دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

حلقه های SB

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر احمد زیره

پژوهشگر

زهرا وزیری

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: وزیری نام: زهرا

عنوان: حلقه های SB

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور: دکتر احمد زیره

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۶

واژگان کلیدی: حلقه ی SB ، حلقه ی نیم موضعی ، حلقه ی تبادلی، حلقه ی ماتریسی.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا نشان می دهیم اگر حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. همچنین ثابت می کنیم اگر R شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز چنین است. در ادامه نشان می دهیم اگر R در شرط $G-M$ صدق کند، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز در شرط $G-M$ صدق می کند.

سپس به بررسی حلقه های SB می پردازیم و شرایطی را ارائه می دهیم که تحت آنها، یک حلقه ی نیم موضعی، SB است. بعلاوه، این نتایج را به حلقه های تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی نیز گسترش می دهیم و مشاهده می کنیم برای این حلقه ها، خاصیت SB با شرط $G-M$ معادل می شود.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه، برگرفته از مقالات [۵] و [۶] می باشد.

تقدیم به

پدر

و

مادر عزیزم

سپاس گزاری...

خداوند را شاکرم که به من فرصتی عطا فرمود تا بخشی از زندگی ام را با انسان های فرهیخته سپری نمایم و از رهگذر این مصاحبت به بسط بینش مبتنی بر یادگیری ام یاری رسانم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره ی پرخاطره از تحصیلم را به پایان رسانده ام، بر خود لازم می دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر هاشمی که در تمامی مراحل، مرا مرهون راهنمایی های عالمانه و لطف صبورانه خود قرار داده اند، به گونه ای که یک گام به پیش رفتن را از ایشان آموختم، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. بی تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایشان امکان پذیر نبود.

همچنین از جناب آقای دکتر زیره که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، زحمات پدر و مادر مهربانم را که همواره در پستی و بلندی های زندگی، همراهم بوده اند و دعای خیرشان بدرقه ی راهم بوده است ارج می نهم و از دوستان عزیزم خانم سمیه کیان، خانم فاطمه عسگری، خانم فاطمه حلاج، خانم زیبا توشمالانی که مرا در این مهم یاری نمودند نهایت سپاسگزاری را دارم و برایشان آرزوی موفقیت می کنم.

زهرا وزیری

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

نویسنده های زیادی حلقه هایی که خاصیت برد پایای یکه ی یک دارند را مورد بررسی قرار داده اند؛ از جمله چن [۱] [۲]، گودرل [۲] و منال [۳] [۹]. چن و لی [۴] در [۷] حلقه هایی را بررسی کرده اند که شامل تعدادی عنصر منظم یکه هستند و نشان داده اند که حلقه های تبادلی و نیم کامل، شامل تعدادی عنصر منظم یکه هستند. در [۹]، گودرل و منال حلقه هایی را مورد بررسی قرار داده اند که در شرط $G-M$ صدق می کنند و یو [۵] در [۱۴]، حلقه های تبادلی با فاکتور های اولیه آرتینی را مورد مطالعه قرار داده است.

در این پایان‌نامه، در فصل اول، نمادها، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می کنیم. در فصل دوم ابتدا برخی از ویژگی های حلقه هایی که خاصیت برد پایای یکه ی یک دارند را بررسی می کنیم و نشان می دهیم اگر حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. همچنین برخی از ویژگی های حلقه هایی که شامل تعدادی عنصر منظم یکه هستند را بررسی می کنیم و ثابت می کنیم اگر R شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز چنین است. در ادامه نشان می دهیم اگر R در شرط $G-M$ صدق کند، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز در شرط $G-M$ صدق می کند.

در فصل سوم به بررسی حلقه های SB می پردازیم و شرایطی را ارائه می دهیم که تحت آنها، یک حلقه ی نیم موضعی، یک حلقه ی SB است. همچنین نشان می دهیم برای یک حلقه ی نیم موضعی، خاصیت SB با شرط $G-M$ معادل می شود. در فصل چهارم به بررسی حلقه های تبادلی می پردازیم و نتایج فصل سوم را به حلقه های تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی گسترش می دهیم و مشاهده می کنیم برای این حلقه ها نیز خاصیت SB با شرط $G-M$ معادل می شود. و در آخر، شرطی را مطرح می کنیم که تحت آن یک حلقه ی تبادلی با خودتوان های مرکزی، یک حلقه ی SB است.

[۱] Chen
[۲] Goodearl
[۳] Menal
[۴] Li
[۵] Yu

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه ی شرکت پذیر و یکدار است و از نمادهای زیر استفاده می کنیم:

$U(R)$: مجموعه ی یکه های حلقه ی R،

D^*: مجموعه ی عناصر ناصفر حلقه ی تقسیم D،

$M_n(R)$: ماتریس های $n \times n$ روی R،

$GL_n(R)$: گروه خطی عمومی $n-$بعدی روی R،

$J(R)$: رادیکال جیکبسون حلقه ی R،

$End_R(M)$: حلقه ی درونریختی های مدول M،

${}_RM$: $R-$مدول چپ M.

برای هر $\alpha, \beta \in U(R)$ و $a, b \in R$، قرار می دهیم:

$$B_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{21}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

بوضوح برای هر $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in U(R)$، $x, y \in R$ و $1 \leq i, j \leq 2$، رابطه های زیر برقرارند:

(۱) $B_{ij}(x)B_{ij}(y) = B_{ij}(x+y)$،

(۲) $B_{ij}(x)[\alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2]B_{ij}(\alpha_i^{-1}x\alpha_j)$،

(۳) $[\alpha_1, \alpha_2]B_{ij}(x) = B_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})[\alpha_1, \alpha_2]$،

(۴) $[\alpha_1, \alpha_2][\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2]$،

(۵) $[\alpha_1, \alpha_2]^{-1} = [\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}]$،

(۶) $B_{ij}^{-1}(x) = B_{ij}(-x)$.

رابطه های فوق را **رابطه های Δ** می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱. خودتوان های $e, f \in R$ را **متعامد** می نامیم، هرگاه $ef = fe = \circ$.

تعریف ۲.۲.۱. الف) مدول M را **تجزیه ناپذیر** می نامیم، هرگاه نتوان آن را بصورت مجموع مستقیم دو زیرمدول سره آن نوشت.

ب) حلقه ی R را **تجزیه ناپذیر** می نامیم، هرگاه نتوان آن را بصورت مجموع مستقیم دو حلقه ی ناصفر نوشت.

تعریف ۳.۲.۱. الف) R-مدول چپ M را **نیم ساده** می نامیم، هرگاه هر زیرمدول آن یک جمعوند مستقیم آن باشد.

ب) حلقه ی R را **نیم ساده** می نامیم، هرگاه ${}_RR$ نیم ساده باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم N زیر مجموعه ای از R-مدول چپ M باشد. در این صورت **پوچساز چپ** N بصورت زیر تعریف می شود:

$$(\circ : N) = \{r \in R | rn = \circ, \text{برای هر } n \in N\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. مدول چپ M را **وفادار** می نامیم، هرگاه پوچساز چپ آن مساوی صفر شود.

تعریف ۶.۲.۱. حلقه ی R را **اولیه ی چپ** گوییم، هرگاه یک R-مدول چپ وفادار ساده وجود داشته باشد. ایده آل P از R را **اولیه** گوییم، هرگاه حلقه ی $\frac{R}{P}$ اولیه ی چپ باشد.

در ادامه چند گزاره درباره ی وارون پذیری عناصر در یک حلقه را مطرح می کنیم:

گزاره ۷.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $ax + b = ۱$، که $a, b, x \in R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *$y \in R$ وجود دارد بطوریکه $a + by$ وارون پذیر راست (چپ) است.*

(۲) *$z \in R$ وجود دارد بطوریکه $x + zb$ وارون پذیر چپ (راست) است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم u وارون چپ $a+by$ باشد. در این صورت $u(a+by)=۱$. بنابراین

$$\begin{aligned}(x+(۱-xy)ub)(a+y(۱-xa)) &= xa+xy-xyxa+uba-xyuba+uby\\ &\quad -xyuby-ubyxa+xyubyxa\\ &= xa+xy-xyxa+uba-xyuba+(۱-ua)\\ &\quad -xy(۱-ua)-(۱-ua)xa+xy(۱-ua)xa\\ &= uba-xyuba+۱-ua+xyua+uaxa-xyuaxa\\ &= u(۱-ax)a-xyu(۱-ax)a+۱-ua+xyua\\ &\quad +uaxa-xyuaxa=۱.\end{aligned}$$

در نتیجه $x+zb$ وارون پذیر راست است که $z=(۱-xy)u$.

حال اگر u وارون راست $a+by$ باشد، آنگاه $(a+by)u=۱$. بنابراین

$$\begin{aligned}(a+y(۱-xa))(x+(۱-xy)ub) &= ax+aub-axyub+yx-yxax\\ &\quad +yub-yxyub-yxaub+yxaxyub\\ &= (۱-b)+aub-(۱-b)yub+yx-yx(۱-b)\\ &\quad +yub-yxyub-yxaub+yx(۱-b)yub\\ &= ۱-b+aub+byub+yxb-yxaub-yxbyub\\ &= ۱-b+aub+(۱-au)b+yxb-yxaub\\ &\quad -yx(۱-au)b=۱.\end{aligned}$$

در نتیجه $x+zb$ وارون پذیر چپ است که $z=(۱-xy)u$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم v وارون راست $x+zb$ باشد. در این صورت $(x+zb)v=۱$. مشابه (۱) $\Leftarrow$ (۲) داریم:

$$(x+(1-xa)z)(a+bv(1-za))=1.$$

پس $a+by$ وارون پذیر چپ است که $y=v(1-za)$. بطور مشابه اگر $x+zb$ وارون پذیر چپ باشد، آنگاه $y\in R$ وجود دارد بطوریکه $a+by$ وارون پذیر راست است. □

گزاره ۸.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a,b\in R$. در این صورت $1+ba\in U(R)$، اگر و تنها اگر $1+ab\in U(R)$.*

برهان. فرض کنیم $1+ba\in U(R)$. می دانیم $Rb(1+ab)\subseteq R(1+ab)$. چون $b(1+ab)=(1+ba)b$ و $1+ba$ وارون پذیر است، پس

$$Rb(1+ab)=R(1+ba)b=Rb.$$

لذا $Rb\subseteq R(1+ab)$. پس $ab\in R(1+ab)$. در نتیجه

$$(1+ab)-ab=1\in R(1+ab).$$

پس $1+ab$ در R وارون پذیر چپ است. بطور مشابه می توان نشان داد وارون پذیر راست است، پس $1+ab\in U(R)$.

بعکس، بطور مشابه اثبات می شود. □

گزاره ۹.۲.۱. *عنصر $x\in R$ وارون پذیر چپ (وارون پذیر) است، اگر و تنها اگر $\overline{x}\in\overline{R}=R/J(R)$ وارون پذیر چپ (وارون پذیر) باشد.*

برهان. به مرجع [۱۱] گزاره ی ۸.۴ رجوع کنید. □

گزاره ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A=\begin{pmatrix}\alpha & a\\ b & c\end{pmatrix}$، که $A\in GL_2(R)$ و $\alpha\in U(R)$. در این صورت عناصر $d,e\in R$ و $\beta\in U(R)$ وجود دارند بطوریکه*

$$A=[\alpha,\beta]B_{21}(d)B_{12}(e),$$

که $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$، $d = \beta^{-1}b$ و $e = \alpha^{-1}a$.

برهان. ثابت می کنیم $x, y \in R$ وجود دارند که

$$B_{21}(x)\begin{pmatrix}\alpha & a\\ b & c\end{pmatrix}B_{12}(y) = [\alpha, \beta].$$

در واقع $x, y \in R$ باید در تساوی زیر صدق کنند:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha y + a\\ xa + b & (x\alpha + b)y + xa + c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

پس $\alpha y + a = 0$ و $x\alpha + b = 0$. در نتیجه $y = -\alpha^{-1}a$، $x = -b\alpha^{-1}$ و $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$. چون $B_{21}(x)AB_{12}(y)$ وارون پذیر است (وارون آن بصورت $B_{12}(-y)A^{-1}B_{21}(-x)$ می باشد.)، پس $[\alpha, \beta]$ وارون پذیر است. لذا $\beta \in U(R)$. پس

$$B_{21}(-b\alpha^{-1})AB_{12}(-\alpha^{-1}a) = [\alpha, \beta].$$

با ضرب رابطه ی فوق از راست در $B_{12}^{-1}(-\alpha^{-1}a) = B_{12}(\alpha^{-1}a)$ و از چپ در $B_{21}^{-1}(-b\alpha^{-1}) = B_{21}(b\alpha^{-1})$، داریم:

$$A = B_{21}(b\alpha^{-1})[\alpha, \beta]B_{12}(\alpha^{-1}a).$$

ازبند (۲) روابط Δ، داریم $B_{21}(b\alpha^{-1})[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]B_{21}(\beta^{-1}b)$. پس

$$A = [\alpha, \beta]B_{21}(\beta^{-1}b)B_{12}(\alpha^{-1}a).$$

□

گزاره ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & \beta\end{pmatrix}$، که $A \in GL_2(R)$ و $\beta \in U(R)$. در این صورت عناصر $d, e \in R$ و $\alpha \in U(R)$ وجود دارند بطوریکه*

$$A = [\alpha, \beta]B_{12}(d)B_{21}(e),$$

که $\alpha = a - b\beta^{-1}c$، $d = \alpha^{-1}b$ و $e = \beta^{-1}c$.

برهان. مشابه گزاره ی قبل اثبات می شود. □

گزاره ۱۲.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت* $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$.

برهان. به مرجع [۱۱] صفحه ی ۶۱ مثال ۷ رجوع کنید. □

قضیه ۱۳.۲.۱. *(آرتین-ودربرن)[۶] فرض کنیم R یک حلقه ی نیم ساده باشد. در این صورت عدد منحصر به فرد r و حلقه های تقسیم $D_1, \dots, D_r$ وجود دارند بطوریکه*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r).$$

همچنین دقیقا r، مدول ساده چپ روی R وجود دارند که دو بدو یکریخت نیستند.

برهان. به مرجع [۱۱] قضیه ی ۵.۳ رجوع کنید. □

تعریف ۱۴.۲.۱. حلقه ی R را **منظم** می نامیم، هر گاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ وجود داشته باشد که $xyx = x$.

قضیه ۱۵.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی منظم است.*

(۲) *هر ایده آل چپ اصلی توسط یک عنصر خود توان تولید می شود.*

(′۲) *هر ایده آل چپ اصلی یک جمعوند مستقیم $_RR$ است.*

(۳) *هر ایده آل چپ با تولید متناهی توسط یک عنصر خودتوان تولید می شود.*

(′۳) *هر ایده آل چپ با تولید متناهی یک جمعوند مستقیم $_RR$ است.*

برهان. به مرجع [۱۱] قضیه ی ۲۳.۴ رجوع کنید. □

[۶] Wedderburn-Artin

نتیجه ۱۶.۲.۱. *هر حلقه ی نیم ساده، یک حلقه ی منظم است.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه ی نیم ساده باشد. پس بنا به قضیه ی قبل، از معادل بودن (۱) و ($'$۲)، R یک حلقه ی منظم است. $\square$

فصل ۲

یکه ها ، خودتوان ها و شرایط برد پایای یک حلقه

۱.۲ حلقه هایی که خاصیت برد پایای یکه ی یک دارند

در این بخش ابتدا برخی از ویژگی های حلقه هایی که خاصیت برد پایای یکه ی یک دارند را بررسی می کنیم و در آخر نشان می دهیم اگر حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک را داشته باشد، آنگاه حلقه ی ماتریس های $n \times n$ روی R نیز این خاصیت را دارد.

تعریف ۱.۱.۲. گوییم حلقه ی R **خاصیت برد پایای یکه ی یک** [1] دارد، هرگاه $aR+bR = R$ که $a, b \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود داشته باشد که $a + bu \in U(R)$.

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

(۲) *برای هر $x, y \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که $۱ + x\,(y - u) \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): برای هر $x, y \in R$، داریم $(۱ + xy)\,R + (-x)\,R = R$. چون R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $(۱ + xy) + (-x)\,u \in U(R)$. لذا $۱ + x\,(y - u) \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $aR + bR = R$ که $a, b \in R$. پس $x, y \in R$ وجود دارند که $ax + by = ۱$. با استفاده از بند (۲)، برای $(-a), x \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$۱ + (-a)(x - u) = ۱ - ax + au = au + by \in U(R).$$

فرض کنیم v وارون $au + by$ باشد. پس $auv + byv = ۱$.

با استفاده از بند (۲)، برای $(-b), yv \in R$، $w \in U(R)$ وجود دارد که

$$۱ + (-b)(yv - w) = ۱ - byv + bw = auv + bw \in U(R).$$

حال با ضرب $v^{-۱}u^{-۱}$ از سمت راست در $auv + bw$، داریم:

[1] Unit 1-stable range

$$a + bwv^{-1}u^{-1} \in U(R).$$

در نتیجه حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک را دارد. □

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. **حلقه ی متقابل** R، که با R^{op} نمایش می دهیم، بصورت $\{a^{op} : a \in R\}$است، که در آن دو عمل جمع و ضرب به صور ت زیر تعریف می شوند:

$$a^{op} + b^{op} = (a+b)^{op}, \quad a^{op}.b^{op} = (ba)^{op}.$$

نتیجه ۴.۱.۲. *حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، اگر و تنها اگر حلقه ی متقابل R^{op} ، خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد.*

برهان. فرض کنیم R خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد. برای هر $x^{op}, y^{op} \in R^{op}$، داریم $x, y \in R$. بنابراین بنا به قضیه ی ۲.۱.۲، $u \in U(R)$ وجود دارد که $1 + x(y-u) \in U(R)$. لذا بنا به گزاره ی ۸.۲.۱، $1 + (y-u)x \in U(R)$، یعنی $1^{op} + x^{op}(y^{op} - u^{op}) \in U(R^{op})$. از قضیه ی ۲.۱.۲، نتیجه می گیریم که R^{op} خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.

با برعکس کردن روند بالا قسمت عکس اثبات می شود. □

نتیجه ی ۴.۱.۲، نشان می دهد خاصیت برد پایای یکه ی یک، نسبت به چپ و راست متقارن است.

لم ۵.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

(۲) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد که $a + bu \in U(R)$.*

(۳) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد که $x + ub \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $ax + b = 1$. پس $aR + bR = R$. چون حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $a + bu \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): برای هر $x, y \in R$، داریم $(-x)y + (1 + xy) = 1$. لذا بنا به بند (۲)، $u \in U(R)$ وجود دارد که $(-x) + (1 + xy)u \in U(R)$. با ضرب u^{-1} در $(-x) + (1 + xy)u$، داریم :

$$(-x)u^{-1} + (1 + xy) \in U(R).$$

در نتیجه $1 + x(y - u^{-1}) \in U(R)$. لذا بنا به قضیه ی ۲.۱.۲، حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.

(۱) $\Leftarrow$ (۳): اگر $ax + b = 1$، آنگاه $x^{op}a^{op} + b^{op} = 1^{op}$. چون حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس بنا به نتیجه ی ۴.۱.۲، حلقه ی R^{op} نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. لذا با استفاده از (۱) $\Leftarrow$ (۲)، $u^{op} \in U(R^{op})$ وجود دارد که $x^{op} + b^{op}u^{op} \in U(R^{op})$، یعنی $u \in U(R)$ وجود دارد که $x + ub \in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): اگر $ax + b = 1$، آنگاه $x^{op}a^{op} + b^{op} = 1^{op}$. بنا به بند (۳)، $u^{op} \in U(R^{op})$ وجود دارد که $a^{op} + u^{op}b^{op} \in U(R^{op})$، یعنی $u \in U(R)$ وجود دارد که $a + bu \in U(R)$. لذا طبق (۲) $\Leftarrow$ (۱)، حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. □

قضیه ۶.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

(۲) *برای هر $A \in GL_2(R)$، عناصر $x, y \in R$ و $\alpha, \beta, u \in U(R)$ وجود دارند که*

$$A = [\alpha, \beta]B_{21}(x)B_{12}(y)B_{21}(u).$$

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in GL_2(R)$. پس عناصر $x_1, x_2 \in R$ در ستون اول A^{-1} وجود دارند که $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 1$، یعنی $a_{11}R + a_{12}R = R$. چون حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $a_{11} + a_{12}u = v_1 \in U(R)$. لذا

$$AB_{21}(u) = \begin{pmatrix} v_1 & a_{12} \\ a_{21} + a_{22}u & a_{22} \end{pmatrix}.$$

چون $AB_{21}(u) \in GL_2(R)$، پس بنا به گزاره ی ۱۰.۲.۱، $w_1 \in U(R)$ وجود دارد که

$$AB_{21}(u) = [v_1, w_1]B_{21}(w_1^{-1}(a_{21} + a_{22}u))B_{12}(v_1^{-1}a_{12}).$$

با ضرب عبارت فوق از راست در $B_{21}^{-1}(u) = B_{21}(-u)$، داریم:

$$A = [v_1, w_1]B_{21}(w_1^{-1}(a_{21} + a_{22}u))B_{12}(v_1^{-1}a_{12})B_{21}(-u).$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xa - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} \in GL_2(R).$$

بنا به بند (۲)، $\alpha, \beta, u \in U(R)$ و $c, d \in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = [\alpha, \beta]B_{21}(c)B_{12}(d)B_{21}(u).$$

با ضرب عبارت فوق از راست در $B_{21}^{-1}(u) = B_{21}(-u)$ داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} B_{21}(-u) = [\alpha, \beta]B_{21}(c)B_{12}(d).$$

لذا $a + b(-u) = \alpha \in U(R)$. بنابراین R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. □

لم ۷.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

(۲) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه $y \in R$ وجود دارد که $1 - xy, a + by \in U(R)$.*

(۳) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$ آنگاه $y \in R$ وجود دارد که $1 - ya, x + yb \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): اگر $ax + b = 1$، آنگاه طبق لم۵.۱.۲، $u \in U(R)$ وجود دارد که $x + ub = \beta \in U(R)$. چون

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xa - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} \in GL_2(R),$$

پس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ u & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ua-۱ & \beta \end{pmatrix} \in GL_۲(R).$$

پس از گزاره ی ۱۱.۲.۱، $\alpha \in U(R)$ و $z, y \in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ua-۱ & \beta \end{pmatrix} = [\alpha, \beta]\, B_{۱۲}(z) B_{۲۱}(y).$$

لذا

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ua-۱ & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha z y & \alpha z \\ \beta y & \beta \end{pmatrix}.$$

پس

$$\begin{cases} a = \alpha + \alpha z y \\ b = \alpha z \end{cases} \Rightarrow a = \alpha + by \Rightarrow \alpha = a - by,$$

و

$$\begin{cases} ua-۱ = \beta y \\ ub + x = \beta \end{cases} \Rightarrow ua - ۱ = (ub+x)y \Rightarrow ۱ + xy = ua - uby = u(a-by) = u\alpha.$$

در نتیجه $۱ - x(-y) = u\alpha \in U(R)$ و $a + b(-y) = \alpha \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $ax + b = ۱$. در این صورت طبق بند (۲)، $y \in R$ وجود دارد که $a + by = u \in U(R)$ و $۱ - xy = v \in U(R)$. چون

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xa-۱ \\ ۱ & a \end{pmatrix}^{-۱} \in GL_۲(R),$$

پس

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} B_{۲۱}(y) = \begin{pmatrix} u & b \\ -v & x \end{pmatrix} \in GL_۲(R).$$

از گزاره ی ۱۰.۲.۱، $\beta \in U(R)$ وجود دارد که

$$\begin{pmatrix} u & b \\ -v & x \end{pmatrix} = [u, \beta]\, B_{۲۱}\left(-\beta^{-۱} v\right) B_{۱۲}\left(u^{-۱} b\right).$$

با توجه به بند (۲) روابط Δ، داریم $[u,\beta]\, B_{۲۱}\left(-\beta^{-۱} v\right) = B_{۲۱}\left(-vu^{-۱}\right) [u, \beta]$. پس

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} B_{۲۱}(y) = B_{۲۱}\left(-vu^{-۱}\right)[u,\beta]\, B_{۱۲}\left(u^{-۱}b\right).$$

با ضرب عبارت فوق از چپ در $B_{۲۱}\left(vu^{-۱}\right) = B_{۲۱}^{-۱}\left(-vu^{-۱}\right)$ و از راست در $B_{۲۱}^{-۱}(y) = B_{۲۱}(-y)$، داریم:

$$B_{۲۱}\left(vu^{-۱}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} = [u,\beta]\, B_{۱۲}\left(u^{-۱}b\right) B_{۲۱}(-y).$$

لذا $x + \left(vu^{-۱}\right)b = \beta \in U(R)$. در نتیجه R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.

(۱) $\Leftarrow$ (۳): اگر $ax + b = ۱$، آنگاه $x^{op}a^{op} + b^{op} = ۱^{op}$. چون R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس بنا به نتیجه ی ۴.۱.۲، R^{op} نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. لذا با استفاده از (۱) $\Leftarrow$ (۲)، $y^{op} \in R^{op}$ وجود دارد که $۱^{op} - a^{op}y^{op}, x^{op} + b^{op}y^{op} \in U(R)$، یعنی $y \in R$ وجود دارد که $۱ - ya, x + yb \in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): اگر $ax + b = ۱$، آنگاه $x^{op}a^{op} + b^{op} = ۱^{op}$. بنا به (۳)، $y^{op} \in R^{op}$ وجود دارد که $۱^{op} - y^{op}x^{op}, a^{op} + y^{op}b^{op} \in U(R^{op})$، یعنی $y \in R$ وجود دارد که $۱ - xy, a + by \in U(R)$. لذا بنا به (۲) $\Leftarrow$ (۱)، R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. □

قضیه ۸.۱.۲. *اگر حلقه ی R خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، حلقه ی $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

برهان. اگر $BC + D = I_n$ در $M_n(R)$ باشد، آنگاه

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ -I_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & CB - I_n \\ I_n & B \end{pmatrix}^{-۱} \in GL_{۲n}(R).$$

قرار می دهیم $A = (A_{ij})$، که $۱ \leq i,j \leq ۲$ و $A_{ij} = (a_{st}^{ij}) \in M_n(R)$، که $۱ \leq s,t \leq n$. بنابراین عناصر $x_۱,\ldots,x_n,y_۱,\ldots,y_n \in R$ در ستون اول $A^{-۱}$ وجود دارند که

$$\begin{aligned}
&a^{11}_{11}x_1+\cdots+a^{11}_{1n}x_n+a^{12}_{11}y_1+\cdots+a^{12}_{1n}y_n=1,\\
&\vdots\\
&a^{11}_{n1}x_1+\cdots+a^{11}_{nn}x_n+a^{12}_{n1}y_1+\cdots+a^{12}_{nn}y_n=0,\\
&a^{21}_{11}x_1+\cdots+a^{21}_{1n}x_n+a^{22}_{11}y_1+\cdots+a^{22}_{1n}y_n=0,\\
&\vdots\\
&a^{21}_{n1}x_1+\cdots+a^{21}_{nn}x_n+a^{22}_{n1}y_1+\cdots+a^{22}_{nn}y_n=0.
\end{aligned}\tag{$\wp$}$$

در بند اول $(\wp)$، بنا به لم ۷.۱.۲، $z_1\in R$ وجود دارد که

$$a^{11}_{11}+(a^{11}_{21}x_2+\cdots+a^{11}_{1n}x_n+a^{12}_{11}y_1+\cdots+a^{12}_{1n}y_n)z_1=u_1\in U(R)$$

و $1-x_1z_1=v_1\in U(R)$. چون $a^{11}_{21}x_1+\cdots+a^{11}_{2n}x_n+a^{12}_{21}y_1+\cdots+a^{12}_{2n}y_n=0$، پس

$$a^{11}_{22}x_2z_1+\cdots+a^{11}_{2n}x_nz_1+a^{12}_{21}y_1z_1+\cdots+a^{12}_{2n}y_nz_1=-a^{11}_{21}x_1z_1.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
a^{11}_{21}+a^{11}_{22}x_2z_1+\cdots+a^{11}_{2n}x_nz_1+a^{12}_{21}y_1z_1+\cdots+a^{12}_{2n}y_nz_1&=a^{11}_{21}-a^{11}_{21}x_1z_1\\
&=a^{11}_{21}(1-x_1z_1)=a^{11}_{21}v_1.
\end{aligned}$$

بطور مشابه با توجه به بند های دیگر $(\wp)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&a^{11}_{31}+a^{11}_{32}x_2z_1+\cdots+a^{11}_{3n}x_nz_1+a^{12}_{31}y_1z_1+\cdots+a^{12}_{3n}y_nz_1=a^{11}_{31}v_1,\\
&\vdots\\
&a^{11}_{n1}+a^{11}_{n2}x_2z_1+\cdots+a^{11}_{nn}x_nz_1+a^{12}_{n1}y_1z_1+\cdots+a^{12}_{nn}y_nz_1=a^{11}_{n1}v_1,\\
&a^{21}_{11}+a^{21}_{12}x_2z_1+\cdots+a^{21}_{1n}x_nz_1+a^{22}_{11}y_1z_1+\cdots+a^{22}_{1n}y_nz_1=a^{21}_{11}v_1,\\
&\vdots\\
&a^{21}_{n1}+a^{21}_{n2}x_1z_1+\cdots+a^{21}_{nn}x_nz_1+a^{22}_{n1}y_1z_1+\cdots+a^{22}_{nn}y_nz_1=a^{21}_{n1}v_1.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$A\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_۲z_۱ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ y_۱z_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_۱ & a^{۱۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۱n} & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ a^{۱۱}_{۲۱}v_۱ & a^{۱۱}_{۲۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۲n} & a^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۱۱}_{n۱}v_۱ & a^{۱۱}_{n۲} & \cdots & a^{۱۱}_{nn} & a^{۱۲}_{n۱} & \cdots & a^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱}v_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}v_۱ & a^{۲۱}_{n۲} & \cdots & a^{۲۱}_{nn} & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix}.$$

از طرفی

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_۲z_۱ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ y_۱z_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_۲z_۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right]$$

$$\times B_{۲۱}\left(\begin{pmatrix} y_۱z_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}\right).$$

پس

$$\begin{aligned} A_۱ = {} & \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -a^{۱۱}_{۲۱}v_۱u_۱^{-۱} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^{۱۱}_{n۱}v_۱u_۱^{-۱} & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right] A \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_۲z_۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right] \\ & \times B_{۲۱}\left(\begin{pmatrix} y_۱z_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}\right) \\ = {} & \begin{pmatrix} u_۱ & a^{۱۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۱n} & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ ۰ & b^{۱۱}_{۲۲} & \cdots & b^{۱۱}_{۲n} & b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & b^{۱۱}_{n۲} & \cdots & b^{۱۱}_{nn} & b^{۱۲}_{n۱} & \cdots & b^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱}v_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}v_۱ & a^{۲۱}_{n۲} & \cdots & a^{۲۱}_{nn} & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix} \in GL_{۲n}(R). \end{aligned}$$

بنابراین عناصر $x'_۱, \ldots, x'_n, y'_۱, \ldots, y'_n \in R$ در ستون دوم $A_۱^{-۱}$ وجود دارند که

$$
\begin{aligned}
&u_1 x'_1 + a^{11}_{12} x'_2 + \cdots + a^{11}_{1n} x'_n + a^{12}_{11} y'_1 + \cdots + a^{12}_{1n} y'_n = 0,\\
&0 \times x'_1 + b^{11}_{22} x'_2 + \cdots + b^{11}_{2n} x'_n + b^{12}_{21} y'_1 + \cdots + b^{12}_{2n} y'_n = 1,\\
&\qquad \vdots\\
&0 \times x'_1 + b^{11}_{n2} x'_2 + \cdots + b^{11}_{nn} x'_n + b^{12}_{n1} y'_1 + \cdots + b^{12}_{nn} y'_n = 0,\\
&a^{21}_{11} v_1 x'_1 + a^{21}_{12} x'_2 + \cdots + a^{21}_{1n} x'_n + a^{22}_{11} y'_1 + \cdots + a^{22}_{1n} y'_n = 0,\\
&\qquad \vdots\\
&a^{21}_{n1} v_1 x'_1 + a^{21}_{n2} x'_2 + \cdots + a^{21}_{nn} x'_n + a^{22}_{n1} y'_1 + \cdots + a^{22}_{nn} y'_n = 0.
\end{aligned}
\tag{$\wp\wp$}
$$

با توجه به بند دوم $(\wp\wp)$، طبق لم ۷.۱.۲، $z_2 \in R$ وجود دارد که

$$
\begin{aligned}
&b^{11}_{22} + \left(0 \times x'_1 + b^{11}_{23} x'_3 + \cdots + b^{11}_{2n} x'_n + b^{12}_{21} y'_1 + \cdots + b^{12}_{2n} y'_n\right) z_2\\
&= 0 \times z_2 + b^{11}_{22} + b^{11}_{23} x'_3 z_2 + \cdots + b^{11}_{2n} x'_n z_2 + b^{12}_{21} y'_1 z_2 + \cdots + b^{12}_{2n} y'_n z_2 = u_2 \in U(R)
\end{aligned}
$$

و $1 - x'_2 z_2 = v_2 \in U(R)$.

مشابه روند قبل داریم:

$$
\begin{aligned}
&A_1 \begin{pmatrix}
1 & x'_1 z_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & x'_3 z_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & x'_n z_2 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & y'_1 z_2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & y'_n z_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
u_1 & a^{11}_{12} v_2 & a^{11}_{13} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n}\\
0 & u_2 & b^{11}_{23} & \cdots & a^{11}_{2n} & a^{12}_{21} & \cdots & a^{12}_{2n}\\
0 & b^{11}_{32} & b^{11}_{33} & \cdots & a^{11}_{3n} & a^{12}_{31} & \cdots & a^{12}_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & b^{11}_{n2} & b^{11}_{n3} & \cdots & a^{11}_{nn} & a^{12}_{n1} & \cdots & a^{12}_{nn}\\
a^{21}_{11} v_1 & a^{21}_{12} v_2 & a^{21}_{13} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a^{21}_{n1} v_1 & a^{21}_{n2} v_2 & a^{21}_{n3} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn}
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
A_2 = {} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b^{11}_{32}v_2u_2^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -b^{11}_{n2}v_2u_2^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] A_1 \left[\begin{pmatrix} 1 & x'_1z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x'_3z_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x'_nz_2 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] \\
& \times B_{21}\left(\begin{pmatrix} 0 & y'_1z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y'_nz_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= {} & \begin{pmatrix} u_1 & a^{11}_{12}v_2 & a^{11}_{13} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ 0 & u_2 & b^{11}_{23} & \cdots & b^{11}_{2n} & b^{12}_{21} & \cdots & b^{12}_{2n} \\ 0 & 0 & c^{11}_{33} & \cdots & c^{11}_{3n} & c^{12}_{31} & \cdots & c^{12}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c^{11}_{n3} & \cdots & c^{11}_{nn} & c^{12}_{n1} & \cdots & c^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11}v_1 & a^{21}_{12}v_2 & a^{21}_{13} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}v_1 & a^{21}_{n2}v_2 & a^{21}_{n3} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

برای سادگی می نویسیم:

$$A_2 = [*,*]\,A_1\,[*,*]\,B_{21}(*).$$

از طرفی $A_1 = [*,*]\,A\,[*,*]\,B_{21}(*)$، پس

$$A_2 = [*,*]\,[*,*]\,A\,[*,*]\,B_{21}(*)\,[*,*]\,B_{21}(*).$$

در نتیجه با استفاده ازبندهای (۲)، (۱) و (۴) روابط Δ، می توان نوشت:

$$A_2 = [*,*]\,A\,[*,*]\,B_{21}(*).$$

بطور مشابه با ادامه دادن روند بالا عناصر $u_3,\ldots,u_n,v_3,\ldots,v_n\in U(R)$ وجود دارند که

$$\begin{aligned}A_n&=[*,*]\,A\,[*,*]\,B_{21}(*)\\&=\begin{pmatrix}u_1&*&*&\cdots&*&a_{11}^{12}&\cdots&a_{1n}^{12}\\ \circ&u_2&*&\cdots&*&b_{21}^{12}&\cdots&b_{2n}^{12}\\ \circ&\circ&u_3&\cdots&*&c_{31}^{12}&\cdots&c_{3n}^{12}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \circ&\circ&\circ&\cdots&u_n&d_{n1}^{12}&\cdots&d_{nn}^{12}\\ a_{11}^{21}v_1&a_{12}^{21}v_2&a_{13}^{21}v_3&\cdots&a_{1n}^{21}v_n&a_{11}^{22}&\cdots&a_{1n}^{22}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}^{21}v_1&a_{n2}^{21}v_2&a_{n3}^{21}v_3&\cdots&a_{nn}^{21}v_n&a_{n1}^{22}&\cdots&a_{nn}^{22}\end{pmatrix}\in GL_{2n}(R).\end{aligned}$$

قرار می دهیم $U=\begin{pmatrix}u_1&*&*&\cdots&*\\ \circ&u_2&*&\cdots&*\\ \circ&\circ&u_3&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \circ&\circ&\circ&\cdots&u_n\end{pmatrix}$، $V=\begin{pmatrix}a_{11}^{12}&\cdots&a_{1n}^{12}\\ b_{21}^{12}&\cdots&b_{2n}^{12}\\ c_{31}^{12}&\cdots&c_{3n}^{12}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ d_{n1}^{12}&\cdots&d_{nn}^{12}\end{pmatrix}$ و

$$\begin{pmatrix}a_{11}^{21}v_1&a_{12}^{21}v_2&a_{13}^{21}v_3&\cdots&a_{1n}^{21}v_n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}^{21}v_1&a_{n2}^{21}v_2&a_{n3}^{21}v_3&\cdots&a_{nn}^{21}v_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}v_1&\circ&\circ&\cdots&\circ\\ \circ&v_2&\circ&\cdots&\circ\\ \circ&\circ&v_3&\cdots&\circ\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \circ&\circ&\circ&\cdots&v_n\end{pmatrix}=-diag\left(v_1,\ldots,v_n\right).$$

پس

$$A_n=\begin{pmatrix}U&V\\-diag\left(v_1,\ldots,v_n\right)&A_{22}\end{pmatrix}.$$

چون $U\in GL_n(R)$، پس از گزاره ی ۱۰.۲.۱، $E\in GL_n(R)$ وجود دارد که

$$A_n=[U,E]\,B_{21}\left(-E^{-1}diag\left(v_1,\ldots,v_n\right)\right)B_{12}\left(U^{-1}V\right),$$

که $E=A_{22}+diag\left(v_1,\ldots,v_n\right)U^{-1}V$.

از طرفی چون $A_n=[*,*]\,A\,[*,*]\,B_{21}(*)$، پس $W,X,Y,Z\in GL_n(R)$ و $S\in M_n(R)$ وجود دارند که $A_n=[W,X]\,A\,[Y,Z]\,B_{21}(S)$. پس

$$[W,X]A[Y,Z]B_{21}(S)=[U,E]B_{21}(-E^{-1}diag(v_1,\ldots,v_n))B_{12}(U^{-1}V).$$

بنابراین

$$A=[W^{-1},X^{-1}][U,E]B_{21}(-E^{-1}diag(v_1,\dots,v_n))B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1},Z^{-1}]$$

$$=[W^{-1}U,X^{-1}E]B_{21}(-E^{-1}diag(v_1,\dots,v_n))B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1},Z^{-1}].$$

پس با استفاده از بند (۲) روابط Δ، داریم:

$$A=[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}diag(v_1,\dots,v_n)Y^{-1})$$

$$B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

از بند (۲) روابط Δ، داریم:

$$[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}diag(v_1,\dots,v_n)Y^{-1})=$$

$$B_{21}(-ZE^{-1}XZE^{-1}diag(v_1,\dots,v_n)Y^{-1}W^{-1}UY^{-1})[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}].$$

قرار می دهیم $W'=-ZE^{-1}XZE^{-1}diag(v_1,\dots,v_n)$. پس

$$A=B_{21}(W')[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

با ضرب عبارت فوق از چپ در $B_{21}(-W')$، داریم:

$$B_{21}(-W')\begin{pmatrix} B & D\\ -I_n & C\end{pmatrix}=[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

بنابراین $C+(-W')D=X^{-1}EZ^{-1}\in GL_n(R)$ که $-W'\in GL_n(R)$. در نتیجه طبق لم ۵.۱.۲، $M_n(R)$ خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. $\square$

نتیجه ۹.۱.۲. *اگر R خاصیت برد پایای یکه ی یک داشته باشد، آنگاه هر ماتریس $n\times n$ روی R ، بصورت مجموع دو ماتریس وارون پذیر است.*

برهان. فرض کنیم $A \in M_n(R)$. چون R خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد، پس از قضیه ی قبل، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد. از طرفی چون $AM_n(R) + I_nM_n(R) = M_n(R)$، پس $U \in GL_n(R)$ وجود دارد که $A + I_n \times U = V \in GL_n(R)$. بنابراین $A = (-U) + V$. □

مثال ۱۰.۱.۲. با مثال نقض نشان می دهیم $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ خاصیت برد پایای یکه ی یک را ندارد:

می دانیم $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_۲$. در $\mathbb{Z}_۲ = \{\bar{۰}, \bar{۱}\}$، داریم $\bar{۱} = \bar{۱} + \bar{۱}.\bar{۰}$، ولی به ازای $u \in U(\mathbb{Z}_۲) = \{\bar{۱}\}$، داریم $\bar{۱} + \bar{۱}.u = \bar{۰} \notin U(\mathbb{Z}_۲)$. پس $\mathbb{Z}_۲$ خاصیت برد پایای یکه ی یک را ندارد.

لم زیر نشان می دهد عکس قضیه ی ۸.۱.۲ برقرار نیست. چون $M_n(\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z})$ خاصیت برد پایای یکه یک دارد در حالی که $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ خاصیت برد پایای یکه ی یک را ندارد.

لم ۱۱.۱.۲. *برای $n \geq ۲$، حلقه ی $M_n(\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z})$ خاصیت برد پایای یکه ی یک دارد.*

برهان. به مرجع [۳] لم ۲.۳.۲ رجوع کنید. □

۲.۲ حلقه هایی که شامل تعدادی عنصر منظم یکه هستند

در این بخش ابتدا برخی از ویژگی های حلقه هایی که شامل تعدادی عنصر منظم یکه هستند را بررسی می کنیم و در آخر نشان می دهیم اگر حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد، آنگاه حلقه ی ماتریس های $n \times n$ روی R نیز چنین است.

تعریف ۱.۲.۲. گوییم حلقه ی R **خاصیت برد پایای یک** [۲] دارد، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، آنگاه $y \in R$ وجود داشته باشد که $a + by \in U(R)$.

تعریف ۲.۲.۲. عنصر $a \in R$ را **منظم یکه** می نامیم، هرگاه $u \in U(R)$ وجود داشته باشد که $a = aua$.

تعریف ۳.۲.۲. گوییم حلقه ی R **شامل تعدادی عنصر منظم یکه** [۳] است، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$ آنگاه عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود داشته باشد که $a + bw \in U(R)$.

[۲] Stable range one
[۳] Many unit-regular elements

واضح است که کلاس حلقه هایی که خاصیت برد پایای یک دارد شامل کلاس حلقه هایی است که شامل تعدادی عنصر منظم یکه می باشند و این کلاس، شامل کلاس حلقه هایی است که خاصیت برد پایای یکه ی یک دارند.

لم ۲.۲.۴. *اگر $w \in R$ منظم یکه باشد و $u \in U(R)$، آنگاه خودتوان $e \in R$ و $v \in U(R)$ وجود دارند که $wu^{-1} = ve$.*

برهان. چون $w \in R$ منظم یکه است، پس $x \in U(R)$ وجود دارد که $w = wxw$. در نتیجه با قرار دادن $v = x^{-1}u^{-1}$ و $e = uxwu^{-1}$، اثبات کامل می شود. □

قضیه ۲.۲.۵. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

(۲) *برای هر $x, y \in R$، عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $1 + x(y - w) \in U(R)$.*

برهان. (۱) ⇐ (۲): برای هر $x, y \in R$، داریم $(1 + xy)R + (-x)R = R$. چون حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که

$$(1 + xy) + (-x)w = 1 + x(y - w) \in U(R).$$

(۲) ⇐ (۱): فرض کنیم $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، پس $x, y \in R$ وجود دارند که $ax + by = 1$. با استفاده از بند (۲)، برای $x \in R$, $(-a)$، عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که

$$1 + (-a)(x - w) = 1 - ax + aw = aw + by = u \in U(R).$$

پس

$$awu^{-1} + byu^{-1} = 1. \tag{۲.۱}$$

چون w منظم یکه است، پس طبق لم ۲.۲.۴، $e = e^2 \in R$ و $v \in U(R)$ وجود دارند که $wu^{-1} = ve$. با ضرب $1 - e$ در عبارت (۲.۱)، داریم:

$$e + (1 - e)byu^{-1} = 1 - (1 - e)ave.$$

با ضرب عبارت بالا در v، داریم:

$$ve + v(1 - e)byu^{-1} = v(1 - (1 - e)ave).$$

پس با توجه به اینکه $(1 - (1 - e)ave)(1 + (1 - e)ave) = 1$، داریم:

$$wu^{-1} + v(1 - e)byu^{-1} = v(1 + (1 - e)ave)^{-1} \in U(R).$$

پس بنا به گزاره ی ۷.۲.۱، $z \in R$ وجود دارد که $a + byu^{-1}z = s \in U(R)$. پس

$$as^{-1} + byu^{-1}zs^{-1} = 1.$$

طبق بند (۲)، برای $(-b), yu^{-1}zs^{-1} \in R$، عنصر منظم یکه $t \in R$ وجود دارد که

$$1 + (-b)(yu^{-1}zs^{-1} - t) = as^{-1} + bt \in U(R).$$

لذا $a + bts \in U(R)$ که ts منظم یکه است. در نتیجه اثبات کامل می شود. □

نتیجه ۶.۲.۲. *حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، اگر و فقط اگر حلقه ی متقابل R^{op}، شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد.*

برهان. مشابه نتیجه ی ۴.۱.۲ اثبات می شود. □

لم ۷.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند :*

(۱) *حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

(۲) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $aw + b \in U(R)$.*

(۳) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $wx + b \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $ax+b=1$. چون R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس بنا به قضیه ی ۵.۲.۲، برای $x \in R, (-a)$، عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که

$$1+(-a)(x-w)=aw+b \in U(R).$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱): برای هر $x, y \in R$، داریم $(-x)y+(1+xy)=1$. لذا بنا به بند (۲)، عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $(-x)w+(1+xy)=1+x(y-w) \in U(R)$. لذا بنا به قضیه ی ۵.۲.۲، حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.

(۱) $\Leftarrow$ (۳): اگر $ax+b=1$، آنگاه $x^{op}a^{op}+b^{op}=1^{op}$. چون حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس بنا به نتیجه ی ۶.۲.۲، حلقه ی R^{op} نیز شامل تعدادی عنصر منظم یکه است. لذا با استفاده از (۱) $\Leftarrow$ (۲)، عنصر منظم یکه $w^{op} \in R^{op}$ وجود دارد که $x^{op}w^{op}+b^{op} \in U(R^{op})$، یعنی عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $wx+b \in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): اگر $ax+b=1$ ، آنگاه $x^{op}a^{op}+b^{op}=1^{op}$. بنا به بند (۳)، عنصر منظم یکه $w^{op} \in R^{op}$ وجود دارد که $w^{op}a^{op}+b^{op} \in U(R^{op})$، یعنی عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارد که $aw+b \in U(R)$.
لذا طبق (۲) $\Leftarrow$ (۱)، حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است. □

قضیه ۸.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

(۲) *برای هر $A \in GL_2(R)$، عناصر $x, y \in R$، $\alpha, \beta \in U(R)$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که*

$$A=[\alpha, \beta]B_{21}(x)B_{12}(y)B_{21}(w).$$

(۳) *برای هر $A \in GL_2(R)$، عناصر $x, y \in R$، $\alpha, \beta \in U(R)$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که*

$$A=[\alpha,\beta]B_{۲۱}(w)B_{۱۲}(x)B_{۲۱}(y).$$

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $A=(a_{ij})\in GL_{۲}(R)$. بنابراین $x_{۱},x_{۲}\in R$ وجود دارند که $a_{۱۱}x_{۱}+a_{۱۲}x_{۲}=۱$، یعنی $a_{۱۱}R+a_{۱۲}R=R$. چون R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس عنصر منظم یکه $w\in R$ وجود دارد که $a_{۱۱}+a_{۱۲}w=u\in U(R)$. بنابراین

$$AB_{۲۱}(w)=\begin{pmatrix} u & a_{۱۲}\\ a_{۲۱}+a_{۲۲}w & a_{۲۲}\end{pmatrix}\in GL_n(R).$$

بنا به گزاره ی ۱۰.۲.۱، $v\in U(R)$ وجود دارد که

$$\begin{pmatrix} u & a_{۱۲}\\ a_{۲۱}+a_{۲۲}w & a_{۲۲}\end{pmatrix}=[u,v]B_{۲۱}(v^{-۱}(a_{۲۱}+a_{۲۲}w))B_{۱۲}(u^{-۱}a_{۱۲}),$$

که $v=-(a_{۲۱}+a_{۲۲}w)u^{-۱}a_{۱۲}+a_{۲۲}$. بنابراین با ضرب عبارت فوق در $B_{۲۱}(-w)$، داریم:

$$A=[u,v]B_{۲۱}(v^{-۱}(a_{۲۱}+a_{۲۲}w))B_{۱۲}(u^{-۱}a_{۱۲})B_{۲۱}(-w).$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $ax+b=۱$ که $a,b,x\in R$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -۱ & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & xa-۱\\ ۱ & a\end{pmatrix}^{-۱}\in GL_{۲}(R).$$

پس طبق **(۲)**، $\alpha,\beta\in U(R)$، $c,d\in R$ و عنصر منظم یکه $w\in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -۱ & x\end{pmatrix}=[\alpha,\beta]B_{۲۱}(c)B_{۱۲}(d)B_{۲۱}(w).$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -۱ & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰\\ -w & ۱\end{pmatrix}=[\alpha,\beta]B_{۲۱}(c)B_{۱۲}(d).$$

پس $a+b(-w)=\alpha\in U(R)$. لذا R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳): برای هر $A\in GL_{۲}(R)$، $\alpha,\beta\in U(R)$، $x,y\in R$ و عنصر منظم یکه $w\in R$ وجود دارند که

$$A^{-1} = [\alpha, \beta]B_{21}(x)B_{12}(y)B_{21}(w).$$

لذا با استفاده از روابط Δ بند (۵)، (۶) و (۲)، داریم:

$$A = B_{21}(-w)B_{12}(-y)B_{21}(-x)[\alpha^{-1}, \beta^{-1}]$$
$$= [\alpha^{-1}, \beta^{-1}]B_{21}(-\beta w\alpha^{-1})B_{12}(-\alpha y\beta^{-1})B_{21}(-\beta x\alpha^{-1}).$$

چون $w \in R$ منظم یکه است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $w = wuw$. بنابراین

$$-\beta w\alpha^{-1} = (-\beta w\alpha^{-1})(-\alpha u\beta^{-1})(-\beta w\alpha^{-1}).$$

لذا $w' = -\beta w\alpha^{-1} \in R$ منظم یکه است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲): برای هر $A \in GL_2(R)$، $\alpha, \beta \in U(R)$، $x, y \in R$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که

$$A^{-1} = [\alpha, \beta]B_{21}(w)B_{12}(x)B_{21}(y).$$

لذا با استفاده از بندهای (۶)، (۵) و (۲) روابط Δ، داریم:

$$A = B_{21}(-y)B_{12}(-x)B_{21}(-w)[\alpha^{-1}, \beta^{-1}]$$
$$= [\alpha^{-1}, \beta^{-1}]B_{21}(-\beta y\alpha^{-1})B_{12}(-\alpha x\beta^{-1})B_{21}(-\beta w\alpha^{-1}).$$

که $w' = -\beta w\alpha^{-1} \in R$ منظم یکه است. □

نتیجه ۹.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

(۲) *برای هر $A \in GL_2(R)$، عناصر $x, y \in R$، $\alpha, \beta \in U(R)$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که*

$$A = [\alpha, \beta] B_{۱۲}(w) B_{۲۱}(x) B_{۱۲}(y).$$

(۳) *برای هر* $A \in GL_{۲}(R)$، *عناصر* $x, y \in R$، $\alpha, \beta \in U(R)$ *و عنصر منظم یکه* $w \in R$ *وجود دارند که*

$$A = [\alpha, \beta] B_{۱۲}(x) B_{۲۱}(y) B_{۱۲}(w).$$

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in GL_{۲}(R)$. در این صورت

$$(A^{op})^T = (a_{ji}^{op}) \in GL_{۲}(R^{op}).$$

چون R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس طبق نتیجه ی ۶.۲.۲، R^{op} نیز شامل تعدادی عنصر منظم یکه است. لذا طبق قضیه ی قبل، عنصر منظم یکه $w^{op} \in R^{op}$، $\alpha, \beta \in U(R)$ و $x, y \in R$ وجود دارند که

$$(A^{op})^T = [\alpha^{op}, \beta^{op}] B_{۲۱}(x^{op}) B_{۱۲}(y^{op}) B_{۲۱}(w^{op}).$$

حال با گرفتن ترانهاده از طرفین تساوی فوق داریم:

$$A^{op} = (B_{۲۱}(w^{op}))^T (B_{۱۲}(y^{op}))^T (B_{۲۱}(x^{op}))^T [\alpha^{op}, \beta^{op}]^T.$$

لذا با توجه به اینکه $(B_{۲۱}(*))^T = B_{۱۲}(*)$، داریم:

$$\begin{aligned} A &= B_{۱۲}(w) B_{۲۱}(y) B_{۱۲}(x) [\alpha, \beta] \\ &= [\alpha, \beta] B_{۱۲}(\alpha^{-۱} w \beta) B_{۲۱}(\beta^{-۱} y \alpha) B_{۱۲}(\alpha^{-۱} x \beta). \end{aligned}$$

چون $w \in R$ منظم یکه است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $w = wuw$. بنابراین

$$\alpha^{-۱} w \beta = \alpha^{-۱} w \beta (\beta^{-۱} u \alpha) \alpha^{-۱} w \beta.$$

پس $w' = \alpha^{-۱} w \beta \in R$ منظم یکه است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $A^{op} = (a_{ij}^{op}) \in GL_{۲}(R^{op})$. در این صورت $A^T \in GL_{۲}(R)$. بنا به بند (۲)، $\alpha, \beta \in U(R)$، $x, y \in R$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که

$$A^T = [\alpha, \beta] B_{۱۲}(w) B_{۲۱}(x) B_{۱۲}(y).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A^{op} &= ((A^T)^T)^{op} \\ &= ((B_{۱۲}(y))^T (B_{۲۱}(x))^T (B_{۱۲}(w))^T [\alpha, \beta]^T)^{op} \\ &= B_{۲۱}(y^{op}) B_{۱۲}(x^{op}) B_{۲۱}(w^{op}) [\alpha^{op}, \beta^{op}] \\ &= [\alpha^{op}, \beta^{op}] B_{۲۱}((\beta^{op})^{-۱} y^{op} \alpha^{op}) B_{۱۲}((\alpha^{op})^{-۱} x^{op} \beta^{op}) B_{۲۱}((\beta^{op})^{-۱} w^{op} \alpha^{op}), \end{aligned}$$

که $(\beta^{op})^{-۱} w^{op} \alpha^{op} \in R^{op}$منظم یکه است. پس طبق قضیه ی ۸.۲.۲، R^{op} شامل تعدادی عنصر منظم یکه است. در نتیجه بنا به نتیجه ی ۶.۲.۲، R نیز چنین است.

(۳) $\Leftrightarrow$ (۱): مشابه روند بالا اثبات می شود. □

لم ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R خاصیت برد پایای یک دارد.*

(۲) *اگر $ax + b = ۱$، آنگاه $y \in R$ وجود دارد که $a + by \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $ax + b = ۱$. پس $aR + bR = R$. چون R خاصیت برد پایای یک دارد، پس $y \in R$ وجود دارد که $a + by \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $aR + bR = R$. پس $x, y \in R$ وجود دارند که $ax + by = ۱$. بنا به بند (۲)، $z \in R$ وجود دارد که $a + byz \in U(R)$. بنابراین R خاصیت برد پایای یک دارد. □

لم ۱۱.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه ی R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

(۲) *اگر $ax + b = ۱$، آنگاه $y \in R$ وجود دارد که $a + by \in U(R)$ و $۱ - xy \in R$ منظم یکه است.*

(۳) *اگر $ax+b=1$، آنگاه $y \in R$ وجود دارد که $x+yb \in U(R)$ و $1-ya \in R$ منظم یکه است.*

برهان. $(1) \Leftarrow (2)$: فرض کنیم که $ax+b=1$ در R. چون

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xa-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} \in GL_2(R),$$

پس طبق قضیه ی ۸.۲.۲، $\alpha, \beta \in U(R)$، $x, y \in R$ و عنصر منظم یکه $w \in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = [\alpha, \beta] B_{21}(w) B_{12}(x) B_{21}(y).$$

پس

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix} = [\alpha, \beta] B_{21}(w) B_{12}(x).$$

در نتیجه $a+b(-y) = \alpha \in U(R)$، و $1-x(-y) = -\beta w \in R$. چون w منظم یکه است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $w = wuw$. بنابراین $-\beta w = (-\beta w)(-u\beta^{-1})(-\beta w)$ منظم یکه است.

$(2) \Leftarrow (1)$: فرض کنیم $A = (a'_{ij}) \in GL_2(R)$. واضح است که $a'_{21}R + a'_{22}R = R$. چون بنا به لم ۱۰.۲.۲، R خاصیت برد پایای یک دارد، پس $r \in R$ وجود دارد که $a'_{21} + a'_{22}r \in U(R)$. قرار می دهیم $AB_{21}(r) = (a_{ij})$. چون $AB_{21}(r) \in GL_2(R)$، پس $x, y \in R$ وجود دارند که $a_{11}x + a_{12}y = 1$ و $a_{21}x + a_{22}y = 0$. لذا بنا به بند (۲)، $z \in R$ وجود دارد که $a_{11} + a_{12}yz = u \in U(R)$ و $1-xz = w \in R$ منظم یکه است. از طرفی چون $a_{21}x + a_{22}y = 0$، پس $a_{21}xz + a_{22}yz = 0$. لذا $a_{22}yz = -a_{21}xz$. در نتیجه

$$a_{21} + a_{22}yz = a_{21} - a_{21}xz = a_{21}(1-xz) = a_{21}w.$$

پس

$$AB_{21}(r)B_{21}(yz) = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}yz & a_{12} \\ a_{21}+a_{22}yz & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & a_{12} \\ a_{21}w & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(R).$$

لذا بنا به گزاره ی ۱۰.۲.۱، داریم:

$$AB_{۲۱}(r)B_{۲۱}(yz) = [u, a_{۲۲} - a_{۲۱}wu^{-۱}a_{۱۲}]$$
$$B_{۲۱}\left((a_{۲۲} - a_{۲۱}wu^{-۱}a_{۱۲})^{-۱}a_{۲۱}w\right)B_{۱۲}(u^{-۱}a_{۱۲}).$$

پس

$$A = [u, a_{۲۲} - a_{۲۱}wu^{-۱}a_{۱۲}]B_{۲۱}\left(w'\right)B_{۱۲}(u^{-۱}a_{۱۲})B_{۲۱}(-(r+yz)).$$

که $w' = (a_{۲۲} - a_{۲۱}wu^{-۱}a_{۱۲})^{-۱}a_{۲۱}w$ منظم یکه است. لذا بنا به قضیه ی ۸.۲.۲، R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.

(۱) $\Leftrightarrow$ (۳): مشابه لم ۷.۱.۲، اثبات می شود. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۲. *اگر R شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، حلقه ی $M_n(R)$ نیز شامل تعدادی عنصر منظم یکه است.*

برهان. اگر $BC + D = I_n$ در $M_n(R)$باشد، آنگاه

$$A = \begin{pmatrix} -I_n & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB - I_n & C \\ B & I_n \end{pmatrix}^{-۱} \in GL_{۲n}(R).$$

واضح است که $M_n(R)$ خاصیت برد پایای یک دارد. بنابراین $F \in M_n(R)$ وجود دارد که

$$B + DF \in GL_n(R).$$

قرار می دهیم $AB_{۲۱}(F) = (A_{ij})$، که $۱ \leq i, j \leq ۲$ و $A_{ij} = (a_{st}^{ij}) \in M_n(R)$، که $۱ \leq s, t \leq n$. بنابراین عناصر $x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_n \in R$ وجود دارند که $(\wp)$ در قضیه ی ۸.۱.۲ برقرار است. بنا به لم ۷.۱.۲، $z_۱ \in R$ وجود دارد که

$$a_{۱۱}^{۱۱} + (a_{۲۱}^{۱۱}x_۲ + \cdots + a_{۱n}^{۱۱}x_n + a_{۱۱}^{۱۲}y_۱ + \cdots + a_{۱n}^{۱۲}y_n)z_۱ = u_۱ \in U(R)$$

و $R \ni w_۱ = ۱ - x_۱z_۱$ منظم یکه است. بنابراین

$$AB_{۲۱}(*)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_۲z_۱ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ y_۱z_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_۱ & a^{۱۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۱n} & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ a^{۱۱}_{۲۱}w_۱ & a^{۱۱}_{۲۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۲n} & a^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۱۱}_{n۱}w_۱ & a^{۱۱}_{n۲} & \cdots & a^{۱۱}_{nn} & a^{۱۲}_{n۱} & \cdots & a^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱}w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}w_۱ & a^{۲۱}_{n۲} & \cdots & a^{۲۱}_{nn} & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix}.$$

مشابه قضیه ۲.۱.۸، عناصر $u_۲, u_۳, \dots, u_n \in U(R)$ و عناصر منظم یکه $w_۲, w_۳, \dots, w_n \in R$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} A_n &= [*,*]\,A\,[*,*]\,B_{۲۱}(*) \\ &= \begin{pmatrix} u_۱ & * & * & \cdots & * & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ ۰ & u_۲ & * & \cdots & * & b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ ۰ & ۰ & u_۳ & \cdots & * & c^{۱۲}_{۳۱} & \cdots & c^{۱۲}_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & u_n & d^{۱۲}_{n۱} & \cdots & d^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱}w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲}w_۲ & a^{۲۱}_{۱۳}w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{۱n}w_n & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}w_۱ & a^{۲۱}_{n۲}w_۲ & a^{۲۱}_{n۳}w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{nn}w_n & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix} \in GL_{۲n}(R). \end{aligned}$$

قرار می دهیم $U = \begin{pmatrix} u_۱ & * & * & \cdots & * \\ ۰ & u_۲ & * & \cdots & * \\ ۰ & ۰ & u_۳ & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & u_n \end{pmatrix}$، $V = \begin{pmatrix} a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ c^{۱۲}_{۳۱} & \cdots & c^{۱۲}_{۳n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^{۱۲}_{n۱} & \cdots & d^{۱۲}_{nn} \end{pmatrix}$ و

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^{۲۱}_{۱۱}w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲}w_۲ & a^{۲۱}_{۱۳}w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{۱n}w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}w_۱ & a^{۲۱}_{n۲}w_۲ & a^{۲۱}_{n۳}w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{nn}w_n \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} w_۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & w_۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & w_۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & w_n \end{pmatrix} \\ &= -diag\,(w_۱, \dots, w_n)\,. \end{aligned}$$

پس

$$A_n = \begin{pmatrix} U & V \\ -diag\,(w_۱, \dots, w_n) & A_{۲۲} \end{pmatrix}.$$

چون $U \in GL_n(R)$، پس از گزاره ی ۱۰.۲.۱، $E \in GL_n(R)$ وجود دارد که

$$A_n = [U, E]\, B_{۲۱}\left(-E^{-۱} A_{۲۱} diag\,(w_۱, \ldots, w_n)\right) B_{۱۲}\left(U^{-۱} V\right),$$

که $E = A_{۲۲} - A_{۲۱} diag\,(w_۱, \ldots, w_n)\, U^{-۱} V$. پس $S, X, Y, Z \in GL_n(R)$ و $T \in$ وجود دارند

$$[*, *]\, A\, [*, *]\, B_{۲۱}(*) = [*, *]\, B_{۲۱}\,(W)\, B_{۱۲}(*).$$

نشان می دهیم $W = -E^{-۱} A_{۲۱} diag\,(w_۱, \ldots, w_n)$ منظم یکه است:

چون $w_i \in R$ منظم یکه است، پس $v_i \in U(R)$ وجود دارد که $w_i = w_i v_i w_i$. لذا

$$diag(w_۱, \ldots, w_n) = diag(w_۱, \ldots, w_n) diag(v_۱, \ldots, v_n) diag(w_۱, \ldots, w_n).$$

بنابراین $diag(w_۱, \ldots, w_n)$ منظم یکه است. لذا می توان نوشت

$$W = W(-diag(v_۱, \ldots, v_n) A_{۲۱}^{-۱} E) W.$$

در نتیجه W منظم یکه است. بنابراین عنصر منظم یکه $W' \in M_n(R)$ وجود دارد که

$$B_{۲۱}(W') \begin{pmatrix} -I_n & C \\ B & D \end{pmatrix} = [*, *]\, B_{۱۲}(*) B_{۲۱}(*).$$

بنابراین $W'C + D \in GL_n(R)$. در نتیجه طبق لم ۵.۱.۲، $M_n(R)$ شامل تعدادی عنصر منظم یکه است. □

نتیجه ۱۳.۲.۲. *اگر R یک حلقه شامل تعدادی عنصر منظم یکه باشد، آنگاه برای هر $A \in M_n(R)$، $U, V \in GL_n(R)$ و $E = E^۲ \in M_n(R)$ وجود دارند که $A = EU + V$.*

برهان. چون R شامل تعدادی عنصر منظم یکه است، پس از قضیه ی قبل، $M_n(R)$ نیز چنین است. از طرفی واضح است که $AM_n(R) + I_n M_n(R) = M_n(R)$. پس عنصر منظم یکه $W \in M_n(R)$ وجود دارد که $A + W = V \in GL_n(R)$. چون W منظم یکه است، پس $U' \in GL_n(R)$ وجود دارد که $W = WU'W$. پس $E = WU'$ خودتوان است و $-W = WU'WU'((-U')^{-۱}) = EU$. در نتیجه $A = EU + V$. □

۳.۲ شرط $G-M$

تعریف ۱.۳.۲. گوییم حلقه ی R **شرط** $G-M$ [۴] صدق می کند، هرگاه برای هر $x,y\in R$، عنصر $u\in U(R)$ وجود داشته باشد که $x-u, y-u^{-1}\in U(R)$.

قضیه ۲.۳.۲. *اگر حلقه ی R در شرط $G-M$ صدق کند، آنگاه برای هر $n\geq 1$، $M_n(R)$ نیز در شرط $G-M$ صدق می کند.*

برهان. فرض کنیم $X,Y\in M_n(R)$. قرار می دهیم:

$$A=\begin{pmatrix} X & I_n-XY\\ -I_n & Y\end{pmatrix}.$$

پس

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} Y & YX-I_n\\ I_n & X\end{pmatrix}.$$

فرض کنیم

$$*_m=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & * & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & * & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & * & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},$$

که $*$ها در ستون m ام قرار دارند.

قرار می دهیم $A=(A_{ij})\in GL_2(M_n(R))$، که $1\leq i,j\leq 2$ و $A_{ij}=(a^{ij}_{st})\in M_n(R)$، که $1\leq s,t\leq n$. بنابراین عناصر $x_1,\ldots,x_n,1,0,\ldots,0\in R$ در ستون اول A^{-1} وجود دارند که

$$a^{11}_{11}x_1+\cdots+a^{11}_{1n}x_n+a^{12}_{11}\times 1+a^{12}_{12}\times 0+\cdots+a^{12}_{1n}\times 0=1,$$

$$\vdots$$

$$a^{11}_{n1}x_1+\cdots+a^{11}_{nn}x_n+a^{12}_{n1}\times 1+a^{12}_{n2}\times 0+\cdots+a^{12}_{nn}\times 0=0,$$

[۴] Goodearl-Menal condition

$$a^{21}_{11}x_1 + \cdots + a^{21}_{1n}x_n + a^{22}_{11} \times 1 + a^{22}_{12} \times 0 + \cdots + a^{22}_{1n} \times 0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$a^{21}_{n1}x_1 + \cdots + a^{21}_{nn}x_n + a^{22}_{n1} \times 1 + a^{22}_{n2} \times 0 + \cdots + a^{22}_{nn} \times 0 = 0.$$

بنا به فرض برای $a^{11}_{11}, x_1 \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$a^{11}_{11} - u^{-1} \in U(R),\ x_1 - u = z_1^{-1} \in U(R).$$

با ضرب z_1 از راست در $x_1 - u = z_1^{-1}$، داریم $x_1z_1 - uz_1 = 1$. پس $1 - x_1z_1 = -uz_1 = v_1 \in U(R)$.

از طرفی با ضرب $(-u)$ از راست در $a^{11}_{11} - u^{-1}$، داریم $1 - a^{11}_{11}u \in U(R)$. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}
&a^{11}_{11} + a^{11}_{12}x_2z_1 + \ldots + a^{11}_{1n}x_nz_1 + a^{12}_{11}z_1 + 0 \times z_1 + \ldots + 0 \times z_1 \\
&= a^{11}_{11}\left(x_1z_1 - uz_1\right) + \left(a^{11}_{12}x_2z_1 + \ldots + a^{11}_{1n}x_nz_1 + a^{12}_{11}z_1\right) \\
&= \left(a^{11}_{11}x_1 + a^{11}_{12}x_2 + \ldots + a^{11}_{1n}x_n + a^{12}_{11}\right)z_1 - a^{11}_{11}uz_1 \\
&= \left(1 - a^{11}_{11}u\right)z_1 = u_1 \in U(R).
\end{aligned}$$

پس

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a^{11}_{21} v_1 u_1^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^{11}_{n1} v_1 u_1^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] A \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 z_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n z_1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] \\
&\quad \times B_{21}\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & a^{11}_{12} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ 0 & b^{11}_{22} & \cdots & b^{11}_{2n} & b^{12}_{21} & \cdots & b^{12}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b^{11}_{n2} & \cdots & b^{11}_{nn} & b^{12}_{n1} & \cdots & b^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11} v_1 & a^{21}_{12} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1} v_1 & a^{21}_{n2} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

بوضوح داریم:

$$
\begin{aligned}
A_1^{-1} &= B_{21}\left(\begin{pmatrix} -z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 z_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n z_1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] \\
&\quad \times A^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^{11}_{21} v_1 u_1^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{11}_{n1} v_1 u_1^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right].
\end{aligned}
$$

پس عناصر $x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, 1, 0, \ldots, 0 \in R$ در ستون دوم A_1^{-1} وجود دارند که

$$u_1 x'_1 + a^{11}_{12} x'_2 \cdots + a^{11}_{1n} x'_n + a^{12}_{11} y'_1 + a^{12}_{12} \times 1 + a^{12}_{13} \times 0 + \cdots + a^{12}_{1n} \times 0 = 0,$$

$$0 \times x'_1 + b^{11}_{22} x'_2 + \cdots + b^{11}_{2n} x'_n + b^{12}_{21} y'_1 + b^{12}_{22} \times 1 + b^{12}_{23} \times 0 + \cdots + b^{12}_{2n} \times 0 = 1,$$

$$\vdots$$

$$0 \times x'_1 + b^{11}_{n2} x'_2 + \cdots + b^{11}_{nn} x'_n + b^{12}_{n1} y'_1 + b^{12}_{22} \times 1 + b^{12}_{23} \times 0 + \cdots + b^{12}_{2n} \times 0 = 0,$$

$$b^{21}_{11} x'_1 + b^{21}_{12} x'_2 + \cdots + b^{21}_{1n} x'_n + a^{22}_{11} y'_1 + a^{22}_{12} \times 1 + a^{22}_{13} \times 0 + \cdots + a^{22}_{1n} \times 0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$b^{21}_{n1}x'_1 + b^{21}_{n2}x'_2 + \cdots + b^{21}_{nn}x'_n + a^{22}_{n1}y'_1 + a^{22}_{n2} \times 1 + a^{22}_{n3} \times 0 + \cdots + a^{22}_{nn} \times 0 = 0.$$

در نتیجه طبق فرض برای $b^{11}_{22}, x'_2 \in R$، عنصر $w \in U(R)$ وجود دارد که

$$b^{11}_{22} - w^{-1} \in U(R),\ x'_2 - w = z_2^{-1} \in U(R).$$

مشابه روند قبل داریم:

$$0 \times z_2 + b^{11}_{22} + b^{11}_{23}x'_3 z_2 + \cdots + b^{11}_{2n}x'_n z_2 + b^{12}_{21}y'_1 z_2 + \cdots + b^{12}_{2n}y'_n z_2 = u_2 \in U(R)$$

و $1 - x'_2 z_2 = v_2 \in U(R)$.

پس

$$\begin{aligned}
A_2 = {} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b^{11}_{32}v_2u_2^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -b^{11}_{n2}v_2u_2^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] A_1 \left[\begin{pmatrix} 1 & x'_1 z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x'_3 z_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x'_n z_2 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I_n\right] \\
& \times B_{21}\left(\begin{pmatrix} 0 & y'_1 z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= {} & \begin{pmatrix} u_1 & a^{11}_{12}v_2 & a^{11}_{13} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ 0 & u_2 & b^{11}_{23} & \cdots & b^{11}_{2n} & b^{12}_{21} & \cdots & b^{12}_{2n} \\ 0 & 0 & c^{11}_{33} & \cdots & c^{11}_{3n} & c^{12}_{31} & \cdots & c^{12}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c^{11}_{n3} & \cdots & c^{11}_{nn} & c^{12}_{n1} & \cdots & c^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11}v_1 & a^{21}_{12}v_2 & a^{21}_{13} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}v_1 & a^{21}_{n2}v_2 & a^{21}_{n3} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

برای سادگی می نویسیم

$$A_2 = [*_2, I_n]\, A_1\, [*_2, I_n]\, B_{21}\left(\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right).$$

از طرفی $\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) B_{21}\, [*_1, I_n]\, A\, [*_1, I_n] = A_1$، پس

$$A_2 = [*_2, I_n]\, [*_1, I_n]\, A\, [*_1, I_n]\, B_{21} \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) [*_2, I_n]$$

$$\times B_{21} \left(\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right).$$

بطور مشابه عناصر $u_2, \ldots, u_n, v_2, \ldots, v_n \in U(R)$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} A_n &= [*, *]\, A\, [*, *]\, B_{21}(*) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & * & * & \cdots & * & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ 0 & u_2 & * & \cdots & * & b^{12}_{21} & \cdots & b^{12}_{2n} \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & * & c^{12}_{31} & \cdots & c^{12}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_n & d^{12}_{n1} & \cdots & d^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11}v_1 & a^{21}_{12}v_2 & a^{21}_{13}v_3 & \cdots & a^{21}_{1n}v_n & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}v_1 & a^{21}_{n2}v_2 & a^{21}_{n3}v_3 & \cdots & a^{21}_{nn}v_n & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix} \in GL_{2n}(R). \end{aligned}$$

قرار می دهیم $S = \begin{pmatrix} u_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & u_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$، $T = \begin{pmatrix} a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ b^{12}_{21} & \cdots & b^{12}_{2n} \\ c^{12}_{31} & \cdots & c^{12}_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^{12}_{n1} & \cdots & d^{12}_{nn} \end{pmatrix}$ و

$$\begin{pmatrix} a^{21}_{11}v_1 & a^{21}_{12}v_2 & a^{21}_{13}v_3 & \cdots & a^{21}_{1n}v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}v_1 & a^{21}_{n2}v_2 & a^{21}_{n3}v_3 & \cdots & a^{21}_{nn}v_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = -diag\,(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

پس

$$A_n = \begin{pmatrix} S & T \\ -diag\,(v_1, \ldots, v_n) & A_{22} \end{pmatrix}.$$

چون $S \in GL_n(R)$، پس از گزاره ی ۱۰.۲.۱، $E \in GL_n(R)$ وجود دارد که

$$A_n = [S, E]\, B_{21} \left(-E^{-1} diag\left(v_1, \ldots, v_n\right)\right) B_{12} \left(S^{-1}T\right),$$

که $E = A_{22} + diag\left(v_1, \ldots, v_n\right) S^{-1}T$.

از طرفی با استفاده از بندهای (۱)، (۲) و (۴) روابط Δ، داریم:

$$\begin{aligned} A_n &= [*_n, I_n] \cdots [*_2, I_n]\, [*_1, I_n]\, A\, [*_1, I_n] \\ & B_{21} \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) [*_2, I_n]\, B_{21} \left(\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \cdots [*_n, I_n] \\ & B_{21} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix}\right) = [*, I_n]\, A\, [*, I_n]\, B_{21} \left(\begin{pmatrix} z_1 & * & \cdots & * \\ 0 & z_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

که $z_i \in U(R)$. پس $Z = \begin{pmatrix} z_1 & * & \cdots & * \\ 0 & z_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \in GL_n(R)$.

چون$A_n \in GL_{2n}(R)$ ، پس $F, G \in GL_n(R)$ وجود دارند که

$$[F, I_n]\, A\, [G, I_n]\, B_{21}\, (Z) = [S, E]\, B_{21} \left(-E^{-1} diag(v_1, \ldots, v_n)\right) B_{12}(S^{-1}T).$$

لذا با استفاده از روابط Δ داریم:

$$\begin{aligned} A &= [F^{-1}, I_n^{-1}][S, E]B_{21} \left(-E^{-1} diag(v_1, \ldots, v_n)\right) B_{12}(S^{-1}T)B_{21}(-Z)[G^{-1}, I_n^{-1}] \\ &= [F^{-1}SG, E]B_{21} \left(-E^{-1} diag(v_1, \ldots, v_n)G^{-1}\right) B_{12}(GS^{-1}T)B_{21}(-ZG^{-1}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} X & I_n - XY \\ -I_n & Y \end{pmatrix} B_{21}(V) = [F^{-1}SG, E]B_{21} \left(-E^{-1} diag(v_1, \ldots, v_n)G^{-1}\right) B_{12}(GS^{-1}T),$$

که $V=ZG^{-1}\in GL_n(R)$. بنابراین

$$X+(I_n-XY)V\in GL_n(R) \tag{۲.۲}$$

و

$$-I_n+YV=W\in GL_n(R). \tag{۳.۲}$$

در نتیجه بنا به عبارت (۲.۲) داریم:

$$X+(I_n-XY)V=X(I_n-YV)+V=-XW+V\in GL_n(R).$$

لذا $X-VW^{-1}\in GL_n(R)$.

از طرفی با ضرب عبارت (۳.۲) در V^{-1} داریم:

$$-V^{-1}+Y=WV^{-1}\in GL_n(R).$$

پس $Y-(VW^{-1})^{-1}=V^{-1}\in GL_n(R)$. لذا اثبات قضیه کامل می شود. □

نتیجه ۳.۳.۲. *فرض کنیم D یک حلقه ی تقسیم باشد. اگر $|D|\geq ۴$، آنگاه $M_n(D)$ در شرط $G-M$ صدق می کند.*

برهان. نشان می دهیم برای هر $x,y\in D_i$، $u\in D_i^*$ وجود دارد که $y-u^{-1},x-u\in D_i^*$:

برای هر $x,y\in D_i^*$، عنصر u را به گونه ای انتخاب می کنیم که $u\in D_i-\{0,x,y^{-1}\}$.

برای $x\neq 0$ و $y=0$، انتخاب می کنیم $u\in D_i-\{0,x\}$.

برای $y\neq 0$ و $x=0$، انتخاب می کنیم $u\in D_i-\{0,y^{-1}\}$.

برای $x=y=0$، انتخاب می کنیم $u=1$.

پس D در شرط $G-M$ صدق می کند. از قضیه ی قبل نتیجه می گیریم که $M_n(D)$ نیز در شرط $G-M$ صدق می کند. □

فصل ۳

حلقه های SB و حلقه های نیم موضعی

۱.۳ ویژگی های حلقه های SB

در این بخش تعدادی از گزاره های معادل حلقه های SB را مطرح می کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. حلقه ی R را SB می نامیم، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود داشته باشد که $a \pm bu \in U(R)$.

قضیه ۲.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر $x, y \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که $۱ + x\,(y \pm u) \in U(R)$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): برای هر $x, y \in R$، داریم $(۱ + xy)\,R + (-x)\,R = R$. چون R یک حلقه ی SB است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $(۱ + xy) \pm (-x)\,u \in U(R)$. لذا $۱ + x\,(y \pm u) \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، پس $x, y \in R$ وجود دارند که $ax + by = ۱$. با استفاده از بند (۲)، برای $(-a), x \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$۱ + (-a)(x - u) = ax + by + (-a)(x - u) = au + by \in U(R).$$

فرض کنیم v، وارون $au + by$ باشد، پس $auv + byv = ۱$.

دوباره با استفاده از بند (۲)، برای $(-b), yv \in R$، $w \in U(R)$ وجود دارد که

$$۱ + (-b)(yv \pm w) = auv + byv + (-b)(yv \pm w) = auv \pm bw \in U(R).$$

حال با ضرب $v^{-۱}u^{-۱}$ از سمت راست در $auv \pm bw$، داریم :

$$a \pm bwv^{-۱}u^{-۱} \in U(R),$$

در نتیجه R یک حلقه ی SB است. $\square$

نتیجه ۳.۱.۳. *R یک حلقه ی SB است، اگر و تنها اگر حلقه ی متقابل R^{op}، یک حلقه ی SB باشد.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه ی SB باشد. برای هر $x^{op}, y^{op} \in R^{op}$، داریم $x, y \in R$. بنابراین بنا به قضیه ی قبل، $u \in U(R)$ وجود دارد که $1 + x(y \pm u) \in U(R)$. لذا بنا به گزاره ی ۸.۲.۱، $1 + (y \pm u)x \in U(R)$، یعنی $1^{op} + x^{op}(y^{op} \pm u^{op}) \in U(R^{op})$. لذا از قضیه ی قبل، R^{op} یک حلقه ی SB است.

با برعکس کردن روند بالا قسمت عکس اثبات می شود. □

نتیجه ی ۳.۱.۳، نشان می دهد که خاصیت SB نسبت به چپ و راست متقارن است.

لم ۴.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند :*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد که $a \pm bu \in U(R)$.*

(۳) *اگر $ax + b = 1$ که $a, b, x \in R$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد که $x \pm ub \in U(R)$.*

برهان. (۱) ⇐ (۲): اگر $ax + b = 1$، آنگاه $aR + bR = R$. چون R یک حلقه ی SB است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $a \pm bu \in U(R)$.

(۲) ⇐ (۱): برای هر $x, y \in R$، داریم $(-x)y + (1 + xy) = 1$. لذا بنا به بند (۲)، $u \in U(R)$ وجود دارد که $(-x) \pm (1 + xy)u \in U(R)$. با ضرب u^{-1} در $(-x) \pm (1 + xy)u$، داریم:

$$(-x)u^{-1} \pm (1 + xy) \in U(R).$$

با در نظر گرفتن $(-x)u^{-1} + (1 + xy) \in U(R)$، داریم:

$$1 + x(y - u^{-1}) \in U(R). \tag{1.3}$$

از طرفی $-((-x)u^{-1} - (1 + xy)) \in U(R)$، پس

$$1 + x(y + u^{-1}) \in U(R). \tag{2.3}$$

از روابط (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می گیریم که $1+x(y\pm u^{-1})\in U(R)$. لذا بنا به قضیه ی ۲.۱.۳، R یک حلقه ی SB است.

(۱) $\Leftarrow$ (۳): اگر $ax+b=1$، آنگاه $x^{op}a^{op}+b^{op}=1^{op}$. چون R یک حلقه ی SB است، پس بنا به نتیجه ی ۳.۱.۳، R^{op} یک حلقه ی SB است. لذا با استفاده از (۱) $\Leftarrow$ (۲)، $u^{op}\in U(R^{op})$ وجود دارد که $x^{op}\pm b^{op}u^{op}\in U(R^{op})$، یعنی $u\in U(R)$ وجود دارد که $x\pm ub\in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): اگر $ax+b=1$، آنگاه $x^{op}a^{op}+b^{op}=1^{op}$. بنا به (۳)، $u^{op}\in U(R^{op})$ وجود دارد که $a^{op}\pm u^{op}b^{op}\in U(R^{op})$، یعنی $u\in U(R)$ وجود دارد که $a\pm bu\in U(R)$. لذا طبق (۲) $\Leftarrow$ (۱)، R یک حلقه ی SB است. $\square$

نتیجه ۵.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی SB باشد. اگر I یک ایده آل R باشد، آنگاه R/I یک حلقه ی SB است.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه ی SB باشد. قرار می دهیم $\overline{R}=R/I$. فرض کنیم $\overline{ax}+\overline{b}=\overline{1}$. پس $ax+b-1\in I$. قرار می دهیم $i=ax+b-1$. لذا $ax+(b-i)=1$. پس بنا به لم ۴.۱.۳، $u\in U(R)$ وجود دارد که $a\pm(b-i)u\in U(R)$. لذا $\overline{a}\pm\overline{(b-i)}\overline{u}\in U(\overline{R})$. از طرفی چون $i\in I$، پس $\overline{i}=i+I=I$. بنابراین $\overline{a}\pm\overline{b}\overline{u}\in U(\overline{R})$. پس از لم ۴.۱.۳، $\overline{R}$ یک حلقه ی SB است. $\square$

نتیجه ۶.۱.۳. *فرض کنیم R_1، ... و R_n حلقه های SB باشند. در این صورت $\bigoplus_{i=1}^{n}R_i$ نیز یک حلقه SB است.*

برهان. قرار می دهیم $R=\bigoplus_{i=1}^{n}R_i$. فرض کنیم $ax+b=1_R$ که $a,b,x\in R$. قرار می دهیم $a=(a_1,\ldots,a_n)$، $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $b=(b_1,\ldots,b_n)$. پس

$$(a_1,\ldots,a_n)(x_1,\ldots,x_n)+(b_1,\ldots,b_n)=(1_{R_1},\ldots,1_{R_n}).$$

لذا $a_ix_i+b_i=1_{R_i}$. چون R_i یک حلقه ی SB است، پس $u_i\in U(R_i)$ وجود دارد که

$a_i \pm b_iu_i \in U(R_i)$. قرار می دهیم $u = (u_۱, \cdots, u_n)$. در نتیجه $a \pm bu \in U(R)$. لذا بنا به لم ۴.۱.۳، R یک حلقه ی SB است. □

قضیه ۷.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر $A \in GL_۲(R)$، $u \in U(R)$ وجود دارد که*

$$A = [*, *]B_{۲۱}(*)B_{۱۲}(*)B_{۲۱}(\pm u).$$

برهان. (۱) ⇐ (۲): فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in GL_۲(R)$. بنابراین $x_۱, x_۲ \in R$ وجود دارند که $a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ = ۱$، یعنی $a_{۱۱}R + a_{۱۲}R = R$. چون R یک حلقه ی SB است، $u \in U(R)$ وجود دارد که $v_۱ := a_{۱۱} + a_{۱۲}u \in U(R)$ و $v_۲ := a_{۱۱} - a_{۱۲}u \in U(R)$. پس

$$AB_{۲۱}(u) = \begin{pmatrix} v_۱ & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} + a_{۲۲}u & a_{۲۲} \end{pmatrix}.$$

بنا به گزاره ی ۶.۱.۲، $\beta \in U(R)$ و $d, e \in R$ وجود دارند که

$$AB_{۲۱}(u) = [v_۱, \beta]B_{۲۱}(d)B_{۱۲}(e).$$

پس $A = [v_۱, \beta]B_{۲۱}(d)B_{۱۲}(e)B_{۲۱}(-u)$. از طرفی داریم :

$$AB_{۲۱}(-u) = \begin{pmatrix} v_۲ & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} - a_{۲۲}u & a_{۲۲} \end{pmatrix}.$$

بطور مشابه داریم:

$$A = [*, *]B_{۲۱}(*)B_{۱۲}(*)B_{۲۱}(u).$$

لذا حکم برقرار است.

(۲) ⇐ (۱): اگر $ax + b = ۱$ که $a, b, x \in R$، آنگاه

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xa-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} \in GL_n(R).$$

بنا به بند (۲)، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = [*,*]B_{21}(*)B_{12}(*)B_{21}(\pm u).$$

لذا $\alpha_i, \beta_i \in U(R)$ و $c_i, d_i \in R$، برای $i = 1, 2$، وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} B_{21}(-u) = [\alpha_1, \beta_1]B_{21}(c_1)B_{12}(d_1)$$

و

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} B_{21}(u) = [\alpha_2, \beta_2]B_{21}(c_2)B_{12}(d_2).$$

لذا $a - bu = \alpha_1 \in U(R)$ و $a + bu = \alpha_2 \in U(R)$. بنابراین طبق لم ۴.۱.۳، R یک حلقه ی SB است. □

نتیجه ۸.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر $A \in GL_2(R)$، $u \in U(R)$ وجود دارد که*

$$A = [*,*]B_{12}(*)B_{21}(*)B_{12}(\pm u).$$

برهان. (۱) ⇐ (۲): برای هر $A \in GL_2(R)$، داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(R).$$

بنا به قضیه ی قبل، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [*,*]B_{21}(*)B_{12}(*)B_{21}(\pm u).$$

چون $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$، پس می توان نوشت:

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} [*,*] \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} B_{۲۱}(*) \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} B_{۱۲}(*) \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} B_{۲۱}(\pm u) \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه چون $B_{ji}(*) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} B_{ij}(*) \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ و $[*,*] = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} [*,*] \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$، پس

$$A = [*,*] B_{۱۲}(*) B_{۲۱}(*) B_{۱۲}(\pm u).$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $ax + b = ۱$ که $a, b, x \in R$. لذا

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \in GL_۲(R).$$

بنا به بند (۲)، $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = [*,*] B_{۱۲}(*) B_{۲۱}(*) B_{۱۲}(\pm u).$$

مشابه برهان (۱) $\Leftarrow$ (۲)، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix} = [*,*] B_{۲۱}(*) B_{۱۲}(*) B_{۲۱}(\pm u).$$

مشابه برهان (۲) $\Leftarrow$ (۱) قضیه ی قبل، داریم $a \pm bu \in U(R)$، پس R یک حلقه ی SB است. □

۲.۳ حلقه های نیم موضعی

در این بخش شرایطی را ارائه می دهیم که یک حلقه ی نیم موضعی، یک حلقه ی SB است. همچنین نشان می دهیم برای یک حلقه ی نیم موضعی، خاصیت SB با شرط $G-M$ معادل می شود.

لم ۱.۲.۳. *فرض کنیم D یک حلقه ی تقسیم باشد، $n \geq ۲$ و $A \in M_n(D)$. در این صورت $U \in GL_n(D)$ وجود دارد که $A \pm U \in GL_n(D)$.*

برهان. چون D یک حلقه ی تقسیم است، پس بنا به قضایای جبر خطی، $U, V \in GL_n(D)$ وجود دارند که

$$UAV = diag(I_r, 0) = \begin{pmatrix} 1_D & & & & & & \\ & 1_D & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1_D & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

که $0 \leq r \leq n$.

فرض کنیم n یک عدد زوج باشد. قرار می دهیم

$$W = \begin{pmatrix} 1_D & & & & & & 1_D \\ 1_D & 0 & & & & & \\ & 1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & 1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

لذا $W \in GL_n(D)$. واضح است که

$$UAV - W = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & -1_D \\ -1_D & 1_D & & & & & \\ & -1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_D & & & \\ & & & -1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \in GL_n(D).$$

بعلاوه،

$$UAV + W = \begin{pmatrix} 2\times 1_D & & & & & & 1_D \\ 1_D & 1_D & & & & & \\ & 1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_D & & & \\ & & & 1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

یا

$$UAV+W=\begin{pmatrix} 2\times 1_D & & & & & & 1_D \\ 1_D & 1_D & & & & & \\ & 1_D & 1_D & & & & \\ & & 1_D & \ddots & & & \\ & & & 1_D & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_D & 1_D \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

چون n یک عدد زوج است، پس $UAV+W\in GL_n(D)$.

حال فرض کنیم n یک عدد فرد باشد. قرار می دهیم

$$W=\begin{pmatrix} 1_D & & & & & & 1_D \\ -1_D & 0 & & & & & \\ & 1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & 1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

بوضوح $W\in GL_n(D)$. پس

$$UAV-W=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & -1_D \\ 1_D & 1_D & & & & & \\ & -1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_D & & & \\ & & & -1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}\in GL_n(D).$$

بعلاوه،

$$UAV+W=\begin{pmatrix} 2\times 1_D & & & & & & 1_D \\ -1_D & 1_D & & & & & \\ & 1_D & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_D & & & \\ & & & 1_D & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_D & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

یا

$$UAV+W=\begin{pmatrix} ۲\times ۱_D & & & & & & ۱_D \\ -۱_D & ۱_D & & & & & \\ & ۱_D & ۱_D & & & & \\ & & ۱_D & \ddots & & & \\ & & & ۱_D & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & ۱_D & ۱_D \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

چون n یک عدد فرد است، پس $UAV+W\in GL_n(D)$. بنابراین $W\in GL_n(D)$ وجود دارد که $UAV\pm W\in GL_n(D)$، یعنی $A\pm U^{-۱}WV^{-۱}\in GL_n(D)$. □

لم ۲.۲.۳. *فرض کنیم D یک حلقه ی تقسیم باشد. در این صورت:*

(الف) *D یک حلقه ی SB است، اگر و تنها اگر $|D|\geq ۴$.*

(ب) *برای $n\geq ۲$، حلقه ی $M_n(D)$ یک حلقه ی SB است.*

برهان. (الف): فرض کنیم D یک حلقه ی SB باشد. چون $۱_D=۱_D\times ۰+۱_D$، پس بنا به لم ۴.۱.۳، $u\in D^*$ وجود دارد که $۱_D\pm u\in D^*$. بنابراین $\{۰,۱_D,u,۱_D+u\}\subseteq D$. پس $|D|\geq ۴$.

بعکس، فرض کنیم $|D|\geq ۴$. اگر $ax+b=۱_D$ که $a,b,x\in D$، آنگاه حالت های زیر پیش می آید:

اگر $x=۰$، آنگاه $b=۱_D$. چون $|D|\geq ۴$، پس $u\in D-\{۰,a,-a\}$ وجود دارد که $a\pm bu\in D^*$.

اگر $x\neq ۰$ و $b=۰$، آنگاه $ax=۱_D$. لذا $۰\neq a\in D^*$. پس $a=a\pm b\times ۱_D\in D^*$.

اگر $x\neq ۰$ و $b\neq ۰$، آنگاه $u\in D-\{۰,xb^{-۱}a,-xb^{-۱}a\}$ وجود دارد که $a\pm bx^{-۱}u\in D^*$.

پس در هر حالت $v\in D^*$ وجود دارد که $a\pm bv\in D^*$. در نتیجه بنا به لم۴.۱.۳، D یک حلقه ی SB است.

(ب): فرض کنیم $AX+B=I_n$ در$M_n(D)$. کافی است نشان دهیم $\Lambda\in GL_n(D)$ وجود دارد که $A\pm B\Lambda\in GL_n(D)$. چون D حلقه ی تقسیم است، پس $U,V\in GL_n(D)$ و $۰\leq r\leq n$، وجود دارند که $UAV=diag(I_r,۰)$. قرار می دهیم $X'=V^{-۱}XU^{-۱}$ و $B'=UBU^{-۱}$. پس

$$diag(I_r,۰)X'+B'=(UAV)(V^{-۱}XU^{-۱})+UBU^{-۱}=I_n. \tag{۳.۳}$$

در ادامه نشان می دهیم $\Lambda' \in GL_n(D)$ وجود دارد که $diag(I_r, 0) \pm B'\Lambda' \in GL_n(D)$، و اینگونه حکم ثابت می شود. قرار می دهیم $X' = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ و $B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$، که $X_{11}, B_{11} \in M_{r\times r}(D)$، $X_{12}, B_{12} \in M_{r\times(n-r)}(D)$، $X_{21}, B_{21} \in M_{(n-r)\times r}(D)$ و $X_{22}, B_{22} \in M_{(n-r)\times(n-r)}(D)$. حال با جاگذاری در رابطه ی (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} diag(I_r, 0)X' + B' &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_{11} + B_{11} & X_{12} + B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = I_n, \end{aligned}$$

پس $B_{22} = I_{n-r}$، $B_{21} = 0$، $X_{12} = -B_{12}$ و $X_{11} + B_{11} = I_r$. از طرفی چون $0 \leq r \leq n$، پس حالت های زیر پیش می آید:

۱) اگر $r = 0$، آنگاه $UAV = 0$. چون $U, V \neq 0$، پس $A = 0$. لذا $AX + B = B = I_n$. در نتیجه $A \pm B \times I_n = \pm I_n \in GL_n(D)$.

۲) اگر $r = 1$ و $B_{11} = 0$، آنگاه:

$$\begin{aligned} diag(I_1, 0) \pm B'I_n &= \begin{pmatrix} 1_D & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_D & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_D & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & B_{12}I_{n-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_D & * \\ 0 & \pm I_{n-1} \end{pmatrix} \in GL_n(D). \end{aligned}$$

یعنی

$$diag(I_1, 0) \pm B'I_n = UAV \pm UBU^{-1} \in GL_n(D).$$

با ضرب V^{-1} از راست در $UAV \pm UBU^{-1}$، داریم:

$$UA \pm UBU^{-1}V^{-1} = U(A \pm BU^{-1}V^{-1}) \in GL_n(D).$$

چون $U \in GL_n(D)$، پس $A \pm BU^{-1}V^{-1} \in GL_n(D)$. قرار می دهیم $\Lambda = U^{-1}V^{-1}$. بنابراین $\Lambda, A \pm B\Lambda \in GL_n(D)$.

۳) اگر $r = 1$ و $B_{11} \neq 0$، آنگاه $0 \neq B_{11} \in M_{1\times 1}(D) = D$. لذا $B_{11} \in D^*$. بنابراین

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \in GL_n(D).$$

از طرفی طبق لم ۱.۲.۳، $U \in GL_n(D)$ وجود دارد که

$$diag(I_1, 0) \pm U \in GL_n(D).$$

قرار می دهیم $Y = (B')^{-1}U$. بنابراین $Y \in GL_n(D)$ و

$$diag(I_1, 0) \pm B'(B')^{-1}U = diag(I_1, 0) \pm B'Y = UAV \pm UBU^{-1}Y \in GL_n(D).$$

با ضرب V^{-1}، در $UAV \pm UBU^{-1}Y$، داریم:

$$UA \pm UBU^{-1}YV^{-1} = U(A \pm BU^{-1}YV^{-1}) \in GL_n(D).$$

چون $U \in GL_n(D)$، پس $A \pm BU^{-1}YV^{-1} \in GL_n(D)$. قرار می دهیم $\Lambda = U^{-1}YV^{-1}$. بنابراین $\Lambda, A \pm B\Lambda \in GL_n(D)$.

۴) اگر $r \geq 2$، آنگاه طبق لم ۱.۲.۳، $W \in GL_r(D)$ وجود دارد که $B_{11} \pm W \in GL_r(D)$. لذا $B_{11}W^{-1} \pm I_r \in GL_r(D)$، یعنی $I_r \pm B_{11}W^{-1} \in GL_r(D)$. بنابراین

$$\begin{aligned} diag(I_r, 0) \pm B' \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11}W^{-1} & B_{12}I_{n-r} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r \pm B_{11}W^{-1} & \pm B_{12}I_{n-r} \\ 0 & \pm I_{n-r} \end{pmatrix} \in GL_n(D), \end{aligned}$$

یعنی $UAV \pm UBU^{-1} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \in GL_n(D)$. قرار می دهیم $\Lambda = U^{-1} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} V^{-1}$. پس $\Lambda, A \pm B\Lambda \in GL_n(D)$.

بنابراین برای $n \geq 2$، $M_n(D)$ یک حلقه ی SB است. □

لم ۳.۲.۳. *$R/J(R)$ یک حلقه ی SB است، اگر و تنها اگر R یک حلقه ی SB باشد.*

برهان. فرض کنیم $\overline{R} = R/J(R)$ یک حلقه ی SB باشد. اگر $ax + b = ۱$، آنگاه $\overline{ax + b} = \overline{۱}$. بنابراین $\overline{u} \in U(\overline{R})$ وجود دارد که $\overline{a \pm bu} \in U(\overline{R})$. در نتیجه بنا به گزاره ی ۹.۲.۱، $u \in U(R)$ وجود دارد که $a \pm bu \in R$. لذا R یک حلقه ی SB است.

بعکس، بنا به نتیجه ی ۵.۱.۳ برقرار است. □

تعریف ۴.۲.۳. حلقه ی R را **نیم موضعی** می نامیم، هر گاه $R/J(R)$ نیم ساده ی آرتینی باشد.

نتیجه ۵.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد،در این صورت برای هر $n \geq ۲$، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است.*

برهان. چون R یک حلقه ی نیم موضعی است، پس $R/J(R)$ نیم ساده است. لذا بنا به قضیه ی آرتین-ودربرن ، حلقه های تقسیم $D_۱$ ، ... و D_s وجود دارند که

$$R/J(R) \cong M_{n_۱}(D_۱) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

پس

$$M_n\left(R/J(R)\right) \cong M_n\left(M_{n_۱}(D_۱) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s)\right) \cong M_{nn_۱}(D_۱) \oplus \cdots \oplus M_{nn_s}(D_s). \quad (۴.۳)$$

از طرفی بنا به گزاره ی ۱۲.۲.۱، داریم:

$$M_n\left(R/J(R)\right) \cong M_n(R)/M_n(J(R)) \cong M_n(R)/J\left(M_n(R)\right). \quad (۵.۳)$$

پس از روابط (۴.۳) و (۵.۳)، داریم:

$$M_n(R)/J\left(M_n(R)\right) \cong M_{nn_۱}(D_۱) \oplus \cdots \oplus M_{nn_s}(D_s).$$

بنا به لم ۲.۲.۳، برای $i = ۱, \ldots, s$، حلقه ی $M_{nn_i}(D_i)$، یک حلقه ی SB است. پس بنا به نتیجه ی ۶.۱.۳، $M_n(R)/J\left(M_n(R)\right)$ یک حلقه ی SB است و در نتیجه بنا به لم ۳.۲.۳، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. □

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) R *یک حلقه ی SB است.*

(۲) $u \in U(R)$ *وجود دارد که* $1_R \pm u \in U(R)$.

(۳) *برای هر* $x, y \in R$، *عنصر* $u \in U(R)$ *وجود دارد که* $x - u, y - u^{-1} \in U(R)$.

(۴) R *هیچ تصویر همریخت یکریخت با* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *و* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *ندارد.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۴) فرض کنیم I ایده آلی از R باشد. چون R یک حلقه ی SB است، پس طبق نتیجه ی ۵.۱.۳، R/I نیز چنین است. حال با مثال نقض نشان می دهیم $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ حلقه های SB نیستند: می دانیم $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. در $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$، داریم $\bar{1} = \bar{1} + \bar{1}.\bar{0}$، ولی به ازای $u \in U(\mathbb{Z}_2) = \{\bar{1}\}$، داریم $\bar{1} \pm \bar{1}.u = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_2)$. همچنین در $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$، داریم $\bar{1} = \bar{1} + \bar{2}.\bar{0}$، ولی به ازای $u \in U(\mathbb{Z}_3) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$، داریم $\bar{2} \pm \bar{1}.u \notin U(\mathbb{Z}_3)$. پس $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ حلقه های SB نیستند. بنابراین $R/I \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ و $R/I \ncong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(۴) $\Leftarrow$ (۳) چون R یک حلقه ی نیم موضعی است، پس $R/J(R)$ نیم ساده است. لذا طبق قضیه ی آرتین-ودربرن ، حلقه های تقسیم D_1، ... و D_s وجود دارند که

$$R/J(R) \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

اگر $n_i = 1$، آنگاه D_i با تصویر همریختی از R یکریخت است. پس بنا به بند (۴)، $|D_i| \geq 4$. در نتیجه بنا به نتیجه ی ۳.۳.۲، $M_n(D_i)$ در شرط $G-M$ صدق می کند، یعنی به ازای هر $X, Y \in M_{n_i}(D_i)$، $U \in GL_{n_i}(D_i)$ وجود دارد که $X - U, Y - U^{-1} \in GL_{n_i}(D_i)$. قرار می دهیم $R/J(R) = \overline{R}$ و $M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s) = R_1$. کافی است نشان دهیم برای هر $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$، $\overline{u} \in U(\overline{R})$ وجود دارد که $\overline{x} - \overline{u}, \overline{y} - \overline{u}^{-1} \in U(\overline{R})$. چون $\overline{R} \cong R_1$، پس متناظر با $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$ عناصر $A = (A_1, \cdots, A_s), B = (B_1, \cdots, B_s) \in R_1$ وجود دارند که

به ازای A_1, B_1، $U_1 \in GL_{n_1}(D_1)$ وجود دارد که $A_1 - U_1, B_1 - U_1^{-1} \in GL_{n_1}(D_1)$،

$$\vdots$$

به ازای A_s, B_s، $U_s \in GL_{n_s}(D_s)$ وجود دارد که $A_s - U_s, B_s - U_s^{-1} \in GL_{n_s}(D_s)$.

قرار می دهیم $U = (U_1, \ldots, U_s)$ که $U \in U(R_1)$. بنابراین

$$A - U = (A_1 - U_1, \ldots, A_s - U_s), B - U^{-1} = (B_1 - U^{-1}, \ldots, B_s - U^{-1}) \in U(R_1).$$

پس متناظر با عناصر فوق داریم $\overline{x} - \overline{u}, \overline{y} - \overline{u}^{-1} \in U(\overline{R})$. از گزاره ی ۹.۲.۱، نتیجه می گیریم که برای هر $x, y \in R$، عنصر $u \in R$ وجود دارد که $x - u, y - u^{-1} \in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۲): بنا به فرض برای $1, -1 \in R$، عنصر $u \in U(R)$ وجود دارد که

$$1 - u, -1 - u^{-1} \in U(R).$$

باضرب $(-u)$ در $(-1 - u^{-1})$، داریم $1 + u \in U(R)$. لذا $1 \pm u \in U(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): چون R یک حلقه ی نیم موضعی است، پس $R/J(R)$ نیم ساده است. لذا طبق قضیه ی آرتین-ودربرن ، حلقه های تقسیم D_1، ... و D_s وجود دارند که

$$R/J(R) \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

اگر $n_i \geq 2$، آنگاه بنا به لم ۲.۲.۳، $M_{n_i}(D_i)$ یک حلقه ی SB است.

اگر $n_i = 1$، آنگاه D_i با تصویر همریختی از R یکریخت است. پس متناظر با عناصر بند (۲)، $u_i \in D_i^*$ وجود دارد که $1_{D_i} \pm u_i \in D_i^*$. این، یعنی، $\{0, 1_D, u_i, 1_{D_i} + u_i\}$ زیرمجموعه ای از D_i است. در نتیجه $|D_i| \geq 4$. پس طبق لم ۲.۲.۳، D_i یک حلقه ی SB است.

بنابراین بنا به نتیجه ی ۶.۱.۳، $R/J(R)$ یک حلقه ی SB است و در نتیجه بنا به لم ۳.۲.۳، R یک حلقه ی SB است. $\square$

مثال ۷.۲.۳. فرض کنیم $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid (m,n) = 1, (n,pq) = 1\}$، که $p, q \neq 2, 3$ اعداد اول متمایزی هستند. در این صورت R یک حلقه ی SB است.

حل. واضح است که pR و qR ایده آل های R هستند. ادعا می کنیم $Max(R) = \{pR, qR\}$.

(فرض خلف) فرض کنیم pR ایده آل ماکزیمال نباشد. پس ایده آل ماکزیمال I وجود دارد که $pR \subsetneq I$. در نتیجه $\dfrac{m}{n} \in I - pR$ وجود دارد. پس $p \nmid m$. لذا $(p,m) = 1$. پس $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که $mm_1 + pn_1 = 1$ (چون $\dfrac{m}{n} \in I$، پس $n.\dfrac{m}{n} = m \in I$، و از طرفی $p \in I$). پس $1 \in I$، یعنی $I = R$ که تناقض است. پس pR ایده آل ماکزیمال است. بطور مشابه برای qR هم برقرار است.

حال نشان می دهیم pR و qR تنها ایده آل های ماکزیمال R هستند. فرض کنیم $\dfrac{m}{n} \in R - (pR \cup qR)$. پس $(m,pq) = 1$. از طرفی $(n,pq) = 1$. لذا $\dfrac{n}{m} \in R$. پس هر عضو خارج از pR و qR وارون پذیر است. پس نتیجه حاصل است.

نگاشت $\varphi : R \longrightarrow R/pR \oplus R/qR$ با ضابطه ی $\varphi(r) = (r + pR, r + qR)$ را در نظر می گیریم، و نشان می دهیم φ یک همریختی پوشاست:

فرض کنیم $r, r' \in R$ و $r = r'$. پس $(r+pR, r+qR) = (r'+pR, r'+qR)$، یعنی $\varphi(r) = \varphi(r')$. در نتیجه φ خوش تعریف است.

برای هر $r, r' \in R$ داریم:

$$\varphi(r.r') = (r.r' + pR, r.r' + qR) = ((r + pR)(r' + pR), (r + qR)(r' + qR))$$

$$= (r + pR, r + qR)(r' + pR, r' + qR) = \varphi(r)\varphi(r'),$$

و

$$\varphi(r + r') = (r + r' + pR, r + r' + qR) = ((r + pR) + (r' + pR), (r + qR) + (r' + qR))$$

$$= (r + pR, r + qR) + (r' + pR, r' + qR) = \varphi(r) + \varphi(r').$$

پس φ یک همریختی است.

حال فرض کنیم $(r+pR, r'+qR) \in R/pR \oplus R/qR$. چون $(p, q) = 1$، پس $pR+qR = R$. بنابراین طبق قضیه ی باقیمانده ی چینی، $a \in R$ وجود دارد بطوریکه $a + pR = r + pR$ و $a + pR = r' + pR$. پس به ازای هر $(r + pR, r' + qR) \in R/pR \oplus R/qR$، عنصر $a \in R$ وجود دارد که

$$\varphi(a) = (a + pR, a + pR) = (r + pR, r' + pR).$$

در نتیجه φ پوشاست.

حال هسته ی φ را بدست می آوریم:

$$ker\varphi = \{r : r \in pR \cap qR = pqR\} = pqR.$$

لذا $R/pqR \cong R/pR \oplus R/qR$. از طرفی

$$R/J(R) = R/(pR \cap qR) = R/pqR.$$

پس $R/J(R) \cong R/pR \oplus R/qR$. چون $R/pR \oplus R/qR$ نیم ساده ی آرتینی است، پس $R/J(R)$ نیم ساده ی آرتینی است. در نتیجه R نیم موضعی است. از طرفی چون $p, q \neq 2, 3$، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $1_R \pm u \in U(R)$. لذا طبق قضیه ی قبل، R یک حلقه ی SB است.

گزاره ۸.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد. در این صورت برای هر $n \geq 1$، $M_n(R)$ یک حلقه ی نیم موضعی است.*

برهان. فرض کنیم R نیم موضعی باشد. پس $R/J(R)$ نیم ساده ی آرتینی است. از طرفی از گزاره ی ۸.۱.۴، داریم:

$$M_n\left(R/J(R)\right) \cong M_n(R)/M_n(J(R)) \cong M_n(R)/J\left(M_n(R)\right).$$

چون $M_n\left(R/J(R)\right)$ نیم ساده ی آرتینی است، پس $M_n(R)/J\left(M_n(R)\right)$ نیم ساده ی آرتینی است. در نتیجه $M_n(R)$ نیم موضعی است. □

نتیجه ۹.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد. در این صورت برای هر $n \geq ۲$، $M_n(R)$ در شرط $G-M$ صدق می کند.*

برهان. فرض کنیم R نیم موضعی باشد. پس بنا به گزاره ی ۸.۲.۳، $M_n(R)$ نیم موضعی است. لذا طبق نتیجه ی ۵.۲.۳، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. پس طبق قضیه ی ۶.۲.۳، $M_n(R)$ در شرط $G-M$ صدق می کند. $\square$

نتیجه ۱۰.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد. اگر $۲,۳ \in U(R)$، آنگاه برای هر $A \in M_n(R)$، $U,V \in GL_n(R)$ وجود دارند که $A = U+V$ و $U-V \in GL_n(R)$.*

برهان. چون R یک حلقه ی نیم موضعی است، پس بنا به گزاره ی ۸.۲.۳، $S = M_n(R)$ نیز چنین است. $a \in R$ را با $\begin{pmatrix} a & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \in S$ یکسان در نظر می گیریم. واضح است که $۱_S+۲^{-۱} = ۳\times ۲^{-۱} \in U(S)$ و $۱_S - ۲^{-۱} = ۲^{-۱} \in U(S)$. لذا طبق قضیه ی ۶.۲.۳، برای هر $n \geq ۱$ ، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. از طرفی برای هر $A \in M_n(R)$، داریم $AM_n(R) + I_nM_n(R) = M_n(R)$. بنابراین چون $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است، پس $W' \in GL_n(R)$ وجود دارد که $A \pm W' \in GL_n(R)$. قرار می دهیم $A+W' = U'$ و $A - W' = V'$. با جمع و تفریق این دو رابطه داریم :

$$A = \tfrac{۱}{۲}U' + \tfrac{۱}{۲}V' \quad \text{و} \quad W' = \tfrac{۱}{۲}U' - \tfrac{۱}{۲}V'$$

با در نظر گرفتن $U = \frac{۱}{۲}U'$ و $V = \frac{۱}{۲}V'$، داریم $A = U+V$ و $W' = U - V \in GL_n(R)$. $\square$

قضیه ۱۱.۲.۳. *اگر M یک R-مدول راست آرتینی باشد، آنگاه $End_R(M)$ نیم موضعی است.*

برهان. به مرجع [۸] قضیه ی ۱۲.۴ رجوع کنید. $\square$

نتیجه ۱۲.۲.۳. *فرض کنیم A یک R-مدول راست آرتینی باشد. اگر $۲,۳ \in U(R)$، آنگاه برای هر $\alpha \in End_R(A)$، $\beta,\gamma \in Aut_R(A)$ وجود دارند که $\alpha = \beta+\gamma$ و $\beta - \gamma \in Aut_R(A)$.*

برهان. قرار می دهیم $\sigma = ۲ \times ۱_A$ و $\tau = \frac{۱}{۲} \times ۱_A$. پس $\sigma : A \to A$ با ضابطه ی $\sigma(a) = a \cdot ۲$، و $\tau : A \to A$ با ضابطه ی $\tau(a) = a.\frac{۱}{۲}$ (برای هر $a \in A$)، تعریف می شوند. چون $\sigma\tau = ۱_A = \tau\sigma$، پس $۲ \times ۱_A \in U(End_R(A))$. بطور مشابه $۳ \times ۱_A \in U(End_R(A))$. از طرفی طبق قضیه ی ۳.۲.۱۱، $End_R(A)$ حلقه ی نیم موضعی است. حال با استفاده از نگاشت $End_R(A) \to M_n(End_R(A))$ و نتیجه ۳.۲.۱۰، برهان کامل می شود. $\square$

فصل ۴

حلقه های SB و حلقه های تبادلی

۱.۴ حلقه های تبادلی

در این بخش به بررسی حلقه های مناسب می پردازیم و نشان می دهیم یک حلقه، تبادلی است اگر و تنها اگر مناسب باشد.

گزاره ۱.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *عنصر $e^{۲} = e \in R$ وجود دارد که $e - x \in R(x - x^{۲})$.*

(۲) $e^{۲} = e \in Rx$ *و* $c \in R$ *وجود دارند که* $(۱ - e) - c(۱ - x) \in J(R)$.

(۳) $e^{۲} = e \in Rx$ *وجود دارد که* $R = Re + R(۱ - x)$.

(۴) $e^{۲} = e \in Rx$ *وجود دارد که* $۱ - e \in R(۱ - x)$.

برهان. $(۱) \Leftarrow (۲)$: چون $e - x \in R(x - x^{۲})$ ، پس $r \in R$ وجود دارد که $e - x = r(x - x^{۲})$. در نتیجه $۱ - e = (۱ - rx)(۱ - x)$.

$(۲) \Leftarrow (۳)$: فرض کنیم $(۱ - e) - c(۱ - x) \in J(R)$. در نتیجه

$$۱ - [(۱ - e) - c(۱ - x)] = e + c(۱ - x)$$

یکه است.

$(۳) \Leftarrow (۴)$: چون $R = Re + R(۱ - x)$، پس عناصر $s, t \in R$ وجود دارند که $۱ = te + s(۱ - x)$. قرار می دهیم $f = e + (۱ - e)te$. در نتیجه

$$\begin{aligned} f^{۲} &= (e + (۱ - e)te)(e + (۱ - e)te) \\ &= e + e(۱ - e)te + (۱ - e)te + (۱ - e)te(۱ - e)te \\ &= e + (۱ - e)te = f \in Rx. \end{aligned}$$

و

$$1 - f = 1 - e - (1-e)te = 1 - te - e(1-te)$$
$$= s(1-x) - ex(1-x) = (1-e)s(1-x) \in R(1-x).$$

(۴) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $1 - e \in R(1-x)$. داریم $e - x = e(1-x) - (1-e)x$. چون $e(1-x) \in Rx(1-x)$ و $(1-e)x \in R(1-x)x$، پس $e - x \in R(x - x^2)$. □

تعریف ۲.۱.۴. حلقه ی R را مناسب چپ می نامیم، هرگاه هر عنصر از R یکی از شرایط گزاره ی ۱.۱.۴ را داشته باشد. حلقه ی مناسب راست نیز بطور مشابه تعریف می شود. در ادامه (قضیه ی ۸.۱.۴) نشان می دهیم حلقه ی مناسب چپ، مناسب راست است، و بعکس. پس حلقه ی R را **مناسب** می نامیم، هرگاه هر عنصر از R یکی از شرایط گزاره ی ۱.۱.۴، را داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنیم L یک ایده آل چپ(راست) از حلقه ی R باشد. گوییم خودتوان ها به پیمانه ی L بالا برده می شوند [1] هرگاه برای هر $x \in R$، اگر $x - x^2 \in L$، آنگاه خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد که $e - x \in L$.

نتیجه ۴.۱.۴. *حلقه ی R مناسب است، اگر و تنها اگر خودتوان ها به پیمانه ی هر ایده آل چپ R بالا برده شوند.*

برهان. با توجه به بند (۱) گزاره ی ۱.۱.۴، واضح است. □

نتیجه ۵.۱.۴. *هر تصویر همریخت یک حلقه ی مناسب، مناسب است.*

برهان. با توجه به گزاره ی ۱.۱.۴، واضح است. □

تعریف ۶.۱.۴. گوییم R-مدول چپ M **تبادلی** است، هرگاه برای هر مدول X و تجزیه های

$$X = M' \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i,$$

[1] Idempotents can be lifted modulo L

که $M \cong M'$، برای هر i، زیرمدول های $N'_i \subseteq N_i$ وجود داشته باشند که

$$X = M' \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} N'_i \right).$$

اگر مجموعه ی I متناهی باشد (بطور معادل ۲ $= |I|$)، آنگاه گوییم مدول M **تبادلی متناهی** است.

تعریف ۷.۱.۴. حلقه ی R را یک حلقه ی تبادلی می نامیم، هرگاه $_RR$ تبادلی (متناهی) باشد.

قضیه ی زیر نشان می دهد حلقه ی مناسب، نسبت به چپ و راست متقارن است:

قضیه ۸.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول چپ باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) $End\ M$ *مناسب راست است.*

(۲) M *تبادلی متناهی است.*

(۳) $End\ M$ *مناسب چپ است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $X = M \oplus Y = N_۱ \oplus N_۲$ یک تجزیه مدولی باشد. قرار می دهیم $E = End\ X$ و انتخاب می کنیم $\pi^۲ = \pi \in E$ که $M = X\pi$. فرض کنیم $\tau_۱$ و $\tau_۲$ خودتوان های متعامد در E باشند که $\tau_۱ + \tau_۲ = ۱$، $N_i = X\tau_i$، $N_۱ = ker \tau_۲$ و $N_۲ = ker \tau_۱$. چون $\pi E \pi \cong end\ M$ مناسب راست و $\pi = \pi\tau_۱\pi + \pi\tau_۲\pi$ عضو همانی $\pi E \pi$ است، پس برای $i = ۱, ۲$، خودتوان های متعامد $v_i \in \pi\tau_i\pi(\pi E \pi) = \pi\tau_i\pi E \pi$ وجود دارند که $v_۱ + v_۲ = \pi$. قرار می دهیم $v_i = \pi\tau_i\alpha_i$ که $\alpha_i = \alpha_i v_i \in \pi E \pi$. قرار می دهیم $\eta_i = \tau_i\alpha_i\tau_i$ و $X\eta_i \subseteq N_i$. لذا $N_i = X\eta_i \oplus N'_i$ که $N'_i = N_i \cap ker\ \eta_i$. پس $X = (X\eta_۱ \oplus X\eta_۲) \oplus (N'_۱ \oplus N'_۲)$. نشان می دهیم $X = M \oplus N'_۱ \oplus N'_۲$. چون $\pi\eta_i = \pi\tau_i\alpha_i\tau_i = v_i\tau_i$، پس $\pi\eta_i\alpha_i = v_i\tau_i\alpha_i = v_i^۲ = v_i$. فرض کنیم $x \in M \cap (N'_۱ \oplus N'_۲)$. لذا $x\eta_۱ = \circ = x\eta_۲$ و در نتیجه

$$x = x\pi = xv_۱ + xv_۲ = x\pi\eta_۱\alpha_۱ + x\pi\eta_۲\alpha_۲ = x\eta_۱\alpha_۱ + x\eta_۲\alpha_۲ = \circ$$

بنابراین $M \cap (N'_۱ \oplus N'_۲) = ۰$. در ادامه نشان می دهیم اگر $x \in X$، آنگاه $x \in M \cap (N'_۱ \oplus N'_۲)$. قرار می دهیم $x = x_۱ + x_۲ + w$ که $x_i \in X\eta_i$ و $w \in N'_۱ \oplus N'_۲$. داریم:

$$\eta_i\alpha_i\eta_j = (\eta_i\tau_i)(\alpha_i\pi)\eta_j = (\eta_i\tau_i)(\alpha_i\upsilon_i)(\pi\tau_j\alpha_j\tau_j) = (\eta_i\tau_i)(\alpha_i\upsilon_i)(\upsilon_j\tau_j) = \delta_{ij}\eta_j,$$

که $\delta_{ij} = ۰$ برای $i \neq j$ و $\delta_{ij} = ۱$ برای $i = j$. بنابراین برای $i = ۱, ۲$، $(x_i - x_i\alpha_i)\eta_j = ۰$، و لذا $x_i - x_i\alpha_i \in N'_i$. پس

$$x - x_۱\alpha_۱ - x_۲\alpha_۲ = (x_۱ - x_۱\alpha_۱) + (x_۲ - x_۲\alpha_۲) + w \in N'_۱ \oplus N'_۲.$$

چون $x_i\alpha_i \in M$، پس $x = M \oplus N'_۱ \oplus N'_۲$.

(۲) $\Leftarrow$ (۳): قرار می دهیم $X = M \oplus M$ و $N_۱ = \{(x, ۰)|x \in M\}$، $N_۲ = \{(۰, x)|x \in M\}$ و $D = \{(x, x)|x \in M\}$. فرض کنیم $\alpha, \beta \in End\ M$ که $\alpha + \beta = ۱$. اگر $M' = \{(x\alpha, -x\beta)|x \in M\}$، آنگاه $M' \cong M$ و $X = M' \oplus D = N_۱ \oplus N_۲$. چون M تبادلی متناهی است، پس $N'_i \subseteq N_i$ وجود دارند که $X = M' \oplus N'_۱ \oplus N'_۲$. اگر $x \in M$، آنگاه یک تجزیه ی یکتا بصورت زیر وجود دارد:

$$(x, x) = (y\alpha, -y\beta) + (x_۱, ۰) + (۰, x_۲) \tag{۱.۴}$$

که $(x_۱, ۰) \in N'_۱$ و $(۰, x_۲) \in N'_۲$. از مساوی بودن مولفه های اول و دوم رابطه ی (۱.۴)، داریم $x = y\alpha + x_۱$ و $x = -y\beta + x_۲$. لذا $y\alpha + x_۱ = -y\beta + x_۲$. پس $x_۲ - x_۱ = y(\alpha + \beta) = y$. حال $\alpha', \beta' \in End\ M$ را بصورت $x\alpha' = x_۲$ و $x\beta' = x_۱$ تعریف می کنیم. داریم:

$$(x\alpha'\alpha, x\alpha'\alpha) = (x\alpha'\alpha, -x\alpha'\beta) + (۰, ۰) + (۰, x\alpha'),$$

$$(x\beta'\beta, x\beta'\beta) = (-x\beta'\alpha, x\beta'\beta) + (x\beta', ۰) + (۰, ۰).$$

از مقایسه تجزیه های فوق با تجزیه های زیر که طبق رابطه (۱.۴) بدست آمده اند:

$$(x\alpha'\alpha, x\alpha'\alpha) = (y_۱\alpha, -y_۱\beta) + (x\alpha'\alpha\beta', ۰) + (۰, x\alpha'\alpha\alpha'),$$

$$(x\beta'\beta, x\beta'\beta) = (y_۲\alpha, -y_۲\beta) + (x\beta'\beta\beta', ۰) + (۰, x\beta'\beta\alpha')$$

نتیجه می گیریم $\alpha'\alpha\alpha' = \alpha'$ و $\beta'\beta\beta' = \beta'$. لذا $\beta'\beta$ و $\alpha'\alpha$ خودتوان هستند. بعلاوه

$$x\alpha' - x\beta' = x_۲ - x_۱ = y.$$

پس

$$x(\alpha'\alpha + \beta'\beta) = x\alpha'\alpha + x\beta'\beta = (y + x\beta')\alpha + x\beta'\beta$$

$$= x\beta'(\alpha + \beta) + y\alpha = x\beta' + y\alpha = x_۱ + (x - x_۱) = x.$$

و لذا $\alpha'\alpha + \beta'\beta = ۱_M$. در نتیجه $End\ M$ مناسب چپ است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): مشابه اثبات (۱) $\Leftarrow$ (۳). □

چون برای هر حلقه ی R داریم $R \cong End_R(R)$، پس بنا به قضیه ی ۸.۱.۴ حلقه ی R تبادلی متناهی است اگر و تنها اگر مناسب باشد.

گزاره ۹.۱.۴. *اگر R یک حلقه ی منظم باشد، آنگاه R یک حلقه ی تبادلی است.*

برهان. چون R یک حلقه ی منظم است، پس به ازای هر $x \in R$، $a \in R$ وجود دارد که $x = xax$. قرار می دهیم $g = xa \in xR$ و $e = g + gx(۱ - g) \in gR \subseteq xR$. به آسانی می توان بررسی کرد که e و g خودتوان هستند. چون $gx = xax = x$، پس $e = g + x(۱ - g)$. بنابراین

$$۱ - e = ۱ - g - x(۱ - g) = (۱ - x)(۱ - g) \in (۱ - x)R.$$

پس بنا به گزاره ی ۱.۱.۴ و قضیه ی ۸.۱.۴، R یک حلقه ی تبادلی است. □

تعریف ۱۰.۱.۴. حلقه ی R را یک **حلقه ی قوی** می نامیم، هرگاه خودتوان ها به پیمانه ی $J(R)$ بالا برده شوند و هر ایده آل چپ (راست) از حلقه ی R که مشمول در $J(R)$ نباشد، شامل یک خودتوان غیر صفر باشد. در بعضی مقالات حلقه ی قوی را I-حلقه نیز می نامند.

گزاره ۱۱.۱.۴. *هر حلقه ی مناسب، قوی است.*

برهان. با توجه به گزاره ی ۱.۱.۴، کافی است نشان دهیم برای هر $x \notin J(R)$، Rx شامل یک خودتوان ناصفر است. (فرض خلف) عنصر $x \in R$ را طوری در نظر می گیریم که Rx شامل هیچ خودتوان ناصفری نباشد. فرض کنیم $a \in R$. چون R مناسب است، پس عنصر $e^۲ = e \in Rax$ وجود دارد که $۱ - e \in R(۱ - ax)$. از طرفی $e = ۰$. پس $۱ \in R(۱ - ax)$، یعنی $x \in J(R)$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است و Rx شامل یک خودتوان ناصفر است. □

نتیجه ۱۲.۱.۴. *هر حلقه ی تبادلی، قوی است.*

برهان. بنا به قضیه ی ۸.۱.۴ و گزاره ی قبل واضح است. □

۲.۴ حلقه های تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی

در این بخش قضیه ی ۶.۲.۳ و نتایج آن را برای حلقه ی تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی ثابت می کنیم.

لم ۱.۲.۴. *اگر R یک حلقه ی قوی با فاکتور های اولیه آرتینی باشد و $J(R) = ۰$، آنگاه هر ایده آل ناصفر R شامل یک خودتوان مرکزی ناصفر است. به ویژه اگر حلقه ی R تجزیه ناپذیر باشد، آنگاه R آرتینی ساده است.*

برهان. به مرجع [۱۰] قضیه ی ۳ صفحه ی ۲۳۹ رجوع کنید. □

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *$u \in U(R)$ وجود دارد که $۱_R \pm u \in U(R)$.*

(۳) *برای هر $x, y \in R$، عنصر $u \in U(R)$ وجود دارد که $x - u, y - u^{-۱} \in U(R)$.*

(۴) R هیچ تصویر همریخت یکریخت با $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}/۳\mathbb{Z}$ ندارد.

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۴) و (۳) $\Leftarrow$ (۲) مشابه برهان قضیه ی ۶.۲.۳، اثبات می شود.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) (فرض خلف) فرض کنیم $ax+b=۱$ و برای هر $u\in U(R)$، $a+bu\notin U(R)$ یا $a-bu\notin U(R)$. قرار می دهیم:

$$\Omega=\left\{P \mid \text{برای هر} \ \overline{u}\in U(R/P), \overline{a-bu}\notin U(R/P) \ \text{یا} \ \overline{a+bu}\notin U(R/P) \ \text{یک ایده آل از} \ R\right\}.$$

چون $P=\{۰\}\in\Omega$، پس $\Omega\neq\emptyset$. زنجیر $P_۱\subseteq P_۲\subseteq\cdots\subseteq P_n\subseteq\cdots$ را در Ω در نظر می گیریم. ادعا می کنیم $\bigcup_{i=۱}^{\infty}P_i\in\Omega$. اگر نباشد، آنگاه $\overline{u}\in U\left(R/\bigcup_{i=۱}^{\infty}P_i\right)$ وجود دارد که

$$\overline{a+bu},\overline{a-bu}\in U\left(R/\bigcup_{i=۱}^{\infty}P_i\right).$$

پس $v,s,t\in R$ وجود دارند که در $R/\bigcup_{i=۱}^{\infty}P_i$ داریم:

$$\overline{uv}=\overline{۱}=\overline{vu}\text{، }\overline{(a+bu)s}=\overline{۱}=\overline{s(a+bu)}\text{، }\overline{(a-bu)t}=\overline{۱}=\overline{t(a-bu)}.$$

پس $i,j,k,l,m,n\in\mathbb{N}$ وجود دارند که

$\overline{۱}=\overline{uv}$ در R/P_i، $\overline{۱}=\overline{vu}$ در R/P_j، $\overline{۱}=\overline{(a+bu)s}$ در R/P_k، $\overline{۱}=\overline{s(a+bu)}$ در R/P_l، $\overline{۱}=\overline{(a-bu)t}$ در R/P_m و $\overline{۱}=\overline{t(a-bu)}$ در R/P_n.

انتخاب می کنیم $q=max\{i,j,k,l,m,n\}$. لذا $\overline{a\pm bu},\overline{u}\in U(R/P_q)$. در نتیجه $P_q\notin\Omega$ که یک تناقض است. پس $\bigcup_{i=۱}^{\infty}P_i$ یک کران بالا برای زنجیر فوق است. لذا بنا به لم زورن ایده آل Q وجود دارد که عضو ماکزیمال Ω است.

اگر $R/Q/J(R/Q)$ حلقه ی تجزیه پذیر باشد، آنگاه دو ایده آل K و L از R وجود دارند که

$$R/Q/J(R/Q)=K/Q/J(R/Q)\oplus L/Q/J(R/Q).$$

که $K/Q,L/Q\subsetneq R/Q$. چون $Q\subsetneq K,L$، پس $\overline{v}\in U(R/K)$ و $\overline{w}\in U(R/L)$ وجود دارند که $\overline{a}\pm\overline{bv}\in U(R/K)$ و $\overline{a}\pm\overline{bw}\in U(R/L)$. از طرفی داریم:

$$L/Q/J(R/Q) \cong R/Q/J(R/Q)/K/Q/J(R/Q) \cong R/K$$

و

$$K/Q/J(R/Q) \cong R/Q/J(R/Q)/L/Q/J(R/Q) \cong R/L.$$

پس $R/Q/J(R/Q) \cong R/K \oplus R/L$. لذا $\overline{(u+Q)} \in U\left(R/Q/J(R/Q)\right)$ وجود دارد که $\overline{a+Q} \pm \overline{(bu+Q)} \in U\left(R/Q/J(R/Q)\right)$. طبق گزاره ی ۹.۲.۱،

$(a+Q) \pm (bu+Q) \in U(R/Q)$ و $u+Q \in U(R/Q)$. بنابراین $Q \notin \Omega$ که یک تناقض است. لذا $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی تجزیه ناپذیر است. در نتیجه طبق لم ۱.۲.۴، $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی ساده آرتینی است. پس $R/Q/J(R/Q) \cong M_n(D)$، که D یک حلقه ی تقسیم است. اگر $n = ۱$، آنگاه متناظر با عناصر بند (۲)، $\overline{v} \in U\left(R/Q/J(R/Q)\right)$ وجود دارد که $\overline{۱} \pm \overline{v} \in U\left(R/Q/J(R/Q)\right)$. پس $\left\{\overline{۰}, \overline{۱}+\overline{v}, \overline{v}, \overline{۱}\right\}$ زیر مجموعه ای از $R/Q/J(R/Q)$ است. لذا $|R/Q/J(R/Q)| \geq ۴$. در نتیجه طبق لم ۶.۲.۳، $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی SB است. پس از لم ۳.۲.۳ نتیجه می گیریم که R/Q یک حلقه ی SB است. از طرفی چون$ax+b = ۱$ که $a,x,b \in R$، پس $\overline{ax}+\overline{b} = \overline{۱}$ که $\overline{a},\overline{x},\overline{b} \in R/Q$. بنابراین $\overline{w} \in U(R/Q)$ وجود دارد که $\overline{a} \pm \overline{bw} \in U(R/Q)$ که با $Q \in \Omega$ در تناقض است. اگر $n \geq ۲$، آنگاه از لم ۲.۲.۳، نتیجه می گیریم که $M_n(D)$ یک حلقه ی SB است. پس $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی SB است. لذا مشابه بالا $\overline{v} \in U(R/Q)$ وجود دارد که $\overline{a} \pm \overline{bv} \in U(R/Q)$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $u \in U(R)$ وجود دارد که $a \pm bu \in U(R)$.

(۴) $\Leftarrow$ (۳) (فرض خلف) فرض کنیم $x, y \in R$ وجود دارند که برای هر $u \in U(R)$، $x-u \notin U(R)$ یا $y-u^{-۱} \notin U(R)$. قرار می دهیم:

$$\Omega = \left\{ R \text{ یک ایده آل از } P \mid \overline{x}-\overline{u} \notin U(R/P) \text{ یا } \overline{y}-\overline{u}^{-۱} \notin U(R/P), \overline{u} \in U(R/P) \text{برای هر} \right\}.$$

به آسانی می توان ثابت کرد که Ω یک مجموعه ی ناتهی است و هر زنجیر از Ω یک کران بالا در Ω دارد. پس با استفاده از لم زورن، عضو ماکزیمال Q در Ω وجود دارد که مشابه برهان (۲) $\Leftarrow$ (۱)،

$R/Q/J(R/Q) \cong M_n(D)$، که D یک حلقه ی تقسیم است. چون $R/Q/J(R/Q)$ تصویر همریخت R است، پس بنا به بند (۴)، $M_n(D)$ هیچ تصویر همریخت یکریخت با $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ندارد. پس بنا به قضیه ی ۶.۲.۳، $M_n(D)$ در شرط $G-M$ صدق می کند، یعنی به ازای هر $X,Y \in M_n(D)$، $U \in GL_n(D)$ وجود دارد که

$$X-U, Y-U^{-1} \in GL_n(R).$$

چون $M_n(D) \cong R/Q/J(R/Q) = R_1$، پس متناظر با عناصر فوق داریم:

به ازای هر $\overline{x+Q}, \overline{y+Q} \in R_1$، $\overline{u+Q} \in U(R_1)$ وجود دارد که

$$(\overline{x+Q}) - (\overline{u+Q}), (\overline{y+Q}) - (\overline{u+Q})^{-1} \in U(R_1).$$

پس بنا به گزاره ۹.۲.۱، به ازای هر $\overline{x}, \overline{y} \in R/Q$، $\overline{u} \in U(R/Q)$ وجود دارد که $\overline{x}-\overline{u}, \overline{y}-\overline{u}^{-1} \in U(R/Q)$. که با انتخاب Q بعنوان ماکزیمال Ω در تناقض است. بنابراین برای هر $x,y \in R$، $u \in U(R)$ وجود دارد که $x-u, y-u^{-1} \in U(R)$. $\square$

نتیجه ۳.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی تبادلی با فاکتورهای اولیه ی آرتینی باشد. در این صورت برای هر $n \geq 2$، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است.*

برهان. چون R یک حلقه ی تبادلی با فاکتور های اولیه ی آرتینی است، پس $M_n(R)$ نیز چنین است. فرض کنیم n یک عدد زوج باشد. قرار می دهیم

$$U = \begin{pmatrix} 1_R & & & & & & 1_R \\ 1_R & 0 & & & & & \\ & 1_R & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & 1_R & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_R & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

لذا $U \in GL_n(R)$. پس

$$I_n - U = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & -1_R \\ -1_R & 1_R & & & & & \\ & -1_R & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_R & & & \\ & & & -1_R & 1_R & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1_R & 1_R \end{pmatrix} \in GL_n(R).$$

بعلاوه،

$$I_n + U = \begin{pmatrix} 2 \times 1_R & & & & & & 1_R \\ 1_R & 1_R & & & & & \\ & 1_R & 1_R & & & & \\ & & 1_R & \ddots & & & \\ & & & 1_R & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_R & 1_R \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

چون n یک عدد زوج است، پس $I_n + U \in GL_n(R)$.

حال فرض کنیم n یک عدد فرد باشد. قرار می دهیم

$$U = \begin{pmatrix} 1_R & & & & & & 1_R \\ -1_R & 0 & & & & & \\ & 1_R & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & 1_R & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1_R & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

پس

$$I_n - U = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & -1_R \\ 1_R & 1_R & & & & & \\ & -1_R & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1_R & & & \\ & & & -1_R & 1_R & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1_R & 1_R \end{pmatrix} \in GL_n(R).$$

از طرفی

$$I_n + U = \begin{pmatrix} ۲\times ۱_R & & & & & ۱_R \\ -۱_R & ۱_R & & & & \\ & ۱_R & ۱_R & & & \\ & & ۱_R & \ddots & & \\ & & & ۱_R & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & ۱_R \quad ۱_R \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

چون n یک عدد فرد است، پس $I_n + U \in GL_n(R)$. بنابراین $U \in GL_n(R)$ وجود دارد که $I_n \pm U \in GL_n(R)$. پس طبق قضیه ی ۲.۲.۴، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. □

نتیجه ۴.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی تبادلی با فاکتور های اولیه آرتینی باشد. در این صورت برای هر $n \geq ۲$، $M_n(R)$ در شرط $G-M$ صدق می کند.*

برهان. چون R یک حلقه ی تبادلی با فاکتور های اولیه ی آرتینی است، پس $M_n(R)$ نیز چنین است. از طرفی طبق نتیجه ی ۳.۲.۴، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. پس طبق قضیه ی ۲.۲.۴، $M_n(R)$ در شرط $G-M$ صدق می کند. □

مثال ۵.۲.۴. فرض کنیم D یک حلقه ی تقسیم باشد. تعریف می کنیم

$$R = \{(x_۱, x_۲, \cdots, x_n, y, y, \cdots) | x_i \in M_i(D), n \in \mathbb{N}, y \in D\}$$

که y وقتی در x_i ضرب می شود یک ماتریس اسکالر از اندازه ی مناسب، در نظر گرفته می شود. در این صورت R، یک حلقه ی تبادلی با فاکتورهای اولیه آرتینی است. بعلاوه $M_n(R)$ برای هر $n \geq ۲$، یک حلقه ی SB است.

حل. هر ایده آل سره از R با مجموع مستقیم نسخه هایی از $M_i(D)$ ها یکریخت است. نشان می دهیم $I = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i(D)$ اول است. واضح است که $I \neq R$. فرض کنیم A و B دو ایده آل از حلقه ی R باشند که $AB \subseteq I$ اما $A \nsubseteq I$. عنصر $a \in A - I$ را انتخاب می کنیم. قرار می دهیم

$a = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n, y, y, \cdots)$ که $y \neq ۰$. در نتیجه برای هر $b \in B$، $ab \in AB \subseteq I$. چون $a \notin I$،

پس $b = (z_1, z_2, \cdots, z_n, z_{n+1}, \cdots, z_m, 0, 0, 0, \cdots) \in I$. در نتیجه $B \subseteq I$. از طرفی

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, y, y, \cdots) + I = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) + (0, 0, \cdots, 0, y, y, y, \cdots) + I$$
$$= (0, 0, \cdots, 0, y, y, y, \cdots) + I.$$

لذا نگاشت $D \longrightarrow \frac{R}{I}$ با ضابطه ی $y \longmapsto (0, 0, \cdots, 0, y, y, y, \cdots) + I$ خوشتعریف است. به راحتی می توان بررسی کرد که $D \cong \frac{R}{I}$. پس فاکتورهای اول R، آرتینی هستند. چون طبق نتیجه ی ۱۶.۲.۱، D و $M_i(D)$ منظم هستند، پس R منظم است. لذا طبق ۹.۱.۴، R یک حلقه ی تبادلی است. پس بنا به نتیجه ی ۳.۲.۴، برای هر $n \geq 2$، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است.

تعریف ۶.۲.۴. یک حلقه را **شبه دئو** راست (چپ) می نامیم، هرگاه هر ایده آل راست (چپ) ماکزیمال، دوطرفه باشد.

مثال ۷.۲.۴. فرض کنیم D یک حلقه ی تقسیم باشد و $R = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$. در این صورت R یک حلقه ی تبادلی شبه دئو با فاکتور های اولیه ی آرتینی است.

حل. چون به ازای هر $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

پس Rمنظم است. لذا طبق ۱۶.۲.۱، R تبادلی است. چون $I_1 = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ تنها ایده آل های ماکزیمال R هستند، پس R تبادلی شبه دئو است. چون $D \cong \frac{R}{I_i}$، برای $i = 1, 2$، پس فاکتور های اول R آرتینی هستند.

مثال ۸.۲.۴. فرض کنیم $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. در این صورت R یک حلقه ی SB است.

حل. طبق مثال قبل، R یک حلقه ی تبادلی شبه دئو با فاکتورهای اولیه ی آرتینی است. واضح است که

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \in U(R),$$
$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \in U(R).$$

پس طبق قضیه ی ۲.۲.۴، R یک حلقه ی SB است.

قضیه ۹.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی تبادلی با فاکتور های اولیه ی آرتینی باشد. اگر $2,3 \in U(R)$ آنگاه برای هر $A \in M_n(R)$، $U, V \in GL_n(R)$ وجود دارند که $A = U + V$ و $U - V \in GL_n(R)$.*

برهان. چون R تبادلی با فاکتور های اولیه آرتینی است، پس $S = M_n(R)$ نیز چنین است. $a \in R$ را با $\begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in S$ یکسان در نظر می گیریم. واضح است که $1_S + 2^{-1} = 3 \times 2^{-1} \in U(S)$ و $1_S - 2^{-1} = 2^{-1} \in U(S)$. لذا طبق قضیه ۲.۲.۴، برای هر $n \geq 1$، $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است. از طرفی برای هر $A \in M_n(R)$، داریم $AM_n(R) + I_n M_n(R) = M_n(R)$. بنابراین چون $M_n(R)$ یک حلقه ی SB است، پس $W' \in GL_n(R)$ وجود دارد که $A \pm W' \in GL_n(R)$. قرار می دهیم $A + W' = U'$ و $A - W' = V'$. با جمع و تفریق این دو رابطه داریم:

$$A = \tfrac{1}{2}U' + \tfrac{1}{2}V' \quad \text{و} \quad W' = \tfrac{1}{2}U' - \tfrac{1}{2}V'$$

با در نظر گرفتن $U = \frac{1}{2}U'$ و $V = \frac{1}{2}V'$ ، داریم $A = U + V$ و $W' = U - V \in GL_n(R)$. □

۳.۴ حلقه های تبادلی با خودتوان های مرکزی

تعریف ۱.۳.۴. حلقه ی R را **موضعی** می نامیم، هرگاه $R/J(R)$ یک حلقه ی تقسیم باشد.

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنیم M یک مدول باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *M یک مدول تبادلی تجزیه ناپذیر است.*

(۲) *M یک مدول تبادلی متناهی تجزیه ناپذیر است.*

(۳) *$End(M)$ یک حلقه ی موضعی است.*

برهان. به مرجع [۱۱] قضیه ی ۵.۲۹ رجوع کنید. □

چون برای هر حلقه ی R داریم $End_R(R) \cong R$، پس از قضیه ی ۲.۳.۴، نتیجه می گیریم:

نتیجه ۳.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی تبادلی تجزیه ناپذیر است.*

(۲) *R یک حلقه ی موضعی است.*

قضیه ۴.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی تبادلی با خودتوان های مرکزی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند :*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر ایده آل ماکزیمال M از R، $|R/M| \geq ۴$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): داریم $۱ = ۱ + ۰ \times ۱$. چون R یک حلقه ی SB است، پس $u \in U(R)$ وجود دارد که $۱ \pm u \in U(R)$. فرض کنیم M یک ایده آل ماکزیمال R باشد. لذا $\overline{۱} \pm \overline{u} \in U(R/M)$. پس $\left\{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{u}, \overline{۱} + \overline{u}\right\} \subseteq R/M$. بنابراین $|R/M| \geq ۴$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): (فرض خلف) فرض کنیم $ax + b = ۱$ و برای هر $u \in U(R)$، $a + bu \notin U(R)$ یا $a - bu \notin U(R)$. قرار می دهیم:

$$\Omega = \left\{P \mid \overline{a + bu} \notin U(R/P) \text{ یا } \overline{a - bu} \notin U(R/P), \overline{u} \in U(R/P) \text{برای هر}, \text{یک ایده آل از } R\right\}.$$

مشابه برهان قضیه ی ۲.۲.۴، ایده آل $Q \in \Omega$ وجود دارد که در Ω ماکزیمال است، و $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی تجزیه ناپذیر است. پس طبق نتیجه ی ۳.۳.۴، $A = R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی موضعی است. لذا $A/J(A)$ یک حلقه ی تقسیم است، و چون

$$J(A) = J(R/Q/J(R/Q)) = J(R/Q)/J(R/Q) = ۰,$$

پس $A = A/J(A)$. بنابراین A یک حلقه ی تقسیم است. حال فرض کنیم $J(R/Q) = M/Q$ که M یک ایده آل R است. چون

$$R/M \cong R/Q/M/Q = R/Q/J(R/Q),$$

پس M یک ایده آل ماکزیمال R است. لذا بنا به بند (۲)، ۴ $\geq |R/M|$، یعنی ۴ $\geq |R/Q/J(R/Q)|$. بنابراین بنا به لم ۲.۲.۳، $R/Q/J(R/Q)$ یک حلقه ی SB است، و لذا بنا به لم ۳.۲.۳، R/Q یک حلقه ی SB است. چون ۱ $= ax + b$ که $a, x, b \in R$، پس $\overline{ax} + \overline{b} = \overline{1}$ که $\overline{a}, \overline{x}, \overline{b} \in R/Q$. در نتیجه $\overline{w} \in U(R/Q)$ وجود دارد که $\overline{a} \pm \overline{bw} \in U(R/Q)$، که با $Q \in \Omega$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل است. در نتیجه R یک حلقه ی SB است. □

تعریف ۵.۳.۴. حلقه ی R را **منظم آبلی** می نامیم، هرگاه R یک حلقه ی منظم با خودتوان های مرکزی باشد.

تعریف ۶.۳.۴. حلقه ی R را **منظم قوی** می نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، $x \in R$ وجود داشته باشد که $a = a^{2}x$.

گزاره ۷.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی منظم قوی است.*

(۲) *هر فاکتور تجزیه ناپذیر R، یک حلقه ی تقسیم است.*

برهان. به مرجع [۱۳] گزاره ی ۴.۷ رجوع کنید. □

نتیجه ۸.۳.۴. *اگر R یک حلقه ی منظم آبلی باشد. آنگاه گزاره های زیر معادلند:*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر ایده آل ماکزیمال M از R، $R/M \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم M یک ایده آل ماکزیمال R باشد. بنا به گزاره ی ۷.۳.۴، R/M یک حلقه ی تقسیم است. از طرفی اگر ۲ $= |R/M|$، آنگاه $R/M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، و اگر ۳ $= |R/M|$، آنگاه

$R/M \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. در نتیجه بنا به بند(۲)، $|R/M| \geq 4$. در نتیجه بنا به قضیه ی ۴.۳.۴، R یک حلقه ی SB است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲): طبق گزاره ی ۹.۱.۴، R یک حلقه ی تبادلی با خودتوان های مرکزی است. اگر M یک ایده آل ماکزیمال R باشد، آنگاه بنا به قضیه ی ۴.۳.۴، $|R/M| \geq 4$. در نتیجه $R/M \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. □

حال قضیه ی ۴.۳.۴، را برای حلقه ی نیم موضعی، نیز ثابت می کنیم:

قضیه ۹.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم موضعی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند :*

(۱) *R یک حلقه ی SB است.*

(۲) *برای هر ایده آل ماکزیمال M از R، $|R/M| \geq 4$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): مشابه برهان (۱) $\Leftarrow$ (۲) قضیه ی ۴.۳.۴.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): چون R یک حلقه ی نیم موضعی است. پس $R/J(R)$ نیم ساده است. لذا طبق قضیه ی آرتین-ودربرن، حلقه های تقسیم D_1، ... و D_s وجود دارند که

$$R/J(R) \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

اگر $n_i \geq 2$، آنگاه بنا به لم ۲.۲.۳، $M_{n_i}(D_i)$ یک حلقه ی SB است.

اگر $n_i = 1$، آنگاه D_i با تصویر همریختی از R یکریخت است. پس برای هر D_i، ایده آل ماکزیمال M_i از R وجود دارد که $D_i \cong R/M_i$. با استفاده از بند (۲)، $|D_i| \geq 4$. پس بنا به لم ۲.۲.۳، D_i یک حلقه ی SB است.

بنابراین بنا به نتیجه ی ۶.۱.۳، $R/J(R)$ یک حلقه ی SB است، و لذا بنا به لم ۳.۲.۳، R یک حلقه ی SB است. □

مثال ۱۰.۳.۴. فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ باشد. اگر $m \nmid ۲,۳$، آنگاه $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ یک حلقه ی SB است.

حل. چون $m \in \mathbb{N}$، پس اعداد اول $p_۱, \dots, p_s$ وجود دارند که $m = p_۱^{r_۱} \cdots p_s^{r_s}$. لذا نگاشت

$$\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(p_۱^{r_۱}) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_s^{r_s})$$

با ضابطه ی $a + m\mathbb{Z} \longmapsto (a + (p_۱^{r_۱}), \cdots, a + (p_s^{r_s}))$ یک یکریختی است. بنابراین

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p_۱^{r_۱}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(p_s^{r_s}).$$

واضح است که برای $i = ۱, \dots, s$ ، $\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})$ یک حلقه ی موضعی با ایده آل ماکزیمال $(p_i)/(p_i^{r_i})$ است. پس $J(\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})) = (p_i)/(p_i^{r_i})$. لذا داریم:

$$\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})/J(\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})) = \mathbb{Z}/(p_i^{r_i})/(p_i)/(p_i^{r_i}) \cong \mathbb{Z}/(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i}.$$

در نتیجه چون $\mathbb{Z}_{p_i}$ نیم ساده آرتینی است، پس $\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})$ نیم موضعی است. از طرفی چون $m \nmid ۲,۳$، پس $p_i \neq ۲,۳$، و در نتیجه $|\mathbb{Z}/(p_i)| \neq ۲,۳$. بنابراین $|\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})/(p_i)/(p_i^{r_i})| = |\mathbb{Z}/(p_i)| \geq ۴$. پس از قضیه ی قبل نتیجه می گیریم $\mathbb{Z}/(p_i^{r_i})$ یک حلقه ی SB است. لذا بنا به نتیجه ی ۶.۱.۳، $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ یک حلقه ی SB است.

مراجع

[1] H. Chen, *Elements in one-sided unit-regular rings*, Comm. Algebra 25 (1997), 3531–3544.

[2] H. Chen, *Exchange rings satisfying unit 1-stable range*, Kyushu. J. Math. 54 (2000), 1–6.

[3] H. Chen, *Rings Related to Stable Range Conditions*, Series in Algebra Vol. 11, 2011.

[4] H. Chen, *Rings with stable range conditions*, Comm. Algebra 26, (1998) 3653 – 3668.

[5] H. Chen, *Units, idempotents, and stable range conditions*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 2, 703-717.

[6] H. Chen, *On SB-rings*, J. Korean Math. Soc. 45 (2008), no. 3, 741-756.

[7] H. Chen and F. Li, *Rings with many unit-regular elements*, Chinese J. Contemp. Math. 21 (2000), no. 1, 33-38.

[8] A. Facchini, *Module Theory. Endomorphism rings and direct sum decompositionsin some classes of modules*, Birkhauser Verlag, Basel, 1998.

[9] K. R. Goodearl and P. Menal, *Stable range one for rings with many units*, J. Pure Apple. Algebra 54 (1998), no. 2-3, 261-287.

[10] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Amer. Math. soc. Colloquium Vol. 37, Providence, R. I. 1964.

[11] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, 1991.

[12] W. K. Nicholson, *Lifting idempotentes and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1997), 269-278.

[13] A. Tuganbaev, *Rings Close to Regular*, Mathematics and its Applications, 545. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[14] H. P. Yu, *On the structure of exchange rings*, Comm. Algebra 25 (1997), no. 2, 661-670.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ایده آل اولیه .... Primitive ideal

پوچساز .... Annihilator

جمعوند مستقیم .... Direct summand

حلقه ی اولیه .... Primitive ring

حلقه ی تبادلی .... Exchange ring

حلقه ی تجزیه ناپذیر .... Decomposition ring

حلقه ی شبه دئو .... Quasi-duo ring

حلقه ی قوی .... Potent ring

حلقه ی متقابل .... Opposite ring

حلقه ی مناسب .... Suitable ring

حلقه ی منظم .... Regular ring

حلقه ی منظم آبلی .... Abelian regular ring

حلقه ی منظم قوی .... Strongly regular ring

حلقه ی موضعی .... Local ring

حلقه ی نیم ساده آرتینی .... Semisimple artinian ring

حلقه ی نیم موضعی .... Semilocal ring

خودتوان های متعامد .... Orthogonal idempotents

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian regular ring .... حلقه ی منظم آبلی

Annihilator .... پوچساز

Decomposition module .... مدول تجزیه ناپذیر

Decomposition ring .... حلقه ی تجزیه ناپذیر

Direct summand .... جمعوند مستقیم

Exchange module .... مدول تبادلی

Exchange ring .... حلقه ی تبادلی

Faithful module .... مدول وفادار

Jacobson radical .... رادیکال جیکبسون

Local ring .... حلقه ی موضعی

Opposite ring .... حلقه ی متقابل

Orthogonal idempotents .... خودتوان های متعامد

Potent ring .... حلقه ی قوی

Primitive factors artinian .... فاکتورهای اولیه ی آرتینی

Primitive ideal .... ایده آل اولیه

Primitive ring .... حلقه ی اولیه

Quasi-duo ring .... حلقه ی شبه دئو

حلقه ی منظم .... Regular ring

حلقه ی نیم موضعی .... Semilocal ring

حلقه ی نیم ساده آرتینی .... Semisimple artinian ring

مدول نیم ساده .... Semisimple module

حلقه ی منظم قوی .... Strongly regular ring

حلقه ی مناسب .... Suitable ring

عنصر منظم یکه .... Unit-regular element

Surname: Vaziri | Name: Zahra

Title: On SB-rings

Supervisor: Dr. Ebrahim Hashemi

Advisor: Dr. Ahmad Zireh

Degree: Master of Science | Subject: Pure Mathematics

Field: Algebra

Shahrood University of Technologi | Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 | Number of pages: 86

Keywords: SB-ring, Semilocal ring, Exchange ring, Matrix ring.

Abstract

In this thesis, we show that if a ring R satisfies unit 1-stable range, then so does $M_n(R)$ for any $n \geq 1$. If R has many unit-regular elements, then so does $M_n(R)$ for any $n \geq 1$. Also we prove if R satisfies $G - M$ condition, then so does $M_n(R)$ for any $n \geq 1$.

Then we study SB-rings. We will give necessary and sufficient conditions under which a semilocal ring is a SB-ring. Furthermore, we extend these results to exchange rings with all primitive factors artinian. For such rings, we observe that the concept of SB-ring coincides with G-M condition.

Shahrood University of Technologi
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

On SB-rings

Supervisor

Dr. Ebrahim Hashemi

Advisor

Dr. Ahmad Zireh

by

Zahra Vaziri

2013