربوط به اندیس اول و سوم یاگر در جدول ۱.۴، با استفاده از فرمول‌های زیر که توسط یاگر معرفی شدند بدست آمده است. اگر $\tilde{c} = (r, c, R)$ و $d = R - c$ و $d' = c - r$ آنگاه

اندیس اول یاگر $\quad (c + \frac{d - d'}{3})$

اندیس سوم یاگر $\quad (c + \frac{d - d'}{4})$

و مقادیر مربوط به ماتریس کوتاهترین فاصله برای شبکه ۱.۴ در جدول ۲.۴ نشان داده شده است.

$\tilde{w}_i$	(۱,۲,۳)	(۲,۴,۵)	(۳,۵,۷)	(۲,۳,۵)	(۱,۳,۵)
اندیس اول یاگر	۲	۳٫۶۶	۵	۳٫۳۳	۳
اندیس دوم یاگر	۲	۳٫۷۵	۵	۳٫۲۵	۳

جدول ۱.۴: مقادیر مربوط به $\tilde{w}_i$

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	۰	۱	۱	۲	۱
v_2	۱	۰	۲	۲	۲
v_3	۱	۲	۰	۲	۲
v_4	۲	۲	۲	۰	۱
v_5	۱	۲	۲	۱	۰

جدول ۲.۴: ماتریس فاصله شبکه G

بنابراین با استفاده از اندیس‌های اول و سوم یاگر مدل‌های زیر را داریم

$$
\begin{array}{lll}
min\ z = & \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(c+\frac{d-d'}{3})d_{ij}x_{ij} & \\
s.t. & & \\
 & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 & i=1,...,5 \\
 & x_{ij} \leq y_j & i=1,...,5\ j=1,...,5 \\
 & \sum_{j=1}^{5} y_j = 2 & \\
 & x_{ij} = 0 \vee 1 & i=1,...,5\ j=1,...,5 \\
 & y_j = 0 \vee 1 & j=1,...,5
\end{array}
$$

و

$$
\begin{array}{lll}
min\ z = & \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(c+\frac{d-d'}{4})d_{ij}x_{ij} & \\
s.t. & & \\
 & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 & i=1,...,5 \\
 & x_{ij} \leq y_j & i=1,...,5\ j=1,...,5 \\
 & \sum_{j=1}^{5} y_j = 2 & \\
 & x_{ij} = 0 \vee 1 & i=1,...,5\ j=1,...,5 \\
 & y_j = 0 \vee 1 & j=1,...,5\ .
\end{array}
$$

بعد از ساده‌سازی و حل مدل‌ها، ۱−میانه‌ی شبکه با استفاده از اندیس اول یاگر رأس v_2 با هزینه ۲۴٫۶ و با استفاده از اندیس سوم یاگر رأس v_2 با هزینه ۲۴٫۵ می‌باشد.

۲.۲.۴ مسأله p—میانه با طول‌های فازی

یک شبکه با طول‌های فازی را بصورت $N=(V,E,w,\tilde{l}(e_i))$ نمایش می‌دهیم که یک شبکه با مجموعه رأس‌های $V=\{v_۱,v_۲,...,v_n\}$، مجموعه یال های $E=\{e_۱,e_۲,...,e_m\}$، وزن رأس‌ها قطعی و برابر w و طول هر یال e_i بوسیله عدد فازی $\tilde{l}(e_i)$ مشخص می‌شود.
در بخش قبل ذکر شد که اولین مرحله برای حل مسائل مکانیابی پیدا کردن یک مجموعه غالب متناهی است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه این مجموعه برای مسألهp—میانه در شبکه‌ها باطول‌های فازی بدست می آید. برای فاصله بین دو نقطه روی شبکه با یال‌های فازی تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۴ فاصله $\tilde{d}(x,y)$ بین دو نقطه x وy روی گراف $N=(V,E,w,\tilde{l})$ برابر فاصله بین رأس x وy از گراف $(N_{.x})_{.y}=((V_{.x})_{.y},(E_{.x})_{.y},(w_{.x})_{.y},(\tilde{l}_{.x})_{.y})$ می‌باشد.

تعریف ۲.۴ فرض کنید $e\in[u,v]$ و نقطه z، نقطه غیر داخلی یال e باشد. آنگاه فاصله $x=x^e(\theta)$ تا z بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{d}(x^e(\theta),z)=\min\{\tilde{d}(u,z)+\theta\tilde{l}(e)\ ,\ \tilde{d}(v,z)+(۱-\theta)\tilde{l}(e)\} \qquad (۴.۴)$$

قضیّه ۱.۴ فاصله بین نقطه‌ای از یال $e\in[u,v]$ و نقطه غیر داخلی z بصورت زیر است.

$$\tilde{d}(x^e(\theta),z)=\begin{cases}\tilde{d}(u,z)+\theta\tilde{l}(e) & ۰\leq\theta\leq\theta_z^e \quad (i)\\ \tilde{d}(v,z)+(۱-\theta)\tilde{l}(e) & \theta_z^e\leq\theta\leq ۱ \quad (ii)\end{cases}$$

و θ_z^e بصورت زیر است:

$$\theta_z^e=\frac{f(\tilde{d}(v,z)+\tilde{l}(e)-\tilde{d}(u,z))}{۲f(\tilde{l}(e))} \qquad (۵.۴)$$

اثبات:

فاصله بین $x^e(\theta)$ و نقطه z بوسیله تعریف ۲.۴ مشخص می‌شود، بنابراین عبارت

$$\tilde{d}(u,z) + \theta\tilde{l}(e) \leq \tilde{d}(v,z) + (1-\theta)\tilde{l}(e)$$

زمانی درست است که

$$f(\tilde{d}(u,z) + \theta\tilde{l}(e)) \leq f(\tilde{d}(v,z) + (1-\theta)\tilde{l}(e)) \ .$$

و با توجه به خواص تابع f (توابع رتبه‌بندی خطی) داریم:

$$f(\tilde{d}(u,z)) + \theta f(\tilde{l}(e)) \leq f(\tilde{d}(v,z)) + (1-\theta)f(\tilde{l}(e)) \Rightarrow 2\theta f(\tilde{l}(e)) \leq f(\tilde{d}(v,z)) - f(\tilde{d}(u,z))$$
$$+f(\tilde{l}(e)) \Rightarrow \theta \leq \frac{f(\tilde{d}(v,z)) + f(\tilde{l}(e)) - f(\tilde{d}(u,z))}{f(\tilde{l}(e))} \Rightarrow \theta \leq \frac{f(\tilde{d}(v,z)) + \tilde{l}(e)) - \tilde{d}(u,z))}{f(\tilde{l}(e))}$$

بنابر این اگر $\theta \leq \theta_z^e$ و $0 \leq \theta_z^e \leq 1$ رابطه (i) برقرار است و رابطه (ii) نیز بطور مشابه اثبات می‌شود.■

قضیّه ۲.۴ فرض کنید نقطه z نقطه غیر داخلی یال $e \in [u,v]$ باشد و θ_z^e با فرمول (۵.۴) مشخص شده باشد، دراین صورت روابط زیر برقرار است.

۱) اگر $\theta_z^e = 0$ آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(.),z)$ خطی است و روی بازه $[0,1]$ نزولی با شیب $-\tilde{l}(e)$ است.

۲) اگر $\theta_z^e = 1$ آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(.),z)$ خطی است و روی بازه $[0,1]$ صعودی با شیب $\tilde{l}(e)$ است.

۳) اگر $0 \leq \theta_z^e \leq 1$ آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(.),z)$ خطی است و روی بازه $[0,\theta_z^e]$ صعودی با شیب $\tilde{l}(e)$ است و روی بازه $[\theta_z^e,1]$ نزولی با شیب $-\tilde{l}(e)$ است.

تعریف ۳.۴ تابع فازی F در Θ مقعر است اگر و تنها اگر

$$\forall\theta_1,\theta_2 \in \Theta \qquad F(\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) \geq \lambda F(\theta_1) + (1-\lambda)F(\theta_2) \ .$$

قضیّه ۳.۴ تابع $\tilde{d}(x^e(.),z)$ در فاصله $[\circ,\text{۱}]$ مقعر است.

اثبات: نشان می دهیم برای هر $\theta_\text{۱},\theta_\text{۲} \in [\circ,\text{۱}]$ داریم

$$\forall\theta_\text{۱},\theta_\text{۲} \in \Theta \qquad F(\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲}) \geq \lambda F(\theta_\text{۱}) + (\text{۱}-\lambda)F(\theta_\text{۲}) \ .$$

که در اینجا F تابع فاصله است. نشان می دهیم در همه حالت‌های ممکن برای θ_z^e، یعنی $\theta_z^e = \circ$، $\theta_z^e = \text{۱}$ و $\text{۱} > \theta_z^e > \circ$ رابطه فوق برقرار است.

۱) اگر $\theta_z^e = \circ$ آنگاه با توجه به قسمت (ii) قضیّه۱.۴ داریم :

$$\tilde{d}(x^e(\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲}),z) = \tilde{d}(v,z) + (\text{۱} - (\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲}))\tilde{l}(e) \qquad (a)$$

$$\lambda\tilde{d}(x^e(\theta_\text{۱}),z) + (\text{۱}-\lambda)\tilde{d}(x^e(\theta_\text{۲}),z) = \tilde{d}(v,z) + (\lambda(\text{۱}-\theta_\text{۱}) + (\text{۱}-\lambda)(\text{۱}-\theta_\text{۲}))\tilde{l}(e) \ (b)$$

با استفاده از (a) و (b) حکم به آسانی اثبات می‌شود.

۲) اگر $\theta_z^e = \text{۱}$ آنگاه با توجه به قسمت (i) قضیّه۱.۴ داریم :

$$\tilde{d}(x^e(\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲}),z) = \tilde{d}(u,z) + (\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲})\tilde{l}(e) \qquad (c)$$

$$\lambda\tilde{d}(x^e(\theta_\text{۱}),z) + (\text{۱}-\lambda)\tilde{d}(x^e(\theta_\text{۲}),z) = \tilde{d}(u,z) + (\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲})\tilde{l}(e) \qquad (d)$$

مانند حالت اول با استفاده از (c) و (d) حکم نتیجه می‌شود.

۳) اگر $\circ \leq \theta_z^e \leq \text{۱}$ ما سه حالت زیر را بررسی می کنیم .

- اگر $\theta_\text{۱} \leq \theta_z^e$ و $\theta_\text{۲} \leq \theta_z^e$ باشد، برهان مانند حالت $\theta_z^e = \text{۱}$ است .
- اگر $\theta_\text{۱} \geq \theta_z^e$ و $\theta_\text{۲} \geq \theta_z^e$ باشد، برهان مانند حالت $\theta_z^e = \circ$ است .
- اگر $\theta_\text{۱} \leq \theta_z^e$ و $\theta_\text{۲} \geq \theta_z^e$ باشد، حال فرض کنید $\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲} \leq \theta_z^e$ (اگر $\lambda\theta_\text{۱} + (\text{۱}-\lambda)\theta_\text{۲} \geq \theta_z^e$ مشابه همین حالت ثابت می‌شود.)

با استفاده از توابع رتبه‌بندی خطی برای اعداد فازی براحتی نتیجه می‌شود که

$$\tilde{d}(x^e(\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2), z) \geq \lambda\tilde{d}(x^e(\theta_1), z) + (1-\lambda)\tilde{d}(x^e(\theta_2), z)$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$\theta_2 \geq \frac{f(\tilde{d}(v,z) + \tilde{l}(e) - \tilde{d}(u,z))}{2f(\tilde{l}(e))} = \theta_z^e \ .$$

که رابطه‌ای درست است پس حکم برقرار است. لازم به‌ذکر است که با استفاده از قضیّه ۲.۴ این قضیّه نتیجه می‌شود.■

قضیّه ۴.۴ فرض کنید که $N = (V, E, w, \tilde{l})$ یک شبکه با طول‌های فازی باشد آنگاه یک مجموعه رأسی در V وجود دارد که p—میانه مسأله است.

اثبات : در مسأله میانه داریم

$$\min_{x \in N} \sum_{v \in V} w(v)\tilde{d}(x, v) \ .$$

وچون ضرب یک اسکالر مثبت در یک تابع مقعر، یک تابع مقعر را بوجود می‌آورد و جمع توابع مقعر نیز مقعر است و در مجموع، مینیمم هر تابع مقعر در یک فاصله روی ابتدا یا انتهای بازه بدست می‌آید، قضیّه اثبات می‌شود.■

به عنوان مثالی برای اثبات درستی این موضوع، رانندگان تاکسی همیشه می‌خواهند ایستگاههای تاکسی گوشه‌های خیابان‌ها باشد.

مدل مسأله p—میانه با طول‌های فازی بصورت زیر است.

$$\begin{array}{lll}
min\ z = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\tilde{d}_{ij}x_{ij} & \\
s.t. & & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, ..., n \\
& x_{ij} \leq y_j & i = 1, ..., n \ j = 1, ..., n \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = p & \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 & i = 1, ..., n \ j = 1, ..., n \\
& y_j = 0 \vee 1 & j = 1, ..., n
\end{array} \qquad (6.4)$$

که $\tilde{d}_{ij}$ طول کوتاهترین مسیر فازی از رأس i به رأس j می‌باشد.

مثال ۲.۴ :

فرض کنید برای ایجاد ایستگاههای تاکسی در شهر، مکان‌هائی پیشنهاد داده شده است. و خیابان‌های بین دو مکان پیشنهاد شده دارای وزن‌های فازی هستند که نشان دهنده زمان پیمودن خیابان‌ها هستند، و هر خیابان دارای یک درجه عضویت می‌باشد که سطح انجام یک خاصیّت را می‌رساند.
تحت این شرایط به منظور روشن‌تر شدن موضوع فرض کنید G یک گراف شامل سه رأس $v_۱, v_۲, v_۳$ باشد که نشان دهنده سه مکان در یک شهر است و هر جفت از رأس‌ها توسط سه یال به هم وصل می‌شوند که یال‌ها نشان دهنده خیابان‌های بین دو مکان هستند(شکل ۲.۴). اطلاعات مبهمی روی طول جاده و کیفیّت آنها در اختیار است، برای هر یال یک طول فازی و یک مقدار عضویت فازی برای بعضی شرایط کیفی (خوب بودن یک خیابان) وجود دارد. حال می‌خواهیم ۱—میانه مدل فازی بالا را بدست آوریم.
سه حالت زیر را می توانیم بررسی کنیم:

۱) طول هر جاده مشخص است، ولی کیفیت جاده‌ها (خوب بودن یک جاده) بوسیله یک تابع عضویت فازی سنجیده می‌شود.

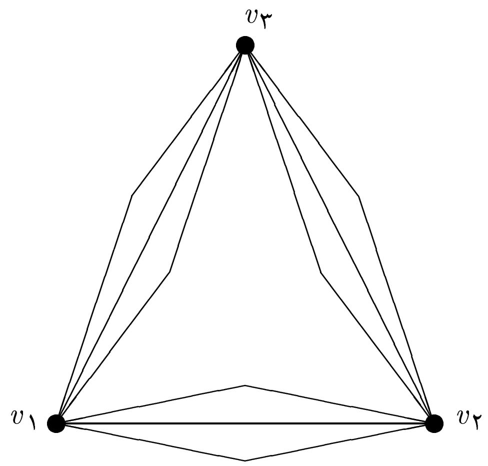
۲) طول هر جاده بوسیله یک عدد فازی مشخص می‌شود، اما همه جاده ها از لحاظ کیفی خوب هستند و تابع عضویت برای همه آنها یک است.

۳) طول هر جاده بوسیله یک عدد فازی مشخص می‌شود، و مجموعه جاده‌های خوب یک مجموعه فازی است.

سه یال که رأس‌های v_i و v_j را به هم پیوند می‌دهد را با e_{ij}^k نشان می‌دهیم که $k = ۱, ۲, ۳$. طول‌های فازی مسیرهای شدنی بین رأس‌ها و درجه عضویت برای کیفیّت جاده‌ها و مقادیر مشابه برای اندیس سوم یاگر در جدول ۳.۴ آمده است.
سطح همبندی گراف طبق تعریف ۲٦.۲ بصورت $C(G) = ۰/۷۵$ می‌باشد. با استفاده از α—برش‌های

	vertex 2				vertex 3			
	path	length	strength	index	path	length	strength	index
	$e^{۱}_{۱۲}$	(۱/۵, ۲, ۲/۵)	۰/۲۵	۲/۰۰۰	$e^{۱}_{۱۳}$	(۱, ۲, ۳)	۰/۲۵	۲/۰۰۰
	$e^{۲}_{۱۲}$	(۳, ۴, ۵)	۰/۵۰	۴/۰۰۰	$e^{۲}_{۱۳}$	(۴/۵, ۵, ٦)	۰/۵۰	۵/۱۲۵
v	$e^{۳}_{۱۲}$	(۴, ٦, ۸)	۰/۷۵	٦/۰۰۰	$e^{۳}_{۱۳}$	(٦, ۷, ۸)	۰/۷۵	۷/۰۰۰
e	$e^{۱}_{۱۳}, e^{۱}_{۳۲}$	(۳, ۵, ٦/۵)	۰/۲۵	۴/۸۷۵	$e^{۱}_{۱۲}, e^{۱}_{۲۳}$	(۳/۵, ۵, ٦)	۰/۲۵	۴/۸۷۵
r	$e^{۱}_{۱۳}, e^{۲}_{۳۲}$	(۴/۵, ٦, ۸)	۰/۲۵	٦/۱۲۵	$e^{۱}_{۱۲}, e^{۲}_{۲۳}$	(۵, ٦, ۷)	۰/۲۵	٦/۰۰۰
t	$e^{۱}_{۱۳}, e^{۳}_{۳۲}$	(۷, ۹, ۱۱)	۰/۲۵	۹/۰۰۰	$e^{۱}_{۱۲}, e^{۳}_{۲۳}$	(۷/۵, ۹, ۱۰/۵)	۰/۲۵	۹/۰۰۰
e	$e^{۲}_{۱۳}, e^{۱}_{۳۲}$	(٦/۵, ۸, ۹/۵)	۰/۵۰	۸/۰۰۰	$e^{۲}_{۱۲}, e^{۱}_{۲۳}$	(۵, ۷, ۸/۵)	۰/۵۰	٦/۸۷۵
x	$e^{۲}_{۱۳}, e^{۲}_{۳۲}$	(۸, ۹, ۱۱)	۰/۲۵	۹/۲۵۰	$e^{۲}_{۱۲}, e^{۲}_{۲۳}$	(٦/۵, ۸, ۱۰)	۰/۲۵	۸/٦۲۵
	$e^{۲}_{۱۳}, e^{۳}_{۳۲}$	(۱۰/۵, ۱۲, ۱۴)	۰/۵۰	۱۲/۱۲۵	$e^{۲}_{۱۲}, e^{۳}_{۲۳}$	(۹, ۱۱, ۱۴)	۰/۵۰	۱۱/۲۵۰
1	$e^{۳}_{۱۳}, e^{۱}_{۳۲}$	(۸, ۱۰, ۱۱/۵)	۰/۵۰	۹/۸۷۵	$e^{۳}_{۱۲}, e^{۱}_{۲۳}$	(٦, ۹, ۱۱/۵)	۰/۵۰	۸/۸۷۵
	$e^{۳}_{۱۳}, e^{۲}_{۳۲}$	(۹/۵, ۱۱, ۱۳)	۰/۲۵	۱۱/۱۲۵	$e^{۳}_{۱۲}, e^{۲}_{۲۳}$	(۷/۵, ۱۰, ۱۳)	۰/۲۵	۱۰/۱۲۵
	$e^{۳}_{۱۳}, e^{۳}_{۳۲}$	(۱۲, ۱۴, ۱٦)	۰/۷۵	۱۴/۰۰۰	$e^{۳}_{۱۲}, e^{۳}_{۲۳}$	(۱۰, ۱۳, ۱٦)	۰/۷۵	۱۳/۰۰۰
					$e^{۱}_{۲۳}$	(۲, ۳, ۳/۵)	۰/۵۰	۲/۸۷۵
					$e^{۲}_{۲۳}$	(۳/۵, ۴, ۵)	۰/۲۵	۴/۱۲۵
v					$e^{۳}_{۲۳}$	(٦, ۷, ۸)	۰/۷۵	۷/۰۰۰
e					$e^{۱}_{۲۱}, e^{۱}_{۱۳}$	(۲/۵, ۴, ۵/۵)	۰/۲۵	۴/۰۰۰
r					$e^{۱}_{۲۱}, e^{۲}_{۱۳}$	(٦, ۷, ۸/۵)	۰/۲۵	۷/۱۲۵
t					$e^{۱}_{۲۱}, e^{۳}_{۱۳}$	(۷/۵, ۹, ۱۰/۵)	۰/۲۵	۹/۰۰۰
e					$e^{۲}_{۲۱}, e^{۱}_{۱۳}$	(۴, ٦, ۸)	۰/۲۵	٦/۰۰۰
x					$e^{۲}_{۲۱}, e^{۲}_{۱۳}$	(۷/۵, ۹, ۱۱)	۰/۵۰	۹/۱۲۵
					$e^{۲}_{۲۱}, e^{۳}_{۱۳}$	(۹, ۱۱, ۱۳)	۰/۵۰	۱۱/۰۰۰
2					$e^{۳}_{۲۱}, e^{۱}_{۱۳}$	(۵, ۸, ۱۱)	۰/۲۵	۸/۰۰۰
					$e^{۳}_{۲۱}, e^{۲}_{۱۳}$	(۸/۵, ۱۱, ۱۴)	۰/۵۰	۱۱/۱۲۵
					$e^{۳}_{۲۱}, e^{۳}_{۱۳}$	(۱۰, ۱۳, ۱٦)	۰/۷۵	۱۳/۰۰۰

جدول ۳.۴: داده‌های مثال ۱.۴



شکل ۲.۴: f—گراف G برای مثال ۱.۴

زیر گراف‌های قطعی مختلفی بدست می‌آید، که یک روش ممکن، حل مسأله میانه برای این α— برش‌ها می‌باشد

$$[0, 0/25] \quad , \quad (0/25, 0/5] \quad , \quad (0/5, 0/75] .$$

توجه کنید که این برش‌ها مسأله‌های قطعی میانه نیستند زیرا برای هر برش ما یک گراف قطعی با طول‌های فازی داریم. برای $\alpha \in [0, 0/25]$ و با استفاده از جدول ۳.۴ مسأله میانه بصورت زیر نوشته می‌شود که یک مدل قطعی است

$$\begin{aligned}
min\ z = \ & 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{21} + 2/875x_{23} + 2x_{31} + 2/875x_{32} \\
s.t. \ & \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., 3 \\
& x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1, ..., 3 \ j = 1, ..., 3 \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{3} y_j = 1 \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 \qquad i = 1, ..., 3 \ j = 1, ..., 3 \\
& y_j = 0 \vee 1 \qquad j = 1, ..., 3 .
\end{aligned} \tag{7.4}$$

بعد از حل مسأله برای $\alpha \in [0, 0/25]$ رأس v_1 با هزینه $z = 4$ میانه است.

برای $\alpha \in (۰/۲۵, ۰/۵۰]$ و با استفاده از جدول ۳.۴ مسأله میانه بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
min\ z = \quad & ۴x_{۱۲} + ۵/۱۲۵x_{۱۳} + ۴x_{۲۱} + ۲/۸۷۵x_{۲۳} + ۵/۱۲۵x_{۳۱} + ۲/۸۷۵x_{۳۲} \\
s.t. \quad & \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{۳} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱, ..., ۳ \\
& x_{ij} \leq y_j \qquad i = ۱, ..., ۳\ j = ۱, ..., ۳ \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{۳} y_j = ۱ \\
& x_{ij} = ۰ \vee ۱ \qquad i = ۱, ..., ۳\ j = ۱, ..., ۳ \\
& y_j = ۰ \vee ۱ \qquad j = ۱, ..., ۳\ .
\end{aligned} \tag{۸.۴}$$

بعد از حل مسأله برای $\alpha \in (۰/۲۵, ۰/۵۰]$ رأس $v_۲$ با هزینه $z = ۶/۸۷۵$ میانه است. برای $\alpha \in (۰/۵, ۰/۷۵]$ و با استفاده از جدول ۳.۴ مسأله میانه بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
min\ z = \quad & ٦x_{۱۲} + ۷x_{۱۳} + ٦x_{۲۱} + ۷x_{۲۳} + ۷x_{۳۱} + ۷x_{۳۲} \\
s.t. \quad & \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{۳} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱, ..., ۳ \\
& x_{ij} \leq y_j \qquad i = ۱, ..., ۳\ j = ۱, ..., ۳ \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{۳} y_j = ۱ \\
& x_{ij} = ۰ \vee ۱ \qquad i = ۱, ..., ۳\ j = ۱, ..., ۳ \\
& y_j = ۰ \vee ۱ \qquad j = ۱, ..., ۳\ .
\end{aligned} \tag{۹.۴}$$

بعد از حل مسأله برای $\alpha \in (۰/۵, ۰/۷۵]$ یال $[v_۱, v_۲]$ با هزینه $z = ۱۳$ میانه است. بنابراین مجموعه جواب مسأله بصورت $\{\frac{v_۱}{۰/۲۵}, \frac{v_۲}{۰/۵}, \frac{[v_۱, v_۲]}{۰/۷۵}\}$ می‌باشد.

۳.۴ مسأله p—مرکز در شبکه‌های فازی

در این بخش ما به تشریح روش حل مسأله p—مرکز فازی روی شبکه‌های $N = (V, E, \tilde{w}, l)$ و $N = (V, E, w, \tilde{l})$ می‌پردازیم. فرض کنید V مجموعه رأس‌های شبکه باشد و S مجموعه‌ای از نقاط شبکه باشد که p وسیله در آن نقاط قرار می‌گیرند، که در اینجا فرض می‌کنیم $S = V$ باشد. d_{ij} را طول کوتاهترین مسیر بین v_i و v_j تعریف می‌کنیم و w_i وزن اختصاص داده شده به رأس v_i باشد.

مدل برنامه ریزی عدد صحیح مسأله p—مرکز می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$
\begin{aligned}
\min\ & \rho \\
s.t.\ & \\
& \textstyle\sum_{v_j \in S} x_{ij} = ۱ && \forall\ \ v_i \in V \\
& \textstyle\sum_{j \in S} y_j \le p && \\
& \textstyle\sum_{j \in S} w_i d_{ij} x_{ij} \le \rho && \forall\ \ v_i \in V \\
& x_{ij} \le y_j && \forall\ \ v_i \in V, v_j \in S \\
& x_{ij}, y_j \in \{۰, ۱\} && \forall\ \ v_i \in V, v_j \in S\ .
\end{aligned}
\qquad (۱۰.۴)
$$

در فرمول فوق متغیرهای x_{ij} و y_j بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر تقاضای راس } i \text{ بوسیله راس } j \text{ پوشش داده شود} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}
$$

$$
y_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مکان } j \text{ بعنوان مکان سرویس دهنده انتخاب شود} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}
$$

و با مینیمم گرفتن روی ρ مقدار p—شعاع شبکه مشخص می‌شود. در مدل فوق زمانی که وزن رأس‌ها یا وزن یال‌ها غیر دقیق و مبهم باشند مسأله IP به یک مسأله $FILP$ تبدیل می شود.

یکی دیگر از روش های حل مسأله p—مرکز وقتی که $|V|$ عدد بزرگی نیست، استفاده از روش‌های

شمارشی است. در این روش تمامی زیر مجموعه های pتائی مجموعه V را بصورت $\{C_۱, C_۲, ..., C_m \;;\; m = \binom{n}{p}\}$ مشخص می‌کنیم. حال ماتریس $\Delta = (\delta_{ij})_{m*n}$ بصورت زیر بدست می آوریم.

$$\delta_{ij} = d(v_i, C_j) = \min_{u \in C_j} d(v_i, u)$$

برای هر ستون ماتریس Δ، ماکسیمم مقدار $\delta_{ij}w_i$ را بدست می آوریم و بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$M_j = \max_{۱ \leq i \leq n} \delta_{ij}w_i$$

برای بدست آوردن p—شعاع کافی است کمترین مقدار را در میان M_j ها پیدا کنیم و C_j مربوط به M_j نیز p—مرکز مسأله را مشخص می‌کند. بنابراین برای بدست آوردن p—مرکز روی شبکه‌ها با تعداد رأس‌های کوچک می‌توان الگوریتم زیر را بکار برد[٧٠].

الگوریتم:

ورودی: مجموعه رأس‌های V، ماتریس $D = (d_{ij})_{n*n}$، $n = |V|$ و تعداد وسیله‌ها(p).

خروجی: p—مرکز و p—شعاع شبکه

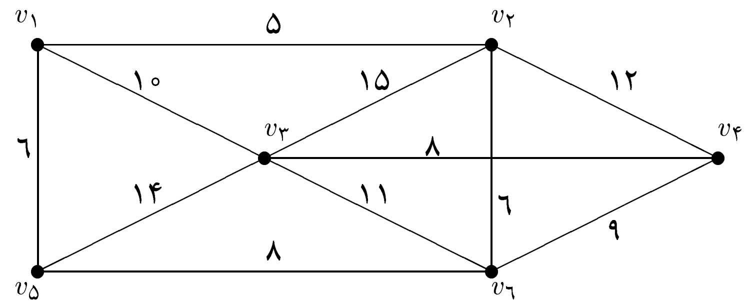
مرحله ۱: همه زیر مجموعه‌های pتائی از مجموعه V را با مجموعه‌های $\{C_۱, C_۲, ..., C_m \;;\; m = \binom{n}{p}\}$ مشخص کنید.

مرحله ۲: ماتریس $\Delta = (\delta_{ij})_{m*n}$ را تشکیل دهید، بطوریکه

$$\delta_{ij} = d(v_i, C_j) = \min_{u \in C_j} d(v_i, u)$$

مرحله ۳: برای $j = \{۱, ..., m\}$ پیدا کن

$$M_j = \max_{۱ \leq i \leq n} \{\delta_{ij}w_i\}$$



شکل ۳.۴: شبکه G

مرحله ۴: پیدا کن M_k را بطوریکه

$$M_k = \min_{1 \leq j \leq m} \{M_j\}$$

M_k، p—شعاع شبکه است.

مرحله ۵: پیدا کن C_j^* را بطوریکه

$$M_k = \max_{1 \leq i \leq n} \{\delta_{ij} w_i\}$$

C_j^*، p—مرکز شبکه است.

در ادامه با ارائه مثالی p—مرکز را در شبکه با وزن‌ها و یال‌های فازی بررسی می‌کنیم. بنابراین فرض کنید یک شبکه با $n = ٦$ رأس در اختیار داریم (شکل ۲.۴) و می‌خواهیم ۲—مرکز را روی این شبکه مشخص کنیم[۷۰].

۱.۳.۴ مسأله P—مرکز با وزن‌های فازی

در این مسائل ما شبکه‌هائی را بررسی می‌کنیم که وزن رأس‌های آن اعدادی فازی هستند که در این بخش با استفاده از شکل ۳.۴ به بررسی این مسائل وقتی که وزن رأس‌ها اعداد فاصله‌ای یا اعداد فازی مثلثی هستند می‌پردازیم. ماتریس فاصله مربوط به شکل ۳.۴ در جدول ۴.۴ آمده است.

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	۰	۵	۱۰	۱۷	۶	۱۱
v_2	۵	۰	۱۱	۱۲	۱۱	۶
v_3	۱۰	۱۱	۰	۸	۱۴	۱۵
v_4	۱۷	۱۲	۸	۰	۱۷	۹
v_5	۶	۱۱	۱۴	۱۷	۰	۸
v_6	۱۱	۶	۱۵	۹	۸	۰

جدول ۴.۴: ماتریس فاصله شبکه G

v_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
v_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
v_2	۰	۵	۵	۵	۵	۰	۰	۰	۰	۱۱	۱۱	۶	۱۱	۶	۶
v_3	۱۰	۰	۸	۱۰	۱۰	۰	۸	۱۱	۱۱	۰	۰	۰	۸	۸	۱۴
v_4	۱۲	۸	۰	۱۷	۹	۸	۰	۱۲	۹	۰	۸	۸	۰	۰	۹
v_5	۶	۶	۶	۰	۶	۱۱	۱۱	۰	۸	۱۴	۰	۸	۰	۸	۰
v_6	۶	۱۱	۹	۸	۰	۶	۶	۶	۰	۹	۸	۰	۸	۰	۰

جدول ۵.۴: Δ−ماتریس شبکه G

حال تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی مجموعه رأس‌های V را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C_1 = \{1,2\},\ \ C_2 = \{1,3\},\ \ C_3 = \{1,4\},\ \ & C_4 = \{1,5\},\ \ C_5 = \{1,6\}, \\ C_6 = \{2,3\},\ \ C_7 = \{2,4\},\ \ & C_8 = \{2,5\},\ \ C_9 = \{2,6\}, \\ C_{10} = \{3,4\},\ \ & C_{11} = \{3,5\},\ \ C_{12} = \{3,6\}, \\ & C_{13} = \{4,5\},\ \ C_{14} = \{4,6\}, \\ & C_{15} = \{5,6\}. \end{aligned}$$

سپس ماتریس $\Delta = (\delta_{ij})_{6\times 15}$ را بدست می‌آوریم (جدول ۵.۴). بنابراین دو حالت را برای شبکه با رأس‌های فازی در نظر می‌گیریم.

v_i	$w_i\delta_{i1}$	$w_i\delta_{i2}$	$w_i\delta_{i3}$	$w_i\delta_{i4}$	$w_i\delta_{i5}$	w_i
۱	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱, ۱⟩
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۲/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵⟩
۴	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۴۴, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۳/۵, ۸/۵⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۱۸, ۶⟩	⟨۱۸, ۶⟩	⟨۱۸, ۶⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۸, ۶⟩	⟨۳, ۱⟩
۶	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۴۹/۵, ۵/۵⟩	⟨۴۰/۵, ۴/۵⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴/۵, ۰/۵⟩
M_j	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	⟨۴۹/۵, ۵/۵⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	⟨۱۰۵, ۱۵⟩	

v_i	$w_i\delta_{i6}$	$w_i\delta_{i7}$	$w_i\delta_{i8}$	$w_i\delta_{i9}$	$w_i\delta_{i10}$	w_i
۱	⟨۵۵, ۵⟩	⟨۵۵, ۵⟩	⟨۵۵, ۵⟩	⟨۵۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۱۱, ۱⟩
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷/۵, ۵/۵⟩	⟨۲/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵⟩
۴	⟨۴۴, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۳۳, ۱۱⟩	⟨۳۳, ۱۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸⟩	⟨۴۲, ۱۴⟩	⟨۳, ۱⟩
۶	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴۰/۵, ۴/۵⟩	⟨۴/۵, ۰/۵⟩
M_j	⟨۵۵, ۵⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	

v_i	$w_i\delta_{i11}$	$w_i\delta_{i12}$	$w_i\delta_{i13}$	$w_i\delta_{i14}$	$w_i\delta_{i15}$	w_i
۱	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۱۱, ۱⟩
۲	⟨۲۷/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۵, ۳⟩	⟨۲۷/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۵, ۳⟩	⟨۱۵, ۳⟩	⟨۲/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۴۷, ۲۱⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵⟩
۴	⟨۴۴, ۴⟩	⟨۴۴, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳, ۱⟩
۶	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴/۵, ۰/۵⟩
M_j	⟨۶۶, ۶⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۸۴, ۱۲⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۱۴۷, ۲۱⟩	

جدول ۶.۴: ماتریس $w_i(\delta_{ij})$ شبکه G وقتی که وزن رأس‌ها اعداد فاصله‌ای باشند.

۱) وزن رأس‌ها اعدادی روی یک فاصله هستند:

بنابراین برای شکل ۳.۴ وزن رأس‌ها بصورت زیر است و مقادیر $\delta_{ij}w_i$ در جدول ۶.۴ آمده است.

$$w_1 = \langle ۱۱, ۱\rangle \quad , w_2 = \langle ۲/۵, ۰/۵\rangle \quad , w_3 = \langle ۱۰/۵, ۱/۵\rangle \quad , w_4 = \langle ۵/۵, ۰/۵\rangle \quad , w_5 = \langle ۳, ۱\rangle \quad , w_6 = \langle ۴/۵, ۰/۵\rangle$$

v_i	$w_i\delta_{i۱}$	$w_i\delta_{i۲}$	$w_i\delta_{i۳}$	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۱, ۰/۵⟩
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۲/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵, ۱⟩
۴	⟨۶۶, ۶, ۶⟩	⟨۴۴, ۴, ۴⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۱۸, ۶, ۳⟩	⟨۱۸, ۶, ۳⟩	⟨۱۸, ۶, ۳⟩	⟨۳, ۱, ۰/۵⟩
۶	⟨۲۷, ۳, ۶⟩	⟨۴۹/۵, ۵/۵, ۱۱⟩	⟨۴۰/۵, ۴/۵, ۹⟩	⟨۴/۵, ۰/۵, ۱⟩
M_j	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۴۹/۵, ۵/۵, ۱۱⟩	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	

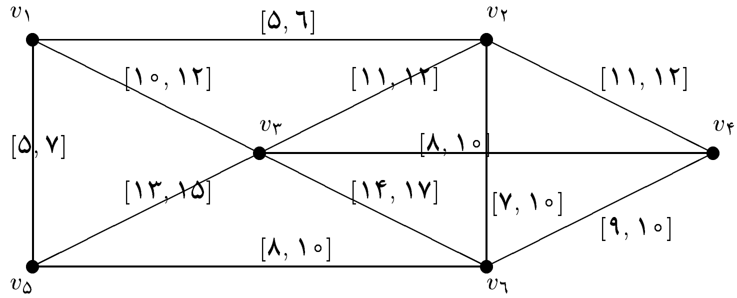
v_i	$w_i\delta_{i۴}$	$w_i\delta_{i۵}$	$w_i\delta_{i۶}$	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵۷/۵, ۵, ۲/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۱, ۰/۵⟩
۲	⟨۱۲/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۱۲/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵, ۱⟩
۴	⟨۹۳/۵, ۸/۵, ۸/۵⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۴۴, ۴, ۴⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۸, ۶, ۳⟩	⟨۳۳, ۱۱, ۵/۵⟩	⟨۳, ۱, ۰/۵⟩
۶	⟨۳۶, ۴, ۸⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳, ۶⟩	⟨۴/۵, ۰/۵, ۱⟩
M_j	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۱۰۵, ۱۵, ۱۰⟩	⟨۵۷/۵, ۵, ۲/۵⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۷}$	$w_i\delta_{i۸}$	$w_i\delta_{i۹}$	w_i
۱	⟨۵۷/۵, ۵, ۲/۵⟩	⟨۵۷/۵, ۵, ۲/۵⟩	⟨۵۷/۵, ۵, ۲/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۱, ۰/۵⟩
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵, ۱۱⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵, ۱۱⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵, ۱⟩
۴	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۶۶, ۶, ۶⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۳۳, ۱۱, ۵/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸, ۴⟩	⟨۳, ۱, ۰/۵⟩
۶	⟨۲۷, ۳, ۶⟩	⟨۲۷, ۳, ۶⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴/۵, ۰/۵, ۱⟩
M_j	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵, ۱۱⟩	⟨۱۱۵/۵, ۱۶/۵, ۱۱⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۱۰}$	$w_i\delta_{i۱۱}$	$w_i\delta_{i۱۲}$	w_i
۱	⟨۱۱۵, ۱۰, ۵⟩	⟨۶۹, ۶, ۳⟩	⟨۱۱۵, ۱۰, ۵⟩	⟨۱۱/۵, ۱, ۰/۵⟩
۲	⟨۲۷/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۲۷/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۵, ۳, ۳⟩	⟨۲/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵, ۱⟩
۴	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴۴, ۴, ۴⟩	⟨۴۴, ۴, ۴⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۴۲, ۱۴, ۷⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸, ۴⟩	⟨۳, ۱, ۰/۵⟩
۶	⟨۴۰/۵, ۴/۵, ۹⟩	⟨۳۶, ۴, ۸⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴/۵, ۰/۵, ۱⟩
M_j	⟨۱۱۵, ۱۰, ۵⟩	⟨۶۹, ۶, ۳⟩	⟨۱۱۵, ۱۰, ۵⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۱۳}$	$w_i\delta_{i۱۴}$	$w_i\delta_{i۱۵}$	w_i
۱	⟨۶۹, ۶, ۳⟩	⟨۱۲۶/۵, ۱۱, ۵/۵⟩	⟨۶۹, ۶, ۳⟩	⟨۱۱/۵, ۱, ۰/۵⟩
۲	⟨۲۷/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۵, ۳, ۳⟩	⟨۱۵, ۳, ۳⟩	⟨۲/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۳	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۱۴۷, ۲۱, ۱۴⟩	⟨۱۰/۵, ۱/۵, ۱⟩
۴	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴۹/۵, ۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩
۵	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۴, ۸, ۴⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۳, ۱, ۰/۵⟩
۶	⟨۳۶, ۴, ۸⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴/۵, ۰/۵, ۱⟩
M_j	⟨۸۴, ۱۲, ۸⟩	⟨۱۲۶/۵, ۱۱, ۵/۵⟩	⟨۱۴۷, ۲۱, ۱۴⟩	

جدول ۷.۴: ماتریس $w_i(\delta_{ij})$ شبکه G وقتی که وزن رأس‌ها اعداد فازی مثلثی باشند.



شکل ۴.۴: شبکه G'

بنابراین ۲−شعاع و ۲−مرکز شبکه G وقتی وزن رأس‌ها اعداد فاصله‌ای هستند بصورت زیر است

$$C_۲ = \{۱, ۳\} \qquad M_k = \min_{۱\leq j\leq ۱۵} M_j = \langle ۴۹/۵, ۵/۵\rangle \ .$$

۲) وزن رأس‌ها اعداد فازی مثلثی هستند:

بنابر این برای گراف G در شکل ۳.۴ وزن رأس‌ها بصورت زیر است و مقادیر $\delta_{ij}w_i$ در جدول ۷.۴ آمده است

$$w_۱ = \langle ۱۱/۵, ۱, ۰/۵\rangle \quad , w_۲ = \langle ۲/۵, ۰/۵, ۰/۵\rangle \quad , w_۳ = \langle ۱۰/۵, ۱/۵, ۱\rangle,$$
$$w_۴ = \langle ۵/۵, ۰/۵, ۰/۵\rangle \quad , w_۵ = \langle ۳, ۱, ۰/۵\rangle \quad , w_۶ = \langle ۴/۵, ۰/۵, ۱\rangle \ .$$

بنابراین ۲−شعاع و ۲−مرکز شبکه G وقتی وزن رأس‌ها اعداد فازی مثلثی هستند با توجه به ۷.۴ بصورت زیر است

$$C_۲ = \{۱, ۳\} \qquad M_k = \min_{۱\leq j\leq ۱۵} M_j = \langle ۴۹/۵, ۵/۵, ۱۱\rangle \ .$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	w_i
v_1	[۰, ۰]	[۵, ۶]	[۱۰, ۱۲]	[۱۶, ۱۸]	[۵, ۷]	[۱۲, ۱۶]	۱۱
v_2	[۵, ۶]	[۰, ۰]	[۱۱, ۱۲]	[۱۱, ۱۲]	[۱۰, ۱۳]	[۷, ۱۰]	۳
v_3	[۱۰, ۱۲]	[۱۱, ۱۲]	[۰, ۰]	[۸, ۱۰]	[۱۳, ۱۵]	[۱۴, ۱۷]	۱۰
v_4	[۱۶, ۱۸]	[۱۱, ۱۲]	[۸, ۱۰]	[۰, ۰]	[۱۷, ۲۰]	[۹, ۱۰]	۵
v_5	[۵, ۷]	[۱۰, ۱۳]	[۱۳, ۱۵]	[۱۷, ۲۰]	[۰, ۰]	[۸, ۱۰]	۳
v_6	[۱۲, ۱۶]	[۷, ۱۰]	[۱۴, ۱۷]	[۹, ۱۰]	[۸, ۱۰]	[۰, ۰]	۴
v_1	⟨۰, ۰⟩	⟨۵٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۱۷, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۴, ۲⟩	۱۱
v_2	⟨۵٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۱۱٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۱۱٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۸٫۵, ۱٫۵⟩	۳
v_3	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۱۱٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۴, ۱⟩	⟨۱۵٫۵, ۱٫۵⟩	۱۰
v_4	⟨۱۷, ۱⟩	⟨۱۱٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۸٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۹٫۵, ۰٫۵⟩	۵
v_5	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۱٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۱۴, ۱⟩	⟨۱۸٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	۳
v_6	⟨۱۴, ۲⟩	⟨۸٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۱۵٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۹٫۵, ۰٫۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	۴

جدول ۸.۴: ماتریس فاصله شبکه G'

۲.۳.۴ مسأله p—مرکز با یال‌های فازی

در این قسمت ما شبکه‌هائی را بررسی می‌کنیم که وزن یال‌هااعداد فازی هستند و با استفاده از شکل‌های ۴.۴ و ۵.۴ به بررسی این مسائل وقتی که وزن رأس‌ها اعداد فاصله‌ای یا اعداد فازی مثلثی هستند می‌پردازیم .

۱) وزن یال‌ها اعدادی روی یک فاصله هستند:

ماتریس فاصله مربوط به این حالت برای شکل ۴.۴ در جدول ۸.۴ آمده است.

با استفاده از ماتریس فاصله، ماتریس $\Delta = (\delta_{ij})_{6\times 15}$ را وقتی که تصمیم گیرنده دید خوش‌بینانه و دید بدبینانه دارد بدست می آوریم(جدول ۱۲.۴ و ۱۳.۴).

v_i	$w_i\delta_{i۱}$	$w_i\delta_{i۲}$	$w_i\delta_{i۳}$	$w_i\delta_{i۴}$	$w_i\delta_{i۵}$	w_i
۱	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵⟩	۳
۳	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	۱۰
۴	⟨۵۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۸۵, ۵⟩	⟨۴۷/۵, ۲/۵⟩	۵
۵	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۸, ۳⟩	۳
۶	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۵۶, ۸⟩	⟨۳۸, ۲⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	۴
M_j	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۵۶, ۸⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۶}$	$w_i\delta_{i۷}$	$w_i\delta_{i۸}$	$w_i\delta_{i۹}$	$w_i\delta_{i۱۰}$	w_i
۱	⟨۶۰/۵, ۵/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۴/۵, ۱/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۵۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۴۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۵
۵	⟨۳۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۳۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۴۲, ۳⟩	۳
۶	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۸, ۲⟩	۴
M_j	⟨۶۰/۵, ۵/۵⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۱۱}$	$w_i\delta_{i۱۲}$	$w_i\delta_{i۱۳}$	$w_i\delta_{i۱۴}$	$w_i\delta_{i۱۵}$	w_i
۱	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۵۴, ۲۲⟩	⟨۶۶, ۱۱⟩	۱۱
۲	⟨۳۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۲۵/۵, ۴/۵⟩	⟨۳۴/۵, ۴/۵⟩	⟨۲۵/۵, ۴/۵⟩	⟨۲۵/۵, ۴/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۴۰, ۱۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴۷/۵, ۲/۵⟩	۵
۵	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۴
M_j	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۵۴, ۲۲⟩	⟨۱۴۰, ۱۰⟩	

جدول ۹.۴: ماتریس $w_i(\delta ij)_{۶\times ۱۵}$ شبکه G' از دید خوش‌بینانه

بنابراین ۲–شعاع و ۲–مرکز شکل ۴.۴ از دید خوش‌بینانه تصمیم گیرنده، با توجه به ماتریس $w_i(\delta ij)_{۶\times ۱۵}$ (جدول ۹.۴) بصورت زیر است

$$C_۲ = \{۱, ۳\} \qquad M_k = \min_{۱\leq j\leq ۱۵} M_j = \langle ۵۶, ۸\rangle \ .$$

v_i	$w_i\delta_{i۱}$	$w_i\delta_{i۲}$	$w_i\delta_{i۳}$	$w_i\delta_{i۴}$	$w_i\delta_{i۵}$	w_i
۱	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۶٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۱۶٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۱۶٫۵, ۱٫۵⟩	⟨۱۶٫۵, ۱٫۵⟩	۳
۳	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	۱۰
۴	⟨۵۷٫۵, ۲٫۵⟩	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۸۵, ۵⟩	⟨۴۷٫۵, ۲٫۵⟩	۵
۵	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۱۸, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۸, ۳⟩	۳
۶	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۵۶, ۸⟩	⟨۳۸, ۲⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	۴
M_j	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۵۶, ۸⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۰, ۱۰⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۶}$	$w_i\delta_{i۷}$	$w_i\delta_{i۸}$	$w_i\delta_{i۹}$	$w_i\delta_{i۱۰}$	w_i
۱	⟨۶۰٫۵, ۵٫۵⟩	⟨۶۰٫۵, ۵٫۵⟩	⟨۶۰٫۵, ۵٫۵⟩	⟨۶۰٫۵, ۵٫۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۴٫۵, ۱٫۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۵۷٫۵, ۲٫۵⟩	⟨۴۷٫۵, ۲٫۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۵
۵	⟨۳۴٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۳۴٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۴۲, ۳⟩	۳
۶	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۳۴, ۶⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۸, ۲⟩	۴
M_j	⟨۶۰٫۵, ۵٫۵⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۵, ۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۱۱}$	$w_i\delta_{i۱۲}$	$w_i\delta_{i۱۳}$	$w_i\delta_{i۱۴}$	$w_i\delta_{i۱۵}$	w_i
۱	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۵۴, ۲۲⟩	⟨۶۶, ۱۱⟩	۱۱
۲	⟨۳۴٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۲۵٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۳۴٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۲۵٫۵, ۴٫۵⟩	⟨۲۵٫۵, ۴٫۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۴۰, ۱۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۴۵, ۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۴۷٫۵, ۲٫۵⟩	۵
۵	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳⟩	⟨۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۳۶, ۴⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۴
M_j	⟨۶۶, ۱۱⟩	⟨۱۲۱, ۱۱⟩	⟨۹۰, ۱۰⟩	⟨۱۵۴, ۲۲⟩	⟨۱۴۰, ۱۰⟩	

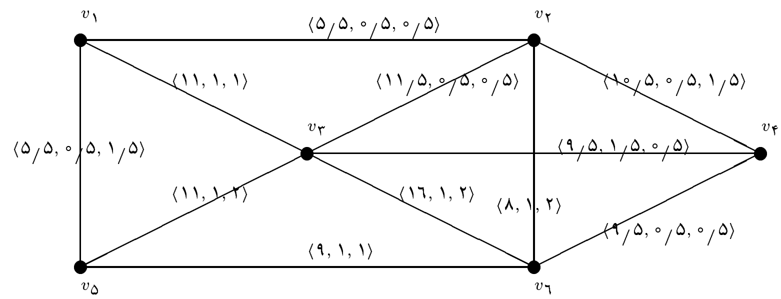
جدول ۴.۱۰: ماتریس $w_i(\delta ij)_{۶\times ۱۵}$ شبکه G' از دید بدبینانه

و از دید بدبینانه تصمیم گیرنده طبق جدول ۴.۱۰، ۲–شعاع و ۲–مرکز شکل ۴.۴ بصورت زیر می‌باشد

$$C_۲ = \{۱, ۳\} \qquad M_k = \min_{۱\leq j\leq ۱۵} M_j = \langle ۵۶, ۸\rangle \ .$$

۲) وزن یال‌ها اعداد فازی مثلثی هستند:

اگر وزن یال‌ها اعداد فازی مثلثی باشند (شبکه G'' در شکل ۴.۵)، آنگاه ماتریس فاصله شبکه توسط



شکل ۵.۴: شبکه G''

v_i	$v_۱$	$v_۲$	$v_۳$	w_i
$v_۱$	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	۱۱
$v_۲$	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	۳
$v_۳$	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۱۰
$v_۴$	⟨۱۶, ۱, ۲⟩	⟨۱۰/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	۵
$v_۵$	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	۳
$v_۶$	⟨۱۳/۵, ۱/۵, ۲/۵⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	⟨۱۶, ۱, ۲⟩	۴
v_i	$v_۴$	$v_۵$	$v_۶$	w_i
$v_۱$	⟨۱۶, ۱, ۲⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۳/۵, ۱/۵, ۲/۵⟩	۱۱
$v_۲$	⟨۱۰/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	۳
$v_۳$	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۱۶, ۱, ۲⟩	۱۰
$v_۴$	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۸/۵, ۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	۵
$v_۵$	⟨۱۸/۵, ۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	۳
$v_۶$	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۴

جدول ۱۱.۴: ماتریس فاصله شبکه G''

جدول ۱۱.۴ مشخص می‌شود و از این ماتریس، Δ–ماتریس (جدول ۱۴.۴) و ماتریس $w_i(\delta ij)$ (جدول ۱۵.۴) بدست می‌آید. بنابراین با توجه به جدول(۱۵.۴) ۲–شعاع و ۲–مرکز شبکه G'' بصورت زیر است

$$C_۲ = \{۱, ۳\} \qquad M_k = \min_{۱\leq j\leq ۱۵} M_j = \langle ۵۶, ۸\rangle \ .$$

v_i	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	w_i
۱	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	۱۰
۴	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۷, ۱⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۵
۵	⟨۶, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۶, ۱⟩	۳
۶	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۴, ۲⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	۴

v_i	$C_۶$	$C_۷$	$C_۸$	$C_۹$	$C_{۱۰}$	w_i
۱	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۵
۵	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۴, ۱⟩	۳
۶	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۴

v_i	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	$C_{۱۳}$	$C_{۱۴}$	$C_{۱۵}$	w_i
۱	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۴, ۲⟩	⟨۶, ۱⟩	۱۱
۲	⟨۱۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۴, ۱⟩	۱۰
۴	⟨۹, ۱⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۵
۵	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۴

جدول ۱۲.۴: Δ–ماتریس شبکه G' از دید خوش‌بینانه

v_i	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	w_i
۱	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	۱۰
۴	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۷, ۱⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۵
۵	⟨۶, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۶, ۱⟩	۳
۶	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۴, ۲⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	۴

v_i	$C_۶$	$C_۷$	$C_۸$	$C_۹$	$C_{۱۰}$	w_i
۱	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	۵
۵	⟨۱۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۱/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۴, ۱⟩	۳
۶	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۴

v_i	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	$C_{۱۳}$	$C_{۱۴}$	$C_{۱۵}$	w_i
۱	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۱, ۱⟩	⟨۶, ۱⟩	⟨۱۴, ۲⟩	⟨۶, ۱⟩	۱۱
۲	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	⟨۸/۵, ۱/۵⟩	۳
۳	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۱۴, ۱⟩	۱۰
۴	⟨۹, ۱⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵⟩	۵
۵	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۹, ۱⟩	⟨۰, ۰⟩	⟨۰, ۰⟩	۴

جدول ۱۳.۴: Δ–ماتریس شبکه G' در شکل ۳.۴ از دید بدبینانه

v_i	C_1	C_2	C_3	C_4	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	۱۰
۴	⟨۱۰/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۶, ۱, ۲⟩	۵
۵	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۸, ۱, ۲⟩	⟨۱۳/۵, ۱/۵, ۲/۵⟩	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	۴

v_i	C_5	C_6	C_7	C_8	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	۱۱
۲	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۳	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	۱۰
۴	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۱/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	۵
۵	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	۴

v_i	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	w_i
۱	⟨۵/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۰/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	۳
۳	⟨۱۱/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	۵
۵	⟨۹, ۱, ۱⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	۳
۶	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۴

v_i	C_{13}	C_{14}	C_{15}		w_i
۱	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۱۳/۵, ۱/۵, ۲/۵⟩	⟨۵/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩		۱۱
۲	⟨۱۰/۵, ۰/۵, ۱/۵⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩	⟨۸, ۱, ۲⟩		۳
۳	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۹/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۱, ۱, ۲⟩		۱۰
۴	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹/۵, ۰/۵, ۰/۵⟩		۵
۵	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩		۳
۶	⟨۹, ۱, ۱⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩		۴

جدول ۴.۱۴: Δ–ماتریس شبکه G'' در شکل ۴.۴

v_i	$w_i\delta_{i۱}$	$w_i\delta_{i۲}$	$w_i\delta_{i۳}$	$w_i\delta_{i۴}$	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	۳
۳	⟨۱۱۰, ۱۰, ۱۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۲۰⟩	۱۰
۴	⟨۵۲/۵, ۲/۵, ۷/۵⟩	⟨۴۷/۵, ۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۸۰, ۵, ۱۰⟩	۵
۵	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۳۲, ۴, ۸⟩	⟨۵۴, ۶, ۱۰⟩	⟨۳۸, ۲, ۲⟩	⟨۳۶, ۴, ۴⟩	۴
M_j	⟨۱۱۰, ۱۰, ۱۰⟩	⟨۵۴, ۶, ۱۰⟩	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۱۰⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۵}$	$w_i\delta_{i۶}$	$w_i\delta_{i۷}$	$w_i\delta_{i۸}$	w_i
۱	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	۱۱
۲	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۰/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۳	⟨۱۱۰, ۱۰, ۱۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۲۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۷/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۴۷/۵, ۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۵۲/۵, ۲/۵, ۷/۵⟩	۵
۵	⟨۱۶/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۳۳, ۳, ۶⟩	⟨۳۳, ۳, ۶⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۳
۶	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۳۲, ۴, ۸⟩	⟨۳۲, ۴, ۸⟩	⟨۳۲, ۴, ۸⟩	۴
M_j	⟨۱۱۰, ۱۰, ۱۰⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۲۰⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۹}$	$w_i\delta_{i۱۰}$	$w_i\delta_{i۱۱}$	$w_i\delta_{i۱۲}$	w_i
۱	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۵/۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱, ۱۱⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱, ۱۱⟩	۱۱
۲	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۳۱/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۳۳, ۳, ۶⟩	⟨۲۴, ۳, ۶⟩	۳
۳	⟨۱۱۵, ۵, ۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۱۰
۴	⟨۴۷/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴۷/۵, ۷/۵, ۲/۵⟩	⟨۴۷/۵, ۷/۵, ۲/۵⟩	۵
۵	⟨۲۷, ۳, ۳⟩	⟨۳۳, ۳, ۶⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳, ۳⟩	۳
۶	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۳۸, ۲, ۲⟩	⟨۳۶, ۴, ۴⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	۴
M_j	⟨۱۱۵, ۵, ۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱, ۱۱⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۲۱, ۱۱, ۱۱⟩	

v_i	$w_i\delta_{i۱۳}$	$w_i\delta_{i۱۴}$	$w_i\delta_{i۱۵}$		w_i
۱	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۱۶/۵⟩	⟨۱۴۸/۵, ۱۶/۵, ۲۷/۵⟩	⟨۶۰/۵, ۵/۵, ۱۶/۵⟩		۱۱
۲	⟨۳۱/۵, ۱/۵, ۴/۵⟩	⟨۲۴, ۳, ۶⟩	⟨۲۴, ۳, ۶⟩		۳
۳	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۲۰⟩		۱۰
۴	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۴۷/۵, ۲/۵, ۲/۵⟩		۵
۵	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۲۷, ۳, ۳⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩		۳
۶	⟨۳۶, ۴, ۴⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩	⟨۰, ۰, ۰⟩		۴
M_j	⟨۹۵, ۱۵, ۵⟩	⟨۱۴۸/۵, ۱۶/۵, ۲۷/۵⟩	⟨۱۱۰, ۱۰, ۲۰⟩		

جدول ۱۵.۴: ماتریس $w_i(\delta_{ij})$ شبکه G'' در شکل ۴.۴

۴.۴ الگوریتمی برای حل مسألهp—میانه با وزن‌های فازی

۱.۴.۴ مقدمه

در تمام مسائل مکانیابی فازی اعداد فازی بگونه‌ای تعریف می‌شوند که بتوان با استفاده از توابع رتبه‌بندی اعداد فازی، مدل فازی را به مدل قطعی تبدیل کرد. اما در بیشتر حالت‌ها اعداد فازی (وزن‌ها یا یال‌ها) طوری تعریف می‌شوند که با استفاده از راه حل‌های ارائه شده در بخش ۲.۳ نمی‌توان آنها را به برنامه ریزی عدد صحیح قطعی تبدیل کرد، و اگر این اعداد فازی در ماتریس ضرائب باشند در نهایت با مدلی غیر خطی مواجه می‌شویم که در ادامه با ارائه الگوریتمی به حل این مدل می‌پردازیم.

۲.۴.۴ شکل دیگر مساله p—میانه

فرض کنید $G = (V , E)$ یک شبکه همبند وغیر جهت دار باشد که V و E به ترتیب مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های G می‌باشد. طول کوتاهترین مسیری که v_i و v_j را به هم متصل می‌کند را با d_{ij} نشان می‌دهیم، و رأس v_j دارای وزن w_j است.

در مسأله p—میانه هدف پیدا کردن مکان p رأس از شبکه هست بطوری که تقاضاهای سایر رأس‌های شبکه توسط p سرویس دهنده پوشیده شود و مجموع فاصله وزنی رأس‌های شبکه تا p سرویس دهنده مینیمم شود. بنابراین مسأله زیر را داریم[۷]:

$$\begin{array}{llll} \min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} & & \\ S.t & & & \\ & & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = w_j & , & 1 \le j \le n & (a) \\ w_j yi - x_{ij} \ge 0 & , & 1 \le i,j \le n & (b) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = p & & & (c) \\ y_i \in \{0 , 1\} & , & 1 \le i \le n & \end{array} \qquad (۱۱.۴)$$

x_{ij} : تقاضای رأس j که بوسیله راس i پوشیده است

w_j : تقاضای رأس v_j

d_{ij} :کوتاهترین فاصله v_i تا v_j

قیدهای (a) ما را مطمئن می‌سازند که همه تقاضاهای رأس v_j پوشیده شده است، مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که رأس‌ها را تنها می‌توان به رئوسی اختصاص داد که به عنوان مکان یک سرویس دهنده در نظر گرفته شده باشد، یعنی به ازای آن رأس $y_i = ۱$ باشد. قید (c) تضمین می‌کند که دقیقا p وسیله برای سرویس دادن نیاز است.

حال فرض می‌کنیم در این مسأله $\tilde{w}_j$ها اعداد فازی با تابع عضویت خطی زیر باشند.

$$\mu_{w_j}(x) = \begin{cases} (w_j + r_j - x)/r_j & if \quad w_j \le x \le w_j + r_j \\ ۰ & if \quad otherwise \end{cases} \qquad (۱۲.۴)$$

بنابر این مدل فازی مسأله بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{array}{lllll} Min & \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} d_{ij} x_{ij} & & & \\ S.t & & & & \\ \sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = \tilde{w}_j & , & ۱ \le j \le n & (a) & \\ \tilde{w}_j y_i - x_{ij} \ge ۰ & , & ۱ \le i,j \le n & (b) & \\ \sum_{i=۱}^{n} y_i = p & & & (c) & \\ y_i \in \{۰ , ۱\} & , & ۱ \le i \le n . & & \end{array} \qquad (۱۳.۴)$$

با توجه به این که $\tilde{w}_j$ فازی هستند، بنابراین تابع هدف مسأله نیز مقداری فازی اختیار می کند و برای بدست آوردن تابع عضویت هدف ابتدا یک کران بالا و یک کران پائین (z_u و z_l) برای مقدار بهینه تابع هدف با حل مسائل زیر بدست می آوریم

$$Min \qquad z_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$S.t$$

$$\begin{array}{llll} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = w_j & , & 1 \le j \le n & (a) \\ w_j yi - x_{ij} \ge 0 & , & 1 \le i,j \le n & (b) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = p & & & (c) \\ y_i \in \{0 , 1\} & , & 1 \le i \le n & \end{array} \tag{14.4}$$

و

$$Min \qquad z_u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$S.t$$

$$\begin{array}{llll} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = w_j + r_j & , & 1 \le j \le n & (a) \\ (w_j + r_j) yi - x_{ij} \ge 0 & , & 1 \le i,j \le n & (b) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = p & & & (c) \\ y_i \in \{0 , 1\} & , & 1 \le i \le n . & \end{array} \tag{15.4}$$

بنابراین هنگامی که $\tilde{w_j}$ در ماتریس ضرائب و مقادیر سمت راست مقداری بین w_j و $w_j + d_j$ را می‌گیرد تابع هدف مقداری بین z_l و z_u را اختیار می‌کند. بنابراین مجموعه فازی مقدار بهینه G را طوری تعریف می‌کنیم که برای هر جواب شدنی درجه بهبود هدف را نشان دهد.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & if \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} < z_l \\ (z_u - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij})/(z_u - z_l) & if \quad z_l \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} < z_u \\ 0 & if \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \ge z_u \end{cases} \tag{16.4}$$

حال به تعریف مجموعه فازی قیدها می‌پردازیم. برای بدست آوردن تابع عضویت مجموعه قیدهای $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \tilde{w}_j$ ابتدا این مجموعه را به دو مجموعه a' و a'' بصورت زیر تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ \leq \ \tilde{w}_j & (a') \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ \geq \ \tilde{w}_j & (a'') \end{cases} \qquad (۱۷.۴)$$

حال با توجه به تعریف $\tilde{w_j}$ها چون قید (a') باعث می شود با تقاضاهای بالاتر مواجه نشویم، بنابراین فقط کافی است تابع عضویت مجموعه فازی a'' را بدست آوریم

$$\mu_{a''_j}(x) \ = \begin{cases} 1 & if \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} > w_j + r_j \\ (\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - w_j)/r_j & if \quad w_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq w_j + r_j \\ 0 & if \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} < w_j \ . \end{cases} \qquad (۱۸.۴)$$

برای مجموعه قیدهای (b) تابع عضویت بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{b_ij}(x) \ = \begin{cases} 0 & if \quad (w_j + r_j)yi < x_{ij} \\ ((w_j + r_j)yi - x_{ij})/r_j y_i & if \quad w_j y_i < x_{ij} \leq (w_j + r_j) y_i \\ 1 & if \quad w_j y_i \geq x_{ij} \ . \end{cases} \qquad (۱۹.۴)$$

بنابراین میزان شدنی بودن هر جواب، بوسیله تابع عضویت های قید های فازی تعیین می‌شود. حال با توجه به تعریف تابع عضویت های فوق مساله $p-$میانه فازی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{array}{llll} find \quad (x_{ij}, y_i) & & & \\ S.t & & & \\ & & & \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \lesssim z_l & , & 1 \ \leq \ i,j \ \leq \ n & \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq \ \tilde{w}_j & , & 1 \ \leq \ j \ \leq \ n & (a'') \\ \tilde{w}_j yi - x_{ij} \geq 0 & , & 1 \ \leq \ i,j \ \leq \ n & (b) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \ = \ p & & & (c) \\ y_i \ \in \ \{0 \ , \ 1\} & , & 1 \ \leq \ i \ \leq \ n & \end{array} \qquad (۲۰.۴)$$

حال اگر مجموعه قید های فوق را با D نشان دهیم آنگاه بااستفاده از تعریف تصمیم فازی بوسیله بلمن و زاده در [۴]، تابع عضویت مجموعه قیدهای فازی فوق بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_D(x) \ = \min\{\mu_G(x), \mu_{a''_j}(x), \mu_{b_j}(x)\} \qquad (۲۱.۴)$$

اکنون λ را درجه عضویت مجموعه قید های D می‌نامیم و آن را « درجه رضایت مندی یک جواب شدنی » تعریف می‌کنیم، یعنی هر چه λ بزرگتر باشد میزان رضایت مندی جواب بیشتر است. بنابراین داریم

$$\max \mu_D(x) \ = \max\min\{\mu_G(x), \mu_{a''_j}(x), \mu_{b_j}(x)\} \ . \qquad (۲۲.۴)$$

در نهایت مدل فازی به مدل قطعی زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{array}{llll}
\max & \lambda & & \\
S.t & & & \\
\mu_G(x) & \geq & \lambda & \\
\mu_{a''_j}(x) & \geq & \lambda & j = ۱, ..., n \\
\mu_{b_ij}(x) & \geq & \lambda & i = ۱, ..., n, j = ۱, ..., n \\
\sum_{i=۱}^{n} y_i & = & p & \\
\circ \leq \lambda \leq ۱ & & & \\
y_i \ \in \ \{\circ, ۱\} & & & ۱ \ \leq \ i \ \leq \ n \ .
\end{array} \qquad (۲۳.۴)$$

با استفاده از تابع عضویت های (۱۶.۴)، (۱۸.۴)، (۱۹.۴) مسأله (۲۳.۴) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{array}{lll}
\max & \lambda & \\
S.t & & \\
(z_u - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij})/(z_u - z_l) \geq \lambda & & \\
(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - w_j)/r_j \geq \lambda & j = 1, ..., n & \\
((w_j + d_j)y_i - x_{ij})/d_j y_i \geq \lambda & i = 1, ..., n, j = 1, ..., n & \\
\sum_{i=1}^{n} y_i \;=\; p & & \\
0 \leq \lambda \leq 1 & & \\
y_i \;\in\; \{0\;,\;1\} & 1 \;\leq\; i \;\leq\; n\;. &
\end{array} \qquad (۲۴.۴)$$

که پس از ساده کردن مسأله به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{array}{llll}
\max & \lambda & & \\
S.t & & & \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} + (z_u - z_l)\lambda \leq z_u & & (i) & \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - r_j\lambda \geq w_j & j = 1, ..., n & (iii) & \\
(w_j + r_j)y_i - x_{ij} - r_j\lambda y_i \geq 0 & i = 1, ..., n, j = 1, ..., n & (iv) & \\
\sum_{i=1}^{n} y_i \;=\; p & & & \\
0 \leq \lambda \leq 1 & & & \\
y_i \;\in\; \{0\;,\;1\} & 1 \;\leq\; i \;\leq\; n\;. & &
\end{array} \qquad (۲۵.۴)$$

مدل (۲۵.۴) مدلی قطعی است ولی چون قید (iv) غیر خطی است، مانند سایر مسائل p—میانه روی شبکه‌ها نمی‌توان از الگوریتم شاخه وکران استفاده کرد. بنابراین به ارائه الگوریتم زیر می‌پردازیم.

۳.۴.۴ الگوریتم پیشنهادی

چون $\lambda \in [0, 1]$ است و ما تصمیم داریم به بیشترین مقدار λ دست یابیم از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم.

الگوریتم:

مرحله ۱

مقدار λ را برابر یک در نظر می گیریم و امتحان می‌کنیم که آیا یک مجموعه شدنی برای قیدهای مسأله وجود دارد یا خیر، اگر یک مجموعه شدنی برای ۱ $= \lambda$ وجود داشت آنگاه هر جواب شدنی یک جواب بهین برای مسأله است. در غیر این صورت قرار می‌دهیم ۰ $= \lambda_L$ و ۱ $= \lambda_R$ و به مرحله بعد می رویم.

مرحله ۲

برای هر مقدار ۲$/(\lambda_L + \lambda_R) = \lambda$، مقادیر ۰ $= \lambda_L$ و ۱ $= \lambda_R$ را با استفاده از روش دوبخشی بصورت زیر بدست می آوریم .

$\lambda = \lambda_L$: اگر مجموعه جواب های شدنی برای λ ناتهی باشد.

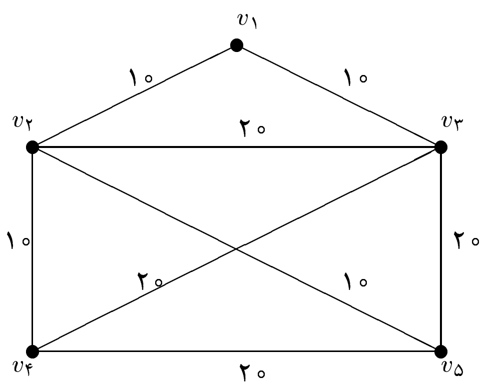
$\lambda = \lambda_R$: اگر مجموعه جواب های شدنی برای λ تهی باشد.

در ادامه برای هر مقدار λ امتحان می‌کنیم که آیا مجموعه شدنی مسأله (۲۹) وجود دارد یا خیر.
شرط توقف الگوریتم نیست دلخواه و در اختیار تصمیم گیرنده هست (مثلاً ۰/۰۰۱ $= \lambda_R - \lambda_L$).

مثال ۳.۴ در شکل (۶.۴) ۲—میانه شبکه N را وقتی وزن رأس‌ها اعداد فازی مشخص شده در جدول ۱۷.۴ باشند را با استفاده از الگوریتم بدست می‌آوریم.

ماتریس کوتاهترین فاصله برای شبکه ۶.۴ بصورت زیر است.

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱۰ & ۱۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۱۰ & ۰ & ۲۰ & ۱۰ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۲۰ & ۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۱۰ & ۲۰ & ۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۱۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۰ \end{bmatrix}$$



شکل ۶.۴: شبکه N

w_1 r_1	w_2 r_2	w_3 r_3	w_4 r_4	w_5 r_5
۸ ۳	۵ ۰/۵	۹ ۰	۷ ۱/۵	۶ ۰/۵

جدول ۱۶.۴: مقدار w_j و r_j برای هر رأس شبکه N در شکل ۵.۴

مقادیر z_l و z_u به ترتیب برابر است با ۲۱۰ و ۲۴۰.

بنابراین وقتی مسأله را در حالت قطعی حل می‌کنیم ۲۱۰ $= z^*$ و رأس‌های v_2 و v_3 مکان بهینه است. و وقتی مسأله را در حالت فازی حل می‌کنیم ۳۹% $= \lambda$ و رأس‌های v_1 و v_2 جواب بهینه است. روند اجرای الگوریتم برای مثال ۳.۴ در جدول ۱۸.۴ نشان داده شده است.

۲—میانه	z^*	w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	جواب
v_2, v_3	۲۱۰	۶	۷	۹	۵	۸	قطعی
v_1, v_2	۲۲۸/۲	۶/۱۹	۷/۵۸	۹	۵/۲۰	۹/۱۷	فازی
	۱۸/۲	۰/۱۹	۰/۵۸	۰	۰/۲	۱/۱۷	اختلاف

جدول ۱۷.۴: مقایسه جواب فازی و قطعی شبکه N در شکل ۵.۴

λ	فضای جواب	۲—میانه	z^*	$\lambda(\%)$
۱	نشدنی			
$(۰ + ۱)/۲ = \frac{۱}{۲}$	نشدنی			
$(۰ + \frac{۱}{۲})/۲ = \frac{۱}{۴}$	شدنی	$v_۱, v_۲$	۲۳۷	۲۵%
$(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲})/۲ = \frac{۳}{۸}$	شدنی	$v_۱, v_۲$	۲۳۰	۳۷/۵%
$(\frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۲})/۲ = \frac{۷}{۱۶}$	نشدنی			
$(\frac{۳}{۸} + \frac{۷}{۱۶})/۲ = \frac{۱۳}{۳۲}$	نشدنی			
$(\frac{۳}{۸} + \frac{۱۳}{۳۲})/۲ = \frac{۲۵}{۶۴}$	شدنی	$v_۱, v_۲$	۲۲۸/۲	۳۹%
$(\frac{۲۵}{۶۴} + \frac{۱۳}{۳۲})/۲ = \frac{۵۱}{۱۲۸}$	نشدنی			

جدول ۱۸.۴: روند اجرای الگوریتم برای مثال ۲.۴

۵.۴ نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه ما در فصل اول مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها در حالت قطعی را تشریح و روش‌های حلی که برای این نوع مسائل (p—میانه و p—مرکز) روی شبکه‌ها ارائه شده بود را بیان کردیم. در فصل دوم حالت‌های مختلف مدل های FLP و $FILP$ را بررسی و راههای حل آنها را بیان کردیم. و در نهایت در فصل چهارم مسائل مکانیابی روی شبکه‌های فازی را بررسی کردیم و برای مسأله p—میانه روی شبکه‌ها وقتی وزن رأس‌ها اعداد فازی هستند الگوریتمی را پیشنهاد کردیم.

بدلیل اینکه مبحث مکانیابی روی شبکه‌هادر حالت فازی مبحثی جدید و نوپا است بعضی از حالت‌های این نوع مسائل در حالت فازی هنوز مورد ارزیابی قرار نگرفته است و یا روش حل خوبی برای آن پیشنهاد نشده است. که بعضی از این حالت ها عبارتند از:

۱) وقتی که همه عناصر شبکه فازی باشند یعنی $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{w}, \tilde{l}(e))$.

۲) وقتی همزمان رأس‌ها و یال‌ها مجموعه‌هائی فازی باشند یعنی $N = (\tilde{V}, \tilde{E}, w, l(e))$.

۳) وقتی مجموعه رأس‌ها و وزن مربوط به آنها اعداد فازی باشند یعنی $N = (\tilde{V}, E, \tilde{w}, l(e))$.

۴) وقتی وزن رأس‌ها اعداد فازی و مجموعه یال‌ها نیز مجموعه فازی باشد یعنی $N = (V, \tilde{E}, \tilde{w}, l(e))$.

از دیگر روش‌هائی که برای حل این مسائل تاکنون بکار گرفته نشده، روش‌های ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک [۲]، روش مورچه [۳]، سرد کردن تدریجی [۴] و روش‌هائی از این قبیل بوده است. که می‌توان آنها را بر روی این مسائل در حالت فازی بکار برد.

[۲] Genetic Algorithm

[۳] Ant colony

[۴] Simulated annealing

پیوست A

مراجع

کتاب‌نامه

[1] Alp, O., Erkut, E., Drezner, D., 2003. "An efficient genetic algorithm for the p-median problem." *Annals of Operation Research* 122, 21-42.

[2] Barahona, F., Anbil, R., 2000. " The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient algorithm." *Mathematical Programing* 87, 385-399.

[3] Beasley J.E., 1993. "Lagrangian heuristic for location problems." *European Journal of Operational Research* 65 , 383-399.

[4] Bellman, R.E., Zadeh, L.A., 1970. "Decision-making in a fuzzy environment" *Management Science* 17, 141-164.

[5] Beltran, C., Tadonki, C., Vial, J.-PH., 2004. " Solving the p-median problem with a semi-Lagrangian Relaxation ." *Logilab Report, HEC, Unversity of Geneva, Switzerland.*

[6] Bowerman, J., Calamai, P.H., G.B., 1999 "The demand partitioning method for reducing aggregation error in p-median problems." *Computers & Operations Research* 26, 1097-1111.

[7] Canos, M.J., Ivorra, C., Liern, V., "An exact algorithm for the fuzzy p-median problem", *European J. Oper. Res.* 116 (1999) 80-86.

[8] Captivo, E.M., 1991. "Fast optimal and dual heuristics for the p-median location problem. " *European Journal of Operational Research* 52, 65-74

[9] Chandrasekran, R., Tamir, A., 1982. "Polynomially bounded algorithms for locating p-center on a tree ." *Mathematical Programming* 22, 304-315.

[10] Chaudhry, S.S., He, S., Chadhry, P.E., 2003. "Solving a class of facility location problems using genetic algorithm." *Expert Systems* 20, 86-91.

[11] Chiyoshi, F., Galvao, D., 2000. "A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem." *Annals of Operations Research* 96, 61-71.

[12] Cornuejols, G., Fisher, M.L., Nemhauser, G.L., 1977. "Location of bank accounts to optimize float : An analytic study of exact and approximate algorithms." *Managemet Science* 23, 789-810.

[13] Crainic, T., Gendreau, M., Hansen, P., Mladenovic, N., 2004. "Cooperative parallel variable neighborhood search for the p-median." *Journal of Heuristics* 10, 293-314.

[14] Current, J., Schilling, D., 1987. "Elimination of source A and B errors in p-median location problems. " *Geographical Analysis* 19, 95-110.

[15] Dai, Z., Cheung, T.-Y., 1997. "A new heuristic approch for the p-median problem." *Journal of Operational Research Society* 48 (9), 950-960.

[16] Daskin , M.S., 1995. "*Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications.*" Willey & Sons , New york.

[17] Densham, P.J., Rushton, G., 1992. "A more efficient heuristic for solving large p-median problems." *Papers in Regional Science* 71 (3), 307-329 .

[18] Dibbie, C., Densham, P.J., 1993. "Generating intersection alternatives in GIS and SDSS using genetic algorithms." *In GIS/LIS Symposiium, Lincoln.*

[19] Drezner, Z.,1984. "The p-center problem: Heuristic and optimal algorithms." *Journal of the Operational Research Society* 35, 741-748.

[20] Drezner Z., H. Hamacher, *Facility location: Application and theory.* Springer-Verlage, Berlin: 2002.

[21] Erkut, E., Bozakaya, B., 1999." Analysis of aggregation errors for the p-median problem." *Computers & Operations Research* 26, 1075-1096.

[22] Erlenkotter, D., 1978. "A dual-based procedure for uncapacitated facility location." *Operations Research* 26, 992-1009.

[23] Estivell-Castro, V., Torres-Velazquez, R., 1999. "*Hybrid genetic algorithm for solving the p-median problem.* " In: Yao, X. et al. (Eds), Seal 1998,LNCS 1585. New York, pp.18-25.

[24] Feldman ,E., Lehrer,F.A. Ray, T.L., 1966. "Warehouse locations under continuose of scal."*Management Science* 12, 670-684.

[25] Francis, R.L., Lowe, T.J., Tamir, A., 2000. "Aggregation error bounds for a class of location models." *Operations Research* 48, 294-307.

[26] Francis, R.L., Lowe, T.J., Tamir, A., 2003. "Worst-case incremental analysis for a class of p-facility location problems." *Networks* 39, 139-143.

[27] Francis, R. L., L. F. McGinnis, Jr., and J. A. White. "*Facility layout and location: An analytical approach, 2nd ed.,*" Prentice Hall: 1992.

[28] Galvao, R.D, 1980. "A dual-bounded algorithm for the p-median problem." *Operation Research* 28, 1112-1121.

[29] Galvao, R.D, 1993. "The use of Lagrangean relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems." *Location Science* 1, 57-79.

[30] Garcia-Lopez, F., Melian Batista, B., Moreno Perez, J.A., Moreno Vega, J.M., 2002. "The parallel variable neighborhood search for the p-median problem." *Journal of Heuristic* 8, 375-388.

[31] Garcia-Lopez, F., Melian Batista, B., Moreno Perez, J.A., Moreno Vega, J.M., 2003. "Parallelization of the scatter search for the p-median problem." *Parallel Computing* 29 (5), 575-589.

[32] Garey, M., Johnson, D., 1979. "*Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness.*" Freeman & Company, New York.

[33] Goldman, A.J., 1971. "Optimal center location in simple network". *Transportation Science* 5, 212-221.

[34] Goncharov, E., Kochetov, Y., 2002. " Probabilistic tabu search for the unconstrained discrete optimization problems." *Discrete Analysis and Operations Research* 9(2) , 13-30 (in Russian).

[35] Goodchild, M.F., 1979. "The aggregation problem in location-allocation ." *Geographical Analysis* 11, 240-255.

[36] Hale, T., Trevor Hale's location science references.
http:// www.ent. ohiou.edu.2004.

[37] Handler, G.Y., Mirchandani, P.B., 1979. "*Location on networks.*" M.I.T. Press, Cambridge, MA.

[38] Handler, G.Y., 1990. "P-center problems,in Discrete Location Theory." *In: Mirchandani, P.B., Francis, R.L. John Wiley Inc., New York, pp.* 305-347.

[39] Hakimi,S.L., 1964. "Optimal location of switching center and the absolute centers and the absolute medians of a graph". *Operations Research* 12, 450-459.

[40] Hakimi,S.L., 1965."Optimal distibrution of switching centers in a communication network and some related theoretic graph theoretic problems".*Operation Research* 13, 462-475.

[41] Hansen, P., M. Labbe, D. Peeters, and J. F. Thisse. "Single facility location on networks." *Annals of Discrete Math* 1987: 31, 113-146.

[42] Hansen, P., Mladonovic, N., 1997. " Variable neighborhood search for the p-median ." *Location Science* 5, 207-226.

[43] Hansen, P., Mladonovic, N., 2001. " Variable neighborhood search: Principles and applications ." *European Journal of Operational Research* 130, 449-467.

[44] Hansen, P., Mladonovic, N., Perez-Brito, D., 2001. " Variable neighborhood decomposition search ." *Journal of Heuristics* 7(4), 335-350.

[45] Herrera, F., Verdegey, J.L., "Three models of fuzzy integer programming ". *European J. Oper. Res.* 83 (1995) 581-593.

[46] Hillsman, E.L., Rhoda, R., 1978. " Errors in measuring distances from populations to service centers." *Annals of Regional Science Association* 12, 74-88.

[47] Hodgson, M.J., Neuman, S., 1993. "A GIS approach to eliminating scource C aggregation error in p-median models." *Location Science* 1, 155-170.

[48] Hodgson, M.J., Salhi, S., 1998. "Using a quadtree structure to eliminate aggregation error in point to point allocation."*Presented at IFORS, Montreal.*

[49] Hooker, J.N., Garfinkel, R.S., Chen, C.K., "Finite dominating sets for network location problems",*Oper. Res.* 39(1991) 100-118.

[50] Hosage, C.M., Goodchild, M.F., 1986. "Discrete spsace location-allocation solution from genetic algorithms." *Annals of Operations Research* 6, 35-46.

[51] Hribar, M., Daskin,M., 1997. "A dynamic programming heuristic for the p-median problem." *European Journal of Operational Research* 101, 499-508.

[52] Jose A. Moreno Perez, J. Marcos Moreno Vega, Jose L. Verdegay., 2004. "Fuzzy location problems on networks" *Fuzzy sets and Systems* 142. 393-405.

[53] Karive, O., Hakimi, S.L., 1979."An algorithmic approach to network location problems. Part II: The p-median." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37, 539-560.

[54] Karive, O., Hakimi, S.L., 1979."An algorithmic approach to network location problems. Part I: The p-centers." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37, 513-538.

[55] Kaufman, A., "Introduction a la theorie des Sous-emsembles.*Flous, Vol.I,Masson et Cie,* 1973.

[56] Kochetov, Y., 2001. " Probabilistic local search algorithms for the discrete optimization problems." *Discrete Mathematics and Applications, Moscow, MSU,* 84-117 (in Russian)

[57] Kochetov, Y., Alekseeva, E., Levanova, T., Loresh, N., 2005."Large neighborhood search for the p-median problem. " *Yugoslav Journal of Operations Research* 15 (1), 53-63.

[58] Kuehn A. A. and Hamburger M.J. 1963."A heuristic program for locating warehouses." *Management Science.* 9, 643-666

[59] Krarup, J. and P. M. Pruzan, "The simple plant location problem: Survey and synthesis." *European Journal of Operational Research* 1983: 12, 36-81.

[60] Levanova, T., Loresh, M.A., 2004. "Algorithms of ant system and simulated annealing for the p-median problem." *Automation and Remote Control* 65, 431-438.

[61] Maranzana, F., 1964. "On the location of supply points to minimaize transport cost." *Operations Research Quarterly* 15, 261-270.

[62] Minieka, E., 1970. "The m-center problem." *SIAM Review* 12, 138-139.

[63] Mirchandani, P. B. and R. Francis. *Discrete Location Theory.* J.Wiley:1990.

[64] Mladenovic, N., Moreno-Perez, J.A., Moreno-Vega, J.M., 1995." Tabu search in solving p-facility location-allocation problems." *Les Cahiers du GERAD, G-95-38, Montreal.*

[65] Mladenovic, N., Moreno-Perez, J.A., Moreno-Vega, J.M., 1996. " A chain-interchange heuristic method." *Yugoslav Journal of Operations Research* 6,41-54.

[66] Moreno-Perez, J.A., Garcia-Rado, J.L., Moreno-Vega, J.M., 1994."A parallel genetic algorithim for the discrete p-median problem" *Studies in Location Analysis* 7, 131-141.

[67] Moreno-Perez, J.A., Rodriguez ,C., Jimenez, N., 1991."Heuristic cluster algorithm multiple facility location- allocation problem." *RAIRO - Recherche Operatinnelle/Operations Research* 25, 97-107.

[68] Mulvey, J.M., Crowder, H.P., 1979. "Cluster analysis: An application of Lagrangian Relaxation." *Management Science* 25, 329-340.

[69] Murray, A.T., Church, R.L., 1996. "Applying simulated annealing to planning-location models." *Journal of Heuristics* 2, 31-53 .

[70] Nayeem, S.M.A., Pal, M., 2008. "The p-center problem on fuzzy networks and reduction of cost." *Iranian Journal of fuzzy systems* Vol. 5,No. 1,pp. 1-26.

[71] Negoita, C.V. 1970:"*Fuzziness in management*', OPSA/TIMS, Miami.

[72] Owen, S. H. and M. S. Daskin, "Strategic facility location: A review." *European Journal of Operational Research* 1998: 111, 423-447.

[73] Pelegrin, B., 1991. "Heuristic methods for the p-center problem." *RAIRO Recherche Operationelle* 25, 65-72.

[74] Pizzolato , N.D., 1994. " A heuristic for larg-size p-median location problems with application to school location ." *Annals of Operations Research* 50, 473-485.

[75] ReVelle, C.S, Swain, R.W., 1970 . "Centeral facilities location." *Geographical Analysis* 2, 30-42.

[76] Resende, M., Werneck, R.F., 2003. "On the implementation of a awap-based lacal search procedure for the p-median problem." *In: Ladner, Richard E. (Ed.), Proceedings of the 5th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments. SIAM, Philadelphia, pp.*119-127.

[77] Resende, M., Werneck, R.F., 2004. "A hybrid heuristc for the p-median problem." *Journal of Heuristic* 10 (1), 59-88.

[78] Rolland, E., Schiling, D.A., Current, J¿R., 1996. " An efficient tabu search procedure for the p-median problem." *European Journal of Operational Research* 96, 329-342.

[79] Rosenfeld, A., "Fuzzy graph in: L.A Zadeh, K.S Fu, K.Tanaka and M.shimura(eds),*Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York.* 1975, pp. 77-97.

[80] Rosing, K.E., Revelle, C.S., 1997."Heuristic concentration: Two stage solution construction." *European Journal of Operational Research* 97, 75-86.

[81] Rosing, K.E., Revelle, C.S., Schilling, D.A., 1999. "A gamma heuristic for the p-median problem." *European Journal of Operational Research* 117, 522-532.

[82] Rosing, K.E., Revelle, C.S., Rolland, E., Schilling, D.A., Current, J.R., 1998. "Heuristic concentration and tabu search: A head to head comparison."*European Journal of Operational Research* 104,93-99.

[83] Salhi, S., Atkinson, R.A., 1995. "Subdrop: Amodified drop heuristic for location problems". *Location Science* 3, 267-273.

[84] Salhi, S., 1997. "A perturbation heuristic for a class of location problems ." *Journal of Operational Research Society* 48, 1233-1240.

[85] Salhi, S., 2002. "Defining tatu list size and aspiration criterion within tabu search methods." *Computers and Operations Research* 29, 67-86.

[86] Scaparra, M. P., and M. G. Scutella. "Facilities, locations, customers: Building blocks of location models: A survey." *Thechnical Report:* tr-0118, University of Piza, Italy: 2001.

[87] Senne, L.F.E., Lorena, A.N.L., 2000." Lagrangian/surrogate heuristics for p-median problems." *Laguna, M., Gonzales-Velrde, J.L. (Eds.), Computing tools for modelling, optimization and simulation: Interfaces in computer science and operations research. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht ,pp.* 115-130.

[88] Shaocheng, T .:"Interval number and fuzzy number linear programming" ,*Fuzzy sets and Systems* 66 (1994) 301-306.

[89] Taillard, E.D., 2003. "Heuristic methods for large centroid clustring problems." *Journal of Heuristic* 9 (1), 51-73.

[90] Tamir A . 1996. "An $o(pn^{۲})$ algorithm for the p-median and related problems on tree graph." *Operations Research Letters* 19, 59-64 .

[91] Tamir, A., 1988. "Improved complexity bounds for center location problems on networks by using dynamic data structures." *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 1, 377-396.

[92] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, k. 1983 :"On fuzzy mathematical programming," *j.Cybernetics* 3 37-46.

[93] Tanaka, H., Asai, k. 1984: Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers, *Fuzzy sets and systems* 13 1-10.

[94] Teitz, M., Bart, P., 1968. "Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph." *Operations Research* 16, 955-961.

[95] Voss, S., 1996. " A reverse elimination approach for the p-median problem." *Studies in Locational Analysis* 8 , 49-54

[96] Weber A., *Uber den Standort der Industrient.* Tubingen, 1909; English Trans.: *Theory of Location of Industries,* (C.J.Friedrich, ed and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois, 1926.

[97] Whitaker, R., 1983. "A fast algorithm for the greedy interchange for larg-scale clustring and median location problems." *INFOR* 21, 95-108.

[98] Zadeh, L.A., 1965. "Fuzzy set" ,*Information and contorol* 8 338-353.

[99] Zimmermann, H.J., :"Fuzzy mathematical programming," *Comput.Ops.Res.Vol 10 No 4(1983)* 291-298.

[100] Zimmermann, H.J., 1986. "*Fuzzy Sets Theory and its Applications.*" International Series In Managemet Science/Operations. Ignizio ed. Kluwer-Nijhoff Publishing. Boston.

پیوست B

واژه نامه

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آزمند .... $Greedy$

آلفا برش .... $\alpha - cut$

آلفا برش قوی .... $Strong\ \alpha - cut$

آلفا برش ضعیف .... $Weak\ \alpha - cut$

ابتکاری .... $Heuristic$

ابهام .... $Vagueness$

اجتماع .... $Union$

احتمالی .... $Possibility$

اشتراک .... $Intersection$

الگوریتم حریص .... $Greedy\ Algorithm$

اعداد فازی .... $Fuzzy\ numbers$

اعداد فازی مسطح .... $Flat\ fuzzy\ numbers$

اعداد فاصله‌ای .... $Interval\ numbers$

بد بینانه .... $Pessimistic$

برش .... Cut

بردار سمت راست .... $Right - hand - side\ vector$

بردار هزینه .... $Cost\ vector$

برنامه ریزی خطی .... $Linear\ programming$

برنامه ریزی عدد صحیح آمیخته .... $Mixed\ Integer\ Programming\ Problem$

برنامه ریزی غیر خطی .... $Nonlinear\ programming$

بهینه سازی .... $Optimization$

تسلط داشتن .... $Dominance$
تابع رتبه بندی .... $Ranking\ function$
تابع عضویت .... $Membership\ function$
تابع مقعر .... $Concave\ function$
تابع هدف .... $Opjective\ function$
جزئی .... $Partially$
جواب بهینه .... $Optimal\ solution$
جواب شدنی .... $Feasible\ solution$
جواب نشدنی .... $Infeasible\ solution$
خوش‌بینانه .... $Optimitic$
سطح آرزو .... $Aspiration\ level$
شاخص .... $Index$
شاخص شایستگی .... $Acceptability\ index$
رأس .... $Vertex$
ضرائب هزینه .... $Cost\ coefficient$
ذاتاً، بطور ضروری .... $Essentially$
کلی .... $Total$
گراف .... $Graph$
گره .... $Node$
فاصله مجاز .... $Tolerance\ interval$
فازی .... $Fuzzy$
قطعی .... $Crisp$
غیر دقیق .... $Imprecise$

متمم .... $Compliment$

محدب .... $Convex$

محدودیت .... $Constraint$

مجموعه .... Set

مجموعه فازی .... $Fuzzy\ set$

مجموعه فازی محدب .... $Convex\ fuzzy\ set$

مجموعه فازی نرمال .... $Normal\ fuzzy\ set$

مجموعه قاطع .... $Crisp\ set$

مجموعه مرجع .... $Universal\ set$

مجموعه‌های فازی مثلثی .... $Triangular\ fuzzy\ sets$

مدل‌بندی .... $Modeling$

معیار توقف .... $Termination\ criterion$

مقعر .... $Concave$

مثلثی .... $Triangular$

مکانیابی .... $Location$

منطق .... $Logic$

منطق دوتائی .... $Binary\ logic$

منطق فازی .... $Fuzzy\ logic$

ناحیه شدنی .... $Feasible\ region$

نرمال .... $Normal$

وزن دار .... $Weighted$

همبندی .... $Connectednees$

یال .... $Edge$

پیوست C

فهرست الفبائی

فهرست الفبایی

Abstract

Location problem is one of the most important problem in Operation Research and it has many application in the real world, such as locating of fire stations, police stations, emergency centers, hospitals, goods distribution centers, bus stops, subway stations, official centers, server in computer networks, post offices, garbage disposal centers, nuclear palnts and etc are most important applications of it. Two significant instances problem of location theory are p-median and p-center problems. In most location problems that are studied in recent decades, our data and information about the conditions of the problem were precise and clear, but in a real state and for real applications, our data and information in this case are uncertain and vague. Thus **fuzzy location problems on networks** *arise. In this dissertation we describe these problems and their solutions in the fuzzy mode, and offer a solution for the p-median problem when the weights of network's vertices are fuzzy numbers.*

Keywords: Locatin; Fuzzy linear programming; Fuzzy Networks; Fuzzy sets; Fuzzy p-median; Fuzzy p-center.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematics

Fuzzy locatoin on networks

Student:

`Mostafa Heydari`

Supervisors:

Dr. Sadegh Rahimi sharbaf

Dr. Jafar Fathali

January 2009