دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

عنوان

بازتابی بودن C^*-مدول‌های هیلبرت بر C^*-جبرهای جابجایی

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر مهدی ایرانمنش

پژوهشگر

فاطمه حلاج فدردی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: حلاج فدردی نام: فاطمه

عنوان: بازتابی بودن C^*–مدول‌های هیلبرت بر C^*–جبرهای جابجایی

استاد راهنما: دکتر کامران شریفی

استاد مشاور: دکتر مهدی ایرانمنش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز تابعی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۴۵

واژگان کلیدی: C^*- جبر جابه‌جایی، C^*–مدول هیلبرت، C^*–بازتابی

چکیده

C^*–جبر A ، C^*–بازتابی است هرگاه هر A–مدول هیلبرت شمارا تولید شده مانند M ، C^*–بازتابی باشد، یعنی $M \cong M''$. در این پایان نامه نشان می‌دهیم که C^*–جبر جابه‌جایی A ، C^*–بازتابی است اگر و تنها اگر برای هر دنباله مانند $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ از C^*–زیرجبرهای غیر صفر و مجزای A ، شمول کانونی $\oplus_k I_k \subset A$ به‌روی $\prod_k I_k$ گسترش نیابد، یعنی $\prod_k I_k \nsubseteq A$.

خدای متعال را سپاس که نعماتش بی شمار، قدرتش بی انتها، رحمتش فراگیر و الطافش لایتناهی است؛ او که در لحظه لحظه ی زندگی یاور و پشتیبانم بوده و در سختی ها و ناملایمات تکیه گاهم . . .

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که آموختن، بی وجودشان میسر نبود.

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار این دوره از تحصیلات خود را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی پدر و مادر فداکار، برادر عزیز و خواهرهای مهربانم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند و صبورانه ادامه‌ی این راه را برایم هموار نمودند، تشکر کنم.

از زحمات فراوان استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر شریفی که راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله‌ی فراوان ایشان نقش مهمی در به ثمر رساندن این پروژه داشت، سپاسگزارم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر ایرانمنش که به‌عنوان مشاور در این پروژه نقش داشتند و جناب آقای دکتر عباسپور و جناب آقای دکتر زیره که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده داشتند، نهایت سپاس و تشکر را دارم و سلامتی و موفقیت این بزرگواران را از درگاه یزدان پاک خواستارم.

فاطمه حلاج قدردی

۱۳۹۱

پیش‌گفتار

در نظریه‌ی C^*−جبرها، C^*−مدول‌های هیلبرت نقش مهمی را ایفا می‌کنند که برای اولین بار در سال ۱۹۳۵ میلادی توسط کاپلانسکی[۱] معرفی شدند. C^*−مدول‌های هیلبرت، مدول‌هایی روی یک C^*−جبر دلخواه با ساختاری شبیه یک ضرب داخلی می‌باشند، با این تفاوت که این ضرب داخلی مقادیر خود را به‌جای میدان اعداد مختلط، در C^*−جبر ضرایب اختیار می‌کند. C^*−مدولهای هیلبرت نقشی حیاتی در نظریه‌ی جدید C^*−جبرها، هندسه‌ی ناجابه‌جایی و مطالعه‌ی گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی دارند. درواقع C^*−مدول‌های هیلبرت دارای حوزه‌های کاربردی اصلی زیر بوده‌اند:

- کار رایفل[۲] و دیگران بر نمایش‌های القاشده و هم‌ارزی موریتا [۳] [۳] [۱۵] [۱۶]
- کار کاسپارف[۴] و دیگران در KK−نظریه [۵] [۱] [۷] [۸]
- کار ورونوویچ[۶] و دیگران بر نظریه‌ی گروه‌های کوانتومی [۷] C^*−جبری [۲] [۱۸]

فرض کنید M یک C^*−مدول هیلبرت باشد، در این‌صورت دوگان M که با M' نمایش داده می‌شود، عبارتست از مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی و کران‌دار از M به‌توی C^*−جبر A . دوگان دوم M ، یعنی M'' ، نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. نگاشت‌های طولپای $\hat{x} \longmapsto x$ از M به‌توی M' ، $\dot{x} \longmapsto x$ از M به‌توی M'' و $\tilde{F} \longmapsto F$ از M'' به‌توی M' ، که در آن $\hat{x}(y) = \langle x, y\rangle$ ، $\dot{x}(f) = f(x)^*$ و $\tilde{F}(x) = F(x)$ ، منجر به شمول طولپای $M \subseteq M'' \subseteq M'$ می‌شوند. C^*−مدول هیلبرت M را خوددوگان گوییم هرگاه $M \cong M'$ و C^*−بازتابی

[۱] Kaplansky
[۲] Riefel
[۳] Morita equivalence
[۴] Kasparov
[۵] KK-theory
[۶] Woronowicz
[۷] Quantom groups theory

گوییم هرگاه $M \cong M''$. هدف از این پایان‌نامه، ارائه‌ی محکی برای C^*-بازتابی بودن C^*-مدول‌های هیلبرت روی C^*-جبرهای جابه‌جایی است.

در فصل اول این پایان‌نامه مقدمات توپولوژیکی مورد نیاز و هم‌چنین مفاهیمی از C^*-جبرها بیان شده است. در فصل دوم به معرفی C^*-مدول‌های هیلبرت و خواص خوددوگان و C^*-بازتابی بودن آنها می‌پردازیم و در فصل سوم نشان می‌دهیم که C^*-جبر جابه‌جایی A ، C^*-بازتابی است اگر و تنها اگر برای هر دنباله مانند $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ از C^*-زیرجبرهای غیر صفر و مجزای A ، شمول کانونی $\oplus_k I_k \subset A$ به‌روی $\prod_k I_k$ گسترش نیابد.

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای توپولوژیکی مورد نیاز می‌پردازیم. هم‌چنین به مفهوم C^*-جبر و برخی ویژگی‌های آن اشاره می‌کنیم. مهمترین مطلب در این فصل قضیه‌ی گلفند می‌باشد که یکریخت بودن C^*-جبرهای جابه‌جایی با فضای $C_\circ(X)$ ، (که X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف است) را نشان می‌دهد. هم‌چنین نشان می‌دهیم که اگر C^*-جبر A یکدار نباشد آنگاه C^*-جبر یکدار $\tilde{A}$ موجود است به‌طوری‌که A ایده‌آلی بسته از $\tilde{A}$ می‌باشد. مطالب این فصل از مراجع [۱۲] و [۱۳] استخراج شده‌اند.

۱.۱ مقدمات توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. خانواده‌ی τ از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی روی X است هرگاه:

(۱) $X, \emptyset \in \tau$ ؛

(۲) اجتماع دلخواه از اعضای τ در τ قرار گیرد؛

(۳) اشتراک متناهی از اعضای τ در τ قرار گیرد.

دراین‌صورت (X,τ) را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز فضا گوییم. هم‌چنین $Y \subset X$ را بسته گوییم هرگاه متمم آن باز باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و Y زیرمجموعه‌ای از X باشد، دراین‌صورت:

۱) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی چسبیدگی Y گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی باز شامل x ، Y را قطع کند. مجموعه‌ی تمام نقاط چسبیدگی Y را بستار Y گوییم و با $\overline{Y}$ نمایش می‌دهیم.

۲) عنصر $x \in Y$ را نقطه‌ی درونی Y گوییم هرگاه Y شامل یک همسایگی از x (مجموعه‌ی باز شامل x) باشد. مجموعه‌ی تمام نقاط درونی Y را درون Y گوییم و با Y° نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، دراین‌صورت $Y \subset X$ را چگال گوییم هرگاه $\overline{Y} = X$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید (X,τ_1) و (Y,τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند، دراین‌صورت تابع $f : X \longrightarrow Y$ در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته است هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز G_2 شامل $f(x)$ ، مجموعه‌ی باز G_1 شامل x موجود باشد به‌طوری‌که $f(G_1) \subseteq G_2$. تابع f را پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه از X پیوسته باشد. هم‌چنین f را یک همسانریختی گوییم هرگاه دوسویی، پیوسته و f^{-1} نیز پیوسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته از X به‌توی $\mathbb{C}$ را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، دراین‌صورت تابع $f : X \longrightarrow Y$ را یک نشاننده‌ی توپولوژیک از X به Y گوییم هرگاه تابع $f' : X \longrightarrow f(X)$ با ضابطه‌ی $f'(x) = f(x)$ یک همسانریختی باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فضای توپولوژیک (X,τ) را یک فضای هاسدورف گوییم هرگاه برای هر $x,y \in X$ که $x \neq y$ ، مجموعه‌های باز ومجزای G_1 و G_2 موجود باشند به‌طوری‌که $x \in G_1$ و $y \in G_2$.

قضیه ۸.۱.۱. هر زیرمجموعه‌ی متناهی از یک فضای هاسدورف بسته است.

قضیه ۹.۱.۱. هر زیرفضا از فضایی هاسدورف، هاسدورف است.

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را به‌طورکامل منظم گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از X و هر $x \in X \setminus F$ تابع پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow [۰,۱]$ موجود باشد که $f(F) = \{۱\}$ و $f(x) = ۰$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را یک فضای بئرگوییم هرگاه برای هر خانواده‌ی شمارا از زیرمجموعه‌های بسته و درون تهی از X ، $\cup_n A_n$ درون تهی باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای بئر، Y یک فضای متریک و $f_n : X \longrightarrow Y$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشند. دراین‌صورت اگر برای هر $x \in X$ ، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ آنگاه مجموعه‌ی تمام نقاط پیوستگی f ، در X چگال است.

تعریف ۱۳.۱.۱. زیرمجموعه‌ی Y از فضای توپولوژیک (X, τ) را درنظر بگیرید. خانواده‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پوشش باز برای Y گوییم هرگاه $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. هم‌چنین گوییم این پوشش دارای یک زیرپوشش متناهی است هرگاه برای تعداد متناهی از عناصر I مانند $\{\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n\}$، $Y \subseteq \bigcup_{\alpha=۱}^{n} G_{\alpha_n}$.

تعریف ۱۴.۱.۱. زیرمجموعه‌ی Y از فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است هرگاه هر پوشش باز برای Y دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

قضیه ۱۵.۱.۱. هر زیرمجموعه‌ی بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

قضیه ۱۶.۱.۱. (**تیخونوف**). هر حاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است.

تعریف ۱۷.۱.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را فشرده‌ی موضعی گوییم هرگاه هر عنصر از X در یک مجموعه‌ی باز مانند G قرار گیرد به‌طوری‌که $\overline{G}$ فشرده باشد.

لم ۱۸.۱.۱. **(لم اوریسون).** فرض کنید X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف و $K \subseteq U \subseteq X$ به‌طوری‌که K فشرده و U باز باشد. دراین‌صورت $f \in C(X)$ موجود است که $۰ \leq f \leq ۱$ ، $f|_K = ۱$ و

$$supp(f) = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq ۰\}} \subseteq U.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. یک فشرده‌سازی از فضای X عبارتست از یک فضای فشرده و هاسدورف مانند Y به‌طوری‌که $\overline{X} = Y$.

قضیه ۱.۱.۲۰. فضای توپولوژیک (X, τ) دارای فشرده‌سازی است اگر و تنها اگر به‌طور کامل منظم باشد .

قضیه ۱.۱.۲۱. اگر $f : X \longrightarrow Z$ یک نشاننده‌ی توپولوژیک از X به توی فضای فشرده و هاسدورف Z باشد، آنگاه f یک فشرده‌سازی Y روی X القا می‌کند به‌طوری‌که f به نشاننده‌ی $F : Y \longrightarrow Z$ قابل گسترش خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنید X به‌طور کامل منظم و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ی همه‌ی توابع حقیقی، پیوسته و کران‌دار روی X باشد. برای هر $\alpha \in I$ قرار دهید

$$I_\alpha = [inf_{x\in X} f_\alpha(x), sup_{x\in X} f_\alpha(x)]$$

دراین‌صورت I_αها فشرده‌اند و طبق قضیه‌ی تیخونوف $\prod_{\alpha\in I} I_\alpha$ نیز فشرده خواهد بود. چون X به‌طور کامل منظم است پس $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در شرایط قضیه‌ی نشاندن صدق می‌کند. بنابراین

$$f : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} I_\alpha$$

$$f \longmapsto (f_\alpha(x))$$

یک نشاننده‌ی توپولوژیک از X به‌توی یک فضای فشرده و هاسدورف می‌باشد. طبق قضیه‌ی قبل، یک فشرده‌سازی توسط f روی X القا می‌شود که به آن فشرده‌سازی استون–چک می‌گوییم و با $\beta(X)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۲۳. فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف و Y زیرمجموعه‌ی چگال از X باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) $X = \beta(Y)$

(۲) هر تابع کران‌دار و پیوسته روی Y قابل گسترش به یک تابع پیوسته روی X است.

۲.۱ C^*–جبرها

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری A روی میدان برداری $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ به‌همراه ضرب

$$A \times A \longrightarrow A,$$

$$(a, b) \longmapsto ab,$$

یک جبر است هرگاه:

(۱) $a(bc) = (ab)c$ ؛

(۲) $a(b + c) = ab + ac$ ؛

(۳) $(a + b)c = ac + bc$ ؛

(۴) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ ؛

که در آن $a, b, c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$.

تعریف ۲.۲.۱. جبر A را یکدار گوییم هرگاه عنصر $1 \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ ، $a1 = 1a = a$.

تعریف ۳.۲.۱. جبر A جابه‌جایی است هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$.

تعریف ۴.۲.۱. یک زیرجبر از جبر A عبارتست از یک زیرفضای برداری از A مانند B بطوریکه

$$b, b' \in B \Longrightarrow bb' \in B.$$

تعریف ۵.۲.۱. زیرفضای برداری I از جبر A را یک ایده‌ال چپ (راست) گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $b \in I$ ، $ab \in I$ ($ba \in I$) . I را یک ایده‌ال در A گوییم هرگاه ایده‌ال چپ و راست باشد.

تعریف ۶.۲.۱. جبر A به‌همراه یک نرم کامل مانند $\|.\|$ را جبر باناخ گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

علاوه‌براین اگر A یکدار باشد و $\|۱\| = ۱$ آنگاه A را یک جبر باناخ یکدار گوییم.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده موضعی هاسدورف باشد، دراین‌صورت گوییم تابع پیوسته‌ی f از X به‌توی $\mathbb{C}$ در بینهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon \geq ۰$، مجموعه‌ی $\{x\in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد. مجموعه تمام چنین توابعی را با $C_{\circ}(X)$ نمایش می‌دهیم. $C_{\circ}(X)$ زیرفضایی از فضای $C(X)$ است که به‌همراه اعمال و نرم زیر یک جبر باناخ می‌باشد:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x);$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x);$$

$$\|f\| = sup_{x\in X}|f(x)|.$$

نکته ۸.۲.۱. فضای $C_{\circ}(X)$ یکدار است اگر و تنها اگر X فشرده باشد. در این حالت $C_{\circ}(X) = C(X)$.

نکته ۹.۲.۱. اگر جبر باناخ A یکدار نباشد آنگاه قرار می‌دهیم $\tilde{A} = A\bigoplus\mathbb{C}$ ، دراین‌صورت $\tilde{A}$ به‌همراه جمع، ضرب و نرم

$$(a,\lambda) + (b,\mu) = (a+b, \lambda+\mu);$$

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu);$$

$$\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|;$$

یک جبر باناخ یکدار می‌باشد که $۱_{\tilde{A}} = (۰, ۱)$. نگاشت $a \longmapsto (a, ۰)$ از A به $\tilde{A}$ یک نگاشت یک به یک و طولپا است، لذا می‌توان A را زیرجبری از $\tilde{A}$ درنظر گرفت. در واقع A ایده‌الی بسته از $\tilde{A}$ است. $\tilde{A}$ را یکدارشده ی A می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید A یک جبر یکدار باشد. $a \in A$ را معکوس‌پذیر گوییم هرگاه $b \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $ab = ba = 1$. عنصر منحصربه‌فرد b را معکوس a نامیده و با a^{-1} نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تمام عناصر معکوس‌پذیر A را با $Inv(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید A یک جبر یکدار باشد، دراین‌صورت طیف و شعاع طیفی عنصر $a \in A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$sp(a) = sp_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}$$

$$r(a) = sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(a)\}$$

نکته ۱۲.۲.۱. اگر جبر A یکدار نباشد آنگاه برای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم:

$$sp_A(a) = sp_{\tilde{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(\tilde{A})\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید A و B دو جبر باشند. دراین‌صورت نگاشت خطی $\varphi : A \longrightarrow B$ را همریختی گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. هم‌چنین φ را یکریختی گوییم هرگاه دوسویی و همریختی باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید A یک جبر جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت یک همریختی غیر صفر مانند $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک مشخصه روی A گوییم. مجموعه تمام مشخصه‌های A را با $\Omega(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱۵.۲.۱. توجه کنید که ممکن است $\Omega(A)$ تهی باشد برای مثال اگر $A = 0$ آنگاه $\Omega(A) = \emptyset$.

قضیه ۱۶.۲.۱. اگر A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار باشد آنگاه $\Omega(A)$ غیرتهی است.

قضیه ۱۷.۲.۱. اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد آنگاه $\Omega(A)$ (در صورت وجود) یک فضای فشرده‌ی موضعی و هاسدورف است. همچنین اگر A یکدار باشد $\Omega(A)$ فشرده می‌شود.

نکته ۱.۲.۱۸. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و $\Omega(A)$ غیرتهی باشد. برای هر $a \in A$ تعریف می‌کنیم:

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\tau \longmapsto \tau(a)$$

دراین‌صورت $\hat{a} \in C_\circ(\Omega(A))$.

قضیه ۱.۲.۱۹. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی باشد، دراین‌صورت

۱) اگر A یکدار باشد آنگاه

$$sp(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}$$

۲) اگر A یکدار نباشد آنگاه

$$sp(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\circ\}$$

تعریف ۱.۲.۲۰. یک پیچش روی جبر A عبارتست از یک نگاشت مزدوج خطی مانند

$$* : A \longrightarrow A,$$

$$a \longmapsto a^*,$$

بطوریکه برای هر $a \in A$ ، $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. دراین‌صورت $(A, *)$ را یک جبر پیچشی یا یک $*-$جبر گوییم.

تعریف ۱.۲.۲۱. عنصر $a \in A$ را خودالحاق گوییم هرگاه $a = a^*$

قضیه ۱.۲.۲۲. برای هر $a \in A$ عناصر خودالحاق و منحصربفرد $b, c \in A$ موجودند بطوریکه $a = b + ic$.

برهان. کافیست قرار دهیم $b = \frac{۱}{۲}(a + a^*)$ و $c = \frac{۱}{۲i}(a - a^*)$. □

نتیجه ۱.۲.۲۳. هر جبر غیرصفر، شامل یک عنصر غیرصفر و خودالحاق می‌باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. $*$−جبر A به‌همراه نرم کامل $\|.\|$ را یک $*$−جبر باناخ گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$

$$\|ab\|\leq\|a\|\|b\|;$$

$$\|a^*\|=\|a\|.$$

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید A و B دو $*$−جبر و $\varphi:A\longrightarrow B$ همریختی باشد، دراین‌صورت φ را $*$−همریختی گوییم هرگاه برای هر $a\in A$، $\varphi(a^*)=\varphi(a)^*$.

نکته ۲۶.۲.۱. اگر $*$−جبر باناخ A یکدار نباشد آنگاه $\tilde{A}$ به‌همراه پیچش $(a,\lambda)^*=(a^*,\overline{\lambda})$، یک $*$−جبر باناخ یکدار می‌باشد.

تعریف ۲۷.۲.۱. $*$−جبر باناخ A را یک C^*−جبر گوییم هرگاه برای هر $a\in A$،

$$\|a^*a\|=\|a\|^۲.$$

مثال ۲۸.۲.۱.

۱) میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به‌همراه پیچش $\bar{\lambda}\longmapsto\lambda$ یک C^*−جبر یکدار می‌باشد.

۲) اگر X یک فضای فشرده‌ی هاسدورف باشد، آنگاه $C(X)$ به‌همراه پیچش $\bar{f}\longmapsto f$ یک C^*−جبر است.

۳) اگر X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف باشد، آنگاه $C_\circ(X)$ به‌همراه پیچش $\bar{f}\longmapsto f$ یک C^*−جبر است.

۴) فرض کنید $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از C^*−جبرها باشد. قرار می‌دهیم:

$$\prod_k A_k=\{(a_۱,a_۲,\dots)\ :\ a_k\in A_k,\|(a_۱,a_۲,\dots)\|=\sup_k\|a_k\|<\infty\},$$

$$\bigoplus_k A_k=\{(a_۱,a_۲,\dots)\in\prod_k A_k:\lim_{k\to\infty}\|a_k\|=\circ\}.$$

دراین‌صورت $\prod_k A_k$ و $\bigoplus_k A_k$، به‌همراه پیچش $(a_۱^*,a_۲^*,\dots)\longmapsto(a_۱,a_۲,\dots)$، C^*−جبر می‌باشند.

نکته ۲۹.۲.۱. اگر $C*$−جبر A یکدار نباشد آنگاه $\tilde{A}$ با نرم ذکر شده در (۹.۲.۱) لزوما یک $C*$−جبر نیست.

قضیه ۱.۲.۳۰. اگر A یک $C*$−جبر باشد آنگاه یک نرم منحصربفرد بر $\tilde{A}$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{A}$ را تبدیل به یک $C*$−جبر می‌کند و به‌علاوه گسترش نرم A است.

قضیه ۱.۲.۳۱. اگر a عنصری خودالحاق از C^*−جبر A باشد، آنگاه $r(a) = \|a\|$.

نکته ۱.۲.۳۲. فرض کنید A یک C^*−جبر جابجایی، غیرصفر و غیر یکدار باشد، دراین‌صورت A شامل عنصر غیرصفر و خودالحاقی مانند a است. چون $r(a) = \|a\| \neq ۰$ پس بنا به قضیه‌ی(۱.۲.۱۹) $\tau \in \Omega(A)$ موجود است بطوریکه $\tau(a) \neq ۰$ ، لذا $\Omega(A) \neq \emptyset$.

قضیه ۱.۲.۳۳. (**گلفند**). اگر A یک C^*− جبر جابجایی و غیرصفر باشد آنگاه نمایش گلفند

$$\varphi : A \longrightarrow C_\circ(\Omega(A))$$

$$a \longmapsto \hat{a}$$

∗−یکریختی و طولپاست.

تعریف ۱.۲.۳۴. عنصر $a \in A$ را مثبت گوییم هرگاه خودالحاق باشد و $sp(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. مجموعه تمام عناصر مثبت A را با A^+ نمایش می‌دهیم. همچنین می‌نویسیم $a \leq b$ هرگاه $b - a \in A^+$.

قضیه ۱.۲.۳۵. فرض کنید A یک C^*−جبر و $a \in A$ مثبت باشد، دراین‌صورت برای هر $b \in A$ ، $b^*ab \leq \|a\|b^*b$

.

قضیه ۱.۲.۳۶. فرض کنید A یک C^*−جبر باشد. اگر $c \in A$ و برای هر $a \in A^+$ ، $\|aca\| \in Sp(aca)$ ، آنگاه $c \geq ۰$.

فصل ۲

C^*−مدول‌های هیلبرت

C^*−مدول‌های هیلبرت را می‌توان تعمیمی از فضاهای هیلبرت درنظر گرفت. درواقع یک C^*−مدول هیلبرت یک مدول روی یک C^*−جبر دلخواه و مجهز به یک ضرب داخلی است که مقادیرش، به‌جای میدان اسکالر، در C^*−جبر ضرایب قرار می‌گیرد. این تفاوت منجر به تفاوت‌های دیگر نیز می‌شود که در این فصل به تعدادی از آنها اشاره می‌شود. هم‌چنین به معرفی خواص خوددوگان و C^*−بازتابی بودن C^*−مدول‌های هیلبرت می‌پردازیم.

۱.۲ C^*−مدول هیلبرت

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید A یک C^*−جبر باشد، دراین‌صورت یک C^*−مدول پیش‌هیلبرت(راست) روی A عبارتست از یک A−مدول راست مانند M، مجهز به نگاشت

$$\langle .,. \rangle : M \times M \longrightarrow A,$$

بطوریکه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\langle x,x \rangle \geq 0$ ؛

(۲) $\langle x,x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ؛

(۳) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle^*$ ؛

(۴) $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$ ؛

(۵) $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$ ؛

که در آن $x, y, z \in M, a \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. نگاشت $\langle ., .\rangle$ را ضرب داخلی A–مقداری روی M گوییم. گاهی اوقات برای راحتی C^*–مدول پیش‌هیلبرت روی C^*–جبر A را A–مدول پیش هیلبرت نیز می‌گوییم.

تذکر ۲.۱.۲. A–مدول پیش هیلبرت چپ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. در این پایان‌نامه تمام A–مدول‌ها، A–مدول راست درنظر گرفته شده‌اند.

مثال ۳.۱.۲.

۱) هر فضای ضرب داخلی یک C^*-مدول پیش‌هیلبرت چپ روی C^*-جبر $\mathbb{C}$ است.

۲) فرض کنید I ایده‌آل راست از C^*–جبر A باشد، دراین‌صورت I با ضرب داخلی $\langle a, b\rangle = a^*b$ یک A–مدول پیش‌هیلبرت می‌باشد. در حالت خاص، قرار می‌دهیم $I = A$ ، لذا A نیز یک A–مدول پیش‌هیلبرت است.

۳) اگر $\{M_i\}_{۱\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از A–مدول‌های پیش‌هیلبرت باشد آنگاه $M = \bigoplus_{i=۱}^{n} M_i$ به‌همراه ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n}\langle x_i, y_i\rangle,$$

نیز یک A–مدول پیش‌هیلبرت است.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید M یک A-مدول پیش‌هیلبرت باشد، دراین‌صورت نرم $\|.\|_M$ روی M را بصورت

$$\|x\|_M = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} \qquad x \in M,$$

تعریف می‌کنیم. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که $\|.\|_M$ واقعا یک نرم روی M است.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید M یک A-مدول پیش‌هیلبرت باشد، دراین‌صورت برای هر $x, y \in M$ ، (۱) $\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle$ ؛

(۲) $\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$ (نامساوی کشی-بانیاکوسکی[۱]) ؛

(۳) $\|.\|_M$ یک نرم روی M است.

برهان.

(۱) بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $\|\langle x,x\rangle\| = ۱$. دراین‌صورت بنا به قضیه‌ی (۳۵.۲.۱) برای هر $a \in A$ داریم :

$$\circ \leq \langle xa-y, xa-y\rangle = a^*\langle x,x\rangle a - \langle y,x\rangle a - a^*\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\leq a^*a - \langle y,x\rangle a - a^*\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

حال قرار می‌دهیم $a = \langle x,y\rangle$ ، بنابراین

$$\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leq \langle y,y\rangle$$

(۲)

$$\|\langle x,y\rangle\|^{۲} = \|\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle\| = \|\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle\| \leq \|\langle x,x\rangle\|\|\langle y,y\rangle\| = \|x\|^{۲}\|y\|^{۲}$$

(۳) برای هر $x,y \in M$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم:

$i)\ \|x\|_M = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} \geq \circ;$

$ii)\ \|x\|_M = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} = \circ \Longleftrightarrow \langle x,x\rangle = \circ \Longleftrightarrow x = \circ;$

$iii)\ \|x+y\|^{۲} = \|\langle x+y, x+y\rangle\| = \|\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\|$

$\leq \|\langle x,x\rangle\| + \|\langle x,y\rangle\| + \|\langle y,x\rangle\| + \|\langle y,y\rangle\|$

[۱] Cauchy-Banyakovsky

$$\leq \|x\|_M^{۲} + \|x\|_M\|y\|_M + \|y\|_M\|x\|_M + \|y\|_M^{۲}$$

$$= (\|x\|_M + \|y\|_M)^{۲};$$

$$iv)\ \|\alpha x\|_M = \|\langle \alpha x, \alpha x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} = \||\alpha|^{۲}\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} = |\alpha|\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}} = |\alpha|\|x\|_M.$$

لذا $\|.\|_M$ یک نرم روی M می‌باشد. $\square$

تعریف ۶.۱.۲. A–مدول پیش‌هیلبرت M، هیلبرت است هرگاه نسبت به نرم $\|.\|_M$ کامل باشد.

مثال ۷.۱.۲.

۱) هر فضای هیلبرت یک C^*-مدول هیلبرت روی C^*-جبر $\mathbb{C}$ است.

۲) هر C^*-جبر A به‌همراه ضرب داخلی

$$\langle a, b\rangle = a^*b$$

یک A-مدول هیلبرت است.

۳) اگر $\{M_i\}_{i=۱}^n$ مجموعه‌ی متناهی از A–مدول‌های هیلبرت باشد، آنگاه $\bigoplus_{i=۱}^n M_i$ نیز به‌همراه ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n}\langle x_i, y_i\rangle$$

یک A–مدول هیلبرت است که با $L_n(M)$ نمایش داده می‌شود.

۴) فرض کنید $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ مجموعه‌ی شمارا از A–مدول‌های هیلبرت باشد. M را فضای تمام دنباله‌هایی به‌صورت $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ قرار می‌دهیم، که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $x_i \in M_i$ و $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, x_i\rangle$ همگرا است، دراین‌صورت M به همراه ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, y_i\rangle$$

یک A–مدول هیلبرت می‌باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, y_i\rangle$ همگرا و M هیلبرت است. چون $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, x_i\rangle$ و $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle y_i, y_i\rangle$ همگرا هستند پس برای هر $\varepsilon > ۰$ ، $N \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n > ۰$ ،

$$\| \sum_{i=N}^{N+n} \langle x_i, x_i\rangle \| < \varepsilon \ \ , \ \ \| \sum_{i=N}^{N+n} \langle y_i, y_i\rangle \| < \varepsilon.$$

بنا به نامساوی کشی-بانیاکوسکی داریم:

$$\| \sum_{i=N}^{N+n} \langle x_i, y_i\rangle \| \leq \| \sum_{i=N}^{N+n} \langle x_i, x_i\rangle \| \ \| \sum_{i=N}^{N+n} \langle y_i, y_i\rangle \| < \varepsilon^۲$$

درنتیجه $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, y_i\rangle$ همگرا می‌باشد. حال فرض کنید $x^{(n)} = (x_i^{(n)})$ یک دنباله‌ی کشی در M باشد، دراین‌صورت برای هر $\varepsilon > ۰$ ، $N \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n, m > N$ داریم:

$$\| \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \| = \| \langle x^{(n)} - x^{(m)}, x^{(n)} - x^{(m)} \rangle \| = \| x^{(n)} - x^{(m)} \|^۲ < \varepsilon \qquad (۱.۲)$$

چون تمام جمعوندها در (۱.۲) مثبت هستند پس برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $\| \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \| < \varepsilon$ بنابراین $x_i^{(n)}$ در M_i کشی و در نتیجه همگرا است. فرض کنید $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$ ، نشان می‌دهیم $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i, x_i\rangle$ همگرا است. $\varepsilon > ۰$ و $n > N$ را ثابت درنظر بگیرید، دراین‌صورت $K > ۰$ موجود است به‌طوری‌که

$$\| \sum_{i=K}^{\infty} \langle x_i^n, x_i^n \rangle \| < \varepsilon$$

لذا برای هر $k > ۰$ داریم:

$$\begin{aligned} &\| \sum_{i=K}^{K+k} (\langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle + \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle + \langle x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle + \langle x_i^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle) \| \\ &= \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \| \leq \| \sum_{i=۱}^{\infty} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \| < \varepsilon \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \| &= \| \sum_{i=k}^{K+k} (\langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \pm \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \pm \langle x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \pm \langle x_i^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle) \| \\ &< ۲\varepsilon + \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \| + \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(m)} - x_i^{(n)}, x_i^{(m)} \rangle \| \end{aligned}$$

$$\leq ۲\varepsilon + ۲\| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle \|^{\frac{۱}{۲}} \, \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \|^{\frac{۱}{۲}}$$
$$\leq ۲\varepsilon + ۲\varepsilon^{\frac{۱}{۲}} \| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \|^{\frac{۱}{۲}}$$

درنتیجه با حل نامساوی درجه دو داریم:

$$\| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_i^{(m)}, x_i^{(m)} \rangle \| < (۱ + \sqrt{۳})^۲ \varepsilon < ۸\varepsilon$$

لذا اگر $m \to \infty$ آنگاه

$$\| \sum_{i=k}^{K+k} \langle x_i, x_i \rangle \| < ۸\varepsilon$$

در حالت خاص اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $M_i = A$ آنگاه M را A–مدول هیلبرت استاندارد گوییم و با $\ell_۲(A)$ یا H_A نمایش می‌دهیم. اگر A یکدار باشد آنگاه قرار می‌دهیم $e_i = (۰, \ldots, ۰, ۱, ۰, \ldots)$ ، که درآن i-امین مؤلفه‌ی e_i یک و بقیه‌ی مؤلفه‌ها صفر است، در این‌صورت $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌ای برای $\ell_۲(A)$ می‌باشد که به آن پایه‌ی استاندارد گوییم.

تعریف ۸.۱.۲. دو A–مدول هیلبرت M و N را یکریخت گوییم هرگاه نگاشت A–خطی، کراندار و دوسویی مانند $B : M \longrightarrow N$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\langle x, y \rangle_M = \langle B(x), B(y) \rangle_N \qquad \forall x, y \in M$$

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید N یک A-زیرمدول بسته از A–مدول هیلبرت M باشد. قرار می‌دهیم :

$$N^\perp = \{x \in M \mid \langle x, y \rangle = ۰ \ , \forall y \in N\}$$

و آن را متمم متعامد N می‌نامیم.

نکته ۱۰.۱.۲. اگر N یک A–زیرمدول بسته از A–مدول هیلبرت M باشد، آنگاه برخلاف فضاهای هیلبرت تساوی $M = N \oplus N^\perp$ همیشه برقرار نیست! به‌عنوان مثال اگر $A = C[۰, ۱]$ ، $M = A$ و $N = C_۰(۰, ۱)$ آنگاه N ، A–زیرمدولی بسته از M است و $N^\perp = \{۰\}$.

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنید M و N دو A–مدول هیلبرت باشند. یک عملگر از M به N عبارتست از یک نگاشت خطی، A–خطی و کران‌دار مانند $T : M \longrightarrow N$. قرار می‌دهیم :

$$B(M,N) = \{T : M \longrightarrow N \mid \text{خطی، } A\text{–خطی و کران‌دار است} \ T\}$$

و $B(M,M)$ را با $B(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنید M و N دو A–مدول هیلبرت و $T : M \longrightarrow N$ یک نگاشت خطی باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) نگاشت T کران‌دار است و برای هر $x \in M$ و هر $a \in A$ ، $T(x.a) = Tx.a$.

(۲) عدد حقیقی $k \geq ۰$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ ، $\langle Tx, Tx\rangle \leq k\langle x, x\rangle$.

برهان. به [۱۴] مراجعه شود. □

نتیجه ۱۳.۱.۲. فرض کنید M و N دو A–مدول هیلبرت باشند و $T \in B(M,N)$ ، دراین‌صورت

$$\|T\| = \inf\{k^{۱/۲} : \langle Tx, Tx\rangle \leq k\langle x, x\rangle \ \ \forall x \in M\}$$

برهان. به [۱۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۱.۲. عملگر $T \in B(M,N)$ را الحاق‌پذیرگوییم هرگاه $T^* \in B(N,M)$ موجود باشد بطوریکه

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad x \in M, y \in N$$

نکته ۱۵.۱.۲. تمام عناصر $B(M,N)$ لزوما الحاق‌پذیر نیستند! به‌عنوان مثال فرض کنید $M = A = C([۰,۱])$، $N = \{f \in M : f(۱/۲) = ۰\}$ و $i : N \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. اگر i الحاق‌پذیر باشد آنگاه برای هر $x \in M$ داریم:

$$\langle x, i^*(۱_A)\rangle = \langle i(x), ۱_A\rangle = \langle x, ۱_A\rangle$$

بنابراین $i^*(1_A) = 1_A$. اما $1_A \notin N$ و درنتیجه i الحاق‌پذیر نمی‌باشد.

تعریف ۱۶.۱.۲. فضای تمام عناصر الحاق‌پذیر $B(M,N)$ را با $L(M,N)$ و $L(M,M)$ را با $L(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۲. زیرمدول بسته N از A–مدول هیلبرت M را متمم‌پذیر توپولوژیکی گوییم هرگاه زیرمدول بسته K موجود باشد بطوریکه $M = N + K$ و $N \cap K = \{0\}$. اگر $N \perp K$ آنگاه N را متمم‌پذیر متعامد گوییم.

لم ۱۸.۱.۲. فرض کنید M یک A–مدول هیلبرت باشد. اگر $T = T^* \in L(M)$ و $k > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in M$ ،

$$\|Tx\| \geq k\|x\|,$$

آنگاه T معکوس‌پذیر است.

برهان. به [۹لم ۳.۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۹.۱.۲. اگر $T \in L(M,N)$ و ImT در N بسته باشد، آنگاه

(۱) $KerT$ یک زیرمدول متمم‌پذیر متعامد از M است.

(۲) ImT یک زیرمدول متمم‌پذیر متعامد از N است.

برهان.

(۱) فرض کنید $ImT = N_0$. نگاشت $T_0 : M \longrightarrow N_0$ را با ضابطه‌ی $T_0(x) = T(x)$ درنظر می‌گیریم، دراین‌صورت T_0 پوشاست وبنا به قضیه‌ی نگاشت باز برای هر $y \in N_0$ ، $x \in M$ و $\delta > 0$ موجود است به‌طوری‌که $T_0 x = y$ و $\|x\| \leq \delta^{-1}\|y\|$. بنابراین

$$\|y\|^2 = \|\langle T_0(x), y\rangle\| = \|\langle x, T_0^*(y)\rangle\|$$

$$\leq \|x\|\ \|T_0^*(y)\|$$

$$= \|x\| \, \|\langle y, T_\circ T_\circ^* y\rangle\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|x\| \, \|y\|^{\frac{1}{2}} \, \|T_\circ T_\circ^* y\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \delta^{-1}\|y\| \, \|y\|^{\frac{1}{2}} \, \|T_\circ T_\circ^* y\|^{\frac{1}{2}}$$

درنتیجه

$$\|y\| \leq \delta^{-2}\|T_\circ T_\circ^* y\|$$

بنا به لم(۱۸.۱.۲) $T_\circ T_\circ^*$ معکوس‌پذیر و بنابراین پوشاست. فرض کنید $z \in M$ ، دراین‌صورت $w \in N_\circ$ موجود است که $T_\circ z = T_\circ T_\circ^* w$ ، لذا $z - T_\circ^* w \in KerT_\circ = KerT$ و

$$z = (z - T_\circ^* w) + T_\circ^* w \in KerT + ImT_\circ^*$$

از طرفی برای هر $x \in ImT_\circ^*$ ، $y \in N_\circ$ موجود است که $T_\circ^* y = x$. فرض کنید $x' \in KerT$ در این‌صورت $Tx' = \circ$ و داریم:

$$\langle x, x'\rangle = \langle T_\circ^* y, x'\rangle = \langle y, Tx'\rangle = \circ$$

بنابراین

$$M = KerT \oplus ImT_\circ^*$$

(۲) ابتدا نشان می‌دهیم $ImT^* = ImT_\circ^*$. چون عملگر $T_\circ^*$ تحدید عملگر T^* به $N_\circ$ است، پس

$$ImT_\circ^* \subseteq ImT^*$$

هم‌چنین داریم:

$$ImT^* \subseteq (KerT)^\perp = ImT_\circ^*.$$

بنابراین با به‌کاربردن (۱) برای عملگر T^* داریم:

$$N = KerT^* \oplus ImT.$$

□

۲.۲ C^*–مدول هیلبرت خوددوگان

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید M یک A–مدول هیلبرت باشد، دراین‌صورت مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های A–خطی و کراندار از M بتوی A را دوگان M گوییم و با M' نمایش می‌دهیم. M' به‌همراه ضرب اسکالر $(\lambda.f)(x) := \overline{\lambda} f(x)$ یک فضای برداری و به‌همراه ضرب $(f.a)(x) = a^* f(x)$ یک A–مدول راست است. این مدول نسبت به نرم $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq ۱\}$ کامل می‌باشد.

نکته ۲.۲.۲. برای هر $x \in M$ نگاشت $\hat{x} : M \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $\hat{x}(y) = \langle x, y \rangle$ یک نگاشت A–خطی وکراندار است، لذا $\hat{x} \in M'$. قرار می‌دهیم

$$\widehat{M} = \{\hat{x} | x \in M\}$$

دراین‌صورت $\widehat{M} \subseteq M'$. همچنین $x \longmapsto \hat{x}$ نگاشتی یکریخت و طولپا از M به $\widehat{M}$ می‌باشد، زیرا

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\|y\| \leq ۱} \|\langle x, y \rangle\| \leq \sup_{\|y\| \leq ۱} \|x\| \, \|y\| \leq \|x\|,$$

و

$$\|x\| = \frac{\|\langle x, x \rangle\|}{\|x\|} = \|\langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle\| \leq \|\hat{x}\|$$

بنابراین می‌توان M را به‌عنوان زیرمدولی از M' در نظر گرفت.

تعریف ۳.۲.۲. C^*–مدول هیلبرت M را خوددوگان گوییم هرگاه $\widehat{M} = M'$.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید M یک A–مدول هیلبرت خوددوگان و N یک A–مدول هیلبرت باشد، دراین‌صورت اگر $T \in B(M, N)$ آنگاه $T \in L(M, N)$.

برهان. به [۱۰] مراجعه شود.

□

قضیه ۵.۲.۲. اگر M یک C^*−مدول هیلبرت و N زیرمدولی خوددوگان از M باشد آنگاه $M = N \oplus N^{\perp}$.

برهان. نگاشت شمول $i : N \hookrightarrow M$ ، خطی، کران‌دار و طولپا می‌باشد. بنا به قضیه‌ی قبل i الحاق‌پذیر است، لذا برای هر $x \in M$ و هر $y \in N$ داریم:

$$\langle i(y), x\rangle = \langle y, i^*(x)\rangle = \langle i(y), i(i^*(x))\rangle$$

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر $y \in N$ ،

$$\langle y, x - i(i^*(x))\rangle = \langle i(y), x - i(i^*(x))\rangle = ۰$$

درنتیجه $x = (x - i(i^*(x))) + i(i^*(x))$ ، که در آن $x - i(i^*(x)) \in N^{\perp}$ و $i(i^*(x)) \in N$. این تجزیه منحصربه‌فرد نیز می‌باشد. □

قضیه ۶.۲.۲. C^*−جبر A به‌عنوان یک A−مدول هیلبرت خوددوگان است اگر و تنها اگر یکدار باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید A یکدار باشد و $f \in A'$،دراین‌صورت برای هر $a \in A$ داریم:

$$f(a) = f(۱.a) = f(۱).a = \langle f(۱)^*, a\rangle = (f(۱)^*)\hat{}\,(a)$$

بنابراین $f = (f(۱)^*)\hat{} \in \hat{A}$.

بالعکس فرض کنید $\hat{A} = A'$ و $i : A \longrightarrow A$ نگاشت همانی باشد، دراین‌صورت $a \in A$ موجود است بطوریکه $i = \hat{a}$.

بنابراین برای هر $x \in A$ داریم:

$$x = i(x) = \hat{a}(x) = \langle a, x\rangle = a^*x$$

□

قضیه ۷.۲.۲. هر A−مدول هیلبرت، خوددوگان است اگروتنهااگر A، بعد متناهی داشته باشد.

برهان. به [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید A یک C^*− جبر یکدار و

$$S=\{(f_1,f_2,...)\mid f_i\in A, i\in\mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sum_{i=1}^{n}f_i^*f_i\|<\infty\},$$

دراین‌صورت نگاشت $\varphi:\ell_2(A)'\longrightarrow S$ با ضابطه‌ی $\varphi(f)=(f(e_i)^*)_{i\in\mathbb{N}}$ دوسویی است و

$$\|f\|^2=\sup_{n}\|\sum_{i=1}^{n}f_i^*f_i\|$$

برهان. بدیهی است که این نگاشت خوش‌تعریف است. فرض کنید $f(e_i)=g(e_i)$ و $f\neq g$. $x=(x_1,x_2,\dots)\in$ $\ell_2(A)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|f(x)-g(x)\|=c\neq 0$. قرار می‌دهیم $x^{(N)}=\sum_{i=1}^{N}e_ix_i=(x_1,x_2,...x_N,0,...)$. بنا به محک کشی، $N\in\mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که

$$\|x-x^{(N)}\|=\|\sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^*x_i\|^{\frac{1}{2}}<\frac{c}{2(\|f\|+\|g\|)}$$

چون $f(x^{(N)})=g(x^{(N)})$ پس $\|f(x-x^{(N)})-g(x-x^{(N)})\|=c$. اما از طرفی داریم:

$$\|f(x-x^{(N)})-g(x-x^{(N)})\|\leq(\|f\|+\|g\|)\|x-x^{(N)}\|<(\|f\|+\|g\|)\frac{c}{2(\|f\|+\|g\|)}\leq\frac{c}{2}$$

که یک تناقض است. لذا $f=g$، یعنی φیک‌به‌یک است.

حال فرض کنید $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\in S$. قرار می‌دهیم $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i^*x_i$. بنا به نامساوی کشی- بانیاکوسکی داریم:

$$\|\sum_{i=1}^{N}f_i^*x_i\|^2\leq\|\sum_{i=1}^{N}f_i^*f_i\|\|\sum_{i=1}^{N}x_i^*x_i\|$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\|f\|^2=\sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\|^2&=\sup_{\|x\|\leq 1}\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i^*x_i\|^2\\&\leq\sup_{\|x\|\leq 1}(\sup_{N}\|\sum_{i=1}^{N}f_i^*x_i\|^2)\\&\leq\sup_{\|x\|\leq 1}(\sup_{N}\|\sum_{i=1}^{N}f_i^*f_i\|\|\sum_{i=1}^{N}x_i^*x_i\|)\\&\leq\sup_{N}\|\sum_{i=1}^{N}f_i^*f_i\|\end{aligned}$$

قرار دهید $f^{(N)} = (f^1, f^2, ..., f^N, 0, ...)$ و $x = \frac{f^{(N)}}{\|f^{(N)}\|}$ ، دراین‌صورت $x \in H_A$ و $\|f\| \geq \|f^{(N)}\|$. از طرفی $\|f^{(N)}\|^2 = \|\sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i\|$ بنابراین $\|f\|^2 = \sup_n \|\sum_{i=1}^{n} f_i^* f_i\|$. حال فرض کنید $\varepsilon > 0$ ، بنا به محک کشی $N \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n \geq N$ داریم:

$$\|\sum_{i=N}^{N+n} f_i^* x_i\| \leq \|\sum_{i=N}^{N+n} f_i^* f_i\| \|\sum_{i=N}^{N+n} x_i^* x_i\| \leq \|f\|^2 \|\sum_{i=N}^{N+n} x_i^* x_i\| < \|f\|^2 \varepsilon$$

لذا $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^* x_i$ همگرا و φ پوشاست. □

تعریف ۹.۲.۲. C^*–جبر A را W^*–جبر گوییم هرگاه دوگان فضای باناخی مانند B باشد. B را پیش‌دوگان A می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض کنید A یک W^*–جبر و $\{M, \langle .,. \rangle\}$ یک A–مدول پیش‌هیلبرت باشد، دراین‌صورت $\langle .,. \rangle$ را می‌توان به یک ضرب داخلی روی M' گسترش داد بطوریکه M' یک A–مدول هیلبرت خوددوگان باشد و بعلاوه برای هر $x \in M$ و هر $f \in M'$ داریم:

$$\langle f, \hat{x} \rangle = f(x)$$

برهان. به [۱۰] مراجعه شود.

□

۳.۲ C^*–بازتابی

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید M یک A–مدول هیلبرت باشد، دراین‌صورت A–مدول شامل تمام نگاشت‌های مدولی، A–خطی و کراندار از M' به A را دوگان دوم M گوییم و با M'' نمایش می‌دهیم.

برای هر $x \in M$ و هر $f \in M'$ قرار می‌دهیم

$$\dot{x}(f) := f(x)^*$$

دراین‌صورت $\dot{x} \longmapsto x$ یک نگاشت طولپا از M به M'' است:

$$\|\dot{x}\| = sup\{\|f(x)\| \mid f \in M', \|f\| \leq ۱\} \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\| \ ;$$

$$\|\dot{x}\| \geq \frac{۱}{\|\hat{x}\|}\|\hat{x}\| = \frac{۱}{\|\hat{x}\|}\|\langle x, x\rangle\| = \|x\| \ .$$

لذا می‌توان M را زیرمدولی از M'' درنظر گرفت.

تعریف ۲.۳.۲. C^*–مدول هیلبرت M را C^*–بازتابی گوییم هرگاه نگاشت $\dot{x} \longmapsto x$ پوشا باشد.

نکته ۳.۳.۲. برای هر $F \in M''$ نگاشت $\tilde{F} \in M'$ با ضابطه‌ی

$$\tilde{F}(x) = F(\hat{x})$$

را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت $\tilde{F} \longmapsto F$ یک نگاشت خطی و طولپا از M'' به M' است و درنتیجه خواهیم داشت:

$$M \subseteq M'' \subseteq M'$$

قضیه ۴.۳.۲. M'' به‌همراه ضرب داخلی $\langle F, G\rangle := F(\tilde{G})$ یک A–مدول هیلبرت است.

برهان. فرض کنید $۰ \neq F \in M''$ ، $c = F(\tilde{F})$ و $D = \|F\|$ ، نشان می‌دهیم $D^۲ \in Sp(c)$. برای هر $t > D$ ضرب داخلی $\langle .,. \rangle_{\tilde{F},t}$ را روی $A \times M$ با ضابطه‌ی $\langle (a,x),(b,y)\rangle_{\tilde{F},t} = t^۲ a^*b + a^*\tilde{F}(y) + \tilde{F}(x)^*b + \langle x, y\rangle$ تعریف می‌کنیم. چون

$$\begin{aligned}\|(\tilde{F}a + \hat{x}(y)\| = \|a^*\tilde{F}(y) + \langle x, y\rangle\| &= \|\langle (a,x),(۰,y)\rangle_{\tilde{F},t}\| \\ &\leq \|(a,x)\|_{\tilde{F},t}\ \|(۰,y)\|_{\tilde{F},t} \\ &= \|y\|\ \|(a,x)\|_{\tilde{F},t}\end{aligned}$$

پس $\|(\tilde{F}a + \hat{x}\| \leq \|(a,x)\|_{\tilde{F},t}$ ، بنابراین نگاشت

$$f_c : A \times M \longrightarrow A$$

$$(a,x) \longmapsto F(\tilde{F}a+\hat{x}) = ca+\tilde{F}(x)$$

کران‌دار است و

$$\begin{aligned}\|f_c\| = \sup_{\|(a,x)\|\leq ۱} \|F(\tilde{F}a+\hat{x})\| &\leq \sup_{\|(a,x)\|\leq ۱} \|F\|\|\tilde{F}a+\hat{x}\| \\ &\leq \sup_{\|(a,x)\|\leq ۱} \|F\|\|\|(a,x)\|_{\tilde{F},t} \\ &\leq D\end{aligned}$$

لذا بنا به نتیجه‌ی(۱۳.۱.۲) ، نامساوی

$$(ca+\tilde{F}(x))^*(ca+\tilde{F}(x)) \leq D^۲\langle (a,x),(a,x)\rangle_{\tilde{F},t}$$

برای هر $t>D$ برقرار است. با میل دادن t به سمت D داریم:

$$(ca+\tilde{F}(x))^*(ca+\tilde{F}(x)) \leq D^۲(D^۲a^*a+\tilde{F}(x)^*a+a^*\tilde{F}(x)+\langle x,x\rangle).$$

قرار دهید $a=-D^{-۲}\tilde{F}(x)$ ، دراین‌صورت

$$\tilde{F}(x)^*(D^{-۲}c-۱)^*(D^{-۲}c-۱)\tilde{F}(x) \leq D^۲(-D^{-۲}\tilde{F}(x)^*\tilde{F}(x)+\langle x,x\rangle),$$

بنابراین

$$\tilde{F}(x)^*((D^{-۲}c-۱)^*(D^{-۲}c-۱)+۱)\tilde{F}(x) \leq D^۲\langle x,x\rangle.$$

به برهان خلف فرض کنید $D^۲\notin Sp(c)$ ، دراین‌صورت $\delta>۰$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x\in M$ ،

$$\tilde{F}(x)^*(D^{-۲}c-۱)^*(D^{-۲}c-۱)\tilde{F}(x) \geq \delta\tilde{F}(x)^*\tilde{F}(x).$$

لذا

$$\tilde{F}(x)^*\tilde{F}(x) \leq \frac{D^{۲}}{۱+\delta}\langle x, x\rangle,$$

درنتیجه

$$D^{۲} = \|\tilde{F}\|^{۲} \leq \frac{D^{۲}}{۱+\delta} < D^{۲}.$$

این تناقض نشان می‌دهد که $D^{۲} \in Sp(c)$ ، لذا $D^{۲} \leq \|c\|$. از طرفی چون

$$\|c\| = \|F(\tilde{F})\| \leq \|F\| \, \|\tilde{F}\| = \|F\|^{۲} = D^{۲}$$

پس $\|c\| = D^{۲}$ و درنتیجه $\|\langle F, F\rangle\| = \|F(\tilde{F})\| = \|c\| = D^{۲} = \|F\|^{۲} \in Sp(\langle F, F\rangle)$. این رابطه برای هر $\circ \neq F \in M''$ برقرار است، بنابراین برای هر $a \in A^+$ داریم:

$$\|aca\| = \|a^*F(\tilde{F})a\| = \|\langle F.a, F, a\rangle\| \in Sp(\langle F.a, F.a\rangle) = Sp(aca).$$

لذا بنا به قضیه‌ی (۱.۲.۳۶) ، $\langle F, F\rangle \geq \circ$. همچنین $F = \circ$ اگر و تنها اگر $\langle F, F\rangle = \circ$. حال فرض کنید $G, H \in M''$ ، دراین‌صورت $\tilde{G}, \tilde{H}$ نگاشت‌های مدولی و A−خطی هستند و

$$\langle F, G+\lambda H\rangle = F(G+\lambda H)^{\sim} = F(\tilde{G}+\lambda\tilde{H}) = F(\tilde{G}) + \lambda F(\tilde{H})$$

$$= \langle F, G\rangle + \lambda\langle F, H\rangle,$$

$$\langle F, G.a\rangle = F(\tilde{G.a}) = F(\tilde{G}.a) = F(\tilde{G})a = \langle F, G\rangle a \,.$$

همچنین چون $\langle F+G, F+G\rangle \geq \circ$ و $\langle F+iG, F+iG\rangle \geq \circ$ ، پس هر دو خودالحاق می‌باشند، یعنی

$$\langle F+G, F+G\rangle = \langle F+G, F+G\rangle^* \,,$$

$$\langle F+iG, F+iG\rangle = \langle F+iG, F+iG\rangle^*.$$

بنابراین

$$\langle F, F\rangle + \langle F, G\rangle + \langle G, G\rangle + \langle G, F\rangle = \langle F, F\rangle^* + \langle F, G\rangle^* + \langle G, G\rangle^* + \langle G, F\rangle^*$$

لذا

$$\langle F,G\rangle + \langle G,F\rangle = \langle F,G\rangle^* + \langle G,F\rangle^*.$$

به طریق مشابه

$$i\langle F,G\rangle - i\langle G,F\rangle = i\langle F,G\rangle^* - i\langle G,F\rangle^*.$$

درنتیجه

$$\langle F,G\rangle = \langle G,F\rangle^*.$$

□

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید A یک W^*–جبر و M یک A–مدول هیلبرت باشد، دراین‌صورت M خوددوگان است اگر و تنها اگر A–بازتابی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید M خوددوگان است یعنی $M = M'$. چون $M \subseteq M'' \subseteq M'$ پس بدیهی است که $M = M''$.

بالعکس فرض کنید M ، A–بازتابی باشد و $f \in M'$. بنا به قضیه‌ی (۱۰.۲.۲) ، ضرب داخلی A–مقداری روی M قابل گسترش به یک ضرب داخلی A–مقداری روی M' است بطوریکه M' نسبت به آن یک A–مدول هیلبرت خوددوگان است ، لذا $\langle f,.\rangle_{M'} \in M''$. چون M ، A–بازتابی است پس $x \in M$ موجود است بطویکه $\dot{x} = \langle f,.\rangle$. حال برای هر $g \in M'$ داریم:

$$\langle f,g\rangle = \dot{x}(g) = g(x)^* = \langle g,\hat{x}\rangle^* = \langle \hat{x},g\rangle$$

بنابراین $f = \hat{x}$. □

تعریف ۶.۳.۲. A–مدول هیلبرت M را شمارا تولید شده گوییم هرگاه مجموعه‌ی شمارای $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ موجود باشد بطوریکه $\{\sum_{k=m}^{n} x_{i_k}a_k \mid a_k \in A, m,n \in \mathbb{N}\}$ در M چگال باشد.

تعریف ۷.۳.۲. فرض کنید M یک A−مدول هیلبرت باشد، دراین‌صورت قرار می‌دهیم

$$M.A = \overline{Span\{x.a\ ;\ x \in M, a \in A\}}$$

لم ۸.۳.۲. اگر M یک A−مدول هیلبرت باشد آنگاه $M.A = M$.

برهان. به [۱۰] مراجعه شود. $\square$

لم ۹.۳.۲. فرض کنید A یک $C*$−جبر یکدار، M یک A−مدول هیلبرت ، $e_1, \dots, e_n \in M$ متعامد ، $x \in M$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند. اگر $y \in M$ موجود باشد به‌طوری‌که $\langle y, y \rangle = 1$ و $y \perp \{x, e_1, \dots, e_n\}$ آنگاه $e_{n+1} \in M$ موجود است که:

۱) عناصر $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ متعامد هستند،

۲) $e_{n+1} \in Span_A(e_1, \dots, e_n, x, y)$ ،

۳) $dist(x, Span(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})) \le \varepsilon$.

برهان. فرض کنید $x' = x - \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i, x \rangle$ و $x'' = x' + \varepsilon y$ ، دراین‌صورت

$$\langle x'', x'' \rangle = \langle x', x' \rangle + \varepsilon^2 \ge \varepsilon^2 > 0$$

بنابراین $\langle x'', x'' \rangle$ در A معکوس‌پذیر است. قرار دهید $e_{n+1} = x''.\langle x'', x'' \rangle^{-1/2}$ دراین‌صورت

$$e_{n+1} \in Span_A(x', y) \perp \{e_1, \dots, e_n\}$$

لذا $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ متعامد هستند. چون $x' \in Span_A(x, e_1, \dots, e_n)$ و $e_{n+1} \in Span_A(x', y)$ ، پس $e_{n+1} \in Span_A(e_1, \dots, e_n, x, y)$. قرار دهید

$$w = e_{n+1} \langle x'', x'' \rangle^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i, x \rangle \in Span_A(e_1, \dots, e_n).$$

دراین‌صورت

$$\|w-x\| = \|x''-x' = \|\varepsilon y\| = \varepsilon.$$

بنابراین

$$dist(x, Span(e_1,\dots,e_n,e_{n+1})) = \inf\{\|x-w\|\ ;\ w\in Span_A(e_1,\dots,e_n,e_{n+1})\} \le \varepsilon.$$

□

قضیه ۱۰.۳.۲. فرض کنید M یک A−مدول هیلبرت شمارا تولید شده باشد، دراین‌صورت

$$M\oplus H_A \cong H_A$$

برهان. ابتدا فرض کنید A یکدار و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ی تمام مولدهای M باشد. قرار دهید

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

به‌طوری‌که هر e_n و هر y_n به تعداد نامتناهی تکرار شده باشد. دراین‌صورت $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، $M\oplus H_A$ را تولید می‌کند.

برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، عناصر $\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n \in M\oplus H_A$ و عدد صحیح $m(n)\ge n$ را طوری درنظر می‌گیریم که

(۱) $\{\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n\}\subset Span_A(x_1,\dots,x_n,e_1,\dots,e_{m(n)})$ ،

(۲) برای هر k که $1\le k\le n$ ، $dist(x_k, Span_A(\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_k)) \le \frac{1}{k}$.

چون هر x_i برابر با e_j یا y_k است ، پس عدد صحیح $m'>m(n)$ موجود است که $e_{m'}\perp\{x_{1,\dots,x_{n+1}}\}$. هم‌چنین چون $e_{m'}\perp\{e_1,\dots,e_{m(n)}\}$ ، پس از شرط (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$e_{m'}\perp\{x_{n+1},\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n\}.$$

بنا به لم (۹.۳.۲) ، $\overline{e}_{n+1}\in Span_A(\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n,x_{n+1},e_{m'})$ موجود است به‌طوری‌که عناصر $\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n,\overline{e}_{n+1}$

متعامدند و

$$dist(x_{n+1}, Span_A(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)) \leq \frac{1}{n+1}.$$

بنابراین

$$\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, \overline{e}_{n+1}\} \subset Span_A(x_1, \ldots, x_{n+1}, e_1, \ldots, e_{m'}).$$

با قرار دادن $m(n+1) = m'$ ، دنباله‌ی $\{\overline{e}_n\}$ از عناصر متعامد $M \oplus H_A$ را خواهیم داشت که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند. اما شرط (۲) نشان می‌دهد که این دنباله، $M \oplus H_A$ را تولید می‌کند. لذا $\overline{e}_n \longmapsto e_n$ یک یکریختی بین H_A و $M \oplus H_A$ می‌باشد.

حال فرض کنید A یکدار نباشد. دراین‌صورت M به‌همراه ضرب مدولی

$$x.(a, \lambda) := x.a + x\lambda \;\; ; \;\; x \in M \; , \; (a, \lambda) \in \tilde{A}$$

یک $\tilde{A}$–مدول می‌باشد. لذا می‌توان M را به‌عنوان یک $\tilde{A}$–مدول هیلبرت درنظر گرفت. قرار می‌دهیم

$$H_{\tilde{A}}A = \overline{Span\{x.a \; ; \; x \in H_{\tilde{A}}, a \in A\}} \subset H_{\tilde{A}},$$

دراین‌صورت $H_{\tilde{A}}A = H_A$. از طرفی بنا به لم (۸.۳.۲) $MA = M$ ، لذا

$$M \oplus H_A = MA \oplus H_{\tilde{A}}A = (M \oplus H_{\tilde{A}})A \cong H_{\tilde{A}}A = H_A$$

□

نتیجه ۱۱.۳.۲. اگر H_A ، C^*–بازتابی باشد آنگاه هر A–مدول هیلبرت شمارا تولید شده C^*–بازتابی است.

برهان. به [۶] مراجعه شود. □

فصل ۳

C^*−بازتابی بودن C^*−مدول‌های هیلبرت روی C^*−جبرهای جابه‌جایی

در این فصل محکی برای C^*−بازتابی بودن C^*−مدول‌های هیلبرت روی C^*−جبرهای جابه‌جایی ارائه می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی گلفند هر C^*−جبر جابه‌جایی با $C_\circ(X)$، که X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف است، $*$−یکریخت می‌باشد. هم‌چنین چون هر A−مدول هیلبرت یک $\tilde{A}$−مدول هیلبرت نیز می‌باشد، پس می‌توان C^*−جبرها را یکدار فرض کرد. بنابراین در این فصل C^*−جبر A را $C(X)$، که X یک فضای فشرده‌ی هاسدورف است، درنظر می‌گیریم. مطالب این فصل از مرجع [۶] استخراج شده‌اند.

۱.۳ شرط کافی برای C^*−بازتابی بودن $\ell_۲(C(X))$

تعریف ۱.۱.۳. C^*−جبر A را C^*−بازتابی گوییم هرگاه $\ell_۲(A)$، C^*− بازتابی باشد.

لم ۲.۱.۳. فرض کنید $(F_۱, F_۲, \ldots) \in H'_A$ و E مجموعه‌ی تمام نقاط پیوستگی $\sum_{i\in\mathbb{N}} F_i^* F_i$ باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. $F \in H''_A$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{F} = (F_۱, F_۲, \ldots)$.

۲. برای هر $f = (f_۱, f_۲, \ldots) \in H'_A$، تابع پیوسته‌ی α_f موجود است به‌طوری‌که روی مجموعه‌ی E داشته باشیم $\alpha_f = \sum_{i=۱}^{\infty} F_i^* f_i^*$.

برهان. ابتدا فرض کنید $\tilde{F} = (F_۱, F_۲, \ldots)$ ، $\Phi(x) := \sum_{i \in \mathbb{N}} F_i^*(x)F_i(x)$ ، $x_\circ \in E$ و $\varepsilon > \circ$ ، دراین‌صورت همسایگی $U_\circ$ از $x_\circ$ موجود است به‌طوری‌که

$$|\Phi(x) - \Phi(x_\circ)| < \varepsilon^۲ \qquad \forall x \in U_\circ .$$

$N \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|\sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^*(x_\circ)F_i(x_\circ)| < \varepsilon^۲$. هم‌چنین چون تمام F_iها پیوسته‌اند پس حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع متناهی آنها نیز پیوسته می‌باشد، لذا همسایگی $U_۱$ از $x_\circ$ موجود است که

$$|\sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x)F_i(x) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x_\circ)F_i(x_\circ)| < \varepsilon^۲$$

قرار می‌دهیم $U = U_\circ \bigcap U_۱$ ، دراین‌صورت برای هر $x \in U$ داریم:

$$\begin{aligned} |\sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^*(x)F_i(x)| &= |\Phi(x) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x)F_i(x)| \\ \leqslant |\Phi(x) - \Phi(x_\circ)| + |\Phi(x_\circ) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x_\circ)F_i(x_\circ)| &+ |\sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x)F_i(x) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x_\circ)F_i(x_\circ)| \\ &< ۳\varepsilon^۲. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

حال فرض کنید $f = (f_۱, f_۲, \ldots) \in H'_A$ ، دراین‌صورت

$$\begin{aligned} F(\sum_{i=۱}^{N} e_i f_i) = F(\sum_{i=۱}^{N} \widehat{(e_i f_i)}) = \tilde{F}(\sum_{i=۱}^{N} e_i f_i) &= \tilde{F}((f_۱, f_۲, \ldots, f_n, \circ, \ldots)) \\ &= \sum_{i=۱}^{N} F_i^* f_i \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

و

$$\begin{aligned} F(f) - F(\sum_{i=۱}^{N} e_i f_i) = F(f) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^* f_i &= F(f) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^* \dot{e}_i(f) \\ &= (F - \sum_{i=۱}^{N} F_i^* \dot{e}_i)(f). \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

بنا به لم اوریسون تابع پیوسته‌ی $\lambda : X \longrightarrow [۰,۱]$ موجود است که $\lambda(x_۰) = ۱$ و $supp(\lambda) \subseteq U$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\|\lambda F - \lambda \sum_{i=۱}^{N} F_i^* \dot{e}_i\|^۲ &= \|\lambda F - \lambda \sum_{i=۱}^{N} F_i^* e_i\|^۲ \\ &= \|\lambda(۰, \dots, F_{N+۱}, F_{N+۲}, \dots)\|^۲ \\ &= \|\lambda \sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^* F_i\| \\ &= sup_{x\in X} |\lambda(x) \sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^*(x) F_i(x)| \\ &= sup_{x\in supp\lambda} |\lambda(x) \sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^*(x) F_i(x)| \\ &\leq sup_{x\in supp\lambda} |\lambda(x)|\ sup_{x\in supp\lambda} |\sum_{i=N+۱}^{\infty} F_i^*(x) F_i(x)| \leq ۳\varepsilon^۲\end{aligned}$$

چون $\lambda F(f) = \lambda F(f) \pm \lambda F(\sum_{i=۱}^{\infty} e_i f_i)$ ، پس

$$|F(f)(x_۰) - \sum_{i=۱}^{N} F_i^*(x_۰) f_i(x_۰)| = |(\lambda F - \sum_{i=۱}^{N} \lambda F_i^* \dot{e}_i)(f)\ |_{x_۰}\ | < \|f\|\sqrt{۳}\varepsilon$$

بالعکس فرض کنید برای هر $f \in H'_A$ ، α_f موجود باشد. تابع F را با ضابطه‌ی $F(f) = \alpha_f$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $F \in H''_A$ و

$$\|F(f)\| = \|\alpha_f\| = \|\sum_{i=۱}^{\infty} F_i^* f_i^*\|$$

حال فرض کنید $(\hat{e}_i)_k$ ، k−امین مؤلفه‌ی $\hat{e}_i$ باشد دراین‌صورت

$$\tilde{F}(e_i) = F(\hat{e}_i) = \alpha_{\hat{e}_i} = \sum_k (F_k^* \hat{e}_i)_k = F_i^*$$

لذا $\tilde{F} = (F_۱, F_۲, \dots)$. □

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده باشد به‌طوری‌که شامل $\beta(\mathbb{N})$ به‌عنوان یک زیرمجموعه‌ی بسته نباشد، دراین‌صورت $\ell_۲(C(X))$ ، C^*−بازتابی است.

برهان. فرض کنید $F=(F_1,F_2,\ldots)\in H''_A$ ، دراین‌صورت $F\in H_A$ اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{\infty}F_i^*F_i$ در A همگرا باشد. قرار می‌دهیم:

$$K_F=\inf_k\sup_{m>k}\sup_{x\in X}\sum_{i=k}^{m}|F_i(x)|^2=\inf_k\sup_{m>k}\|\sum_{i=k}^{m}|F_i|^2\|,$$

دراین‌صورت $K_F\leq\|F\|^2=\sup_N\|\sum_{i=1}^{N}F_i^*F_i\|$. بنا به محک کشی

$$K_F=0\Longleftrightarrow(F_1,F_2,\ldots)\in H_A.$$

به برهان خلف فرض کنید $H''_A\neq H_A$ ، دراین‌صورت $F=(F_1,F_2,\ldots)\in H''_A$ موجود است به‌طوری‌که $K_F>0$.

چون $\|F\|^2=\sup_N\|\sum_{i=1}^{N}F_i^*F_i\|$ پس عدد طبیعی $m(1)$ و $x\in X$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{m(1)-1}|F_i(x)|^2>\|F\|^2-K_F/3.$$

قرار می‌دهیم $F^{(1)}=F$ ، $F^{(2)}=(0,\ldots,0,F_{m(1)},F_{m(1)+1},\ldots)$ و هم‌چنین

$$U_1=\{x\in X\mid\sum_{i=1}^{m(1)-1}|F_i(x)|^2>\|F\|^2-K_F/3\}\subset X.$$

دراین‌صورت $F^{(2)}\in H''_A\setminus H_A$ و $K_{F^{(2)}}=K_F\leq\|F^{(2)}\|^2$. هم‌چنین U_1 باز است زیرا اگر قرار دهیم $g(x)=\sum_{i=1}^{m(1)-1}|F_i(x)|^2$ و $D=\|F\|^2-K_F/3$ آنگاه تابع g پیوسته است و

$$U_1=g^{-1}(D,\infty).$$

به طریق مشابه $m(2)>m(1)$ و $x\in X$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i=m(1)}^{m(2)-1}|F_i(x)|^2>\|F^{(2)}\|^2-K_F/3.$$

قرار می‌دهیم

$$U_2=\{x\in X\mid\sum_{i=m(1)}^{m(2)-1}|F_i(x)|^2>\|F^{(2)}\|^2-K_F/3\}\subset X$$

با ادامه‌ی روند بالا یک دنباله‌ی صعودی از اعداد $m(k)$ و یک دنباله از مجموعه‌های باز غیر تهی U_k خواهیم داشت

به‌طوری‌که

$$U_k = \{x \in X \mid \sum_{i=m(k-۱)}^{m(k)-۱} |F_i(x)|^۲ > \|F^{(k)}\|^۲ - K_F/۳\} \subset X$$

فرض کنید $j < l$ و $x_\circ \in \overline{U_j} \cap \overline{U_l}$ ، دراین‌صورت

$$\sum_{i=m(j-۱)}^{m(j)-۱} |F_i(x_\circ)|^۲ \geq \|F^{(j)}\|^۲ - K_F/۳,$$

و

$$\sum_{i=m(l-۱)}^{m(l)-۱} |F_i(x_\circ)|^۲ \geq \|F^{(l)}\|^۲ - K_F/۳ \geq K_F - K_F/۳ = ۲K_F/۳.$$

بنابراین

$$\|F^{(j)}\|^۲ \geq \sum_{i=m(j-۱)}^{m(l)-۱} |F_i(x_\circ)|^۲ \geq \|F^{(j)}\|^۲ - K_F/۳ + ۲K_F/۳ = \|F^{(j)}\|^۲ + K_F/۳,$$

که تناقض است، لذا U_kها مجزا هستند. فرض کنید E مجموعه‌ی تمام نقاط پیوستگی $\sum_{i\in\mathbb{N}} F_i^* F_i$ باشد، دراین‌صورت بنا به قضیه‌ی (۱۲.۱.۱) ، E در X چگال است. لذا برای هر عدد طبیعی k ، x_k موجود است به‌طوری‌که $x_k \in U_k \cap E$. قرار دهید $\mathbb{N} = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$. نشان می‌دهیم $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$. بنا به قضیه‌ی (۲۳.۱.۱) کافیست نشان دهیم هر تابع پیوسته و کران‌دار روی $\mathbb{N}$ قابل گسترش به یک تابع پیوسته روی $\overline{\mathbb{N}}$ است. دنباله‌ی کران‌دار $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ و توابع $g_k : X \longrightarrow [\circ, ۱]$ ، که $supp(g_k) \subset U_k$ و $g_k(x_k) = ۱$ را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت

$$f = (f_۱, f_۲, \ldots) = (\lambda_۱ \|F_۱(x_۱)\| g_۱, \ldots, \lambda_۱ \|F_{m(۱)}(x_۱)\| g_۱,$$

$$\lambda_۲ \|F_{m(۱)+۱}(x_۲)\| g_۲, \ldots, \lambda_۲ \|F_{m(۲)}(x_۲)\| g_۲, \ldots) \in H'_A.$$

بنا به لم (۲.۱.۳)، $\sum_i F_i^* f_i$ روی $E \supset \mathbb{N}$ همگرا به تابع پیوسته‌ی $F(f) \in C(X)$ می‌باشد. بنابراین برای هر $x_k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$F(f)(x_k) = \lambda_k . \sum_{i=m(k)}^{m(k+۱)-۱} F_i^*(x_k) F_i(x_k).$$

لذا با تغییر دنباله‌ی $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ، دنباله‌ای کران‌دار از اعداد مختلط $F(f)(x_k)$ را خواهیم داشت. درنتیجه هر تابع کران‌دار روی $\mathbb{N}$ ، که پیوسته هم خواهد بود، روی $\overline{\mathbb{N}}$ گسترش خواهد یافت. $\square$

۲.۳ محکی برای C^*–بازتابی بودن C^*–مدول‌های هیلبرت روی C^*–جبرهای جابه‌جایی

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از X باشد. قرار می‌دهیم:

$$C_\circ(U) = \{f \in C(X) \ : \ f|_{X\setminus U} = \circ\}$$

دراین‌صورت $C_\circ(U) \subset C(X)$. حال اگر $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و مجزای X باشد، آنگاه

$$\bigoplus_k C_\circ(U_k) \subset C(X).$$

گاهی اوقات این شمول قابل گسترش به‌روی $\prod_k C_\circ(U_k)$ می‌باشد، یعنی

$$\prod_k C_\circ(U_k) \subset C(X).$$

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید $X = [\circ, ۱]$ و $U_k = (\frac{۱}{۲^{k+۱}}, \frac{۱}{۲^k})$ ، دراین‌صورت شمول $\oplus_k C_\circ(U_k) \subset C(X)$ قابل گسترش به‌روی $\prod_k C_\circ(U_k)$ نیست. زیرا اگر $(f_۱, f_۲, \ldots) \in \prod_k C_\circ(U_k)$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\|f_k\| = ۱$ آنگاه تابعی که روی X تعریف شود و روی U_k برابر با f_k است، پیوسته نمی‌باشد.

مثال ۳.۲.۳. فرض کنید $X = \beta\mathbb{N}$ و $U_k = \{k\} \subset \mathbb{N}$ ، دراین‌صورت $C_\circ(U_k) = \mathbb{C}$. بنابراین

$$\prod_k C_\circ(U_k) = \prod_k \mathbb{C} = l_\infty$$

از طرفی $C(\beta\mathbb{N}) = l_\infty$.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید $C(X)$ ، C^*–بازتابی نباشد، دراین‌صورت دنباله‌ی $\{U_k\}$ از زیرمجموعه‌های باز X موجود است به‌طوری‌که

$$\prod_k C_\circ(U_k) \subset C(X)$$

برهان. فرض کنید $F = (F_۱, F_۲, \dots) \in H''_A \setminus H_A$. با توجه به برهان قضیه‌ی (۳.۱.۳) ، $K > ۰$ ، دنباله‌ی صعودی $\{m(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ از اعداد صحیح و دنباله‌ی $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ از زیرمجموعه‌های باز X موجود است به‌طوری‌که

(۱) اگر $i \neq j$ آنگاه $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ ،

(۲) برای هر $x \in U_k$ ، $K < \sum_{i-m(k)}^{m(k+۱)-۱} F_i^*(x)F_i(x) \leq \|F\|^۲$.

فرض کنید $\lambda_k \in C_\circ(U_k)$. دراین‌صورت برای هر $G \in C(X)$ ، $\lambda_k G \in C_\circ(U_k) \subset C(X)$. تابع

$$g_k = \sum_{i=m(k)}^{m(k+۱)-۱} F_i^* F_i$$

روی U_k معکوس‌پذیر است. برای دنباله‌ی $\lambda = (\lambda_۱, \lambda_۲, \dots)$ ، قرار می‌دهیم

$$f^\lambda = (f_۱, f_۲, \dots) = (\lambda_۱ F_۱ g_۱^{-۱}, \dots, \lambda_۱ F_{m(۱)} g_۱^{-۱}, \lambda_۲ F_{m(۱)+۱} g_۲^{-۱}, \dots, \lambda_۲ F_{m(۲)} g_۲^{-۱}, \dots)$$

اگر دنباله‌ی λ کران‌دار باشد، یعنی $\lambda \in \prod_k C_\circ(U_k)$ ، آنگاه $f^\lambda \in H'_A$. فرض کنید $Y = \overline{\sqcup_k U_k} \setminus \sqcup_k U_k$ ، دراین‌صورت $X \setminus Y$ در X چگال است و برای هر $x \in X \setminus Y$

$$\sum_i F_i^*(x) f_i(x) \longrightarrow \begin{cases} ۰ & x \in X \setminus \sqcup_k U_k \\ \lambda_k(x) & x \in U_k \end{cases}$$

چون برای هر $f \in H'_A$ ، $F(f)$ پیوسته است پس نگاشت $\prod_k C_\circ(U_k) \longrightarrow C(X)$ با ضابطه‌ی $\lambda \longmapsto F(f^\lambda)$ خوش‌تعریف می‌باشد. هم‌چنین این نگاشت یک به یک است و درنتیجه

$$\prod_k C_\circ(U_k) \subset C(X).$$

□

لم ۵.۲.۳. فرض کنید دنباله‌ی $\{I_k\}$ از ایده‌آل‌های چپ غیر بدیهی C^*–جبر A موجود باشد به‌طوری‌که

(۱) اگر $k \neq l$ آنگاه $I_k^* I_l = ۰$ ،

(۲) $\prod_k I_k \subset A$.

دراین‌صورت A ، C^*−بازتابی نیست.

برهان. فرض کنید $a_k \in I_k$ به‌طوری‌که $\|a_k\| = ۱$. قرار دهید $F = (a_۱, a_۲, \dots)$. چون $\sum_k a_k^* a_k$ در A همگرا نیست پس $F \notin H_A$. نشان می‌دهیم $F \in H''_A$. برای هر $f = (f_۱, f_۲, \dots) \in H'_A$ تعریف می‌کنیم:

$$F(f) := (a_۱^* f_۱, a_۲^* f_۲, \dots)$$

چون I_k ایده‌ال چپ است پس $a_k^* f_k \in I_k$. هم‌چنین چون $f \in H'_A$ پس دنباله‌ی $(a_۱^* f_۱, a_۲^* f_۲, \dots)$ کران‌دار می‌باشد، بنابراین

$$F(f) := (a_۱^* f_۱, a_۲^* f_۲, \dots) \in \prod_k I_k \subset A$$

درنتیجه $F \in H''_A$. □

قضیه ۶.۲.۳. مدول $\ell_۲(C(X))$ ، C^*−بازتابی نیست اگر و تنها اگر دنباله‌ی $\{U_k\}$ از زیرمجموعه‌های باز دو به دو مجزا و ناتهی X موجود باشد به‌طوری‌که

$$\prod_k C_\circ(U_k) \subset C(X).$$

برهان. ابتدا فرض کنید ، C^*− بازتابی نباشد، دراین‌صورت بنا به لم (۴.۲.۳) حکم برقرار است . بالعکس فرض کنید دنباله‌ی $\{U_k\}$ از زیرمجموعه‌های باز دو به دو مجزا و ناتهی X موجود باشد به‌طوری‌که

$$\prod_k C_\circ(U_k) \subset C(X),$$

با قرار دادن $A = C(X)$ و $I_K = C_\circ(U_k)$ ، حکم با استفاده از لم (۵.۲.۳) اثبات می‌شود. □

نتیجه ۷.۲.۳. هر C^*−مدول هیلبرت شمارا تولیدشده روی $C(X)$ ، C^*−بازتابی است اگر و تنها اگر هیچ دنباله‌ای از ایده‌ال‌های متعامد مانند $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ موجود نباشد که $\prod_k I_k \subset C(X)$.

مراجع

[1] S. Baaj and P. Julg, *Theorie bivariant de Kasparov et opeeraeurs non bornes dans les C^*-modules hilbertiens*, C. R. Acad. Sci. Paris, **296**(1983) 875–878.

[2] S. Baaj and G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualite pour les produits croises de C^*-algebres*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, **26**(1993) 425–488.

[3] L. G. Brown, P. Green and M. A. Rieffel, *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^*-algebras*, Pacific J. Math, **71** (1977) 349–363.

[4] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, (1977).

[5] M. Frank, *Self-duality and C^*-reflexivity of Hilbert C^*-moduli*, Z. Anal. Anwendungen, **9** (1990), 165–176.

[6] M. Frank, V. Manuilov, E. Troitsky, *A reflexivity criterion for Hilbert C^*-modules over commutative C^*-algebra* , New York J. Math, **16**(2010) 399–408

[7] G. G. Kasparov, *Hilbert C^*-modules: Theorem of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory, **4**(1980) 133–150.

[8] G. G. Kasparov, *The oprator K-functor and extentions of C^*-algebras*, Math. USSR–Izv, **16**(1981), 513–572.

[9] E. C. Lance, *Hilbert C^*-modules—a toolkit for oprator algebraists*, LMS Lecture Note Series 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[10] V. M. Manuilov, E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, **226**(2005).

[11] M. S. Moslehian, *What is Hilbert C^*-modules*, arxiv: math/0212368 V2[math.OA] **16**(2007).

[12] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, (2000).

[13] G. J. Murphy, *C^*-algebras and oprator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1990).

[14] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc, **182** (1973), 443–468.

[15] M. A. Rieffel, *Induced representations of C^*-algebras*, Adv. in Math, **13**(1974), 176–257

[16] M. A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras, in operator algebras and applications* , (ed. R. V. Kadison), Proc. Sympos, Pure Math, Amer. Math. Soc, **38**(1982), 285–298.

[17] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford University Press, New York, (1993).

[18] S.L. Woronowicz, *Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups*, Commun. Math. Phys, **136**(1991) 399–432.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الحاق‌پذیر	Adjointable
C^*–بازتابی	C^*-reflexivity
بستار	Clouser
پوشش	Covering
پیچش	Involution
پیش‌دوگان	Pre-dual
تیخونوف	Tychonov
جابه‌جایی	Commutative
C^*–جبر	C^*-algebra
W^*–جبر	W^*-algebra
جبر باناخ	Banach algebra
چگال	Dens
خودالحاق	Self-adjoint
خوددوگان	Self-dual
دوگان	Dual
دوگان دوم	Second dual
شمارا تولید شده	Countably generated
طولپا	Isometry
عملگر	Oprator
فشرده	Compact
فشرده‌سازی استون-چک	Ston-cech compactification
فشرده‌ی موضعی	Locally compact

فضای بئر	Bair space
فضای به‌طور کامل منظم	completely regular space
فضای توپولوژیک	Topological space
فضای هاسدورف	Hausdorff space
قضیه‌ی گلفند	Gelfand theorem
متمم‌پذیر توپولوژیکی	Topologically complementable
متمم‌پذیر متعامد	Orthogonally complementable
C^*–مدول پیش هیلبرت	Pre Hilbert C^*-module
C^*–مدول هیلبرت	Hilbert C^*-module
A–مدول هیلبرت استاندارد	Standard Hilbert A-module
مشخصه	Character
معکوس‌پذیر	Invertable
نشاننده	Embedding
نقطه‌ی چسبیدگی	Adherent point
نقطه‌ی درونی	Interior point
همریختی	Homomorphism
یکدارشده	Unitalization
یکریختی	Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adherent point	نقطه‌ی چسبیدگی
Adjointable	الحاق‌پذیر
Banach algebra	جبر باناخ
Bair space	فضای بئر
C^*-algebra	C^*جبر
Character	مشخصه
Commutative	جابه‌جایی
Compact	فشرده
Completely regular space	فضای به‌طور کامل منظم
Countably generated	شمارا تولید شده
C^*-reflexivity	C^*بازتابی
Covering	پوشش
Dens	چگال
Dual	دوگان
Embedding	نشاننده
Gelfand theorem	قضیه‌ی گلفند
Hausdorff space	فضای هاسدورف
Hilbert C^*-module	C^*مدول هیلبرت
Homomorphism	همریختی
Isomorphism	یکریختی
Isometry	طولپا
Interior point	نقطه‌ی درونی

Invertable .... معکوس‌پذیر

Involution .... پیچش

Locally compact .... فشرده‌ی موضعی

Oprator .... عملگر

Orthogonally complementable .... متمم‌پذیر متعامد

Pre Hilbert C^*-module .... C^*-مدول پیش هیلبرت

Pre-dual .... پیش دوگان

Second dual .... دوگان دوم

Self-adjoint .... خودالحاق

Self-dual .... خوددوگان

Standard Hilbert C^*-module .... A−مدول هیلبرت استاندارد

Ston-cech compactification .... فشرده‌سازی استون−چک

Topological Space .... فضای توپولوژی

Topologically complementable .... متمم‌پذیر توپولوژیکی

Tychonov .... تیخونوف

Unitalization .... یکدارشده

W^*-algebra .... W^*-جبر

Surname: Hallaj Fadardi Name: Fatemeh

Title: Reflexivity of Hilbert C^*-modules over commutative C^*-algebras

Supervisor: Dr. K. Sharifi

Advisor: Dr. M. Iranmanesh

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Analysis

Shahrood University of Technology Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of pages: 45

Keywords: Commutative C^*-algebra, Hilbert C^*-module, C^*-reflexivity

Abstract

A C^*-algebra A is C^*-reflexive if any countably generated Hilbert C^*-module M over A is C^*-reflexive, i.e. the second dual module M'' coincides with M. We show that a commutative C^*-algebra A is C^*-reflexive if and only if for any sequence I_k of disjoint non-zero C^*-subalgebras, the canonical inclusion $\oplus_k I_k \subset A$ doesn't extend to an inclusion of $\prod_k I_k$.

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Reflexivity of Hilbert C^*-modules over commutative C^*-algebras

Supervisor

Dr. K. Sharifi

Advisor

Dr. M. Iranmanesh

by

[illegible]

2013