دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب روی حلقه‌های نیم‌اول

استاد راهنما

آقای دکتر هاشمی

استاد مشاور

آقای دکتر زیره

پژوهشگر

سمیه کیان

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: کیان　　　　نام: سمیه

عنوان: حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب روی حلقه‌های نیم‌اول

استاد راهنما: آقای دکتر هاشمی
استاد مشاور: آقای دکتر زیره

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　رشته: ریاضی محض　　　　گرایش: جبر

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود　　　　دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱　　　　تعداد صفحات: ۶۸

واژگان کلیدی: حلقه‌ی نیم‌اول، حلقه‌ی شبه آرمنداریز، حلقه‌ی صلب، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

چکیده

این پایان‌نامه، به بررسی خاصیت شبه آرمنداریزی حلقه‌های نیم‌اول می‌پردازد و آن را به حلقه‌های تکواری اریب، توسیع اور و سری‌های توانی اریب گسترش می‌دهد. سپس به معرفی حلقه‌های σ-آرمنداریز اریب و خواص آن می‌پردازد.
حلقه‌های شبه σ-آرمنداریز اریب را معرفی کرده و این خاصیت را به حلقه‌ی ماتریس ها، حلقه چندجمله‌ای ها و حلقه کسرها انتقال می‌دهد. مطالب ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از مقالات [۹] و [۱۰] می‌باشد.

تقدیم به ساحت مقدس پیامبر نور و

رحمت حضرت محمد مصطفی (ص)

ما را به جبر هم که شده سر به زیر کن

خیری ندیده ایم از این اختیارها

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر احمد زیره که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم وبرادر عزیزتر از جان وخواهر بزرگوارم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از هم اتاقی‌های عزیزم خانم زینب نجفی ، خانم نجمه سادات مشکوة و دوستان خوبم خانم فاطمه عسکری و خانم زهرا وزیری و خانم فاطمه حلاج و خانم زهرا عابدین زاده و استاد ارجمند جناب آقای دکتر پیمان نیرومند به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه کیان

۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی **۱**

۱.۱ تاریخچه ۲

۲.۱ تعاریف ومفاهیم اولیه ۳

۳.۱ حلقه کسرها ۸

۲ توسیع چندجمله‌ای ها از حلقه‌های نیم‌اول **۱۱**

۱.۲ توسیع چندجمله‌ای و حلقه‌های نیم‌اول ۱۲

۳ حلقه‌های σ -آرمنداریز اریب **۲۰**

۱.۳ حلقه σ-آرمنداریز اریب ۲۱

۴ حلقه‌های شبه σ -آرمنداریز اریب **۳۸**

۱.۴ حلقه‌ی شبه σ -آرمنداریز اریب ۳۹

مراجع **۶۱**

۵ فهرست الفبایی **۶۲**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۳**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۶۵**

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تاریخچه

ریج و ایچ هوچریا در سال ۱۹۹۷، مفهوم حلقه‌ی آرمنداریز را بیان کردند. نام «حلقه آرمنداریز» به این دلیل انتخاب شد که آرمنداریز در سال ۱۹۷۴، نشان داد که حلقه‌ی تقلیل یافته دارای این خاصیت است. هیرانو در سال ۲۰۰۲، حلقه‌ی شبه آرمنداریز که تعمیمی از حلقه آرمنداریز است را معرفی کرد. او ثابت کرد حلقه‌های نیم‌اول شبه آرمنداریز هستند. بعلاوه او نشان داد که کلاس حلقه‌های شبه آرمنداریز موریتا پایا است و اگر R، حلقه شبه آرمنداریز باشد در این صورت برخی از توسیع‌های R، مانند حلقه‌های ماتریس بالا مثلثی $n \times n$ و حلقه چندجمله‌ای‌ها، نیز حلقه شبه آرمنداریز هستند. اما بسیاری از این خواص برای حلقه های آرمنداریز برقرار نیست. از سوی دیگر هنگ، کیم و کوآک در سال ۲۰۰۳، برای درونریختی σ از حلقه R مفهوم σ-آرمنداریز اریب را بیان کردند. آن‌ها ثابت کردند که حلقه‌های σ-صلب، σ-آرمنداریز اریب هستند. اگرچه حلقه‌های تقلیل یافته، σ-آرمنداریز اریب نیستند. ما در فصل ۲، نشان خواهیم داد که اگر R نیم‌اول و σ درونریختی از حلقه R باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو در $R[x;\sigma]$ باشد که $f(x)R[x;\sigma]g(x) = 0$. آن‌گاه، برای هر عدد صحیح $k \geq 0$ و هر i, j ، $a_i R \sigma^{i+k}(b_j) = 0$. بعلاوه ما خواص شبه آرمنداریزی حلقه‌های نیم‌اول را به حلقه‌های تکواری اریب، توسیع اور از انواع گوناگون و حلقه سری‌های توانی اریب و غیره گسترش می‌دهیم. در فصل ۳، به بررسی حلقه σ-آرمنداریز اریب می‌پردازیم. در فصل ۴، حلقه‌های شبه σ-آرمنداریز اریب را تعریف می‌کنیم و توسیع‌های مختلف از حلقه‌های شبه σ-آرمنداریز را مطالعه می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف ومفاهیم اولیه

درتمام این متن R نمایانگر یک حلقه‌ی شرکتپذیر و یکدار است. $M_n(R)$، نمایانگر حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی حلقه‌ی R است. حلقه‌ی اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم. $UM_n(R)$ نمایانگر حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالامثلثی روی R است.

تعریف ۱.۲.۱. حلقه‌ی R را **تقلیل یافته**[۱] می‌نامیم هرگاه، هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم σ درونریختی از حلقه R باشد. تابع جمعی $\delta : R \longrightarrow R$ را یک تابع σ**-مشتق**[۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم σ یک درونریختی و δ یک تابع σ-مشتق از حلقه‌ی R باشد. **توسیع اُور**[۳] روی R را به $R[x;\sigma,\delta]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن چندجمله‌ای های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$. دو عمل جمع وضرب روی $R[x;\sigma,\delta]$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که برای هر $a \in R$، $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$. اگر σ تابع همانی باشد آن‌گاه، $R[x;\sigma,\delta]$ را به $R[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را **حلقه چندجمله ای‌های مشتق**[۴] روی R می‌نامیم. هرگاه $\delta = 0$، بجای $R[x;\sigma,\delta]$ از $R[x;\sigma]$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و G یک گروه (یا تکوار) باشد. در این صورت می‌توانیم **حلقه گروهی (حلقه تکواری)**[۵]، $R[G] = \bigoplus_{g\in G} Rg$ را تشکیل دهیم. هر عنصر از $R[G]$ به فرم $\sum_g a_g g$ است که $g \in G$، $a_g \in R$ و تعداد متناهی از a_g ها می‌توانند ناصفر باشند. دو عمل جمع و ضرب روی $R[G]$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند. توجه داریم هر عضو از G با هر عضو از R جابجا می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم σ درونریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه **سری های توانی اریب**[۶] روی R را به $R[[x;\sigma]]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن همان سری‌های توانی $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ با ضرایبی از R هستند. جمع و ضرب روی آن به طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که برای هر $a \in R$، $xa = \sigma(a)x$.

[۱] reduced ring
[۲] σ-derivation function
[۳] Ore extention
[۴] differential polynomial ring
[۵] group ring (monoid ring)
[۶] skew power series ring

تعریف ۶.۲.۱. درونریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ را **صلب**[۷] می‌نامیم (یا حلقه‌ی R را σ -صلب می‌نامیم) هرگاه: $a \in R$ و $a\sigma(a) = 0$ ، آن گاه $a = 0$.

اگر R یک حلقه‌ی σ -صلب باشد، آن گاه R تقلیل یافته و σ یک به یک است. یعنی اگر R σ -صلب باشد و برای $a \in R$، $a^2 = 0$. آن‌گاه $a\sigma(a)\sigma(a\sigma(a)) = a\sigma(a^2)\sigma^2(a) = 0$. پس $a\sigma(a) = 0$. بنابراین $a = 0$ ، و لذا R تقلیل یافته است.

لم ۷.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی σ -صلب باشد و $a, b \in R$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

۱. *اگر $ab = 0$ باشد آن‌گاه، برای هر عدد صحیح مثبت n ، $a\sigma^n(b) = \sigma^n(a)b = 0$.*

۲. *اگر $ab = 0$ باشد آن‌گاه، برای هر عدد صحیح مثبت m ، $a\delta^m(b) = \delta^m(a)b = 0$.*

۳. *اگر برای اعداد صحیح مثبت k، $a\sigma^k(b) = 0 = \sigma^k(a)b$ آن‌گاه، $ab = 0$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم σ تکریختی از حلقه‌ی R باشد که برای هر خودتوان e از حلقه‌ی R ، $\sigma(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. در این صورت: حلقه‌ی R σ -صلب است اگر و تنها اگر $R[x; \sigma, \delta]$ یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد.*

برهان. فرض کنیم R، σ-صلب باشد و حلقه $R[x; \sigma, \delta]$ تقلیل یافته نباشد. در این صورت در حلقه $R[x; \sigma, \delta]$ عضو $f \neq 0$ وجود دارد بطوریکه $f^2 = 0$. چون R، تقلیل یافته است، $f \notin R$. بنابراین $a_i \in R$ وجود دارد که $a_m \neq 0$ و $0 \leq i \leq m$، $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و لذا $f^2 = 0$. در نتیجه $a_m \sigma^m(a_m) = 0$. بنابر لم(۷.۲.۱) $a_m^2 = 0$ و $a_m = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $R[x; \sigma, \delta]$ تقلیل یافته است. بعکس، فرض کنیم $R[x; \sigma, \delta]$ تقلیل یافته باشد. پس R بعنوان زیرحلقه تقلیل یافته است. اگر $a \in R$ و $a\sigma(a) = 0$، در این صورت $(\sigma(a)xa)^2 = 0$ و $\sigma(a)xa = 0$. و لذا

$$(\sigma(a)x)\, a = (\sigma(a))^2\, x + \sigma(a)\delta(a) = 0$$

و $\sigma(a) = 0$. از آنجایی که σ تکریختی است، داریم: $a = 0$. بنابراین R، σ-صلب است.

□

تعریف ۹.۲.۱. حلقه‌ی R را **آرمنداریز**[۸] می‌نامیم هرگاه $f\,(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ و $g\,(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ دو عضو ازحلقه‌ی $R\,[x]$ باشند و $f\,(x)\, g\,(x) = 0$ ، آن‌گاه،برای هر i, j ، $a_ib_j = 0$.

---
[۷] rigid
[۸] Armendariz

لم ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $a, b, c \in R$.*

۱. *هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و $ac^nb = 0$ ، آن‌گاه $acb = 0$.*

۲. *هرگاه $ab = 0$ و برای عدد صحیح مثبت n ، c^n مرکزی باشد، آن‌گاه $acb = 0$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۲.۱. حلقه‌ی R را **آبلی**[۹] می‌نامیم هرگاه، هر خودتوان آن مرکزی باشد.

قضیه ۱۲.۲.۱. *هر حلقه‌ی آرمنداریز آبلی است.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز و e خودتوانی از آن باشد و $r \in R$. قرار می‌دهیم : $a = e$ ، $b = 1-e$ و $c = er(1-e)$. در نتیجه $ab = 0$ و $c^2 = 0$ و لذا بنابر لم (۱۰.۲.۱) $acb = 0$. به همین نحو، اگر $a_1 = 1-e$ ، $b_1 = e$ و $c_1 = (1-e)re$ ، آن‌گاه $a_1c_1b_1 = 0$. چون $acb = e(er-ere) = 0$ و $a_1c_1b_1 = (re-ere)e = 0$. پس $er - ere = re - ere$ و $er = re$، بنابراین e مرکزی است. □

تعریف ۱۳.۲.۱. حلقه‌ی R **شبه آرمنداریز**[۱۰] نامیده می‌شود، هرگاه $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_ix^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ دو عضو در $R[x]$ باشد که $f(x)R[x]g(x) = 0$. آن‌گاه، برای هر i, j ، $a_iRb_j = 0$.

تعریف ۱۴.۲.۱. **حلقه‌ی چندجمله‌ای های لوران**[۱۱] روی R را با $R[x, x^{-1}]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن به فرم $\sum_{i=k}^{n} m_ix^i$ هستند که $m_i \in R$ و k, n دو عدد صحیح هستند. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x, x^{-1}]$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و σ یک تکریختی از R باشد. فرض کنیم $R\left[x, x^{-1}; \sigma\right]$ نمایانگر مجموعه‌ی تمام مجموع‌های متناهی از x^jrx^i ها باشد که $i, j \in \mathbb{Z}$ و $r \in R$ ، دو عمل جمع و ضرب روی $R\left[x, x^{-1}; \sigma\right]$ را به طور طبیعی تعریف می‌کنیم به طوری که ضرب از قوانین $xr = \sigma(r)x$ و $rx^{-1} = x^{-1}\sigma(r)$ تبعیت می‌کند. حلقه‌ی $R\left[x, x^{-1}; \sigma\right]$ را **حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب لوران**[۱۲] می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. ایده‌آل سره P از حلقه‌ی R را **اول**[۱۳] می‌نامیم هرگاه، A و B ایده‌آل هایی از R باشند و $AB \subseteq P$ ، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

[۹] Abelian
[۱۰] quasi-Armendariz
[۱۱] Laurent polynomial ring
[۱۲] Laurent skew polynomial ring
[۱۳] prime ideal

تعریف ۱.۲.۱۷. ایده‌آل Q از حلقه‌ی R را **نیم‌اول**[۱۴] می‌نامیم هرگاه: A ایده‌آلی از R باشد و $A^{2} \subseteq Q$ آن‌گاه، $A \subseteq Q$.

تعریف ۱.۲.۱۸. اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را **رادیکال اول**[۱۵] حلقه R می‌نامیم و آن را با $P(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. حلقه‌ی R را **اول (نیم‌اول)**[۱۶] می‌نامیم هرگاه، ایده‌آل $\{0\}$ اول (نیم‌اول) باشد.

هر حلقه‌ی اول، نیم‌اول است.

گزاره ۱.۲.۲۰. *فرض کنیم P یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

۱. *P اول است؛*

۲. *هرگاه $a, b \in R$ و $\langle a\rangle \langle b\rangle \subseteq P$ ، آن‌گاه، $a \in P$ یا $b \in P$ ؛*

۳. *هرگاه $a, b \in R$ و $aRb \subseteq P$ ، آن‌گاه، $a \in P$ یا $b \in P$ ؛*

۴. *هرگاه A و B دو ایده‌آل چپ (راست)،از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$ ، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.*

برهان. (۳) → (۲) → (۱) و (۱) → (۴) بدیهی است.
(۴) → (۳). فرض کنیم A و B دو ایده‌آل چپ از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq R$ ، اما $A \nsubseteq P$. عنصر $a \in A \setminus P$ را انتخاب می‌کنیم. چون برای هر $b \in B$ ، $aRb \subseteq AB \subseteq P$ ، از این رو بنابر (۳) ، $b \in P$ و درنتیجه $B \subseteq P$. □

گزاره ۱.۲.۲۱. *فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *Q نیم‌اول است؛*

۲. *هرگاه $a \in R$ و $\langle a\rangle^{2} \subseteq Q$ ، آن‌گاه: $\langle a\rangle \subseteq Q$ ؛*

۳. *هرگاه $a \in R$ و $aRa \subseteq Q$ ، آن‌گاه: $a \in Q$ ؛*

۴. *هرگاه A ایده‌آلی چپ(راست) از حلقه‌ی R باشد و $A^{2} \subseteq Q$ ، آن‌گاه: $A \subseteq Q$.*

برهان. مانند گزاره قبل به راحتی قابل اثبات است. □

تعریف ۱.۲.۲۲. ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R را **کاملاً اول**[۱۷] می‌نامیم هرگاه، $\frac{R}{I}$ یک دامنه باشد.

[۱۴] Semiprime
[۱۵] prime radical
[۱۶] prime ring
[۱۷] Completely prime ideal

تعریف ۲۳.۲.۱. ایده‌آل سره I را **کاملاً نیم‌اول**[۱۸] هرگاه به ازای هر ایده‌آل J از حلقه‌ی R ، اگر $J^{۲} \subseteq I$ ، آن‌گاه $J \subseteq I$.
یا بطور معادل؛ I ایده‌آل کاملاً نیم‌اول است اگر وتنها اگر $\frac{R}{I}$ حلقه‌ی تقلیل یافته باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک (R,R) -دو مدول باشد. حلقه $T(R,M) = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ ۰ & r \end{pmatrix} | r \in R, m \in M \right\}$ را **توسیع بدیهی**[۱۹] R به وسیله‌ی M می‌نامیم. می‌توان هر عنصر از $T(R,M)$ را به (r,m) نیز نشان داد. بنابراین عمل ضرب با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

برای هر $(r_۱,m_۱),(r_۲,m_۲) \in R$ ، $(r_۱,m_۱)(r_۲,m_۲) := (r_۱r_۲, r_۱m_۲ + m_۱r_۲)$.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی R باشد. **پوچساز چپ**[۲۰] و پوچساز راست X در R را به ترتیب با $l_R(X)$ و $r_R(X)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم: $l_R(X) = \{a \in R | aX = ۰\}$ و $r_R(X) = \{b \in R | Xb = ۰\}$. اگر $X = \{x\}$ ، بجای $l_R(X)$ و $r_R(X)$ به ترتیب از $l_R(x)$ و $l_R(x)$ استفاده می‌کنیم.

ملاحظه ۲۶.۲.۱. *فرض کنیم X زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی R باشد. در این صورت $l_R(X) = r_R(X)$.*

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنیم A یک خاصیت از حلقه‌ی R باشد. می‌گوییم A یک خاصیت **موریتا پایا**[۲۱] است، هرگاه $M_n(R)$ و برای هر خودتوان $e \in R$ ، حلقه eRe خاصیت A را داشته باشند.
به طور مثال، فرض کنیم R یک حلقه و S یک حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی ۲×۲روی حلقه‌ی ماتریس های $n\times n$ روی R باشد و $f(x) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x$ و $g(x) = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} x$ دو عضو در $S[x]$ باشند که $f(x)g(x) = ۰$ ، اما $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \neq ۰$. پس S، آرمنداریز نیست، و چون هر زیرحلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز است، لذا هر حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R آرمنداریز نیست. بنابراین خاصیت «آرمنداریز» یک خاصیت موریتا پایا نیست.

[۱۸] Completely semiprime ideal
[۱۹] trivial extension
[۲۰] Left annihilator
[۲۱] Morita invariant

۳.۱ حلقه کسرها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را **منظم**[۲۲] می‌نامیم هرگاه $r_R(a) = l_R(a) = ۰$.

توجه داریم که اگر $R \subseteq Q$ دو حلقه باشند، و $x \in R$ در حلقه‌ی Q وارون‌پذیر باشد آن‌گاه، x یک عنصر منظم R است.

تعریف ۲.۳.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی X از حلقه‌ی R را **ضربی بسته**[۲۳] می‌نامیم هرگاه:

۱. $۱ \in X$ ،

۲. اگر $x, y \in X$ ، آن‌گاه $xy \in X$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی R باشد. گوییم X در **شرط اور راست**[۲۴] صدق می‌کند. هرگاه، $r \in R$ و $x \in X$ ، آن‌گاه: $y \in X$ و $s \in R$ وجود داشته باشند به طوری که $ry = xs$. یعنی؛ $rX \cap xR \neq \varnothing$. مجموعه‌ی ضربی بسته X که در شرط اور راست صدق کند را **اور راست**[۲۵] می‌نامیم. متناظراً مجموعه اور چپ تعریف می‌شود. اگر X هم اور راست و هم اور چپ باشد، آن را **اور**[۲۶] می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم X یک زیر مجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد. گوییم Q **حلقه‌ی کسرهای راست**[۲۷] R نسبت به مجموعه‌ی X است هرگاه:

۱. $R \subseteq Q$؛

۲. هر عنصر از X در Q وارون‌پذیر باشد؛

۳. هر عنصر از Q را بتوان به فرم $ax^{-۱}$ نوشت که $a \in R$ و $x \in X$.

متناظراً حلقه‌ی کسرهای چپ R نسبت به مجموعه‌ی X تعریف می‌شود. اگر R یک حلقه جابجایی باشد از نوشتن پسوند چپ و راست خودداری می‌کنیم.

مثال ۵.۳.۱. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه‌ی K باشد و $R = K[x;\sigma]$. در این صورت حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب لوران $K[x, x^{-۱};\sigma]$ همان حلقه کسرهای راست و حلقه‌ی کسرهای چپ R نسبت به مجموعه‌ی ضربی بسته $X = \{۱, x, x^۲, \cdots\}$ است.

[۲۲] regular element
[۲۳] multiplicatively closed set
[۲۴] right ore condition
[۲۵] right ore set
[۲۶] ore set
[۲۷] right quotient ring

لم ۶.۳.۱. *فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد، و S حلقه کسرهای راست R نسبت به X وجود داشته باشد. در این صورت:*

۱. *X اور راست است.*

۲. *برای هر $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$ ، عناصر $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$ و $x \in X$ به قسمی وجود دارند که برای هر i ، $s_i = a_i x^{-1}$.*

۳. *اگر $a, b \in R$ ، و $x, y \in X$ ، آن‌گاه $ax^{-1} = by^{-1}$ ، اگر وتنها اگر عناصر $c, d \in R$ وجود داشته باشند که $ac = bd$ و $xc = yd \in X$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۳.۱. گوییم حلقه R **اور راست**[۲۸] است هرگاه، مجموعه تمام عناصر منظم آن یک مجموعه اور راست باشد.

قضیه ۸.۳.۱. *فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد. در این صورت حلقه کسرهای راست R نسبت به X وجود دارد اگر وتنها اگر X اور راست باشد.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

گزاره ۹.۳.۱. *فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی اور راست از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد و S حلقه‌ی کسرهای راست R نسبت به X باشد. فرض کنیم $\phi : R \longrightarrow T$ یک همریختی از حلقه‌ها باشد به قسمی که برای هر $x \in X$ ، $\phi(x)$ در T وارون‌پذیر است. در این صورت همریختی حلقه‌ای منحصر به فرد $\psi : S \longrightarrow T$ وجود دارد که توسیعی از ϕ است.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی اور راست (چپ) از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد. حلقه کسرهای راست (چپ) R نسبت به X را به RX^{-1} $(X^{-1}R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۰.۳.۱. *فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی اور از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد. در این صورت $RX^{-1} = X^{-1}R$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. □

[۲۸] right ore ring

تعریف ۱.۳.۱۱. حلقه کسرهای راست حلقه‌ی R (در صورت وجود) نسبت به مجموعه تمام عناصر منظم R را حلقه **کسرهای راست کلاسیک**[۲۹] R می‌نامیم. حلقه کسرهای چپ کلاسیک متناظراً تعریف می‌شود.

با توجه به قضیه (۱.۳.۸) حلقه کسرهای چپ (راست) کلاسیک حلقه‌ی R وجود دارد اگر وتنها اگر مجموعه‌ی تمام عناصر منظم حلقه‌ی R یک مجموعه‌ی اور چپ (راست) باشد.

گزاره‌ی قبل نشان می‌دهد که اگر حلقه کسرهای چپ کلاسیک و حلقه کسرهای راست کلاسیک حلقه‌ی R وجود داشته باشند آن‌گاه برابرند.

به عنوان مثال، حلقه کسرهای کلاسیک هر حلقه‌ی جابجایی وجود دارد، و میدان کسرهای یک دامنه‌ی صحیح همان حلقه‌ی کسرهای کلاسیک آن است.

[۲۹] right classical quotient ring

فصل ۲
توسیع چندجمله‌ای ها از حلقه‌های نیم‌اول

۱.۲ توسیع چندجمله‌ای و حلقه‌های نیم‌اول

در این فصل، به بررسی خاصیت شبه آرمنداریزی حلقه‌های نیم‌اول می‌پردازیم و آن را به حلقه‌های تکواری اریب، توسیع اور از انواع گوناگون و حلقه‌ی سری های توانی اریب گسترش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲. تکوار G را یک **u.p -تکوار**[۱] می‌نامیم هرگاه، برای هر دو زیر مجموعه‌ی متناهی و ناتهی $A, B \subseteq G$ ، عنصر $g \in AB$ وجود داشته باشد که نمایش منحصر به فرد $g = ab$ داشته باشد که $a \in A$ و $b \in B$.

زیر تکوارهای یک گروه آزاد و گروه‌های پوچ توان فارغ از تاب،u.p- تکوار هستند. همچنین هر گروه دوری نامتناهی u.p -تکوار است.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه و G یک تکوار و σ همریختی تکواری به صورت

$F = \{$ تمام برووریختی‌های $R\} \longleftarrow G : \sigma$

باشد، که همانی G را به همانی F تصویر می‌کند و $\sigma_g =: \sigma(g)$. **حلقه‌ی تکواری اریب**[۲] را با $R*G$ نشان می‌دهیم، که یک R ـمدول چپ آزاد با پایه G است و عمل ضرب از قانون $gr = \sigma_g(r)g$ تبعیت می‌کند.

قضیه ۳.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و G یک $u.p$ ـ تکوار باشد. در این صورت*

$$(a_\circ g_\circ + \cdots + a_m g_m)\, R * G\, (b_\circ h_\circ + \cdots + b_n h_n) = \circ$$

است اگر و تنها اگر برای هر $g \in G$ و $\circ \le i \le m$ و $\circ \le j \le n$ ، $a_i R \sigma_{g_i}(\sigma_g(b_j)) = \circ$.

برهان. فرض کنیم

$$(a_\circ g_\circ + \cdots + a_m g_m)\, R * G\, (b_\circ h_\circ + \cdots + b_n h_n) = \circ$$

در این صورت برای هر $r \in R$ و $g \in G$ رابطه‌ی زیر را داریم:

$$(a_\circ g_\circ + \cdots + a_m g_m) gr (b_\circ h_\circ + \cdots + b_n h_n) = \circ \qquad (۱.۲)$$

حال با استقرا بر روی m ثابت می‌کنیم،برای هر $g \in G$ و $\circ \le i \le m$ و $\circ \le j \le n$،

[۱] unique product monoid
[۲] skew monoid ring

$a_i R\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_j)) = 0$. اگر $m = 0$، آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
0 &= (a_0 g_0)\, gr\,(b_0 h_0 + \cdots + b_n h_n) \\
&= a_0 g_0 grb_0 h_0 + \cdots + a_0 g_0 grb_n h_n \\
&= a_0 g_0 \sigma_g(r)\, gb_0 h_0 + \cdots + a_0 g_0 \sigma_g(r)\, gb_n h_n \\
&= a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(r))\, g_0 \sigma_g(b_0)\, gh_0 + \cdots + a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(r))\, g_0 \sigma_g(b_n)\, gh_n \\
&= a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_0))\, g_0 gh_0 + \cdots + a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_n))\, g_0 gh_n \\
&= a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_0))\, g_0 gh_0 + \cdots + a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_n))\, g_0 gh_n
\end{aligned}
$$

از آنجایی که در u.p ـ تکوار، قانون حذف برقرار است، پس $g_i gh_u \neq g_0 gh_v$ اگر $u \neq v$. بنابراین برای هر $0 \leq j \leq n$، $a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_j)) = 0$. از این‌که $\sigma_{g_0}.\sigma_g$ پوشا است، نتیجه می‌شود $a_0 R\sigma_{g_0}(\sigma_g(b_j)) = 0$. حال فرض کنید $m \geq 1$. حال دو زیر مجموعه‌ی $A = \{g_0 g, g_1 g, \cdots, g_m g\}$ و $B = \{h_0, h_1, \cdots, h_n\}$ از G را در نظر بگیرید، (که آن ها را در صورت لزوم مرتب سازی می‌کنیم). از آنجایی که G یک u.p ـ تکوار است، پس p و q ای وجود دارند بطوریکه $g_p gh_q$ نمایه منحصر به فرد دارد. فرض می‌کنیم $p = 0$ و $q = 0$. در این صورت از رابطه‌ی (۱.۲) ،نتیجه می‌گیریم $a_0 \sigma_{g_0}(\sigma_g(rb_0)) = 0$. بعلاوه چون $\sigma_{g_0}.\sigma_g$ پوشاست، پس $a_0 R\sigma_{g_0}(\sigma(b_0)) = 0$. بنابراین برای هر $s \in R$ داریم:

$$
\begin{aligned}
0 &= (a_0 g_0 + \cdots + a_m g_m)\, grb_0 s\,(b_0 h_0 + \cdots + b_n h_n) \\
&= (a_0 g_0 grb_0 s + a_1 g_1 grb_0 s + \cdots + a_m g_m grb_0 s)\,(b_0 h_0 + \cdots + b_n h_n) \\
&= (a_1 g_1 grb_0 s + \cdots + a_m g_m grb_0 s)(b_0 h_0 + \cdots + b_n h_n) \\
&= (a_1 g_1 + \cdots + a_m g_m) grb_0 s (b_0 h_0 + \cdots + b_n h_n) \\
&= (a_1 g_1 + \cdots + a_m g_m) gr (b_0 sb_0 h_0 + \cdots + b_0 sb_n h_n)
\end{aligned}
$$

پس طبق فرض استقرا برای هر $1 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i \sigma_{g_i}(\sigma_g(rb_0 sb_j)) = 0$. بنابراین

$$0 = a_i \sigma_{g_i}(\sigma_g(rb_0 sb_0)) = a_i \sigma_{g_i}(\sigma_g(r)) \sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0))\, \sigma_{g_i}(\sigma_g(s)) \sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0)).$$

از آنجایی که $\sigma_{g_i}.\sigma_g$ برای هر $1 \leq i \leq m$ پوشا است. نتیجه می‌گیریم که

$$a_i R\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0)) R\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0)) = 0$$

چون R نیم‌اول است، پس برای هر $1 \leq i \leq m$، $a_i R\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0)) = 0$. در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq m$، $a_i R\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_0)) = 0$. بنابراین از رابطه‌ی (۱.۲)، داریم:

$$0 = (a_0 g_0 + \cdots + a_m g_m)\, gr\, (b_1 h_1 + \cdots + b_n h_n)$$

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت: $a_i\sigma_{g_i}(\sigma_g(rb_j)) = 0$. پس برای هر $g \in G$ و $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_iR\sigma_{g_i}(\sigma_g(b_j)) = 0$. □

حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب (لوران)، $R[x;\sigma]$ ($R[x,x^{-1};\sigma]$) با بروریختی (خودریختی) σ روی حلقه‌ی R، یک حلقه‌ی تکواری اریب $R*G$ با $G = \{1, x, x^2, \cdots\}$ ($G = \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \cdots\}$) است که برای هر $r \in R$، ضرب آن از قانون $xr = \sigma_x(r) = \sigma(r)$ تبعیت می‌کند.

نتیجه ۴.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و σ یک بروریختی از حلقه‌ی R و $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_j x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو از $R[x;\sigma]$ باشند. در این صورت $f(x)R[x;\sigma]g(x) = 0$ است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح $k \geq 0$ و $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_iR\sigma^{i+k}(b_j) = 0$.*

نتیجه ۵.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و σ یک خودریختی از حلقه‌ی R باشد و $f(x) = \sum_{i=m}^{n} a_j x^i$ و $g(x) = \sum_{j=s}^{l} b_j x^j$ دو عضو از $R[x,x^{-1};\sigma]$ که $n, m, s, l \in \mathbb{Z}$ باشند. در این صورت $f(x)R[x,x^{-1};\sigma]g(x) = 0$ است، اگر وتنها اگر برای هر i, j و هر عدد صحیح t، $a_iR\sigma^{i+t}(b_j) = 0$.*

مثال بعدی نشان خواهد داد که شرط بروریختی در نتیجه‌ی (۴.۱.۲) شرط لازم است.

مثال ۶.۱.۲. فرض کنیم R یک زیرمجموعه از ماتریس‌های $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ روی میدان K باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{M \mid M = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij} + a \sum_{i=n+1}^{\infty} e_{ii} \quad \text{و}\ a, a_{ij} \in K\ \text{و}\ n \in \mathbb{N}\ \text{برای هر}\},$$

که $\{e_{ij}\}$ نمایانگر مجموعه‌ی ماتریس‌های واحد است. در این صورت R یک حلقه اول است. نگاشت $\sigma : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی

$$\sigma\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij} + a \sum_{i=n+1}^{\infty} e_{ii}\right) = ae_{11} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{(i+1)(j+1)} + a \sum_{i=n+2}^{\infty} e_{ii}$$

یک درونریختی از R است.

خاطرنشان می‌کنیم که $e_{11}\sigma(R) = Ke_{11}$. بنابراین برای هر عدد صحیح $t \geq 0$ داریم: $e_{11}xRx^te_{11} = Ke_{11}e_{(2+t)(2+t)}x^{t+1} = 0$ بنابراین $e_{11}xR[x;\sigma]e_{11} = 0$، اما $e_{11}R\sigma(e_{11}) \neq 0$.

ملاحظه ۷.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل یافته و σ یک درونریختی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از $R[x;\sigma]$ باشند. دراین صورت $f(x)R[x;\sigma]g(x)=0$ است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح $t\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=0$.*

برهان. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از $R[x;\sigma]$ باشند و $f(x)R[x;\sigma]g(x)=0$. پس، برای هر $r\in R$ و هر عدد صحیح $t\geq 0$،

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,x^tr\,(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=0 \qquad (۲.۲)$$

با استقرا روی $i+j$،ثابت می‌کنیم برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=0$. اگر $i+j=0$، آن‌گاه $a_0\sigma^t(b_0)=0$ و چون R تقلیل یافته است، لذا $a_0R\sigma^t(b_0)=0$. حال فرض می‌کنیم $1\leq k\leq m+n$ و اگر $i+j=0,1,\cdots,k-1$. آن‌گاه $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=0$، فرض کنیم $i+j=k$. چون

$$a_0\sigma^t(rb_k)+a_1\sigma^{1+t}(rb_{k-1})+\cdots+a_k\sigma^{k+t}(rb_0)=0 \qquad (۳.۲)$$

در رابطه‌ی (۳.۲)، r را با b_0 جایگزین می‌کنیم:

$$0=a_0\sigma^t(b_0b_k)+a_1\sigma^{1+t}(b_0b_{k-1})+\cdots+a_k\sigma^{k+t}(b_0b_0)$$

و چون σ همریختی است، پس $a_k\sigma^{k+t}(b_0)\sigma^{k+t}(b_0)=0$. از آنجایی که R تقلیل یافته است، نتیجه می‌گیریم که $a_k\sigma^{k+t}(b_0)=0$. پس $a_kR\sigma^{k+t}(b_0)=0$. بنابراین رابطه‌ی (۳.۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$0=a_0\sigma^t(rb_k)+a_1\sigma^{1+t}(rb_{k-1})+\cdots+a_{k-1}\sigma^{k-1+t}(rb_1) \qquad (۴.۲)$$

حال در رابطه‌ی (۴.۲)، r را با b_1 جایگزین می‌کنیم $a_{k-1}\sigma^{k-1+t}(b_1b_1)=0$، پس $a_{k-1}\sigma^{k-1+t}(b_1)=0$ با ادامه‌ی این روند، می‌توان نشان داد که برای هر $i+j=k$، $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=0$ و در نتیجه برای هر عدد صحیح $t\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=0$. □

فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول باشد. حال نتیجه (۴.۱.۲) و ملاحظه(۷.۱.۲) را برای توسیع اور $R[x;\sigma,\delta]$ بیان می‌کنیم.

لم ۸.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و σ یک خودریختی و δ یک تابع σ - مشتق از حلقه‌ی R باشد، و $R[x;\sigma,\delta]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

۱. *هرگاه برای هر عدد صحیح* $n \geq 0$، $aR\sigma^n(b) = 0$، *آن‌گاه برای هر عدد صحیح* $m \geq 0$ $aR\delta^m(b) = 0$.

۲. *هرگاه برای هر عدد صحیح* $n \geq 0$، $aR\sigma^n(b) = 0$،*آن‌گاه برای همه‌ی اعداد صحیح* $m_i, n_j \geq 0$، $aR\sigma^{n_1}\delta^{m_1}\cdots\sigma^{n_t}\delta^{m_t}(b) = 0$.

برهان. (۱).فرض کنیم $a, b \in R$ و هر عدد صحیح $n \geq 0$، $aR\sigma^n(b) = 0$. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم که برای هر عدد صحیح $m \geq 0$، $aR\delta^m(b) = 0$.

اگر $m = 0$، آن‌گاه $aR\delta^\circ(b) = aRb = 0$.

حال فرض کنیم $m \geq 1$. از آنجایی که σ خودریختی از حلقه‌ی R است، پس برای عضوی مانند $a' \in R$، $a = \sigma(a')$. و برای هر $n \geq 0$ داریم:

$$\sigma(a'R\sigma^n(b)) = \sigma(a')\sigma(R\sigma^n(b)) = aR\sigma^{n+1}(b) = 0.$$

بنا به فرض استقرا، $a'R\delta^{m-1}(b) = 0$.

حال از آنجایی که $\delta(a'R\delta^{m-1}(b)) = 0$ و با توجه به قانون ضرب در حلقه‌ی $R[x;\sigma,\delta]$ داریم:

$$0 = \delta(a'R\delta^{m-1}(b)) = \delta(a'R)\delta^{m-1}(b) + \sigma(a'R)\delta^m(b)$$

بنابر این $\sigma(a')R\delta^m(b) = -\delta(a'R)\delta^{m-1}(b)$. با توجه به فرض استقرا $aR\delta^{m-1}(b) = 0$، و از آنجایی که R نیم‌اول است، نتیجه می‌گیریم $\delta^{m-1}(b)Ra = 0$. بنابراین

$$(aR\delta^m(b)R)^2 = \sigma(a')R\delta^m(b)RaR\delta^m(b)R = -\delta(a'R)\left(\delta^{m-1}(b)Ra\right)R\delta^m(b)R = 0$$

و چون R نیم‌اول است، پس $aR\delta^m(b) = 0$.

(۲). فرض کنیم $a, b \in R$ و برای هر عدد صحیح $n \geq 0$، $aR\sigma^n(b) = 0$. یا بطور معادل؛ برای هر عدد صحیح $n_t \geq 0$، $aR\sigma^i(\sigma^{n_t}(b)) = 0$. با توجه به قسمت (۱)، برای هر $m_{t-1} \geq 0$، $aR\sigma^{m_{t-1}}(\sigma^{n_t}(b)) = 0$. بعلاوه از آنجایی که برای هر $n \geq 0$، طبق برهان قسمت (۱)، $a'R\delta^m(b) = 0$، و چون $a = \sigma(a')$، پس برای هر $m \geq 0$، $aR\sigma(\delta^m(b)) = 0$. بطور مشابه برای هر $n \geq 0$، $a''R\sigma^n(b) = 0$. پس $aR\delta^m(b) = 0$، ومانند قسمت (۱)، از آنجایی که $a = \sigma^2(a'')$، پس برای هر $m \geq 0$، $aR\sigma^2(\delta^m(b)) = 0$.

با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد برای هر عدد صحیح $m_i, n_j \geq 0$، $aR\sigma^{n_1}\delta^{m_1}\cdots\sigma^{n_t}\delta^{m_t}(b) = 0$. □

قضیه ۹.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و σ یک خودریختی از مرتبه‌ی متناهی باشد و*

$f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\sigma,\delta]$ باشند. در این صورت برای هر عدد صحیح $m_u,n_u\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^{n_1}\delta^{m_1}\cdots\sigma^{n_t}\delta^{m_t}(b_j)=0$، اگر وتنها اگر $f(x)R[x;\sigma,\delta]g(x)=0$.

برهان. کافی است لزوم را نشان دهیم. فرض کنیم که $f(x)R[x;\sigma,\delta]g(x)=0$. در نتیجه برای هر $r\in R$ و هر عدد صحیح $t\geq 0$ داریم:

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,rx^t\,(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=0 \tag{۵.۲}$$

با استقرا روی $i+j$ ثابت می‌کنیم برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$ $a_iR\sigma^l(b_j)=0$.

اگر $i+j=0$، آن‌گاه $a_0rx^tb_0=0$ و لذا برای هر عدد صحیح $t\geq 0$، $a_0R\sigma^t(b_0)=0$. حال فرض کنیم $i+j\geq 1$. طبق رابطه‌ی (۵.۲)، $a_m\sigma^m(r)\sigma^{m+t}(b_n)=0$. حال از آنجایی که σ از مرتبه‌ی متناهی است، برای هر عدد صحیح $l\geq 0$، $a_mR\sigma^l(b_n)=0$. چون $f(x)R[x;\sigma,\delta]g(x)=0$، لذا برای هر $r,s\in R$ داریم:

$$\begin{aligned}0&=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,rx^t\sigma^{-(m+t)}(a_m)s\,(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)\\&=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,rx^t\left(\sigma^{-(m+t)}(a_m)sb_0+\cdots+\sigma^{-(m+t)}(a_m)sb_{n-1}x^{n-1}\right)\end{aligned}$$

در نتیجه $a_m\sigma^m(r)\sigma^{m+t}(\sigma^{-(m+t)}(a_m)sb_{n-1})=0$ و لذا $a_mRa_mR\sigma^{m+t}(b_{n-1})=0$. چون R نیم‌اول است، پس $a_mR\sigma^{m+t}(b_{n-1})=0$. بنابراین برای هر عدد صحیح $l\geq 0$، $a_mR\sigma^l(b_{n-1})=0$.
با ادامه‌ی این روند می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq j\leq n$، $a_mR\sigma^l(b_j)=0$ بنابراین بنابه لم (۸.۱.۲)، رابطه‌ی (۵.۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\left(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}\right)rx^t\,(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=0$$

پس طبق استقرا برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq i\leq m-1$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^l(b_j)=0$.
بنابراین برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq j\leq n$، $a_mR\sigma^l(b_j)=0$.
پس برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\sigma^l(b_j)=0$، و بنا به لم (۸.۱.۲)، نتیجه‌ی دلخواه محقق می‌شود.

□

نتیجه ۱۰.۱.۲. *فرض کنیم R نیم‌اول باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\delta]$ باشند. در این صورت $f(x)R[x;\delta]g(x)=0$ است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح $l\geq 0$ و $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_iR\delta^l(b_j)=0$.*

مثال بعد نشان خواهد داد که در قضیه (۹.۱.۲)، از مرتبه‌ی متناهی بودن σ، یک شرط لازم است.

مثال ۱۱.۱.۲. فرض کنیم F یک میدان باشد و برای $i \in \mathbb{Z}$، $F_i = F$. همچنین R یک F- زیر جبر از $\prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i$ باشد که با $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i$ و $1_{\prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i}$ تولید می‌شود. در این صورت داریم:

$$R = \{(a_i) \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i \mid \text{ها تقریباً ثابت هستند } a_i\}$$

اگر σ یک خودریختی از R باشد که با ضابطه‌ی $\sigma((a_i)) = (a_{i+1})$ تعریف می‌شود، آن‌گاه σ از مرتبه‌ی متناهی نیست. حال فرض کنیم $e_1 = (a_1) \in R$ که $a_1 = 1$ و برای هر $i \neq 1$، $a_i = 0$. در این صورت $e_1 x R[x;\sigma] e_1 x = 0$ است، اما $e_1 R e_1 \neq 0$.

حال ملاحظه‌ی (۷.۱.۲) را برای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب، بیان می‌کنیم.

ملاحظه ۱۲.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول و σ یک بروریختی از R باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو در $R[[x;\sigma]]$ باشند. در این صورت $f(x)R[[x;\sigma]]g(x) = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $i,j,t \geq 0$، $a_i R \sigma^{i+t}(b_j) = 0$.*

برهان. فرض کنیم $f(x)R[[x;\sigma]]g(x) = 0$. یا بطور معادل برای هر $r \in R$ و هر عدد صحیح $t \geq 0$، $f(x)x^t r g(x) = 0$. بنابراین داریم:

$$a_0\sigma^t(rb_0) = 0 \qquad (0)$$
$$a_0\sigma^t(rb_1) + a_1\sigma^{t+1}(rb_0) = 0 \qquad (1)$$
$$\vdots$$
$$a_0\sigma^t(rb_n) + a_1\sigma^{t+1}(rb_{n-1}) + \cdots + a_n\sigma^{t+n}(rb_0) = 0 \qquad (n)$$

از رابطه‌ی (۰)، نتیجه می‌گیریم که $a_0\sigma^t(rb_0) = 0$.

حال در رابطه‌ی (۱)، r را با $rb_0 s$، که $s \in R$، جایگزین می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$0 = a_0\sigma^t(rb_0 sb_1) + a_1\sigma^{1+t}(rb_0 sb_0) = a_1\sigma^{1+t}(rb_0 sb_0).$$

پس $a_1 R\sigma^{1+t}(b_0) R\sigma^{1+t}(b_0) = 0$. از آنجایی که R نیم‌اول است، نتیجه می‌گیریم که $a_1 R\sigma^{1+t}(b_0) = 0$، و لذا برای هر $r \in R$، $a_1\sigma^{1+t}(rb_0) = 0$. پس از رابطه‌ی (۱)، برای هر $r \in R$، $a_0\sigma^t(rb_1) = 0$.

حال فرض کنیم برای هر $t \geq 0$ و $0 \leq i+j \leq n-1$، $a_i R\sigma^{i+t}(rb_j) = 0$. در رابطه‌ی (n)، r را

با $rb_\circ s$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت $a_n\sigma^{n+t}(rb_\circ sb_\circ) = \circ$ و بنابراین $a_n\sigma^{n+t}(rb_\circ) = \circ$. با همین روش رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$a_\circ\sigma^t(rb_\circ) + a_1\sigma^{1+t}(rb_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}\sigma^{n-1+t}(rb_1) = \circ \qquad (n')$$

حال در رابطه‌ی(n')، r را با $rb_1 s$، که $s \in R$ است، جایگزین می‌کنیم. در این صورت چون R نیم‌اول است، لذا $a_{n-1}\sigma^{n-1+t}(rb_1) = \circ$.

با ادامه‌ی این روند می‌توان ثابت کرد که برای هر $t \geq \circ$ و $\circ \leq i + j \leq n$، $a_i\sigma^{i+t}(rb_j) = \circ$. در نتیجه برای هر $t, i, j \geq \circ$، $a_i\sigma^{i+t}(rb_j) = \circ$.

□

فصل ۳

حلقه‌های σ -آرمنداریز اریب

۱.۳ حلقه σ-آرمنداریز اریب

فرض کنیم R یک حلقه و σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. در این فصل به معرفی حلقه‌های σ-آرمنداریز اریب که توسیعی از حلقه‌های σ -صلب و حلقه‌های آرمنداریز هستند می‌پردازیم و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بعلاوه به مطالعه‌ی روابط بین حلقه‌های بئر و حلقه‌های $p.p$ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. R را σ-**آرمنداریز اریب**[1] می‌نامیم هرگاه $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ و $q = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ **دو عضو** از حلقه‌ی چندجمله‌ای های اریب

$R[x;\sigma]$ باشند و $pq = 0$، آن گاه،برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$.

بدیهی است که R یک حلقه‌ی آرمنداریز است اگر وتنها اگر یک حلقه‌ی I_R -آرمنداریز اریب باشد. (I_R درونریختی همانی روی حلقه‌ی R است.)

اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد، آن‌گاه I_R-آرمنداریز اریب است.

اما حلقه‌ی I_R-آرمنداریز اریبی وجود دارد که I_R-صلب(تقلیل یافته) نیست.

مثال ۲.۱.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{n^2}$، که $\mathbb{Z}_{n^2}$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی n^2 و n یک عدد صحیح مثبت $(n \geq 2)$ است. در این صورت R یک حلقه‌ی آرمنداریز جابجایی است اما تقلیل یافته نیست. پس R، I_R-آرمنداریز اریب است اما I_R-صلب نیست.

خاطر نشان می‌کنیم که هر زیر حلقه از حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب، σ-آرمنداریز اریب است.

قضیه ۳.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی σ-صلب باشد و $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ و $q = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\sigma,\delta]$ باشند. در این صورت $pq = 0$ اگر وتنها اگر برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_ib_j = 0$.*

برهان. فرض کنیم $pq = 0$. در این صورت

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{m} a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_jx^j\right) &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_ix^ib_jx^j\right)\\ &= c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_1x + c_0\\ &= 0\end{aligned}$$

[1] σ-skew Armendariz

ادعا می‌کنیم برای $s+t\geq 0$، $a_sb_t=0$. برهان را با استقرا روی $s+t$ ادامه می‌دهیم. برای $s+t=m+n$ داریم: $c_{m+n}=a_m\sigma^m(b_n)=0$ و بنا به لم (۷.۲.۱)، $a_mb_n=0$. حال فرض کنیم ادعای ما برای $s+t>k\geq 0$ برقرار باشد. در این صورت بنا به قضیه (۸.۲.۱)، برای $l=m+n,m+n-1,\cdots,k+1$ داریم: $\sum\limits_{i+j=l}a_ix^ib_jx^j=0$. بنا به لم (۷.۲.۱)، برای هر $i+j\geq k+1$ و برای هر عدد صحیح نامنفی $i_1,\cdots,i_t,j_1,\cdots,j_t$ ، $a_i\sigma^{i_1}\delta^{j_1}\sigma^{i_2}\delta^{j_2}\cdots\sigma^{i_t}\delta^{j_t}(b_j)=0$. پس

$$c_k=\sum_{i+j=k}a_i\sigma^i(b_j)=0 \qquad (1)$$

و لذا برای $s+t>k$، $a_sb_t=0$ و $a_s\sigma^sb_t=0$. از آنجایی که R تقلیل یافته است، پس $\sigma^sb_ta_s=0$. اگر رابطه (۱) را از سمت راست در a_k ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{i+j=k}a_i\sigma^i(b_j)\right)a_k=a_k\sigma^k(b_0)=0.$$

لذا $(a_k\sigma^k(b_0))^2=0$. چون R تقلیل یافته است، $a_k\sigma^k(b_0)=0$ و $a_kb_0=0$. پس رابطه(۱) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{\substack{i+j=k\\0\leq i\leq k-1}}a_i\sigma^i(b_j)=0 \qquad (2)$$

حال رابطه(۲) را از سمت راست در a_{k-1} ضرب می‌کنیم، $a_{k-1}\sigma^{k-1}(b_1)a_{k-1}=0$. در این صورت از نتایج پاراگراف قبل نتیجه می‌گیریم: $a_{k-1}\sigma^{k-1}(b_1)=0$ و $a_{k-1}b_1=0$. با ادامه این روند می‌توان نشان داد برای هر i,j که $i+j=k$، $a_ib_j=0$. در نتیجه برای $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $a_ib_j=0$.
□

مثال ۴.۱.۳. حلقه‌ی $R=\left\{\begin{pmatrix}a&t\\0&a\end{pmatrix}|a\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{Q}\right\}$ را در نظر می‌گیریم.($\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ به ترتیب نمایانگر حلقه‌ی اعداد صحیح و حلقه‌ی اعداد گویا هستند.) R یک حلقه‌ی جابجایی است.

حال خودریختی $\sigma:R\longrightarrow R$ را با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix}a&\frac{t}{2}\\0&a\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a&t\\0&a\end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم.

۱. R، σ-صلب نیست: چون $\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}\sigma\left(\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}\right)=0$، اما اگر $t\neq 0$، آن‌گاه $\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$.

۲. R، σ -آرمنداریز اریب است:

فرض کنیم $p = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$ و $q = B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n$ دو عضو از $R[x;\sigma,]$ باشند، و $pq = 0$. قرار می‌دهیم: $A_i = \begin{pmatrix} a_i & t_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ و $B_j = \begin{pmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$. نشان می‌دهیم برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $A_i\sigma^i(B_j) = 0$.

حالت اول: فرض کنیم k وجود داشته باشد به طوری که $a_k \neq 0$ و $A_0 = \cdots = A_{k-1} = 0$.

چون $A_0B_k + A_1\sigma(B_{k-1}) + \cdots + A_{k-1}\sigma^{k-1}(B_1) + A_k\sigma^k(B_0) = 0$، پس: $A_k\sigma^k(B_0) = 0$. یعنی؛

$$\begin{pmatrix} a_k & t_k \\ 0 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k s_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_kb_0 & a_k\left(\frac{1}{2}\right)^k s_0 + t_kb_0 \\ 0 & a_kb_0 \end{pmatrix} = 0$$

بنابراین $a_kb_0 = 0$ و لذا $a_k\left(\frac{1}{2}\right)^k s_0 = 0$. در نتیجه $b_0 = 0$ و $s_0 = 0$. $B_0 = 0$. از این که $A_0B_{k+1} + A_1\sigma(B_k) + \cdots + A_k\sigma^k(B_1) + A_{k+1}\sigma^{k+1}(B_0) = 0$ نتیجه می‌گیریم: $A_k\sigma^k(B_1) = 0$ و با استدلالی مشابه سطر قبل می‌توان نشان داد $B_1 = 0$. با ادامه‌ی این روند نتیجه می‌گیریم: $B_0 = B_1 = \cdots = B_n = 0$.

حالت دوم: فرض کنیم k ای وجود داشته باشد به طوری که $B_k \neq 0$ و $B_0 = \cdots = B_{k-1} = 0$.

چون $A_0B_k + A_1\sigma(B_{k-1}) + \cdots + A_k\sigma^k(B_0) = 0$ پس $A_0B_k = 0$ و لذا $A_0 = 0$. با استدلالی مشابه حالت اول، از $A_0B_{k+1} + A_1\sigma(B_k) + \cdots + A_{k+1}\sigma^{k+1}(B_0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $A_1\sigma(B_k) = 0$ و همچنین $A_1 = 0$. به همین نحو می‌توان نشان داد: $A_0 = A_1 = \cdots = A_m = 0$.

حالت سوم: اگر برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، داشته باشیم: $A_i = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B_j = \begin{pmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، آن‌گاه:

$$A_i\sigma^i(B_j) = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^i s_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

پس طبق حالت اول،دوم و سوم نتیجه می‌گیریم که R حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب است.

مثال بعد نشان می‌دهد که درونریختی σ از حلقه‌ی آرمنداریز R وجود دارد بطوریکه R σ-آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۵.۱.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$ ($\mathbb{Z}_2$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۲ است.) چون R حلقه‌ی تقلیل یافته جابجایی است پس آرمنداریز است. حال درونریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی

$\sigma((a,b)) = (b,a)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $p = (1,0) + (1,0)x$ و $q = (0,1) + (1,0)x$ در $R[x;\sigma]$ را در نظر بگیریم در این صورت $pq = 0$، اما $(1,0)\sigma((0,1)) \neq 0$. بنابراین R σ-آرمنداریز اریب نیست. لذا $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته نیست.

قضیه ۶.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است اگر وتنها اگر R، σ-صلب باشد.*

برهان. کافی است نشان دهیم اگر $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته باشد، آن‌گاه R σ-صلب است. فرض کنیم $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته باشد. نشان می‌دهیم σ یک به یک است. فرض کنیم $0 \neq r \in R$ وجود داشته باشد که $\sigma(r) = 0$. بنابراین $(rx)^2 = (rx)(rx) = r\sigma(r)x^2 = 0$ پس $rx = 0$ در $R[x;\sigma]$، که یک تناقض است. پس σ تکریختی است. پس بنا به قضیه (۸.۲.۱)، R σ-صلب است. □

نتیجه ۷.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. اگر R σ-صلب باشد، آن‌گاه R، σ-آرمنداریز اریب است.*

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس نتیجه‌ی قبل برقرار نیست.

مثال ۸.۱.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_2[x]$، و $\sigma : R \longrightarrow R$ یک درونریختی با ضابطه‌ی $\sigma(f(x)) = f(0)$ باشد. در این صورت:

۱. R σ-آرمنداریز اریب است.

۲. R σ-صلب نیست.

حل:(۱).حلقه‌ی $R[y;\sigma] = \mathbb{Z}_2[x][y;\sigma]$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم $p = f_0 + f_1y + \cdots + f_my^m$ و $q = g_0 + g_1y + \cdots + g_ny^n$ دو عضو در $R[y;\sigma]$ باشند و $pq = 0$.

فرض کنیم s ای وجود داشته باشد به طوری که $f_s \neq 0$ و $0 \leq s \leq m$،
$f_0 = 0 = \cdots = f_{s-1} = 0$. چون $f_0g_s + f_1\sigma(g_{s-1}) + \cdots + f_s\sigma^s(g_0) = 0$ پس $f_s\sigma^s(g_0) = 0$ و لذا $f_sg_0(0) = 0$ بنابراین $g_0(0) = 0$، و چون $f_0g_{s+1} + f_1\sigma(g_s) + \cdots + f_s\sigma^s(g_1) + f_{s+1}\sigma^{s+1}(g_0) = 0$ پس $f_s\sigma^s(g_1) = f_sg_1(0) = 0$ در نتیجه $g_1(0) = 0$. به همین نحو می‌توان نشان داد
$g_0(0) = g_1(0) = \cdots = g_n(0) = 0$.بنابراین برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $f_i\sigma^i(g_j) = 0$.
بنابراین R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب است.
(۲). چون $(xy)^2 = x\sigma(x)y^2 = x/0.y^2 = 0$، اما $xy \neq 0$. پس $R[y;\sigma]$ تقلیل یافته نیست و لذا σ-صلب نیست.

توجه داریم که اگر σ درونریختی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه، نگاشت $\overline{\sigma}: R[x] \longrightarrow R[x]$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i) x^i$ یک درونریختی از $R[x]$ است، که توسیعی از σ است.

قضیه ۹.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد و $\sigma^t = I_R$، (t یک عدد صحیح مثبت است.) در این صورت R σ-آرمنداریز اریب است اگر وتنها اگر $R[x]$، $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب باشد.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R σ-آرمنداریز اریب باشد و $p(y) = f_0 + f_1 y + \cdots + f_m y^m$ و $q(y) = g_0 + g_1 y + \cdots + g_n y^n$ دو عضو در $R[x][y;\sigma]$ باشند که $p(y)q(y) = 0$. برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، قرار می‌دهیم $f_i = a_{i_0} + a_{i_1} x + \cdots + a_{w_i} x^{w_i}$ و $g_j = b_{j_0} + b_{j_1} x + \cdots + b_{v_j} x^{v_j}$ که $a_{i_0}, \cdots, a_{w_i}, b_{j_0}, \cdots, b_{v_j} \in R$. حال برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$ ، عدد k را طوری در نظر می‌گیریم که $k > max\{deg(f_i), deg(g_i)\}$ ، ($deg(f)$ نمایانگر درجه‌ی یک چندجمله‌ای f در $R[x]$ است و درجه‌ی چندجمله‌ای ثابت را صفر درنظر می‌گیریم.) فرض کنیم $p(x^{tk}) = f_0 + f_1 x^{tk} + \cdots + f_m x^{mtk}$ و $q(x^{tk}) = g_0 + g_1 x^{tk} + \cdots + g_n x^{ntk}$ دو عضو در $R[x]$ باشند.

در این صورت اجتماع مجموعه‌ی ضرایب f_i ها(g_i ها) با مجموعه ضرایب $p(x^{tk})$ ($q(x^{tk})$) برابر است.

از آنجایی که $p(y)q(y) = 0$ و x با عناصر R در حلقه‌ی چندجمله‌ای های $R[x]$ جابجا می‌شود و $\sigma^{tk} = I_R$ ، از این رو $p(x^{tk})q(x^{tk}) = 0$. چون حلقه‌ی R، σ -آرمنداریز اریب است، پس برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$ و $0 \leq l_i \leq w_i$ و $0 \leq s_j \leq v_j$، $a_{l_i}\sigma^{l_i+itk}(b_{s_j}) = a_{l_i}\sigma^{l_i}(b_{s_j}) = 0$ لذا برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $f_i \sigma^i(g_j) = 0$ و لذا $R[x]$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.

بعکس: فرض کنیم $R[x]$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب باشد. از آنجایی که R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی $R[x]$ است، پس R ، σ-آرمنداریز اریب است.

□

فرض کنیم R_i یک حلقه و برای هر $i \in I$، σ_i درونریختی از R_i باشد. درونریختی $\overline{\sigma}: \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}((a_i)) = (\sigma_i(a_i))$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان نشان داد که $\prod_{i \in I} R_i$، $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است اگر وتنها اگر هر R_i، σ_i-آرمنداریز اریب باشد.

برای ایده‌آل I از R، اگر $\sigma(I) \subseteq I$، آن‌گاه $\overline{\sigma}: \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{I}$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}(a+I) = \sigma(a) + I$ یک درونریختی است.

مثال بعدی نشان می‌دهد که تصویر همریخت یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب لزوماً σ-آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۰.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{Z}_4$، حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۴ باشد. حلقه‌ی $R=\left\{\begin{pmatrix} a & \bar{b}\\ 0 & a\end{pmatrix} | a\in\mathbb{Z}, \bar{b}\in\mathbb{Z}_4\right\}$ و درونریختی $\sigma : R\longrightarrow R$ را با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} a & \bar{b}\\ 0 & a\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} a & \overline{-b}\\ 0 & a\end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت R، σ-آرمنداریز اریب است. ایده‌آل $I=\left\{\begin{pmatrix} a & \bar{0}\\ 0 & a\end{pmatrix} | a\in 4\mathbb{Z}\right\}$ از R و حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I}\cong\left\{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b}\\ 0 & \bar{a}\end{pmatrix} | \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_4\right\}$ را در نظر می‌گیریم. چون $\left(\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0}\\ 0 & \bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1}\\ 0 & \bar{2}\end{pmatrix}x\right)^2=0$، اما $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1}\\ 0 & \bar{2}\end{pmatrix}\bar{\sigma}\left(\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0}\\ 0 & \bar{2}\end{pmatrix}\right)\neq 0$ پس حلقه‌ی $\frac{R}{I}$، $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز نیست.

قضیه ۱۱.۱.۳. *فرض کنیم σ یک تکریختی از حلقه‌ی یکدار R باشد و $\sigma(1)=1$. در این صورت حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle}$ یک حلقه‌ی $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است اگر و تنها اگر R، σ- صلب باشد.* (*$\langle x^2\rangle$ ایده‌آل تولید شده توسط x^2 است.*)

برهان. فرض کنیم $\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle}$ یک حلقه‌ی $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز اریب باشد و $\sigma(r)r=0$. در نتیجه

$$(\sigma(r)-\bar{x}y)(r+\bar{x}y)=\sigma(r)r+(\sigma(r)\bar{x}-\bar{x}\sigma(r))y-\sigma(1)\bar{x}^2y^2=0$$

($\bar{x}$ نمایانگر $x+\langle x^2\rangle$ در حلقه‌ی $\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle}$ است). چون در حلقه‌ی $(\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle})[y;\sigma]$، $\sigma(r)\bar{x}=\bar{x}\sigma(r)$ و $\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle}$، $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است. لذا $\sigma(r)\bar{x}=0$. چون σ یک به یک است پس $r=0$. در نتیجه R، σ - صلب است.

بعکس: فرض کنیم R، σ-صلب باشد، پس $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است. فرض کنیم $\bar{p}=\overline{f_0}+\overline{f_1}y+\cdots+\overline{f_m}y^m$ و $\bar{q}=\overline{g_0}+\overline{g_1}y+\cdots+\overline{g_n}y^n$ دو عضو در حلقه‌ی $(\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle})[y;\sigma]$ باشند که $\overline{pq}=0$ که برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$، $a_{i_0},a_{i_1},b_{j_0},b_{j_1}\in R$، $\overline{f_i}=a_{i_0}+a_{i_1}\bar{x}$ و $\overline{g_j}=b_{j_0}+b_{j_1}\bar{x}$. چون $\bar{x}y=y\bar{x}$ و $\sigma(1)=1$ و برای هر $a\in R$، $a\bar{x}=\bar{x}a$ بنابراین $\bar{p}=h_0+h_1\bar{x}$ و $\bar{q}=k_0+k_1\bar{x}$ که $h_0=\sum_{i=0}^{m}a_{i_0}y^i$ و $h_1=\sum_{i=0}^{m}a_{i_1}y^i$ و $k_0=\sum_{j_0}^{n}b_{j_0}y^j$ و $k_1=\sum_{j_0}^{n}b_{j_1}y^j$. چون $\overline{pq}=0$ و $\bar{x}^2=0$، پس

$$\bar{0}=\overline{pq}=h_0k_0+(h_0k_1+h_1k_0)\bar{x}+h_1k_1\bar{x}^2=h_0k_0+(h_0k_1+h_1k_0)\overline{x_0}$$

بنابراین $h_0k_0=0$ و $h_0k_1+h_1k_0=0$ در $R[y;\sigma]$. از آنجایی که $R[y;\sigma]$ ($\cong R[x;\sigma]$) تقلیل یافته است پس $k_0h_0=0$ و $(k_0h_1)^2=k_0(h_0k_1+h_1k_0)h_1=0$. بنابراین $k_0h_1=0$ و همچنین $h_1k_0=0$. طبق نتیجه‌ی (۷.۱.۳)، R، σ -آرمنداریز اریب است. بنابراین برای هر $0\le i\le m$ و

$0 \leq j \leq n$، $a_{0_i}\sigma^i(b_{1_j}) = 0$ و $a_{1_i}\sigma^i(b_{0_j}) = 0$. همچنین برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $f_i\overline{\sigma}^i(\overline{g_i}) = \overline{0}$ بنابراین حلقه‌ی $(\frac{R[x]}{\langle x^2\rangle})$، $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است. □

قضیه ۱۲.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد و I ایده‌آلی σ -صلب از حلقه‌ی R باشد که $\sigma(I) \subseteq I$. در این صورت $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. I یک ایده‌آل کاملاً نیم‌اول از R است. در حقیقت اگر $a^2 \in I$، از آنجایی که $\sigma(I) \subseteq I$ است پس $a\sigma(a)\sigma(a\sigma(a)) = a\sigma(a^2)\sigma^2(a) \in I$ و از آنجایی که I، یک ایده‌آل σ-صلب است، لذا $a\sigma(a) \in I$ و در نتیجه $a \in I$. پس $\frac{R}{I}$، $\overline{\sigma}$ -صلب است و طبق لم(۱۰.۲.۱) و قضیه (۳.۱.۳)، $\frac{R}{I}$، $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.

□

مثال بعد نشان می‌دهد که شرط σ-صلب بودن ایده‌آل I، شرط اساسی است.

مثال ۱۳.۱.۳. در مثال (۱۰.۱.۳)، ایده‌آل $I = \left\{\begin{pmatrix} a & \overline{0} \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in 4\mathbb{Z}\right\}$ از R ، σ -صلب نیست. زیرا $\begin{pmatrix} 2 & \overline{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\sigma\left(\begin{pmatrix} 2 & \overline{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \in I$ ، اما $\begin{pmatrix} 2 & \overline{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin I$.

قضیه ۱۴.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از دامنه‌ی R باشد. در این صورت R، σ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. فرض کنیم $p = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ و $q = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ باشند که $pq = 0$. فرض کنیم $0 \leq s \leq m$ وجود داشته باشد که $a_s \neq 0$ و $a_0 = \cdots = a_{s-1} = 0$. اگر $m < s$ باشد، آن‌گاه، $a_s = 0$. پس $a_0b_s + a_1\sigma(b_{s-1}) + \cdots + a_s\sigma^s(b_0) = 0$. بنابراین $a_s\sigma^s(b_0) = 0$ و $\sigma^s(b_0) = 0$. چون $a_0b_{s+1} + a_1\sigma(b_s) + \cdots + a_s\sigma^s(b_1) + a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = 0$، پس $a_s\sigma^s(b_1) = 0$ و از آنجایی که $\sigma^{s+1}(b_0) = \sigma(\sigma^s(b_0)) = 0$ لذا $\sigma^s(b_1) = 0$. با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد $\sigma^s(b_0) = \sigma^s(b_1) = \cdots = \sigma^s(b_n) = 0$. بنابراین برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. چون برای $0 \leq i \leq s-1$، $a_i = 0$، و برای هر $s \leq i \leq m$، $\sigma^i(b_j) = 0$. لذا R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب است.

□

فرض کنیم P ایده‌آلی کاملاً نیم‌اول از حلقه‌ی R و σ یک درونریختی از آن باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی (۱۲.۱.۳)، $\frac{R}{P}$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.

مثال بعد نشان می‌دهد حلقه‌ی آبلی R و خودریختی σ از آن وجود دارد بطوری که $P(R)$ یک ایده‌آل σ-صلب و کاملاً نیم‌اول است و حلقه‌های $\dfrac{R}{P(R)}$ و $P(R)$ به ترتیب $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب و σ -آرمنداریز اریب هستند. اما R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۵.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد. حلقه‌ی

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ ۰ & b \end{pmatrix} \mid a-b \equiv c \equiv ۰ (mod ۲)\ ,\ a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$$

و درونریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ را باضابطه‌ی $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & c \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \mid c \equiv ۰\ (mod ۲) \right\}$ ایده‌آلی کاملاً نیم‌اول است و σ -آرمنداریز اریب است.

حل: بوضوح $\dfrac{R}{P(R)} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} \mid a-b \equiv ۰\ (mod ۲),\ a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. از این که

$$\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix}^۲ = \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^۲ & ۰ \\ ۰ & b^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

نتیجه می‌شود که $a^۲ = ۰$ و $b^۲ = ۰$ و از آنجایی که $a,b \in \mathbb{Z}$ پس $a = ۰$ و $b = ۰$. پس $\dfrac{R}{P(R)}$ یک حلقه‌ی تقلیل یافته است. بنابراین $P(R)$ یک ایده‌آل کاملاً نیم‌اول است. چون تنها خودتوان‌های حلقه‌ی R، $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ هستند، پس R آبلی است.

از آنجایی که $\sigma(P(R)) = P(R)$ و اگر $A\sigma(A) \in P(R)$، آن‌گاه، $A \in P(R)$، پس $P(R)$ یک ایده‌آل σ-صلب است. چون $\dfrac{R}{P(R)}$ حلقه‌ی تقلیل یافته است و $\overline{\sigma}$ ، درونریختی همانی از $\dfrac{R}{P(R)}$ است، پس $\dfrac{R}{P(R)}$، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.

فرض کنیم $p = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x$ و $q = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ باشند و چون $pq = ۰$، اما $\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \sigma\left(\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix}\right) \neq ۰$، بنابراین R، σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال بعدی نشان می‌دهد که حلقه‌ی R و خودریختی σ از آن (σ همانی نیست.)، وجود دارد که برای هر ایده‌آل ناصفر I، حلقه‌های $\dfrac{R}{I}$ و I به ترتیب $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب و σ-آرمنداریز اریب هستند، اما R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۶.۱.۳. فرض کنیم F یک میدان باشد. حلقه‌ی $R = \begin{pmatrix} F & F \\ ۰ & F \end{pmatrix}$ و درونریختی σ از R را با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} a & -b \\ ۰ & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم.

اگر $p=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}x$ و $q=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}x$ دو عضو در $R[x;\sigma]$ باشند، آن‌گاه $pq=0$ ، اما $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\sigma\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\neq 0$ ، پس R σ-آرمندآریز اریب نیست. خاطر نشان می‌کنیم که ایده‌آل های سره‌ی ناصفر R، $\begin{pmatrix}F&F\\0&0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0&F\\0&F\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0&F\\0&0\end{pmatrix}$ هستند.

اگر $I=\begin{pmatrix}F&F\\0&0\end{pmatrix}$ ، آن‌گاه $\frac{R}{I}\cong F$ و چون $\frac{R}{I}$ دامنه است بنا به قضیه(۱۲.۱.۳)، حلقه‌ی $\frac{R}{I}$، $\overline{\sigma}$ -آرمندآریز اریب است.

حال نشان می‌دهیم I، σ -آرمندآریز اریب است.

فرض کنیم $p=A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m$ و $q=B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n$ دو عضو در $I[x;\sigma]$ باشند که برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$
$A_i=\begin{pmatrix}a_i&b_i\\0&0\end{pmatrix}$ و $B_j=\begin{pmatrix}c_j&d_j\\0&0\end{pmatrix}$ ، و $pq=0$. فرض کنیم $A_0\neq 0$ و $B_0\neq 0$. در این صورت $a_0c_0=0=a_0d_0$ که اگر $a_0\neq 0$ آن‌گاه، $c_0=0$ و $d_0=0$ که یک تناقض است. پس $a_0=0$. بنابراین برای هر $0\leq j\leq n$، $A_0B_j=0$. بنابراین $A_1\sigma(B_0)=0$ ضریب x در pq است. پس $a_1c_0=0=a_1d_0$. اگر $a_1\neq 0$ آن‌گاه، $c_0=0$ و $d_0=0$ که یک تناقض است. پس برای هر $0\leq j\leq n$، $A_1\sigma(B_j)=0$ است.

با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد که برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $A_i\sigma^i(B_j)=0$. بنابراین I یک حلقه‌ی σ-آرمندآریز اریب است.

حال فرض کنیم $J=\begin{pmatrix}0&F\\0&F\end{pmatrix}$ در این صورت $\frac{R}{J}\cong F$. بنابراین $\frac{R}{J}$ نیز $\overline{\sigma}$ -آرمندآریز اریب است. حال نشان می‌دهیم J یک حلقه‌ی σ -آرمندآریز اریب است. فرض کنیم $p=A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m$ و $q=B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n$ دو عضو در حلقه‌ی $J[x;\sigma]$ باشند که برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $A_i=\begin{pmatrix}0&a_i\\0&b_i\end{pmatrix}$ و $B_j=\begin{pmatrix}0&c_j\\0&d_j\end{pmatrix}$ و $pq=0$.

فرض کنیم $A_0\neq 0$ و $B_0\neq 0$. در این صورت $a_0d_0=0=b_0d_0$. اگر $d_0\neq 0$ آن‌گاه، $a_0=0$ و $b_0=0$ که یک تناقض است. پس $d_0=0$.

بنابراین برای هر $0\leq i\leq m$، $A_i\sigma^i(B_0)=0=A_iB_0$. پس $A_0B_1=0$ ضریب x در pq است. پس $a_0d_1=0=b_0d_1$ و اگر $d_1\neq 0$ آن‌گاه، $a_0=0$ و $b_0=0$ که یک تناقض است. بنابراین برای هر $0\leq i\leq m$، $A_i\sigma^i(B_1)=0$. با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$، $A_i\sigma^i(B_j)=0$. پس J، σ -آرمندآریز اریب است. حال فرض کنیم $K=\begin{pmatrix}0&F\\0&0\end{pmatrix}$ در این صورت $\frac{R}{K}=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix}+K|a,c\in F\right\}$ یک حلقه‌ی تقلیل یافته است و $\overline{\sigma}$ یک درونریختی همانی از حلقه‌ی $\frac{R}{K}$ می‌باشد. بنابراین $\frac{R}{K}$ حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمندآریز اریب است. بعلاوه به راحتی قابل بررسی است که K یک حلقه‌ی σ -آرمندآریز اریب است.

فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. قرار می‌دهیم:

$$.UT_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$$

مثال بعدی نشان می‌دهد $UT_۲(\mathbb{Z}_۳)$ یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۷.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}_۳$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه ۳ باشد و $R = M_۲(\mathbb{Z}_۳)$.
درونریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $p = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x$ و $q = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} x$، آن‌گاه $pq = ۰$، اما $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \sigma \left(\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \right) \neq ۰$. بنابراین، R، σ -آرمنداریز اریب نیست. همچنین این مثال نشان می‌دهد که حلقه‌ی $UT_۲(\mathbb{Z}_۳)$، σ -آرمنداریز اریب نیست. زیرا ضرایب p و q ماتریس های بالا مثلثی هستند.

اگر σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $\overline{\sigma} : T(R,R) \longrightarrow T(R,R)$ با ضابطه‌ی $(a,b) \longmapsto (\sigma(a), \sigma(b))$ یک درونریختی است.
مثال بعد نشان می‌دهد که اگر R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب باشد، لزوماً $T(R,R)$، حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۸.۱.۳. **(۱).** فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_۴$. در این صورت R یک حلقه‌ی I_R -آرمنداریز اریب است. اما $T(R,R)$، $\overline{I}_R$ -آرمنداریز اریب نیست. چون $((۲,۰) + (۲,۱)x)^۲ = ۰$، اما $(۲,۱)\overline{I_R}((۲,۰)) = (۰,۲) \neq ۰$.

(۲). طبق مثال (۴.۱.۳) حلقه‌ی $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ ۰ & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}\,,\ t \in \mathbb{Q} \right\}$ یک حلقه‌یσ - آرمنداریز اریب است که درونریختی σ روی R با ضابطه‌ی $\begin{pmatrix} a & t \\ ۰ & a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & \frac{t}{۲} \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ تعریف می‌شود.

فرض کنیم $S = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ ۰ & A \end{pmatrix} | A, B \in R \right\}$. عناصر

$$p = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} x$$

و

$$q=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

از $S[x;\overline{\sigma}]$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح $pq=0$، اما

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\overline{\sigma}\left(\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)\neq 0$$

بنابراین S، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

(۳). فرض کنیم $R=\mathbb{Z}_2[x]$. درونریختی σ از حلقه‌ی R را با ضابطه‌ی $\sigma(f(x))=f(0)$ تعریف می‌کنیم. چون

$$\begin{aligned}((0,1)+(x,x)y)^2&=(0,1)(0,1)\\&+((0,1)(x,x)+(x,x)\overline{\sigma}((0,1)))\,y+(x,x)\overline{\sigma}((x,x))\,y^2=(0,0)\end{aligned}$$

اما $(x,x)\overline{\sigma}((0,1))=(0,x)\neq 0$، پس $T(R,R)$، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

قضیه ۱۹.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. اگر R یک حلقه‌ی σ -صلب باشد (بعبارت دیگر، $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است)، آن‌گاه $T(R,R)$، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. فرض کنیم $p=\sum_{i=0}^{m}(a_i,b_i)x^i$ و $q=\sum_{j=0}^{n}(c_j,d_j)x^j$ دو عضو از حلقه‌ی $T(R,R)[x;\sigma]$ باشند که $pq=0$. می‌توان فرض کرد $p=(p_0,p_1)$ و $q=(q_0,q_1)$، که $p_0=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $p_1=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ و $q_0=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j$ و $q_1=\sum_{j=0}^{n}d_jx^j$. در نتیجه

$$pq=(p_0q_0,p_0q_1+p_1q_0)=(0,0)$$

بنابراین در حلقه‌ی $R[x;\overline{\sigma}]$، $p_0q_0=0$ و $p_0q_1+p_1q_0=0$. چون $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است، پس $p_0q_1=0$ و $p_1q_0=0$. از آنجایی که R، σ -آرمنداریز اریب است و طبق نتایج پاراگراف قبل برای هر i,j ای، $a_i\sigma^i(c_j)=0$ و $a_i\sigma^i(d_j)=0$ و $b_i\sigma^i(c_j)=0$. بنابراین $(a_i,b_i)\overline{\sigma}^i((c_j,d_j))=(0,0)$ و در نتیجه $T(R,R)[x;\sigma]$، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.

$\square$

ملاحظه ۲۰.۱.۳. *برای حلقه‌ی σ -صلب R، $T(R,R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است، اما لزوماً $\overline{\sigma}$ -صلب نیست.*

برای مثال، فرض کنیم R یک میدان و I_R درونریختی همانی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت R، I_R -صلب است و لذا $T(R,R)$ یک حلقه‌ی $\overline{I_R}$-آرمنداریز اریب است، اما $\overline{I_R}$ -صلب نیست.
چون $(\circ,\circ) = \overline{I_R}((\circ,1))(\circ,1)$ اما $(\circ,1) \neq (\circ,\circ)$.

مثال بعد نشان می‌دهد حلقه‌ی R و خودریختی σ از آن وجود دارد به طوری که نه تنها $T(R,R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب نیست، بلکه R نیز σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۲۱.۱.۳. حلقه‌ی جابجایی و تقلیل یافته‌ی $R = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$ و خودریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ را با ضابطه‌ی $\sigma((a,b)) = (b,a)$ در نظر می‌گیریم. بنابه مثال (۵.۱.۳)، R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب نیست. فرض کنیم

$$p = \begin{pmatrix} (1,\circ) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (1,\circ) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1,\circ) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (1,\circ) \end{pmatrix} x \quad \text{و}$$
$$q = \begin{pmatrix} (\circ,1) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (\circ,1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1,\circ) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (1,\circ) \end{pmatrix} x$$

چون $pq = \circ$، اما $\begin{pmatrix} (1,\circ) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (1,\circ) \end{pmatrix} \overline{\sigma}\left(\begin{pmatrix} (\circ,1) & (\circ,\circ) \\ (\circ,\circ) & (\circ,1) \end{pmatrix}\right) \neq \circ$، پس $T(R,R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\overline{\sigma} : UT_3(R) \longrightarrow UT_3(R)$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}((a_{ij})) = (\sigma(a_{ij}))$ یک درونریختی است که توسیعی از σ است. اگر R همان حلقه‌ی مثال (۲۱.۱.۳) باشد، آن‌گاه، $UT_3(R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

قضیه ۲۲.۱.۳. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی σ -صلب R باشد. در این صورت حلقه‌ی* $UT_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R \right\}$*، $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. خاطر نشان می‌کنیم اگر $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \circ & a_1 & d_1 \\ \circ & \circ & a_1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \circ & a_2 & d_2 \\ \circ & \circ & a_2 \end{pmatrix}$ دو عضو از $UT_3(R)$ باشند. آن‌گاه جمع و ضرب اینگونه تعریف می‌شود:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) + (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2)$$

بنابراین هر $p\in UT_3(R)[x;\overline{\sigma}]$ را می‌توان به صورت (p_0,p_1,p_2,p_3) بیان کرد که p_i ها در $R[x;\sigma]$ هستند. فرض کنیم $p=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ و $q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$ دو عضو از $UT_3(R)[x;\overline{\sigma}]$ باشند که $pq=0$. در نتیجه

$$pq=(p_0q_0,p_0q_1+p_1q_0,p_0q_2+p_1q_3+p_2q_0,p_0q_3+p_3q_0)=0$$

پس روابط زیر را داریم:

$$p_0q_0=0 \tag{1}$$

$$p_0q_1+p_1q_0=0 \tag{2}$$

$$p_0q_2+p_1q_3+p_2q_0=0 \tag{3}$$

$$p_0q_3+p_3q_0=0 \tag{4}$$

از آنجایی که طبق قضیه(۸.۲.۱)، حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است پس از رابطه‌ی (۱)، نتیجه می‌گیریم $q_0p_0=0$. اگر رابطه‌ی (۲)، را از سمت راست در p_0 ضرب کنیم، خواهیم داشت: $p_0q_1p_0+p_1q_0p_0=0$ و از آنجایی که $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است، پس $p_0q_1p_0=0$ و $p_0q_1=0$ و لذا $p_1q_0=0$.

حال رابطه‌ی (۴)، را از راست در p_0 ضرب می‌کنیم. پس $p_0q_3p_0+p_3q_0p_0=0$ و لذا $p_0q_3=0$ و $p_3q_0=0$. رابطه‌ی (۳)، را از سمت راست در p_0 ضرب می‌کنیم. داریم: $p_0q_2p_0+p_1q_3p_0+p_2q_0p_0=0$. بنابراین $p_0q_2=0$ و رابطه‌ی (۳) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$p_1q_3+p_2q_0=0 \tag{5}$$

حال رابطه‌ی (۵)، را از سمت راست در p_1 ضرب می‌کنیم. پس $p_1q_3=0$ و لذا $p_2q_0=0$.

حال فرض کنیم $p=\sum_{i=0}^{m}\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i\\ 0 & a_i & d_i\\ 0 & 0 & a_i\end{pmatrix}x^i$ و $q=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j\\ 0 & a_j & d_j\\ 0 & 0 & a_j\end{pmatrix}x^j$ که $p_0=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $p_1=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ و $p_2=\sum_{i=0}^{m}c_ix^i$ و $p_3=\sum_{i=0}^{m}d_ix^i$ و $q_0=\sum_{j=0}^{n}a'_jx^j$ و $q_1=\sum_{j=0}^{n}b'_jx^j$ و $q_2=\sum_{j=0}^{n}c'_jx^j$ و $q_3=\sum_{j=0}^{n}d'_jx^j$. در این صورت از نتایج پاراگراف قبل و اینکه R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب است، نتیجه می‌گیریم که برای هر i,j، $a_i\sigma^i(a'_j)=0$ و $a_i\sigma^i(b'_j)=0$ و $b_i\sigma^i(a'_j)=0$ و $a_i\sigma^i(c'_j)=0$ و $b_i\sigma^i(d'_j)=0$ و $c_i\sigma^i(a'_j)=0$ و $a_i\sigma^i(d'_j)=0$ و $d_i\sigma^i(a'_j)=0$. و در نتیجه برای هر i,j،

$$.\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \circ & a_i & d_i \\ \circ & \circ & a_i \end{pmatrix} \overline{\sigma}^i \left(\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ \circ & a'_j & d'_j \\ \circ & \circ & a'_j \end{pmatrix} \right) = \circ$$

بنابراین $UT_۳(R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.

□

مثال ۲۳.۱.۳. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی σ-صلب R باشد و

$$.UT_۴(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ \circ & a & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ \circ & \circ & a & a_{۳۴} \\ \circ & \circ & \circ & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$$

فرض کنیم $p = e_{۱۲} + (e_{۱۲} - e_{۱۳})x$ و $q = e_{۳۴} + (e_{۲۴} + e_{۳۴})x$ دو عضو از حلقه‌ی $p \in UT_۴(R)[x; \overline{\sigma}]$ باشد. (e_{ij} ها ماتریس‌های واحد در $UT_۴(R)$ هستند.)

در این صورت $pq = \circ$، اما $(e_{۱۲} + e_{۱۳})\overline{\sigma}(e_{۳۴}) \neq \circ$. بنابراین $UT_۴(R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

به همین نحو می‌توان نشان داد که برای هر $n \geq ۵$، $UT_n(R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب نیست.

تعریف ۲۴.۱.۳. حلقه‌ی R را **بئر**[۲] می‌نامیم هرگاه پوچساز راست(چپ) هر زیر مجموعه ناتهی آن به عنوان یک ایده‌آل راست(چپ) توسط یک خودتوان تولید شود.

تعریف ۲۵.۱.۳. حلقه‌ی R را **p.p راست**[۳] (چپ) می‌نامیم، هرگاه پوچساز راست(چپ) هر عضو R با یک خودتوان تولید شود. اگر یک حلقه هم $p.p$ چپ و هم $p.p$ راست باشد، آن‌گاه،آن را **حلقه‌ی p.p** [۴] می‌نامیم.

واضح است که هر حلقه‌ی بئر، حلقه‌ی $p.p$ است.

لم ۲۶.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب باشد. اگر $e = e_\circ + e_۱ x + \cdots + e_n x^n$ خودتوانی در حلقه‌ی $R[x; \sigma]$ باشد، آن‌گاه $e = e_\circ$.*

برهان. از آنجایی که e خودتوان است. پس $e(۱-e) = \circ = (۱-e)e$. در نتیجه:

$$(e_\circ + e_۱ x + \cdots + e_n x^n)\left((۱ - e_\circ) - e_۱ x - \cdots - e_n x^n\right) = \circ$$

و

---
[۲] Baer ring
[۳] right p.p ring
[۴] p.p ring

$$((1-e_0)-e_1x-\cdots-e_nx^n)(e_0+e_1x+\cdots+e_nx^n)=0.$$

چون R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب است، لذا $e_0(1-e_0)=0$ و برای هر $1\leq i\leq n$، $e_0e_i=0$ و $(1-e_0)e_i=0$. بنابراین برای $1\leq i\leq n$، $e_i=0$ و بنابراین $e=e_0=e_0^2$. □

قضیه ۲۷.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب باشد. در این صورت $R[x;\sigma]$ آبلی است اگر و تنها اگر برای هر خودتوان e از R، $\sigma(e)=e$.*

برهان. فرض کنیم $R[x;\sigma]$ آبلی باشد و $e^2=e\in R[x;\sigma]$. در این صورت e مرکزی است و لذا $ex=xe=\sigma(e)x$. بنابراین $\sigma(e)=e$.

بعکس: فرض کنید برای هر خودتوان e از حلقه‌ی R، $\sigma(e)=e$. ابتدا ثابت می‌کنیم R آبلی است. ادعا می‌کنیم برای خودتوان های e و f در R، $efR\cap(1-f)(1-e)\sigma(R)=0$. فرض کنیم که $s,t\in R$ وجود داشته باشند به طوری که: $0\neq ef(-t)=(1-f)(1-e)\sigma(s)\in efR\cap(1-f)(1-e)\sigma(R)$. چون $\sigma(f)=f$ و $\sigma(1-e)=1-e$ ، پس

$$((1-f)x+e)(ftx+(1-e)s)=$$
$$(1-f)\sigma(ft)x^2+(eft+(1-f)\sigma((1-e))s)x+e(1-e)s=0.$$

اما $eft\neq 0$، که یک تناقض است. فرض کنیم $fe=0$. در این صورت

$$ef=(1-f)(1-e)(-f)=(1-f)(1-e)-\sigma(f)\in efR\cap(1-f)(1-e)\sigma(R)=0.$$

بنابراین برای هر خودتوان $e\in R$ و هر $r\in R$، $g=e+er(1-e)$ یک خودتوان در R است که $(1-e)g=0$. بنابراین $g(1-e)=0$ و لذا $er(1-e)=0$. بعبارت دیگر $er=ere$. به روشنی $h=(1-e)+(1-e)re$ یک خودتوان در R است. پس $eh=0$. بنابراین $he=0$. پس $(1-e)re=0$. (بعبارت دیگر $re=ere$.) پس R آبلی است.

حال نشان می‌دهیم $R[x;\sigma]$ آبلی است. فرض کنیم e خودتوانی در حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ باشد. پس بنابه لم(۲۶.۱.۳)، e خودتوانی در R است. برای هر $p=a_0x^k+a_1x^{k+1}+\cdots+a_mx^{k+m}\in R[x;\sigma]$ که m و k اعداد صحیح نامنفی هستند، داریم:

$$pe=(a_0x^k+a_1x^{k+1}+\cdots+a_mx^{k+m})e=$$
$$a_0\sigma^k(e)x^k+a_1\sigma^{k+1}(e)x^{k+1}+\cdots+a_m\sigma^{k+m}(e)x^{k+m}=e(a_0x^k+a_1x^{k+1}+\cdots+a_mx^{k+m})=ep.$$

چون R آبلی است و $\sigma(e)=e$. پس $R[x;\sigma]$ آبلی است.

□

قضیه ۲۸.۱.۳. *فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه‌ی R و برای هر خودتوان e از R، $\sigma(e)=e$، باشد و R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب باشد. در این صورت R بئر است اگر وتنها اگر، $R[x;\sigma]$ بئر باشد.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R بئر و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $R[x;\sigma]$ باشد. مجموعه‌ی تمام ضرایب عناصر A در R را با A^* نشان می‌دهیم. چون R بئر است و $A^* \neq \varnothing$ ، پس خودتوان $e \in R$ وجود دارد به طوری که $r_R(A^*) = eR$. از این که $e \in r_{R[x;\sigma]}(A)$، نتیجه می‌گیریم $eR[x;\sigma] \subseteq r_{R[x;\sigma]}(A)$. حال فرض کنیم $g = b_\circ + b_1x + \cdots + b_tx^t$ عنصری ناصفر از پوچساز A باشد و $f = a_\circ x^k + a_1x^{k+1} + \cdots + a_sx^{k+s} \in A$. از این که R، σ-آرمنداریز اریب است، نتیجه می‌گیریم $\sigma^k(b_\circ), \sigma^{k+1}(b_1), \cdots, \sigma^{k+s}(b_t)$ در پوچساز A^* قرار دارد و چون σ خودریختی است و بنابه قضیه (۲۷.۱.۳)، $\sigma(e)=e$، از این رو $b_\circ, b_1, \cdots, b_t$ نیز در پوچساز A^* قرار دارند.در نتیجه عناصر $c_\circ, c_1, \cdots, c_t$ از R به قسمی وجود دارند که $g = ec_\circ + ec_1x + \cdots + ec_tx^t = e(c_\circ + c_1x + \cdots + c_tx^t) \in eR[x;\sigma]$. بنابراین: $eR[x;\sigma] = r_{R[x;\sigma]}(A)$ و لذا $R[x;\sigma]$ بئر است.

حال فرض کنیم $R[x;\sigma]$ بئر و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد. بنابه لم(۲۶.۱.۳)، خودتوان $e \in R$ وجود دارد به طوری که $r_{R[x;\sigma]}(B) = eR[x;\sigma]$. در نتیجه :

$r_R(B) = r_{R[x;\sigma]}(B) \cap R = eR[x;\sigma] \cap R = eR$ و لذا R بئر است.

$\square$

قضیه ۲۹.۱.۳. *فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه‌ی R باشد و برای هر خودتوان $e \in R$، $\sigma(e)=e$. اگر R یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی $p.p$ است اگر و تنها اگر $R[x;\sigma]$ یک حلقه‌ی $p.p$ باشد.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه‌ی $p.p$ باشد. فرض کنیم $p = a_\circ + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x;\sigma]$. خودتوان های $e_i \in R$ وجود دارند به طوری که برای $i = \circ, 1, \cdots, m$، $r_R(a_i) = e_iR$. فرض کنیم $e = e_\circ e_1 \cdots e_m$. چون بنا به قضیه (۲۷.۱.۳)، R آبلی است، پس $e^2 = e \in R$ و $eR = \bigcap_{i=\circ}^m r_R(a_i)$. از آنجایی که $pe = a_\circ + a_1\sigma(e)x + \cdots + a_m\sigma^m(e)x^m = a_\circ e + a_1ex + \cdots + a_mex^m = \circ$ و $\sigma(e)=e$، پس $eR[x;\sigma] \subseteq r_{R[x;\sigma]}(p)$. فرض کنیم $q = b_\circ + b_1x + \cdots + b_nx^n \in r_{R[x;\sigma]}(p)$. چون $pq = \circ$ و R σ -آرمنداریز اریب است، در نتیجه برای هر $\circ \le i \le m$ و $\circ \le j \le n$، $a_i\sigma^i(b_j) = \circ$ و لذا $\sigma^i(b_j) \in r_R(a_i) = e_iR$. در نتیجه برای هر $\circ \le i \le m$ و برای هر $j = \circ, 1, \cdots, n$، $b_j \in e_iR$، از آنجایی که σ خودریختی و $\sigma(e_i) = e_i$ ، لذا برای هر $\circ \le j \le n$، $b_j \in eR = \bigcap_{i=\circ}^m r_R(a_i)$. در نتیجه $q \in eR[x;\sigma]$. بنابراین $eR[x;\sigma] = r_{R[x;\sigma]}(p)$. پس $R[x;\sigma]$ یک حلقه‌ی $p.p$ است.

بعکس: فرض کنیم $R[x;\sigma]$ یک حلقه‌ی $p.p$ باشد و $a \in R$. بنا به لم (۲۶.۱.۳)،خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوریکه $r_{R[x;\sigma]}(a) = eR[x;\sigma]$. بنابراین $r_R(a) = eR$، و لذا R یک حلقه‌ی $p.p$

است. $\square$

فصل ۴

حلقه‌های شبه σ -آرمنداریز اریب

۱.۴ حلقه‌ی شبه σ -آرمنداریز اریب

در این فصل به بررسی حلقه‌های شبه σ -آرمنداریز اریب می‌پردازیم و این خاصیت را به حلقه ماتریس ها، حلقه چندجمله‌ای ها و حلقه‌ی کسرهای کلاسیک انتقال می‌دهیم.
برپایه‌ی نتیجه‌ی(۷.۱.۲)، و تعریف حلقه‌های σ -آرمنداریز اریب و حلقه‌های شبه آرمنداریز، تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی R را **شبه** σ **-آرمنداریز اریب**[۱] می‌نامیم هرگاه $f(x) = \sum_{i=\circ} m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_j x^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ باشند و $f(x)R[x;\sigma]g(x) = \circ$، آن‌گاه، برای هر $\circ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_i R \sigma^i(b_j) = \circ$.

ملاحظه ۲.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی شبه σ-آرمنداریز اریب باشد و $f(x)R[x;\sigma]g(x) = \circ$. در این صورت برای هر $t \geq \circ$، $f(x)x^t R[x;\sigma]g(x) = \circ$، لذا $a_i R \sigma^{i+t}(b_j) = \circ$.*
طبق ملاحظه‌ی(۷.۱.۲)، اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته و σ یک درونریختی از آن باشد، آن‌گاه حلقه‌ی R شبه σ -آرمنداریز اریب است.
اما با توجه به مثال (۳.۱.۴) قسمت(۱)، حلقه‌های تقلیل یافته لزوماً σ -آرمنداریز اریب نیستند.
همچنین خاطرنشان می‌کنیم اگر σ یک برووریختی از حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب R باشد، آن‌گاه R شبه σ-آرمنداریز اریب است.

طبق نتیجه‌ی(۴.۱.۲)،حلقه‌های نیم‌اول با برووریختی σ، شبه σ -آرمنداریز اریب هستند. طبق مثال (۶.۱.۲)، اگر σ تکریختی از حلقه‌ی نیم‌اول R باشد، که پوشا نیست، در این صورت R شبه σ-آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۳.۱.۴. ۱. فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = F \bigoplus F$. خودریختی $\sigma : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی $(a,b) \longmapsto (b,a)$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت بنا به مثال (۵.۱.۳)، R، σ-آرمنداریز اریب نیست.

بنا به ملاحظه (۷.۱.۲)، حلقه‌های تقلیل یافته با هر درونریختی σ، همواره شبه σ-آرمنداریز اریب هستند.

۲. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا باشد. فرض کنیم $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ \circ & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Q} \right\}$. $\sigma : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی

[۱] σ-skew quasi-Armendariz ring

$\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & \frac{t}{2} \\ 0 & a \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. . بنا به مثال (۴.۱.۳)، R، σ -آرمنداریز اریب است. همچنین R شبه σ -آرمنداریز اریب است اما نیم‌اول(تقلیل یافته) نیست. (این حلقه جابجایی است و $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 0$، اما $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.)

اگر σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $\overline{\sigma} : M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$ با ضابطه‌ی $(a_{ij}) \longmapsto (\sigma(a_{ij}))$ یک درونریختی از $M_n(R)$ است، که توسیعی از σ است.

قضیه ۴.۱.۴. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت حلقه‌ی R شبه σ -آرمنداریز اریب است اگر وتنها اگر برای هر $n \geq 2$، $M_n(R)$ شبه $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب باشد.*

برهان. کافی است حالت $n = 2$ را بررسی کنیم، حالت کلی هم به همین روش اثبات می‌شود. خاطر نشان می‌کنیم که $M_n(R)[x;\overline{\sigma}] \cong M_n\left(R[x;\sigma]\right)$. بنابراین اگر $f, g \in M_n(R)[x;\overline{\sigma}]$، آن‌گاه می‌توان f و g را چنین در نظر گرفت:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} a_{i_{11}} & a_{i_{12}} \\ a_{i_{21}} & a_{i_{22}} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \text{ و }$$
$$g(x) = \sum_{j=0}^{q} \begin{pmatrix} b_{j_{11}} & b_{j_{12}} \\ b_{j_{21}} & b_{j_{22}} \end{pmatrix} x^j = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

که $f_{st} = \sum_{i=0}^{p} a_{i_{st}} x^i$ و $g_{uv} = \sum_{j=0}^{q} b_{j_{uv}} x^j$. فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} M_2(R)[x;\overline{\sigma}] \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = 0$$

در این صورت برای هر $r_{ij} \in R$ و هر عدد صحیح $w_{ij} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}x^{w_{11}} & r_{12}x^{w_{12}} \\ r_{21}x^{w_{21}} & r_{22}x^{w_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = 0 \tag{۱.۴}$$

اگر در رابطه‌ی (۱.۴) برای $t \neq i$ و $u \neq j$ ، r_{ij} ها را صفر در نظر بگیریم، آن‌گاه برای هر $1 \geq t$ و $2 \leq u$ خواهیم داشت: $f_{st} r_{tu} x^{w_{tu}} g_{uv} = 0$. در نتیجه برای هر $1 \leq s,t,u,v \leq 2$، $f_{st} R[x;\sigma] g_{uv} = 0$.

چون R شبه σ-آرمنداریز اریب است، پس برای هر $0 \leq i \leq p$ و $0 \leq j \leq q$، $a_{i_{st}} R \sigma^i(b_{j_{uv}}) = 0$، و چون $\overline{\sigma}^i \left(\begin{pmatrix} b_{j_{11}} & b_{j_{12}} \\ b_{j_{21}} & b_{j_{22}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma^i(b_{j_{11}}) & \sigma^i(b_{j_{12}}) \\ \sigma^i(b_{j_{21}}) & \sigma^i(b_{j_{22}}) \end{pmatrix}$ پس برای هر $0 \leq s \leq p$ و $0 \leq t \leq p$ داریم:

$$\begin{pmatrix} a_{i_{11}} & a_{i_{12}} \\ a_{i_{21}} & a_{i_{22}} \end{pmatrix} M_2(R) \overline{\sigma}^i \left(\begin{pmatrix} b_{j_{11}} & b_{j_{12}} \\ b_{j_{21}} & b_{j_{22}} \end{pmatrix}\right) = 0$$

بنابراین $M_2(R)$ شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.

عکس این قضیه نیز به راحتی با استفاده از ماتریس‌های قطری اثبات می‌شود. $\square$

خاصیت شبه آرمنداریز، یک خاصیت موریتا پایا است.

قضیه ۵.۱.۴. *اگر R یک حلقه‌ی شبه آرمنداریز باشد، آن‌گاه برای هر خودتوان ناصفر $e \in R$ ، eRe یک حلقه‌ی شبه آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو در حلقه‌ی $eRe[x]$ باشند که $f(x)eRe[x]g(x) = 0$. از آنجایی که $f(x)e = f(x)$ و $eg(x) = g(x)$ و چون R یک حلقه‌ی شبه آرمنداریز است، پس $f(x)R[x]g(x) = 0$. پس برای هر i,j، $a_iRb_j = 0$. همچنین از آنجایی که برای هر i,j، $a_ie = a_i$ و $eb_j = b_j$. لذا برای هر i,j $a_ieReb_j = 0$ پس eRe یک حلقه‌ی شبه آرمنداریز است.

$\square$

قضیه ۶.۱.۴. *فرض کنیم S یک زیرحلقه از حلقه‌ی $M_n(R)$ باشد. اگر حلقه‌ی R شبه آرمنداریز باشد و برای هر $i,j = 1,2,\cdots,n$ ، $e_{ii}Se_{jj} \subseteq S$ ، آنگاه حلقه‌ی S شبه آرمنداریز است.*

برهان. نگاشت $\phi : M_n(R) \longrightarrow M_n(R[x])$ با ضابطه‌ی

$$\sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} a^k_{11} & a^k_{12} & \cdots & a^k_{1n} \\ a^k_{21} & a^k_{22} & \cdots & a^k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_{n1} & a^k_{n2} & \cdots & a^k_{nn} \end{pmatrix} x_k \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} a^k_{11}x_k & \sum_{k=1}^{s} a^k_{12}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^{s} a^k_{1n}x_k \\ \sum_{k=1}^{s} a^k_{21}x_k & \sum_{k=1}^{s} a^k_{22}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^{s} a^k_{2n}x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} a^k_{n1}x_k & \sum_{k=1}^{s} a^k_{n2}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^{s} a^k_{nn}x_k \end{pmatrix}$$

یکریختی از حلقه ها است. فرض کنیم $X = A_1x_1 + \cdots + A_sx_s$ و $Y = B_1x_1 + \cdots + B_mx_m$ دو عضو از $S[x]$ باشند و $XS[x]Y = 0$. قرار می‌دهیم:

$$A_i = \begin{pmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \cdots & a^i_{1n} \\ a^i_{21} & a^i_{22} & \cdots & a^i_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^i_{n1} & a^i_{n2} & \cdots & a^i_{nn} \end{pmatrix} \text{ و } B_j = \begin{pmatrix} b^j_{11} & b^j_{12} & \cdots & b^j_{1n} \\ b^j_{21} & b^j_{22} & \cdots & b^j_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^j_{n1} & b^j_{n2} & \cdots & b^j_{nn} \end{pmatrix}$$

برای هر $c \in R$، اگر $e_{pp}ce_{qq} \in S$، آن‌گاه، $Xe_{pp}ce_{qq}Y = 0$. بنابراین:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a^i_{1p} c x_i & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a^i_{2p} c x_i & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a^i_{(n-1)p} c x_i & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a^i_{np} c x_i & 0 & \cdots \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b^j_{q1} x_j & \sum_{j=1}^{m} b^j_{q2} x_j & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b^j_{q(n-1)} x_j & \sum_{j=1}^{m} b^j_{qn} x_j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = 0$$

در نتیجه اگر $s,p,q,t \geq 1$ و $c \in R$، آن‌گاه:
$\left(\sum_{i=1}^{k} a^i_{sp} x_i\right) c \left(\sum_{j=1}^{m} b^j_{qt} x_j\right) = 0$. از این که $\{c \in R \mid e_{pp} c e_{qq} \in S\}$ ایده‌آلی از R است، نتیجه می‌گیریم برای هر $s,p,q,t \geq 1$، $\left(\sum_{i=1}^{k} a^i_{sp} x_i\right) R[x] \left(\sum_{j=1}^{m} b^j_{qt} x_j\right) = 0$ و چون R شبه آرمنداریز است، از این رو برای هر i,j، $a^i_{sp} c b^j_{qt} = 0$. چون هر عنصر از S مجموعی متناهی از $e_{pp} c e_{qq}$ ها است، لذا برای هر i,j، $A_i S B_j = 0$. بنابراین S شبه آرمنداریز است.

□

فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R، بطوریکه $\sigma(e) = e$. در این صورت نگاشت $\overline{\sigma} : eRe \longrightarrow eRe$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}(ere) = e\sigma(r)e$ یک درونریختی است. طبق مثال (۳.۱.۴) قسمت(۱)، حلقه‌ی شبه σ-آرمنداریز اریب با درونریختی σ وجود دارد که برخی خودتوان ها را ثابت نگه نمی‌دارد.

قضیه ۷.۱.۴. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R و e خودتوانی از R باشد که $\sigma(e) = e$. اگر R شبه σ -آرمنداریز اریب باشد، آن‌گاه eRe شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.*

برهان. با استدلالی مشابه برهان قضیه ۵.۱.۴ آن را ثابت نمود. □

قضیه ۸.۱.۴. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. این صورت R شبه σ-آرمنداریز اریب است اگر و تنها اگر برای $n \geq ۲$، $UM_n(R)$ شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب باشد.*

برهان. با استدلالی مشابه به برهان قضیه ۶.۱.۴ می‌توان آن را ثابت نمود. □

فرض کنیم R یک حلقه باشد و

$$R_w = \left\{ M \in UM_w(R) \mid M = \sum_{i=۱}^{w} ae_{ii} + \sum_{۱\leq i<j\leq w} a_{ij}e_{ij} \right\}،$$

که e_{st} ها نمایانگر ماتریس‌های واحد در $UM_n(R)$ هستند.

بنا به قضیه (۲۲.۱.۳)، اگر σ یک درونریختی صلب از حلقه‌ی R باشد. آن‌گاه $R_۲$ و $R_۳$ حلقه‌های $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب هستند. اما بنا به مثال (۲۳.۱.۳)، برای هر $w \geq ۴$، R_w یک حلقه‌ی σ-آرمنداریز اریب نیست.

قضیه ۹.۱.۴. *فرض کنیم حلقه‌ی R نیم‌اول و σ یک بروریختی از R باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $w \geq ۲$، R_w یک حلقه‌ی شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.*

برهان. فرض کنیم $f, g \in R_w[x;\overline{\sigma}]$ و $fR_w[x;\overline{\sigma}]g = ۰$. فرض کنیم $S = R[x;\sigma]$. برای هر عدد صحیح $w \geq ۲$، $R_w[x;\overline{\sigma}] \cong R[x;\sigma]_w = S_w$. در این صورت f و g را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f = \sum_{u=۰}^{n} A_u x^u = \sum_{i=۱}^{w} f_{۱۱}e_{ii} + \sum_{۱\leq i<j\leq w} f_{ij}e_{ij}$$

و

$$g = \sum_{v=۰}^{m} B_v x^v = \sum_{s=۱}^{w} g_{۱۱}e_{ss} + \sum_{۱\leq s<t\leq w} g_{st}e_{st}$$

که $A_u = (a_{ij}^u)$ و $B_v = (b_{st}^v)$ دو عضو در R_w هستند و $f_{ij}, g_{st} \in S_w = R[x;\sigma]$. با استقرا روی w، می‌خواهیم نشان دهیم برای هر $۱ \leq i,j,s,t \leq w$، $f_{ij}Sg_{st} = ۰$.

فرض کنیم $f = \begin{pmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} \\ ۰ & f_{۱۱} \end{pmatrix}$ و $g = \begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ ۰ & g_{۱۱} \end{pmatrix}$ بطوری که $fS_۲g = ۰$.

در این صورت برای هر $\begin{pmatrix} h_{۱۱} & h_{۱۲} \\ ۰ & h_{۱۱} \end{pmatrix} \in S_۲$،

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} \\ ۰ & f_{۱۱} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{۱۱} & h_{۱۲} \\ ۰ & h_{۱۱} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ ۰ & g_{۱۱} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{۱۱}h_{۱۱} & f_{۱۱}h_{۱۲}+f_{۱۲}h_{۱۱} \\ ۰ & f_{۱۱}h_{۱۱} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ ۰ & g_{۱۱} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{۱۱}h_{۱۱}g_{۱۱} & f_{۱۱}h_{۱۱}g_{۱۲}+f_{۱۱}h_{۱۲}g_{۱۱}+f_{۱۲}h_{۱۱}g_{۱۱} \\ ۰ & f_{۱۱}h_{۱۱}g_{۱۱} \end{pmatrix} \\
&= ۰
\end{aligned}$$

پس روابط زیر را داریم:

$$f_{11}h_{11}g_{11}=0 \qquad (1)$$

$$f_{11}h_{11}g_{12}+f_{11}h_{12}g_{11}+f_{12}h_{11}g_{11}=0 \qquad (2)$$

بنا به رابطه‌ی (۱)، $f_{11}Sg_{11}=0$ و بنابراین رابطه‌ی (۲) برای هر $r\in R$ و هر عدد صحیح $p\geq 0$ به رابطه‌ی $f_{11}rx^pg_{12}+f_{12}rx^pg_{11}=0$ تبدیل می‌شود. بنابراین

$$a_{11}^{0}r\sigma^p(b_{12}^{0})+a_{12}^{0}r\sigma^p(b_{11}^{0})=0 \qquad (3)$$

$$a_{11}^{0}r\sigma^p(b_{12}^{1})+a_{11}^{1}\sigma(r)\sigma^{1+p}(b_{12}^{0})+a_{12}^{0}r\sigma^p(b_{11}^{1})+a_{12}^{1}\sigma(r)\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})=0 \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$a_{11}^{n}\sigma^n(r)\sigma^{n+p}(b_{12}^{1})+a_{12}^{n}\sigma^n(r)\sigma^{n+p}(b_{11}^{m})=0 \qquad (5)$$

چون $f_{11}Sg_{11}=0$، پس بنابر ملاحظه (۷.۱.۲)، برای هر عدد صحیح $p\geq 0$، $0\leq u\leq n$ و $0\leq v\leq m$ داریم:

$$a_{11}^{u}R\sigma^{u+p}(b_{11}^{v})=0 \qquad (6)$$

اگر رابطه‌ی (۳)، را از سمت راست در $s\sigma^p(b_{11}^{0})$، ضرب کنیم، در این صورت $a_{12}^{0}r\sigma^p(b_{11}^{0})s\sigma^p(b_{11}^{0})=0$

و لذا $a_{12}^{0}R\sigma^p(b_{11}^{0})R\sigma^p(b_{11}^{0})=0$، پس $(a_{12}^{0}R\sigma^p(b_{11}^{0})R)(a_{12}^{0}R\sigma^p(b_{11}^{0}R))=0$، و از آنجایی که R نیم‌اول است، داریم:

$$a_{12}^{0}R\sigma^p(b_{11}^{0})=0 \qquad (7)$$

بنابراین برای هر عدد صحیح $p\geq 0$، $a_{11}^{0}R\sigma^p(b_{12}^{0})=0$. حال رابطه‌ی (۴) را از سمت راست در $s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})$، ضرب می‌کنیم:

$$a_{11}^{0}r\sigma^p(b_{12}^{1})s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})+a_{11}^{1}\sigma(r)\sigma^{1+p}(b_{12}^{0})s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})+a_{12}^{0}r\sigma^p(b_{11}^{1})s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})+$$
$$a_{12}^{1}\sigma(r)\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})=0$$

با توجه به رابطه‌های (۶) و (۷) و این که p عدد صحیح دلخواهی است، خواهیم داشت:

$a_{12}^{1}R\sigma^{1+p}(b_{11}^{0})s\sigma^{1+p}(b_{11}^{0}) = 0$. چون R نیم‌اول است، برای هر عدد صحیح $p \geq 0$، $a_{12}^{1}R\sigma^{1+p}(b_{11}^{0}) = 0$. در نتیجه رابطه‌ی (۴)، به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$a_{11}^{0}r\sigma^{p}(b_{12}^{1}) + a_{11}^{1}\sigma(r)\sigma^{1+p}(b_{12}^{0}) + a_{12}^{0}r\sigma^{p}(b_{11}^{1}) = 0 \qquad (4')$$

حال در رابطه‌ی ($'$۴)، r را با $r\sigma^{p}(b_{11}^{1})s$، جایگزین می‌کنیم:

$$a_{11}^{0}r\sigma^{p}(b_{11}^{1})s\sigma^{p}(b_{12}^{1}) + a_{11}^{1}\sigma(r\sigma^{p}(b_{11}^{1})s)\sigma^{1+p}(b_{12}^{0}) + a_{12}^{0}r\sigma^{p}(b_{11}^{1})s\sigma(b_{11}^{1}) = 0$$

در نتیجه $a_{12}^{0}r\sigma^{p}(b_{11}^{1})s\sigma^{p}(b_{11}^{1}) = 0$ و لذا برای هر عدد صحیح $p \geq 0$، $a_{12}^{0}R\sigma^{p}(b_{11}^{1}) = 0$. با ادامه‌ی این روند از رابطه‌ی ($'$۴) خواهیم داشت $a_{11}^{1}R\sigma^{1+p}(b_{12}^{0}) = 0$ و $a_{11}^{0}R\sigma^{p}(b_{12}^{1}) = 0$. بنابراین برای هر عدد صحیح $p \geq 0$، $0 \leq u \leq n$ و $0 \leq v \leq m$ خواهیم داشت:

$$a_{11}^{u}R\sigma^{u+p}(b_{12}^{v}) = 0 \quad , \quad a_{12}^{u}R\sigma^{u+p}(b_{11}^{v}) = 0 \qquad (8)$$

از رابطه‌ی (۸) داریم: $f_{12}Sg_{11} = 0$ و $f_{11}Sg_{12} = 0$ و $f_{11}Sg_{11} = 0$.حال فرض کنیم که ادعای ما برای $w = k - 1$ درست باشد. فرض کنیم $f = (f_{ij})$ و $g = (g_{st})$ دو عضو در S_k باشند و $fS_kg = 0$. می‌توان S_{k-1} را در S_k با ضابطه‌ی زیر نشاند:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sigma e_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq k-1}\sigma_{ij}e_{ij} \longmapsto \sum_{i=0}^{k}\sigma e_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq k}\sigma_{ij}e_{ij}$$

که برای هر $1 < i \leq k$ ، $\sigma_{ik} = 0$. پس از آنجایی که $fS_kg = 0$ داریم $fS_{k-1}g = 0$. با استقرا ، برای هر $1 \leq i, j, s, t \leq k - 1$ داریم:

$$f_{ij}Sg_{st} = 0 \qquad (9)$$

از اینکه برای هر $(h_{kl}) \in S_k$، $f(h_{ij})g = 0$. مولفه‌ی $(k - 1, k)$ ام را در نظر می‌گیریم:

$$f_{11}h_{11}g_{(k-1)k} + (f_{11}h_{(k-1)k} + f_{(k-1)k}h_{11})g_{11} = 0$$

چون $f_{11}Sg_{11} = 0$ است، پس برای هر $r \in R$ و هر عدد صحیح $t \geq 0$ خواهیم داشت:

$$f_{11}h_{11}g_{(k-1)k} + f_{11}h_{(k-1)k}g_{11} + f_{(k-11)k}h_{11}g_{11} = 0$$

$$f_{11}rx^{t}g_{(k-1)k} + f_{(k-11)k}rx^{t}g_{11} = 0 \qquad (10)$$

با تکرار محاسبات (۳) تا (۸) روی رابطه‌ی (۱۰) خواهیم داشت:

$$f_{(k-1)k}Sg_{11} = 0 \quad , \quad f_{11}Sg_{(k-1)k} = 0 \qquad (11)$$

حال از رابطه‌ی (۹) و (۱۰) و اینکه مولفه‌ی $(k-2,k)$ ام صفر است، داریم:

$$f_{11}h_{11}g_{(k-2)k} + f_{(k-2)(k-1)}h_{11}g_{(k-1)k} + f_{(k-2)k}h_{11}g_{11} = 0$$

با تکرار محاسبات قبل خواهیم داشت: $f_{(k-2)k}Sg_{11} = 0$ و $f_{11}Sg_{(k-2)k} = 0$ و $f_{(k-2)(k-1)}Sg_{(k-1)k} = 0$. با ادامه‌ی این روند برای هر $1 \leq i,j,s,t \leq k-1$ داریم: $f_{ij}Sg_{st} = 0$. بنابراین برای هر $w \geq 2$، R_w شبه $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.

□

زیر حلقه‌ی $V_n(R)$ از حلقه‌ی R_n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V_n(R) = \left\{ M \in R_n \mid M = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}e_{ij} \quad , a_{ij} = a_{(i+1)(j+1)} \right\}$$

قضیه ۴.۱.۱۰. *فرض کنیم σ یک بروریختی از حلقه‌ی نیم‌اول R باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $n \geq 2$، V_n یک حلقه‌ی شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.*

برهان. با استدلالی مشابه برهان قضیه (۴.۱.۹) می‌توان آن را ثابت نمود. □

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر R یک حلقه‌ی شبه σ-آرمنداریز اریب باشد، و $w \geq 2$، لزوماً R_w، شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۴.۱.۱۱. فرض کنیم S یک حلقه‌ی نیم‌اول باشد و $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b \in S \right\}$. فرض کنیم I_s نگاشت همانی حلقه‌ی S باشد. فرض کنیم $R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A,B \in R \right\}$ باشد و $f(x) = \begin{pmatrix} e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{12} & -(e_{11}+e_{22}) \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} x$ و $g(x) = \begin{pmatrix} e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{12} & e_{11}+e_{22} \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} x$ دو عضو از حلقه‌ی $R_2[x;\overline{\overline{I_s}}]$ باشند که e_{ij} ها ماتریس‌های واحد در $M_2(S)$ هستند.

در این صورت $f(x)R_2[x;\overline{\overline{I_s}}]g(x) = 0$، اما $\begin{pmatrix} e_{12} & e_{11}+e_{22} \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} R_2 \begin{pmatrix} e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix} \neq 0$.

تعریف ۴.۱.۱۲. فرض کنیم R یک حلقه و M یک تکوار باشد. حلقه‌ی R را **M -آرمنداریز**[۲] می‌نامیم، هرگاه، $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ دو عضو از حلقه‌ی $R[M]$ باشند و $\alpha\beta = 0$، آن‌گاه، برای هر i,j، $a_ib_j = 0$.

[۲] M-Armendariz

اگر M تکوار بدیهی باشد، آن‌گاه، هر حلقه‌ای M -آرمنداریز است.

مثال ۱۳.۱.۴. فرض کنیم N نمایانگر مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت باشد و $M=(N\cup\{۰\},+)$. در این صورت حلقه‌ی R یک حلقه‌ی M-آرمنداریز است اگر وتنها اگر، آرمنداریز باشد.

تعریف ۱۴.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه و M یک تکوار باشد. حلقه‌ی R را **شبهM-آرمنداریز** [۳] می‌نامیم، هرگاه $\alpha=a_۱g_۱+\cdots+a_ng_n$ و $\beta=b_۱h_۱+\cdots+b_mh_m$ دو عضو از حلقه‌ی $R[M]$ باشند و $\alpha R[M]\beta=۰$، آن‌گاه، برای هر i,j، $a_iRb_j=۰$.

ملاحظه ۱۵.۱.۴. *حلقه‌های M-آرمنداریز، شبه M -آرمنداریز هستند. فرض کنیم که $\alpha R[M]\beta=۰$. در این صورت برای هر $r\in R$، $\alpha r\beta=۰$. اگر $\beta'=rb_۱h_۱+\cdots+rb_mh_m$ در نظر بگیریم، داریم: $\alpha\beta'=۰$ و از آنجایی که R یک حلقه‌ی M -آرمنداریز است برای هر i,j، $a_irb_j=۰$ و لذا $a_iRb_j=۰$.*

قضیه ۱۶.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی M -آرمنداریز تقلیل یافته باشد. در این صورت برای هر $n\geq ۲$، $UT_n(R)$ یک حلقه‌ی شبه M -آرمنداریز است.*

برهان. نگاشت $UT_n(R)[M]\longrightarrow UT_n(R[M])$ باضابطه‌ی

$$\sum_{k=۱}^{s}\begin{pmatrix} a^k & a^k_{۱۲} & \cdots & a^k_{۱n}\\ ۰ & a^k & \cdots & a^k_{۲n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & \cdots & a^k\end{pmatrix}g_k\longmapsto\begin{pmatrix} \sum_{k=۱}^{s}a^kg_k & \sum_{k=۱}^{s}a^k_{۱۲}g_k & \cdots & \sum_{k=۱}^{s}a^k_{۱n}g_k\\ ۰ & \sum_{k=۱}^{s}a^kg_k & \cdots & \sum_{k=۱}^{s}a^k_{۲n}g_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & \cdots & \sum_{k=۱}^{s}a^kg_k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_{۱۲} & \cdots & \alpha_{۱n}\\ ۰ & \alpha & \cdots & \alpha_{۲n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & \cdots & \alpha\end{pmatrix}$$

یک یکریختی است.

حال برهان را با استقرا روی n ادامه می‌دهیم. ابتدا نشان می‌دهیم که $UT_۲(R)$ شبه M -آرمنداریز است.

فرض کنیم $X=A_۱g_۱+\cdots+A_sg_s$ و $Y=B_۱h_۱+\cdots+B_mh_m$ دو عضو از $UT_۲(R)[M]$ باشند و $XUT_۲(R)[M]Y=۰$. قرار می‌دهیم : $A_i=\begin{pmatrix} a^i & a^i_{۱۲}\\ ۰ & a^i\end{pmatrix}$ و $B_j=\begin{pmatrix} b^j & b^j_{۱۲}\\ ۰ & b^j\end{pmatrix}$. در نتیجه برای هر $A\in UT_۲(R)$ داریم:

---
[۳] M-quasi-Armendariz

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s} a^i g_i & \sum_{i=1}^{s} a^i_{12} g_i \\ 0 & \sum_{i=1}^{s} a^i g_i \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} b^j h_j & \sum_{j=1}^{m} b^j_{12} h_j \\ 0 & \sum_{j=1}^{m} b^j h_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \beta & \beta_{12} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = 0$$

بنابراین برای هر $c \in R$، $\alpha c\beta = 0$ و $\alpha c\beta_{12} + \alpha_{12} c\beta = 0$. اگر رابطه‌ی قبل را از چپ در α ضرب کنیم، در این صورت برای هر $c \in R$ داریم: $\alpha\alpha c\beta_{12} + \alpha\alpha_{12} c\beta = 0$. چون $R[M]$ تقلیل یافته است، پس برای هر $c \in R$، $\alpha c\beta_{12} = 0$ و $\alpha_{12} c\beta = 0$. بنابراین $\alpha R\beta_{12} = \alpha_{12} R\beta = \alpha R\beta = 0$. پس برای هر $i = 1, \cdots, s$ و $j = 1, \cdots, m$ داریم: $a^i R b^j_{12} = a^i_{12} R b^j = a^i R b^j = 0$ از آنجایی که R، M -آرمنداریز است، در نتیجه برای هر $i = 1, \cdots, s$ و هر $j = 1, \cdots, m$، $A_i UT_2(R) B_j = 0$.

حال فرض کنیم $n \geq 3$ و $X = A_1 g_1 + \cdots + A_s g_s$ و $Y = B_1 h_1 + \cdots + B_m h_m$ دو عضو از $UT_n(R)[M]$ باشند و $XUT_n(R)[M]Y = 0$. قرار می‌دهیم : $A_i = \begin{pmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \cdots & a^i_{1n} \\ 0 & a^i_{22} & \cdots & a^i_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^i_{nn} \end{pmatrix}$ و

$$B_j = \begin{pmatrix} b^j_{11} & b^j_{12} & \cdots & b^j_{1n} \\ 0 & a^j_{22} & \cdots & b^j_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b^j_{nn} \end{pmatrix}$$

که برای هر i, j, k, t، $a^i_{tt} = a^i_{kk}$ و $b^j_{tt} = b^j_{kk}$. فرض کنیم

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s} a^i_{11} g_i & \sum_{i=1}^{s} a^i_{12} g_i & \cdots & \sum_{i=1}^{s} a^i_{1n} g_i \\ 0 & \sum_{i=1}^{s} a^i_{22} g_i & \cdots & \sum_{i=1}^{s} a^i_{2n} g_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{s} a^i_{nn} g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

و

$$\beta = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} b^j_{11} h_j & \sum_{j=1}^{m} b^j_{12} h_j & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b^j_{1n} h_j \\ 0 & \sum_{j=1}^{m} a^j_{22} h_j & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b^j_{2n} h_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b^j_{nn} h_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

حال نشان خواهیم داد که برای هر $i=1,\cdots,n$ و $j=1,\cdots,n$ و $k=1,\cdots,n$، $\alpha_{ij}\beta_{jk}=0$. از آنجایی که $\alpha UT_n(R)\beta=0$، داریم:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} UT_{n-1}(R) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1(n-1)} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} UT_{n-1}(R) \begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2n} \\ 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{nn)} \end{pmatrix} = 0$$

در نتیجه برای هر $i=1,\cdots,n-1$ و $j=1,\cdots,n-1$، $k=1,\cdots,n-1$، $\alpha_{ij}\beta_{jk}=0$ ، و برای هر $i=2,\cdots,n$ و $j=2,\cdots,n$، $\alpha_{ij}\beta_{jn}=0$. از آنجایی که $\alpha UT_n(R)\beta=0$، نتیجه می‌گیریم برای هر $c\in R$،

$$\alpha_{11}c\beta_{1n}+\alpha_{12}c\beta_{2n}+\cdots+\alpha_{1n}c\beta_{nn}=0 \tag{۲.۴}$$

اگر رابطه‌ی قبل را از چپ در α_{11} ضرب کنیم، چون $R[M]$ تقلیل یافته است و $\alpha_{11}=\alpha_{jj}$، لذا برای هر $i=1,\cdots,n$، $\alpha_{ii}\beta_{in}=0$. آن‌گاه $\alpha_{11}\alpha_{11}c\beta_{1n}=0$ و $\alpha_{11}c\beta_{1n}=0$. بنابراین $\alpha_{12}\beta_{2n}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{nn}=0$. اگر همان رابطه را این بار از سمت راست در β_{nn} ضرب کنیم، چون برای هر j، $\beta_{nn}=\beta_{jj}$ و $R[M]$ تقلیل یافته است، خواهیم داشت: $\alpha_{1n}c\beta_{nn}\beta_{nn}=0$ و $\alpha_{1n}c\beta_{nn}=0$. بنابراین برای هر $c\in R$، $\alpha_{12}c\beta_{2n}+\cdots+\alpha_{1(n-1)}c\beta_{(n-1)n}=0$. با جایگزینی α_{12} به جای c در رابطه‌ی (۲.۴) داریم:

$$\alpha_{12}\alpha_{12}\beta_{2n}+\cdots+\alpha_{1(n-1)}\alpha_{12}\beta_{(n-1)n}=0 \tag{۳.۴}$$

چون $\alpha UT_n(R)\beta=0$، داریم:

$$\alpha \begin{pmatrix} \alpha_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{12} \end{pmatrix} \beta =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\beta_{11} & \cdots & \cdots & x \\ 0 & \alpha_{22}\alpha_{12}\beta_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\alpha_{12}\beta_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

، که $x=\alpha_{13}\alpha_{12}\beta_{3n}+\cdots+\alpha_{1(n-1)}\alpha_{12}\beta_{(n-1)n}$. بنابراین

$$\alpha_{13}\alpha_{12}\beta_{3n}+\cdots+\alpha_{1(n-1)}\alpha_{12}\beta_{(n-1)n}=0 \tag{۴.۴}$$

در نتیجه از رابطه‌ی (۳.۴) و (۴.۴) داریم: $\alpha_{12}\alpha_{12}\beta_{2n}=0$ و $\alpha_{12}\beta_{2n}=0$. بنابراین

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2(n-1)} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{(n-3)(n-3)} & \alpha_{(n-3)(n-1)} & \alpha_{(n-3)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(n-2)(n-2)} & \alpha_{(n-2)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} UT_{n-1}(R)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \cdots & \beta_{2(n-1)} & \beta_{2n} \\ 0 & \beta_{33} & \beta_{34} & \cdots & \beta_{3(n-1)} & \beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{(n-2)(n-2)} & \beta_{(n-2)(n-1)} & \beta_{(n-2)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{(n-1)(n-1)} & \beta_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

. پس $\alpha_{13}\beta_{3n}=\cdots=\alpha_{1(n-1)}\beta_{(n-1)n}=0$. از آنجایی که $R[M]$ تقلیل یافته است، برای i,j,k، $a_{ij}Rb_{jk}=0$ پس برای هر i,j,p,q,t، $a^i_{pq}Rb^j_{qt}=0$. در نتیجه برای i,j و $C\in UT_n(R)$، $A_iCB_j=0$. بنابراین $UT_n(R)$ شبه M-آرمنداریز است. □

فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. نگاشت $\overline{\sigma}:R[x]\longrightarrow R[x]$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{m}\sigma(a_i)x^i$ یک درونریختی از حلقه چندجمله‌ای های $R[x]$ است، که توسیعی از σ است.

نگاشت $\overline{\sigma}:R[x,x^{-1}]\longrightarrow R[x,x^{-1}]$ با ضابطه‌ی $\overline{\sigma}(\sum_{i=k}^{n}a_ix^i)=\sum_{i=k}^{n}\sigma(a_i)x^i$ یک درونریختی از $R[x,x^{-1}]$ است، که توسیعی از σ است.

قضیه ۱۷.۱.۴. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد و برای بعضی اعداد صحیح مثبت t، $\sigma^t=I_R$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R، شبه σ -آرمنداریز اریب است؛*

۲. *$R[x]$ شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است؛*

۳. *$R[x,x^{-1}]$ شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.*

برهان. در اینجا فقط به اثبات (۳) $\Longleftrightarrow$ (۱) می‌پردازیم و (۲) $\Longleftrightarrow$ (۱) نیز به همین روش اثبات می‌شود.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنیم $f(y) = f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_m(x)y^m$ و $g(y) = g_0(x)+g_1(x)y+\cdots+g_n(x)y^n$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x, x^{-1}][y; \overline{\sigma}]$ باشند و $f(y)R[x, x^{-1}][y; \overline{\sigma}]g(y) = 0$.

فرض کنیم $f_i(x) = \sum_{u=s_i}^{p_i} a_u x^u$ و $g_j = \sum_{v=k_j}^{q_j} b_v x^v$. حال اعداد صحیح مثبت k, s را به صورت

$$k = max\{|k_j| \ \ | \ j = 0, 1, ..., n\} \text{ ،} s = max\{|s_i| \ \ | \ i = 0, 1, ..., m\}$$

در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $f'_i(x) = f_i(x)x^s$ و $g'_j(x) = g_j(x)x^k$. لذا داریم:

$$f'(y) = x^s f(y) = f'_0(x) + f'_1(x)y + ... + f'_m(x)y^m$$

و

$$g'(y) = x^k g(y) = g'_0(x) + g'_1(x)y + ... + g'_n(x)y^n$$

عدد صحیح مثبت ℓ را در نظر می‌گیریم به طوری که $\ell > \sum_{i=0}^{m} deg(f'_i(x)) + \sum_{j=0}^{n} deg(g'_j(x))$. فرض کنیم

$$f'(x) = f'_0(x^t) + f'_1(x^t)x^{t\ell+1} + ... + f'_m(x^t)x^{mt\ell+m}$$

و

$$g'(x) = g'_0(x^t) + g'_1(x^t)x^{t\ell+1} + ... + g'_n(x^t)x^{nt\ell+n}$$

حال نشان می‌دهیم $f'(x)R[x; \sigma]g'(x) = 0$. یعنی برای هر عدد صحیح $w \geq 0$، $f'(x)rx^w g'(x) = 0$. از آنجایی که $f(y)R[x; x^{-1}][y; \overline{\sigma}]g(y) = 0$ ، پس $f'(y)R[x; x^{-1}][y; \overline{\sigma}]g'(y) = 0$ یعنی برای هر عدد صحیح $w \geq 0$، $f'(y)ry^w g'(y) = 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}
f'_0(x)r\overline{\sigma}^w(g'_0(x)) &= 0 \\
f'_0(x)r\overline{\sigma}^w(g'_1(x)) + f'_1(x)\overline{\sigma}(r)\overline{\sigma}^{w+1}(g'_0(x)) &= 0 \\
&\vdots \\
f'_m(x)\overline{\sigma}^m(r)\overline{\sigma}^{m+w}(g'_n(x)) &= 0
\end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا برای هر عدد صحیح $w \geq 0$ داریم: $f'(x)rx^w g'(x) = 0$. در نتیجه

$$\begin{aligned}(a_{s_0}x^{t(s_0+s)} + \ldots + a_{p_0}x^{t(p_0+s)} + \ldots + a_{s_m}x^{t(s_m+s+m\ell)m} \\ + \ldots + a_{p_m}x^{t(p_m+s+m\ell)+m})rx^w(b_{k_0}x^{t(k_0+k)} + \ldots + bq_0x^{t(q_0+k)} \\ + \ldots + b_{k_n}x^{t(k_n+k+n\ell)+n} + \ldots + bq_nx^{t(q_n+k+n\ell)+n}) = 0\end{aligned}$$

از آنجایی که R شبه σ -آرمنداریز اریب و σ^t نگاشت همانی است، لذا برای هر $0 \leq j \leq n$، $0 \leq i \leq m$، $\beta_j \in \{k_j, ..., q_j\}$، $\alpha_i \in \{s_i, ..., p_i\}$. داریم:

$$a_{\alpha_i}R\sigma^i(b_{\beta_j}) = a_{\alpha_i}R\sigma^{t(\alpha_i,s+i\ell)+i}(b_{\beta_j}) = 0$$

در نتیجه

$$f_i(x)R[x, x^{-1}]\overline{\sigma}^i(g_j(x)) = 0$$

$(3) \Longleftarrow (1)$

فرض کنیم $f(y) = a_0 + a_1y + \ldots + a_my^m$ و $g(y) = b_0 + b_1y + \ldots + b_ny^n$ دو عضو از $R[y, \sigma]$ باشند و $f(y)R[y;\sigma]g(y) = 0$. چندجمله‌ای های

$$f(u) = a_0 + a_1u + \ldots + a_mu^m \text{ و } g(y) = b_0 + b_1u + \ldots + b_nu^n$$

را در حلقه‌ی $R[x, x^{-1}][u;\overline{\sigma}]$ در نظر می‌گیریم. حال نشان می‌دهیم $f(u)R[x, x^{-1}][u;\overline{\sigma}]g(u) = 0$ یا به طور معادل برای هر $r \in R$ و هر $k, s \in \mathbb{Z}$ و هر $s \geq 0$، $f(u)rx^ku^sg(u) = 0$. از آنجایی که $f(y)R[y;\sigma]g(y) = 0$ و $f(y)ry^sg(y) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned}f(u)rx^ku^sg(u) &= (a_0rx^k + a_1\overline{\sigma}(rx^k)u + \ldots + a_m\overline{\sigma}^m(rx^k)u^m)u^s(b_0 + b_1u + \ldots + b_nu^n) \\ &= (a_0rx^k + a_1\sigma(r)x^ku + \ldots + a_m\sigma^m(r)x^ku^m)u^s(b_0 + b_1u + \ldots + b_nu^n) \\ &= x^k(a_0 + a_1u + \ldots + a_mu^m)ru^s(b_0 + b_1u + \ldots + b_nu^n) = 0\end{aligned}$$

چون $R[x, x^{-1}]$ شبه $\overline{\sigma}$ آرمنداریز اریب است، لذا برای هر i, j، $a_iR[x, x^{-1}]\overline{\sigma}^i(b_j) = 0$. پس $a_iR\sigma^i(b_j) = 0$ در نتیجه R شبه $\overline{\sigma}$-آرمنداریز اریب است.

□

حال تصویر همریخت یک حلقه شبه σ-آرمنداریز اریب را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر I ایده‌آلی از R و $\sigma(I) \subseteq I$، آنگاه نگاشت $\overline{\sigma} : R/I \longrightarrow R/I$ با ضابطه $(a + I) \longmapsto \sigma(a) + I$ یک درونریختی از حلقه خارج قسمتی R/I است.

در مثال زیر می‌بینیم که تصویر همریخت یک حلقه‌ی شبه σ -آرمنداریز اریب لزوماً شبه σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۸.۱.۴. با توجه به مثال (۱۰.۱.۳)، اگر $R=\left\{\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ \circ & a \end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{Z}\ ,\ \bar{b}\in\mathbb{Z}_{۴}\right\}$ و نگاشت $\sigma: R\longrightarrow R$ خودریختی با ضابطه $\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ \circ & a \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ \circ & a \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی σ -آرمنداریز اریب است. همچنین چون R جابجایی است پس R شبه σ -آرمنداریز اریب است.
حال فرض کنیم $I=\left\{\begin{pmatrix} a & \bar{\circ} \\ \circ & a \end{pmatrix} \mid a\in ۴\mathbb{Z}\right\}$. در این صورت $\sigma(I)=I$ و حلقه خارج قسمتی $R/I\cong\{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \circ & \bar{a} \end{pmatrix} \mid \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_{۴}\}$ شبه σ-آرمنداریز اریب نیست: چون

$$\left(\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{\circ} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{۱} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}x\right)(R/I)[x;\bar{\sigma}]\left(\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{\circ} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{۱} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}x\right)=\circ$$

اما

$$\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{۱} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}(R/I)\bar{\sigma}\left(\begin{pmatrix} \bar{۲} & \bar{\circ} \\ \circ & \bar{۲} \end{pmatrix}\right)\neq\circ$$

مثال زیر نشان می‌دهد، ایده‌آل سره ناصفر I از حلقه‌ی R وجود دارد به طوری که $\sigma(I)=I$ و حلقه‌ی R/I شبه $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است، همچنین I بعنوان یک حلقه، شبه σ -آرمنداریز اریب است، اما حلقه‌ی R شبه σ -آرمنداریز اریب نیست.

مثال ۱۹.۱.۴. حلقه $R=\left\{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \circ & \bar{a} \end{pmatrix} \mid \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_{۴}\right\}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\sigma: R\longrightarrow R$ با ضابطه $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \circ & \bar{a} \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ \circ & \bar{a} \end{pmatrix}$ یک خودریختی از R است. بنا به مثال (۱۸.۱.۴)، R شبه σ -آرمنداریز اریب نیست.
فرض کنیم $I=\left\{\begin{pmatrix} \bar{\circ} & \bar{b} \\ \circ & \bar{\circ} \end{pmatrix} \mid \bar{b}\in\mathbb{Z}_{۴}\right\}$. در این صورت $\sigma(I)=I$ و حلقه خارج قسمتی $R/I\cong\mathbb{Z}_{۴}$ شبه $\bar{\sigma}$ آرمنداریز اریب است. بعلاوه I بعنوان یک حلقه شبه σ -آرمنداریز اریب است.

قضیه ۲۰.۱.۴. *فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R و I ایده‌آلی از R باشد به طوری که R/I یک حلقه شبه $\bar{\sigma}$ -آرمنداریز اریب باشد. اگر I بعنوان یک حلقه نیم اول باشد، آنگاه R شبه σ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. فرض کنیم

$$f(x)=a_\circ+a_۱x+\dots+a_nx^n \qquad \text{و} \qquad g(x)=b_\circ+b_۱x+\dots+b_mx^m$$

دو عضو از $R[x;\sigma]$ باشند و $f(x)R[x;\sigma]g(x)=\circ$. در نتیجه $\bar{f}(x)(R/I)[x;\bar{\sigma}]\bar{g}(x)=\circ$ که $\bar{a}=a+I$ و

$$\bar{f}(x)=\bar{a}_\circ+\bar{a}_۱x+\dots+\bar{a}_nx^n \qquad \text{و} \qquad \bar{g}(x)=\bar{b}_\circ+\bar{b}_۱x+\dots+\bar{b}_mx^m$$

دو عضو از $(R/I)[x;\overline{\sigma}]$ هستند. از آنجایی که R/I شبه $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است، نتیجه می‌گیریم برای هر i,j، $a_iR\sigma^i(b_j) \subseteq I$. همچنین برای هر عدد صحیح $s \geq 0$،

$$a_iR\sigma^{i+s}(b_j) \subseteq I. \tag{۵.۴}$$

حال با استفاده از استقرا روی $deg\ f(x) = n$ حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 0$ بدیهی است.

فرض کنیم $n \geq 1$، ابتدا نشان می‌دهیم برای هر عدد صحیح $t \geq 0$ و هر $0 \leq j \leq m$، $a_0R\sigma^t(b_j) = 0$. فرض کنیم b_j ای وجود دارد به طوری که برای برخی t_1 ها، $a_0R\sigma^{t_1}(b_j) \neq 0$. k را کوچکترین عدد از مجموعه $\{1,2,...,m\}$ در نظر می‌گیریم، به طوری که برای برخی t_2 ها $a_0R\sigma^{t_2}(b_k) \neq 0$. بنابراین برای $j \in \{0,1,...,k-1\}$ و برای هر t، $a_0R\sigma^t(b_j) = 0$. چون $\sigma^t(b_j)Ia_0R \subseteq I$ و I بعنوان یک حلقه نیم اول است، داریم:

$$(\sigma^t(b_j)Ia_0R)^2 = \sigma^t(b_j)I(a_0R\sigma^t(b_j))Ia_0R = 0$$

بنابراین $\sigma^t(b_j)Ia_0R = 0$. پس $\sigma^t(b_j)Ia_0 = 0$. همچنین

$$\begin{aligned}(a_{k-j}R\sigma^t(b_j))(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k))^2 &= (a_{k-j}R\sigma^t(b_j))(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k)R)(a_0R\sigma^{t_2}(b_k))\\ &\subseteq (a_{k-j}R\sigma^t(b_j))I(a_0R\sigma^{t_2}(b_k))\\ &= a_{k-j}R(\sigma^t(b_j)Ia_0)R\sigma^{t_2}(b_k) = 0\end{aligned}$$

با توجه به رابطه(۵.۴) برای هر $r \in R$ ضریب جمله x^{k+t_2} در $f(x)R[x;\sigma]g(x) = 0$ برابر است با:

$$0 = a_0r\sigma^{t_2}(b_K) + a_1\sigma(r)\sigma^{t_2+1}(b_k - 1) + ... + a_k\sigma^k(r)\sigma^{t_2+k}(b_0) \tag{۶.۴}$$

حال اگر رابطه (۶.۴) را از سمت راست در $(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k))^2$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}0 &= (a_0r\sigma^{t_2}(b_K) + a_1\sigma(r)\sigma^{t_2+1}(b_k - 1) + ... + a_k\sigma^k(r)\sigma^{t_2+k}(b_0))(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k))^2\\ &= a_0r\sigma^{t_2}(b_K)(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k))^2\end{aligned}$$

بنابراین $(Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k))^2 = 0$. از آنجایی که $Ra_0R\sigma^{t_2}(b_k) \subseteq I$ و با توجه به رابطه (۵.۴) و اینکه I بعنوان یک حلقه نیم اول است، داریم: $a_0R\sigma^{t_2}(b_k) = 0$ که یک تناقض است.

پس برای هر $j \in \{0,1,...,m\}$، $a_0R\sigma^t(b_j) = 0$. بنابراین اگر $f_1(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^{n-1}$، آن‌گاه $f_1(x)R[x;\sigma]g(x) = 0$. بنا به فرض استقرا، برای هر $0 \leq i \leq n-1$، $0 \leq j \leq m$، $a_iR\sigma^i(b_j) = 0$. بنابراین R شبه σ -آرمنداریز اریب است.

□

حال حلقه کسرهای کلاسیک چپ $Q(R)$ از حلقه شبه σ -آرمنداریز اریب R را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه R باشد. اگر حلقه کسرهای کلاسیک چپ $Q(R)$ از R موجود باشد، آن‌گاه برای هر $b^{-1}a \in Q(R)$ نگاشت القایی $\overline{\sigma} : Q(R) \longrightarrow Q(R)$ با ضابطه $\sigma(b)^{-1}\sigma(a) \longmapsto (b^{-1}a)$ یک خودریختی از $Q(R)$ است.

قضیه ۲۱.۱.۴. *فرض کنیم R حلقه اور چپ با خودریختی σ از R باشد. اگر R شبه σ -آرمنداریز اریب باشد، آنگاه $Q(R)$ شبه $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است.*

برهان. فرض کنیم $Q = Q(R)$. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$ دو عضو از $Q[x]$ باشند به طوری که $f(x)Q[x;\overline{\sigma}]g(x) = 0$. بنا به لم(۶.۳.۱) عناصر $a_i, b_j, v, u \in R$ وجود دارند به طوری که u, v منظم هستند، و برای هر i, j، $\alpha_i = u^{-1}a_i$، $\beta_j = v^{-1}b_j$. چون $f(x)Q[x;\overline{\sigma}]g(x) = 0$، پس برای هر عدد صحیح $k \geq 0$ داریم:

$$u^{-1}(a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)Qx^kv^{-1}(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) = 0$$

از آنجایی که $Q\sigma^k(v)^{-1} = Q$ و $Q = Qv^{-1}$ لذا برای هر $k \geq 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)Qx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\ &= (a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)Qv^{-1}Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $t^{-1}s \in Q$، $sv^{-1} = v'^{-1}s'$، $t^{-1}v'^{-1} = t'^{-1}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)t^{-1}sv^{-1}Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\ &= (a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)t'^{-1}s'Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\ &= (a_0t'^{-1}s' + a_1\overline{\sigma}(t'^{-1}s')x + ... + a_m\overline{\sigma}^m(t'^{-1}s')x^m)Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\ &= (a_0t'^{-1}s' + a_1\sigma(t'^{-1}s')x + ... + a_m\sigma^m(t'^{-1}s')x^m)Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $a_i\sigma^i(t'^{-1})^{-1} = w^{-1}a'_i$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} (w^{-1}a'_0s' + w^{-1}a'_0\sigma(s')x + ... + w^{-1}a'_m\sigma^m(s')x^m)Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) &= 0 \\ w^{-1}(a'_0s' + a'_0\sigma(s')x + ... + a'_m\sigma^m(s')x^m)Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$(a'_0s' + a'_0\sigma(s')x + ... + a'_m\sigma^m(s')x^m)Rx^k(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) = 0$$

از آنجایی که R شبه σ -آرمنداریز اریب است و

$$a'_i\sigma^i(s')R\sigma^i(b_j) = \circ \quad (۷.۴)$$

لذا برای هر $1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$، $w^{-1}a'_i\sigma^i(s')R\sigma^i(b_j) = \circ$. حال نشان می‌دهیم $u^{-1}a_iQ\sigma^i(v^{-1}b_j) = \circ$.

از رابطه(۷.۴) و همچنین روابط گفته شده، نتیجه می‌گیریم برای هر $t^{-1}s \in Q$، $1 \leq j \leq n$:

$$(a_\circ + a_1x + ... + a_mx^m)t^{-1}sv^{-1}b_j = \circ$$

لذا برای هر $1 \leq j \leq n$ و $(u^{-1}a_\circ + u^{-1}a_1x + ... + u^{-1}a_mx^m)Qv^{-1}b_j = \circ$. پس برای هر $1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$، $u^{-1}a_iQ\sigma^i(v^{-1}b_j) = \circ$. بنابراین Q شبه $\overline{\sigma}$ -آرمنداریز اریب است. $\square$

فرض کنیم A ایده‌آلی از حلقه R و $i = i(A)$ عدد صحیح وابسته به A باشد. مجموعه A' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A' = \{ax^k \mid a \in A \ , \ k \geq i = i(A)\} \subseteq R[x;\sigma]$$

و $A' = \cup_{t=\circ}^{\infty} Ax^{i+t}$. نشان می‌دهیم $r_{R[x;\sigma]}(A')$ و $r_{R[x;\sigma]}(A') \cap R$ بترتیب ایده‌آل‌هایی از $R[x;\sigma]$ و R هستند. فرض کنیم $f \in r_{R[x;\sigma]}(A')$ و $g(x) = \sum_{i=\circ}^{n} b_ix^i \in R[x;\sigma]$. چون $a\sigma^k(b_i) \in A$ و $a\sigma^k(b_i)x^{k+i} \in A'$ پس برای هر $ax^k \in A'$،

$$ax^kg(x)f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} a\sigma^k(b_i)x^{k+i}f(x) = \circ$$

بنابراین $g(x)f(x) \in r_{R[x;\sigma]}(A')$. فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از R باشد. قرار می‌دهیم:

$$rAnn_R(۲^R) = \{r_R(U) \mid U \subseteq R\}$$
$$lAnn_R(۲^R) = \{l_R(U) \mid U \subseteq R\}$$

واضح است که: $r_{R[x]}(U) = r_R(U)R[x]$. بنابراین نگاشت $\varphi : rAnn_R(۲^R) \longrightarrow rAnn_{R[x]}(۲^{R[x]})$ با ضابطه $I \longmapsto IR[x]$ خوشتعریف است. برای چندجمله‌ای $f(x) \in R[x]$ مجموعه ضرایب آن را به C_f نمایش می‌دهیم. برای زیرمجموعه V از $R[x]$ قرار می‌دهیم $C_V = \cup_{f\in V}C_f$ در این صورت:

$$r_{R[x]}(V) \cap R = r_R(V) = r_R(C_V).$$

بنابراین نگاشت $\psi : rAnn_{R[x]}(۲^{R[x]}) \longrightarrow rAnn_R(۲^R)$ با ضابطه $I \longmapsto I \cap R$ خوشتعریف است. واضح است که φ یک به یک و ψ پوشاست.

قضیه بعد نشان می‌دهد φ دوسویی است اگر و تنها اگر R آرمنداریز باشد.

گزاره ۲۲.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R *آرمنداریز است؛*

۲. **نگاشت** $rAnn_{R[x]}(۲^{R[x]}) \longrightarrow rAnn_R(۲^R)$ *با ضابطه‌ی* $AR[x] \longmapsto A$ **دوسویی** *است؛*

۳. **نگاشت** $rAnn_{R[x]}(۲^{R[x]}) \longrightarrow rAnn_R(۲^R)$ *با ضابطه‌ی* $R[x]B \longmapsto B$ **دوسویی** *است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) برای چندجمله‌ای $f(x)$ در حلقه $R[x]$، C_f نمایانگر مجموعه ضرایب $f(x)$ است و برای زیرمجموعه S از $R[x]$، $C_S = \cup_{f\in S} C_f$. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از $R[x]$ و $f(x)$ عضوی از S باشد. از آنجایی که R آرمنداریز است، لذا $r_{R[x]}(f) = r_{R[x]}(C_f) = r_R(C_f)R[x]$. بنابراین

$$r_{R[x]}(S) = \cap_{f\in S} r_{R[x]}(f) = \cap_{f\in S} r_{R[x]}(C_f) = r_R(C_f)R[x]$$

(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ یک چندجمله‌ای در $R[x]$ باشد. ایده‌آل راست B وجود دارد که $r_{R[x]}(f) = BR[x]$. اگر $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ عضوی در $R[x]$ باشد و $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه $g(x) \in BR[x]$. پس $b_0, ..., b_n \in B \subseteq r_{R[x]}(f)$ بنابراین برای هر i, j، $a_i b_j = 0$.

(۱) $\Longleftrightarrow$ (۳) به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

فرض کنیم

$$rAnn_R(id(R)) = \{r_R(U) \mid U \text{ ایده‌آلی از } R\} \text{ و } lAnn_R(id(R)) = \{l_R(U) \mid U \text{ ایده‌آلی از } R\}$$

گزاره ۲۳.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R *شبه آرمنداریز است؛*

۲. **نگاشت** $rAnn_{R[x]}(id(R[x])) \longrightarrow rAnn_R(id(R))$ *با ضابطه‌ی* $AR[x] \longmapsto A$ **دوسویی** *است؛*

۳. **نگاشت** $lAnn_{R[x]}(id(R[x])) \longrightarrow lAnn_R(id(R))$ *با ضابطه‌ی* $AR[x] \longmapsto A$ **دوسویی** *است.*

برهان. می‌توان آن را مشابه قضیه قبل اثبات نمود. $\square$

برای ایده‌آل‌های $A_j (j \in I)$ از R داریم: $r_{R[x;\sigma]}(\cup_j A'_j) = \cap_j r_{R[x;\sigma]}(A'_j)$. بنابراین

$$r_{R[x;\sigma]}(\cup_j A'_j) \text{ و } r_R(\cup_j A'_j) = r_{R[x;\sigma]}(\cup_j A'_j) \cap R$$

بترتیب ایده‌آل‌هایی از $R[x;\sigma]$ و R هستند.

حال فرض کنیم $\Gamma = \{r_R(\cup_j B'_j) \mid$ برای هر $j \in I$ ، B_j ایده‌آلی از R است $\}$
و

$\Delta = \{r_{R[x;\sigma]}(V) \mid$ V ایده‌آلی از $R[x;\sigma]$ $\}$. در این صورت نگاشت $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ با ضابطه $\varphi\left(r_R(\cup_j B'_j)\right) = r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma]$ نگاشتی یک به یک است.

قضیه ۲۴.۱.۴. *فرض کنیم σ یک بروریختی از حلقه R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R شبه σ -آرمنداریز است؛*

۲. *نگاشت $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ با ضابطه $r_R(\cup_j B'_j) \longmapsto r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma]$ دوسویی است.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم φ خوشتعریف است. فرض کنیم $r_R(\cup_j B'_j) \in \Gamma$، و

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \in r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma]$.

در نتیجه $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \in r_R(\cup_j B'_j)$. پس برای هر ℓ، $b_\ell x^\ell \in r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j)$ و $g(x) \in r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j)$.

بعکس، فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j)$. پس برای هر $bx^k \in \cup_j B'_j$ داریم:

$$0 = bx^k(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = bx^k a_0 + bx^k a_1 x + \dots + bx^k a_n x^n$$

اگر برای برخی t ها، $bx^k a_t \neq 0$، آنگاه $b\sigma^k(a_t) \neq 0$. لذا $bx^k a_t x^t = b\sigma^k(a_t)x^{k+t} \neq 0$. پس $bx^k f(x) \neq 0$ که یک تناقض است. بنابراین $a_j \in r_R(\cup_j B'_j)$. فرض کنیم $f(x)$ عضوی در $r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma]$ باشد. در نتیجه $r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma] = r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j)$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} r_R(\cup_j B'_j)R[x;\sigma] &= r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j) \\ &= r_{R[x;\sigma]}((\cup_j B'_j)R[x;\sigma]) \\ &= r_{R[x;\sigma]}(R[x;\sigma](\cup_j B'_j)R[x;\sigma]) \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم نگاشت φ یک به یک است.

فرض کنیم $\varphi(r_R(\cup_s A'_s)) = \varphi(r_R(\cup_t A'_t))$ در این صورت

$$r_R(\cup_s A'_s)R[x;\sigma] = r_R(\cup_t A'_t)R[x;\sigma].$$

پس $r_{R[x;\sigma]}(\cup_s A'_s) = r_{R[x;\sigma]}(\cup_t A'_t)$. در نتیجه

$$r_R(\cup_s A'_s) = r_{R[x;\sigma]}(\cup_s A'_s) \cap R = r_{R[x;\sigma]}(\cup_t A'_t) \cap R = r_R(\cup_t A'_t)$$

بنابراین φ یک به یک است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۲) کافی است نشان دهیم نگاشت φ دوسویی است. فرض کنیم V ایده‌آلی از حلقه $R[x;\sigma]$ و $f(x)=a_\circ+a_\text{۱}x+...+a_nx^n\in V$ باشد. اگر $g(x)=b_\circ+b_\text{۱}x+...+b_mx^m$ عضوی در $r_{R[x;\sigma]}(f(x)R[x;\sigma])$ باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح نامنفی t داریم: $f(x)R[x;\sigma]g(x)=\circ$. لذا $f(x)x^tR[x;\sigma]g(x)=\circ$. چون R حلقه شبه σ -آرمنداریز اریب است. برای هر $\circ\leq i\leq n$ و $\circ\leq j\leq m$ داریم: $a_iR\sigma^{i+t}(b_j)=\circ$.

بنابراین برای هر $\circ\leq i\leq n$ و $\circ\leq j\leq m$، $b_j\in r_R(a_iRx^{i+t})=r_R(Ra_iRx^{i+t})$.

پس $b_j\in\cap_{i=\circ}^n r_R(Ra_iRx^{i+t})=r_R(\cup_{i=\circ}^n Ra_iRx^{i+t})$. برای $i=\circ,\text{۱},...,n$ مجموعه $A_i=Ra_iR$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $A'_i=\{dx^j\mid d\in A_j,\ j\geq\text{۱}\}$ و $i=i(A_i)$.

بنابراین $g(x)\in r_R(\cup_{i=\circ}^n A'_i)R[x;\sigma]$ و همچنین اگر $M_f=\cup_{i=\circ}^n A'_i$، آنگاه

$$r_{R[x;\sigma]}(f(x)R[x;\sigma])\subseteq r_R(M_f)R[x;\sigma]$$

بعکس، فرض کنیم $g(x)\in r_R(M_f)R[x;\sigma]=r_{R[x;\sigma]}(M_f)$. از آنجایی که هر جمله در $f(x)R[x;\sigma]$ به صورت مجموعی از تک جمله‌ای‌ها در M_f است، پس $f(x)R[x;\sigma]g(x)=\circ$. بنابراین $g(x)\in r_{R[x;\sigma]}(f(x)R[x;\sigma])$ در نتیجه $r_{R[x;\sigma]}(f(x)R[x;\sigma])=r_R(M_f)R[x;\sigma]$. حال اگر $M_V=\cup_{ij}(Ra_{ij}R)'$ و a_{ij} از مجموعه ی همه ضرایب چندجمله‌ای‌ها در V انتخاب شود، آنگاه

$$\begin{aligned}r_{R[x;\sigma]}(V)&=\cap_{f(x)\in V}r_{R[x;\sigma]}(f(x)R[x;\sigma])\\&=\cap_{f(x)\in V}r_{R[x;\sigma]}(M_f)=r_{R[x;\sigma]}(\cup_{f(x)\in V}M_f)\\&=r_{R[x;\sigma]}(M_V)=r_{R[x;\sigma]}(\cup_jB'_j)\\&=r_R(\cup_jB'_j)R[x;\sigma]=\varphi(r_R(\cup_jB'_j))\end{aligned}$$

بنابراین φ دوسویی است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم

$$f(x)=a_\circ+a_\text{۱}x+...+a_nx^n \qquad \text{و} \qquad g(x)=b_\circ+b_\text{۱}x+...+b_mx^m$$

دو عضو در حلقه $R[x;\sigma]$ باشند و $f(x)R[x;\sigma]g(x)=\circ$. از آنجایی که φ دوسویی است. برای برخی $r_R(\cup_jB'_j)$ در Γ داریم:

$$r_{R[x;\sigma]}(R[x;\sigma]f(x)R[x;\sigma])=r_R(\cup_jB'_j)R[x;\sigma]$$

چون $r_R(\cup_jB'_j)R[x;\sigma]=r_{R[x;\sigma]}(\cup_jB'_j)$، بنابراین $(\cup_jB'_j)g(x)=\circ$. در این صورت برای هر $dx^k\in\cup_jB'_j$، $dx^k(b_\circ+b_\text{۱}x+...+b_mx^m)=\circ$. در نتیجه برای هر $j=\circ,\text{۱},...,m$، $dx^kb_j=\circ$.

همچنین

$$b_j \in r_{R[x;\sigma]}(\cup_j B'_j) = r_{R[x;\sigma]}(R[x;\sigma]f(x)R[x;\sigma])$$

پس برای هر $j = 0, 1, ..., m$ داریم: $(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)Rb_j = 0$ و با این فرض که σ دوسویی باشد. برای هر i, j، $a_iR\sigma^i(b_j) = 0$ پس حلقه R شبه σ -آرمنداریز اریب است.

□

مراجع

[۱] ابراهیم. هاشمی، (۱۳۹۰)، *آشنایی با پوچ‌سازهای چندجمله‌ای ها*، چاپ اول، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

[۲] ویوک. ساهایی، ویکاس بیست، (۱۳۸۷)، جبر، ابراهیم. هاشمی، چاپ اول، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

[3] D. D. Anderson, V.Camillo, *Armendariz rings and Gaussian rings*, Comm. Algebra. 26 (1998), no. 7, 2265-2272

[4] E. P. Armendariz, *A note on extensions of Baer and P. P.-rings*, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470-473. Publ., River Edge, NJ, 1993.

[5] W. Chen, W. Tong *A note on skew Armendariz rings*. Comm. Algebra. 33 (2005), no. 4, 1137-1140.

[6] E. Hashemi, *Quasi-Armendariz rings relative to a monoid*, J. Pure Appl. Algebra 211 (2007), no. 2, 374-382.

[7] Y. Hirano, *On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring*, J. Pure Appl. Algebra 168 (2002), no. 1, 45-52.

[8] C. Y. Hong, N. K. Kim, T. K. Kwak, *Ore extenyions of Baer and p.p.-rings*, J. Pure and Apple. Algebra 151, (2000), no.3, 215-226.

[9] C. Y. Hong, N. K. Kim, T. K. Kwak, *On skew Armendariz rings*, Comm. Algebra 31 (2003), no.1, 103-122.

[10] C. Y. Hong, N. K. Kim, Y. Lee, *Skew polynomial rings over semiprime rings*, J. Korean Math. Soc. 47, (2010), no.5, 879-897.

[11] N. K. Kim, Y. Lee, *Armendariz rings and reduced rings*, J. Algebra 223 (2000), no. 2, 477-488.

[12] T. Y. Lam *A First Course in Noncommutative Rings* , Springer-Verlag (1991) otes in Theoretical Computer Science, Vol. 87, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 2004.

[13] T. K. Lee, T. K Wong *On Armendariz rings*, Houston J. Math 29 (2003), no.3, 583-593.

[14] J. Matczuk, *A characterization of* σ*- rigid rings*,Comm. Algebra 32 (2004), no.11, 4333-4336.

[15] D. S. Passmann, *The Algebra Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1997.

[16] M. B. Rege, S. Chhawchharia, *Armendarize rings*, Japan Acad. ser. A Math. Sci. 73 (1997), no. 1, 14-17

فصل ۵

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پایا	essential
بروریختی	epimorphism
پایا	invariant
پوچ توان	nilpotent
پوچ ساز	annihilator
دوسویی	surjective
تقلیل یافته	reduced
تکوار	monoid
توسیع بدیهی	trivial extention
توسیع اور	Ore extension
تولید شده توسط	generated by ...
حلقه تکوار اریب	skew monoid ring
حلقه چندجمله‌ای اریب	skew polynomial ring
حلقه خارج قسمتی	factor ring
خودریختی	automorphism
درونریختی	endomorphism
دوسویی	bijective

سره .... pruper

شرکت‌پذیر .... associative

صلب .... rigid

قضیه .... theorem

گزاره .... proposition

ماتریس بالا مثلثی .... upper triangular matrix

σ–مشتق .... σ-derivation

ملاحظه .... remark

موریتا پایا .... Morita stable

منظم .... regular

نتیجه .... corollary

نمایش منحصر بفرد .... uniquely presented

نیم‌اول .... semiprime

همانی .... identity

یک به یک .... injective

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

annihilator .... پوچ ساز

associative .... شرکت‌پذیر

automorphism .... خودریختی

bijective .... دوسویی

condition .... شرط

corollary .... نتیجه

σ-derivation .... σ-مشتق

endomorphism .... درونریختی

epimorphism .... برووریختی

essential .... اساسی

factor ring .... حلقه خارج قسمتی

generated by ... . تولید شده توسط ...

idempotent .... خودتوان

identity .... همانی

injective .... یک به یک

integer .... صحیح

invariant .... پایا

تکوار .... monoid

موریتا پایا .... Morita stable

پوچ توان .... nilpotent

توسیع اور .... Ore extension

سره .... pruper

گزاره .... proposition

حلقه کسرها .... quotient ring

تقلیل یافته .... reduced

منظم .... regular

ملاحظه .... remark

صلب .... rigid

نیم‌اول .... semiprime

حلقه تکوار اریب .... skew monoid ring

حلقه چندجمله‌ای اریب .... skew polynomial ring

پوشا .... surjective

قضیه .... theorem

توسیع بدیهی .... trivial extention

نمایش منحصر بفرد .... uniquely presented

ماتریس بالا مثلثی .... upper triangular matrix

Surname: Kian Name: Somayeh

Title: Skew polynomial rings over semiprime rings

Supervisor: Dr.Ebrahim Hashemi

Advisor: Dr.Ahmad Zire

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Algebra

Shahrood University of Technologi Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of pages: 68

Keywords: Semiprime ring; Quasi-Armendariz ring; Rigid ring; Skew polynomial ring

Abstract

This thesis reviews the quasi-Armendariz property of semiprime rings and expands it to the skew monoid rings, the Ore extention and skew power series ring. Next we introduce the σ-Armendariz rings and their propertises. then introduces the σ-skew quasi-Armendariz ring and transport this propertise to matrix rings, skew polynomial rings and quotient rings.

Shahrood University of Technologi
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Skew polynomial rings over semiprime rings

Supervisor
Dr.Ebrahim Hashemi

Advisor
Dr.Ahmad Zire

by
Somayeh Kian

2013