دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی ، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

بررسی مسئله پوشش

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر علیرضا ناظمی

پژوهشگر

آسیه سهرابی سورکی

بهمن ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: سهرابی سورکی نام: آسیه

عنوان: بررسی مسئله پوشش

استاد راهنما: دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور: دکتر علیرضا ناظمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۱۰۰

واژگان کلیدی: مکانیابی، پوشش، فاصله پوششی، تسهیل، سرویس‌دهنده، نقطه تقاضا.

چکیده

در سالهای اخیر مطالعات مکانیابی پوششی به عنوان یکی از عناصر کلیدی در موفقیت و بقای مراکز صنعتی و خدماتی مطرح است. در این میان شناخت هدفها و روشهای حل مسائل مکانیابی پوششی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. در این پایان‌نامه ابتدا مقدمه‌ای بر مسائل مکانیابی و مفهوم پوشش و سپس تاریخچه‌ای از مسائل مکانیابی پوششی ارائه می‌شود. در ادامه، مسئله مکانیابی پوشش مجموعه و مسئله مکانیابی بیشترین پوشش بیان شده و چند روش ابتکاری برای حل آنها ارائه می‌شود. همچنین در ادامه مبحث مکانیابی بیشترین پوشش، مدل مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار را معرفی می‌کنیم. به عنوان سومین مسئله پوششی، مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله را مطرح می‌کنیم، و چند فرمول‌بندی مختلف را برای حل آن ارائه نموده، زمان اجرای این فرمول‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. در آخر نیز، روش ابتکاری جستجوی ممنوع را معرفی کرده و عملکرد آن را در حل مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله با سایر روشهای ابتکاری ارائه شده مقایسه می‌کنیم.

خدای متعال را سپاس که نعماتش بی شمار، قدرتش بی انتها، رحمتش فراگیر و الطافش لایتناهی است؛ او که در لحظه لحظه ی زندگی یاور و پشتیبانم بوده و در سختی ها و ناملایمات تکیه گاهم . . .

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که آموختن بی وجودشان میسر نبود.

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار این دوره از تحصیلات خود را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی پدر و مادر فداکار، برادر عزیز و خواهرهای مهربانم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند و صبورانه ادامه‌ی این راه را برایم هموار نمودند، تشکر کنم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر فتحعلی که در انجام این تحقیق با مساعدت‌های بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند خود همواره مرا یاری نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر ناظمی به خاطر زحمات بی‌شائبه‌شان سپاسگزارم.

آسیه سهرابی سورکی

بهمن ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه و مفهوم پوشش

۱.۱ مقدمه

مکانیابی یکی از شاخه‌های ریاضیات کاربردی و مهندسی صنایع است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکانیابی مراکز (مکانیابی ساختمانها و مراکز) را انتخاب مکان برای یک یا چند مرکز، با در نظر گرفتن سایر مراکز و محدودیت‌های موجود می‌دانند، به‌گونه‌ای که هدف ویژه‌ای بهینه شود. این هدف می‌تواند هزینه حمل و نقل، ارائه خدمات عادلانه به مشتریان، در دست گرفتن بزرگترین بازار و غیره باشد.

انجام مطالعات مکانیابی نیازمند تخصص‌هایی، از جمله: تحقیق در عملیات، روشهای تصمیم‌گیری، جغرافیا (زمین شناسی و آب و هوا)، اقتصاد مهندسی، علوم کامپیوتر، ریاضی، بازاریابی، طراحی شهر و ... است.

۲.۱ ضرورت انجام مطالعات مکانیابی

تعیین محل یک واحد صنعتی یا خدماتی، یکی از کلیدی‌ترین گامهای تأسیس آن است، چرا که نتایج این تصمیم در دراز مدت اثرات بسزایی از بعد اقتصادی، زیست‌محیطی، مسائل اجتماعی و ... دارد. از بعد درون‌سازمانی می‌توان به نقش مهم مکانیابی در تعیین میزان سرمایه‌گذاری اولیه به هنگام تأسیس و نیز تأثیر کلیدی آن در قیمت تمام شده کالا یا خدمت به هنگام بهره‌برداری طرح اشاره کرد.از بعد برون‌سازمانی نیز، ساخت چنین واحدهایی در یک منطقه می‌تواند شرایط مختلف اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی، زیست‌محیطی و غیره را تحت تأثیر خود قرار دهد.

احداث یک یا چند واحد صنعتی در مکانهای بهینه و در بهترین وضعیت ممکن، نه تنها گردش مواد و خدمات به مشتریان را بهبود می‌بخشد، بلکه واحد را نیز در یک وضعیت مطلوب قرار می‌دهد. تصمیم‌های مرتبط با انتخاب و فراگیری ویژگیهای مکانیابی یک مرکز، می‌تواند اثر بزرگی بر توانایی کسب و حفظ مزیت رقابتی داشته باشد . در بررسی مشاغل زود بازده مشخص شده است که بیش از ۵۰ درصد آنها در سال اول و حدود ۳۰ درصد آنها پس از دو سال، ورشکسته می‌شوند و به شغل دیگری رو می‌آورند. با اینکه در آغاز راه اندازی این مشاغل، تمام جوانب ارائه خدمات بررسی می‌شود ولی بی‌توجهی به مسئله مهم مکان سبب می‌شود تا

واحد تولیدی به سوددهی مورد نظر نرسد و از رسیدن به هدف خود باز ماند.

انجام مطالعات مکانیابی درست و مناسب، علاوه بر تأثیر اقتصادی بر عملکرد واحد صنعتی، اثرات اجتماعی، زیست‌محیطی، فرهنگی و اقتصادی در منطقه محل احداث خود خواهد داشت. در ضمن ویژگیهای منطقه‌ای نیز به عنوان عوامل کلیدی موثر در تعیین محل در مسائل مکانیابی محسوب می‌شوند.

در ادامه به معرفی مسائل مکانیابی پوششی و تاریخچه‌ای از آن می‌پردازیم.

۳.۱ مسائل مکانیابی پوششی

مسائل مکانیابی پوششی رده‌ای از مسائل مکانیابی هستند که در آنها مجموعه‌ای از نقاط تقاضا (N) و مجموعه‌ای از مکان‌های کاندیدای تسهیلات یا سرویس‌دهنده‌ها (M) وجود دارد و هدف این مسائل تخصیص تسهیلات به زیر مجموعه‌ای از مکان‌های کاندیدا به گونه‌ای است که با توجه به نوع تسهیلات و امکانات موجود، پوشش مطلوب و مورد نظر برای نقاط تقاضا فراهم گردد.

۱.۳.۱ مفهوم پوشش

در مباحث مکانیابی، سرویس‌دهی به مشتری‌ها از تسهیلاتی که مکانیابی می‌شوند به فاصله بین مشتری‌ها تا آن تسهیلات بستگی دارد. یک مشتری باید در فاصله مناسبی از سرویس‌دهنده باشد تا بتواند از آن سرویس دریافت کند.

تعریف ۱.۳.۱. فاصله پوششی یا حداکثر فاصله سرویس[۱]، بیشترین فاصله‌ای است که مشتری می‌تواند از سرویس‌دهنده داشته باشد و از آن سرویس بگیرد. این فاصله یک مقدار معلوم و از پیش تعیین شده است که معمولاً با s یا D_c نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. اگر مشتری (نقطه تقاضا) در فاصله کمتر و یا مساوی فاصله پوششی از یک تسهیل قرار گیرد، توسط آن تسهیل سرویس‌دهی شده و یا اصطلاحاً پوشانده می‌شود. ولی اگر فاصله‌اش تا تسهیل بیشتر از این مقدار معلوم باشد توسط این تسهیل سرویس‌دهی و پوشانده نمی‌شود.

[۱] Maximal service distance

به طور کل، نقطه تقاضای i پوشانده می‌شود اگر فاصله‌اش تا نزدیکترین تسهیل، کوچکتر و یا مساوی فاصله پوششی باشد.

۲.۳.۱ فضای مسائل مکانیابی پوششی

پیوسته: هر گاه فضای مکان تسهیلات و نقاط تقاضا پیوسته باشند، یعنی توسط متغیرهایی که به صورت پیوسته تغییر می‌کنند مشخص شوند، مدل را پیوسته گویند.

گسسته: مدل های مکانیابی گسسته مدل‌هایی هستند که در آنها باید مکان سرویس‌دهنده‌ها را تنها روی نقاطی از پیش‌تعیین‌شده پیدا کنیم. در این مدل‌ها مجموعه‌ای متناهی از نقاط کاندیدا تعیین شده است که توسط متغیرهای گسسته نشان داده می‌شوند.

۳.۳.۱ مسائل پوششی روی یک شبکه عمومی

فرض کنید $G = (N, L)$ یک شبکه باشد که N مجموعه رئوس آن با $|N| = n$ و L مجموعه یالهای آن است. نقاط تقاضا روی رئوس شبکه قرار می‌گیرند. فرض کنید c_i $(c_i \geq ۰)$ وزن مربوط به گره i باشد که می‌تواند نشان‌دهنده جمعیت در گره i باشد. اگر $Y = (y_۱, ..., y_p)$ مجموعه مکان‌های تسهیلات و s فاصله پوششی باشد، می‌گوییم گره i پوشانده می‌شود اگر $d(i, Y) \leq s$ که در آن

$$d(i, Y) = \min_{۱ \leq j \leq p} \{d(i, y_j)\}.$$

۴.۱ تاریخچه مسائل مکانیابی پوششی

تاکنون دانشمندان زیادی بر روی مسائل مکانیابی پوششی کار کرده و مدل‌های متعددی را برای آن ارائه نموده‌اند. اولین مدل، مدل مکانیابی پوشش مجموعه $(SCLP)$ است که توسط تورگاس[۲] و همکاران [۲۴] ارائه شد. $SCLP$ در جستجوی کمترین تعداد تسهیل مورد نیاز برای پوشش تمام نقاط تقاضا در زمان پاسخ‌دهی استاندارد و معلومی می‌باشد. رویداد مهم بعدی شکل‌گیری مسئله مکانیابی بیشترین پوشش

[۲] Toregas

($MCLP$) توسط چرچ[۳] و ریول[۴] [۳] بود. این روش که برای منابع محدود به کار می‌رود، با ثابت نگه داشتن تعداد تسهیلات، مفهوم ماکزیمم ساختن جمعیت تحت پوشش در زمان پاسخ‌دهی استاندارد را معرفی کرد.

بعدها، هوگان[۵] و ریول [۱۴] مدل‌های پوششی کلاسیک $MCLP$ و $SCLP$ را با ایجاد پوشش‌های چندگانه و پشتیبان با نیاز و بدون نیاز به پوشش همه نقاط تقاضا توسعه دادند.

اخیراً گندرو[۶] و همکاران [۱۲] یک مدل جدید پوشش دوگانه را معرفی کردند و آن را با روش ابتکاری جستجوی ممنوع (این روش در فصل ۵ معرفی شده است) که جواب‌های نزدیک بهینه را در بهترین زمان محاسباتی ارائه می‌دهد، حل کردند.

مکانیابی تسهیلاتی که خدمات اورژانسی ارائه می‌دهند مثل آتش‌نشانی و آمبولانس، نمونه خاص و مهمی از مسائل مکانیابی پوششی است. در اوایل دهه ۱۹۸۰ داسکین[۷] [۵] و [۶] مدل مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار ($MEXCLP$) را برای حل این‌گونه مسائل معرفی کرد. $MEXCLP$، مشغول بودن سرویس‌دهنده‌ها را مورد توجه قرار داده و آن را با یک مدل بهینه‌سازی احتمالی بیان می‌کند. در این مدل پوشش قابل انتظار با فرض این که سرویس‌دهنده‌ها با یک احتمال قابل محاسبه‌ی معین، مشغول و خارج از دسترس هستند، ماکزیمم می‌شود. داسکین همچنین روش ابتکاری جانشینی تک گره[۸] را برای حل بهتر مسائل مکانیابی پوششی ارائه داد.

داسکین و همکاران [۷] ، مدل‌های پوششی پشتیبان و چندگانه را نیز با مدل‌های پوششی قابل انتظار تلفیق کردند. بعدها ریول و هوگان [۲۰] مسئله مکانیابی حداکثر دسترسی ($MALP$) را معرفی کردند. این مدل، تعداد ثابتی سرویس‌دهنده را به گونه‌ای توزیع می‌کند که جمعیت تحت پوشش با یک تسهیل در دسترس تحت یک زمان پاسخ‌دهی استاندارد، ماکزیمم شود.

---

[۳] Church
[۴] Revelle
[۵] Hogan
[۶] Gendreau
[۷] Daskin
[۸] Single node substitution heuristic

آنچه که بیان شد تاریخچه‌ای مختصر از مسائل مکانیابی پوششی است اما مطالعه و تحقیق در زمینه مسائل پوششی همواره ادامه داشته است. از جمله فعالیت‌هایی که در سالهای اخیر در این زمینه صورت گرفته است می‌توان به حل مسائل بیشترین پوشش قابل انتظار در مقیاس بزرگ با الگوریتم ژنتیک توسط آی توگ[۹] و سی دام[۱۰] [۱] و نیز طرح مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله توسط برمن[۱۱]و هوآنگ[۱۲] [۳] اشاره کرد.

حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار وقتی اندازه مسئله بزرگ باشد مثل سایر مسائل بزرگ‌مقیاس که در زندگی واقعی با آنها روبرو هستیم در زمان مناسب و منطقی بسیار دشوار بوده و نیاز به روشهای ابتکاری کارآمدی دارد. موفقیت الگوریتم‌های ژنتیک در حل مسائل ترکیبی پیچیده موجب شد که آی توگ و سی دام در صدد حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار در مقیاس بزرگ با این الگوریتم برآیند. مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله نیز که توسط برمن و هوآنگ معرفی شد مربوط به مکانیابی تسهیلات نامطلوب و ناخوشایند است که به دلیل تأثیرات نامطلوب و ضررهایی که برای ساکنین دارند سعی می‌کنیم تا آنجا که ممکن است جمعیت تحت پوشش با آنها را کمینه سازیم. از طرفی هم به دلایلی مثل حساسیت و امنیت نمی‌خواهیم همه آنها در یک مکان تجمع داشته باشند. برای جلوگیری از تجمع تسهیلات، آنها را به قرار گرفتن در فاصله بزرگتر و یا مساوی یک فاصله معین از یکدیگر مقید می‌کنیم. بدین ترتیب مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله شکل می‌گیرد.

همان‌طور که گفته شد، مسائل مکانیابی پوششی از تنوع زیادی برخوردارند و در هر یک از آنها هدف ویژه‌ای دنبال می‌شود. ما در این پایان‌نامه، مسئله مکانیابی پوشش مجموعه (فصل ۲)، مسئله مکانیابی بیشترین پوشش (فصل ۳) و مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله (فصل ۴) را بررسی کرده، فرمول‌بندی ریاضی آنها را بیان می‌نماییم و سپس برای حل آنها روشهایی را ارائه می‌دهیم.

از آنجایی که مسائل مکانیابی پوششی $Np-$سخت[۱۳] هستند، بیشتر روشهای ارائه شده برای حل آنها ابتکاری

[۹] Aytug
[۱۰] Saydam
[۱۱] Berman
[۱۲] Huang
[۱۳] $Np-$ hard

می‌باشند.

۵.۱ روشهای ابتکاری

روشهای ابتکاری یا همان روشهای جواب تقریبی، از آغاز تحقیق در عملیات برای مواجهه با مسائل ترکیبی پیچیده استفاده شدند. با پیشرفت نظریه پیچیدگی[۱۴] در اوایل دهه ۷۰ روشن شد که امید کمی برای یافتن روشهای جواب دقیق و کارآمد برای حل مسائل N_p-سخت وجود دارد. به همین دلیل به روشهای ابتکاری برای حل این مسائل و نیز مسائل ترکیبی بزرگی که در زندگی واقعی با آنها روبرو هستیم روی آورده شد.

درست است که روشهای ابتکاری قادر نیستند بهینگی جوابهایی را که به‌دست می‌آورند تضمین کنند ولی روشهای دقیق (که به طور نظری می‌توانند چنین تضمینی را فراهم کنند) در حل مسائل واقعی زندگی که معمولاً سطوح بالایی از پیچیدگی را دارا هستند کارآمد نبوده و در اغلب موارد حتی نمی‌توانند جوابهایی نزدیک به جواب‌های به‌دست آمده از روشهای ابتکاری را برای این‌گونه مسائل به‌دست آوردند. علاوه بر این بعضی از کاربردهای موفق‌تر روشهای دقیق از تلفیق استراتژیهای ابتکاری با آنها به وجود آمده است.

در ادامه روش ابتکاری آزادسازی لاگرانژ را معرفی می‌کنیم. اما قبل از آن لازم است که آزاد سازی را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. دو مسئله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$(IP) \quad Z = max\{c^T x \ : \ x \in X \subseteq R^n\}$$

$$(RP) \quad Z^{RP} = max\{f(x) \ : \ x \in T \subseteq R^n\}$$

مسئله RP یک آزادسازی برای مسئله IP نامیده می‌شود اگر

الف) $X \subseteq T$

ب) $f(x) \geq c^T x \ ; \quad \forall \, x \in X$

---

[۱۴] Complexity theory

تعریف ۱.۵.۲. آزادسازی برنامه‌ریزی خطی مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح

$$IP \quad max\{c^T x \ : \ x \in P \cap Z\}$$

که $P = \{x \ : \ Ax \leq b\}$، برنامه‌ریزی خطی $Z^{LP} = max\{c^T x \ : \ x \in P\}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۵.۳. برای بردار $u \in R^m$ ، آزادسازی لاگرانژ مسئله

$$IP_1 \qquad Z = max \quad c^T x$$

$$Dx \leq d$$

$$x \in X$$

به صورت :

$$IP(u) \qquad Z(u) = max \ \ c^T x + u^T(d - Dx)$$

$$x \in X$$

است، که بردار $u \geq 0$ ، متغیر دوگان یا ضریب لاگرانژی مرتبط با قید $Dx \leq d$ نامیده می‌شود.

لم ۱.۵.۴. *برای هر $u \geq 0$، مسئله $IP(u)$ یک آزادسازی مسئله IP_1 است.*

برهان. هر جواب شدنی مسئله IP_1، برای مسئله $IP(u)$ نیز شدنی است زیرا

$$\{x : Dx \leq d, x \in X\} \subseteq X$$

پس شرط اول آزادسازی برقرار است. اگر x برای مسئله IP_1 شدنی باشد آنگاه $Dx \leq d$ یا $d - Dx \geq 0$.
از آنجایی که $u \geq 0$ داریم $u^T(d - Dx) \geq 0$ و بنابراین

$$c^T x + u^T(d - Dx) \geq c^T x$$

و لذا شرط دوم آزادسازی نیز برقرار است.

□

به طور کلی، آزاد سازی لاگرانژ می‌تواند برای هر مسئله بهینه‌سازی ترکیبی که با برنامه‌ریزی عدد صحیح فرمول‌بندی شده به کار رود. از آنجایی که مسائل پوششی، مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر و یک هستند، فرمول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P: \qquad v = min \;\; cx$$

$$S.t. \quad Ax \leq b$$

$$Dx \leq e$$

$$x \in \{0, 1\}^n$$

فرض کنید $Ax \leq b$ مجموعه قیود پیچیده‌ای باشد که اگر آزاد شده و به تابع هدف بروند، حل مسئله لاگرانژی حاصل، آسانتر از حل مسئله P باشد. در این صورت، این قیود را با بردار λ که بردار ضرائب لاگرانژی است به تابع هدف اضافه می‌کنیم. آزادسازی لاگرانژ مسئله P به صورت زیر است:

$$LR_\lambda: \quad v_\lambda = min \;\; cx + \lambda(Ax - b)$$

$$S.t. \quad Dx \leq e$$

$$x \in \{0, 1\}^n$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که P، حداقل یک جواب شدنی دارد و مجموعه جوابهای شدنی LR_λ که به λ بستگی ندارد، متناهی است. از آنجایی که $Ax \leq b$ باید $\lambda \geq 0$ باشد تا v_λ یک کران پایین برای مسئله P باشد. اگر قیود پیچیده‌ی ما به شکل $Ax \geq b$ باشند، باید $\lambda \leq 0$ باشد تا $v_\lambda \leq v$ برقرار شود. مشابهاً، در حالت $Ax = b$، λ آزاد در علامت خواهد بود. جواب مسئله LR_λ برای هر بردار $\lambda \geq 0$ یک کران پایین برای مسئله P است و ما می‌خواهیم بهترین کران پایین را به‌دست آوریم. بهترین انتخاب برای λ، جواب بهینه مسئله زیر است:

$$D: \quad v_D = max \;\; v_\lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

D یک مسئله مقعر است که ویژگیهای ساختاریش، آن را قابل حل می‌سازد. از آنجایی‌که فرض کردیم مجموعه جوابهای شدنی LR_λ متناهی است، مجموعه $X = \{x \; : \; Dx \leq e, \; x \in \{0, 1\}^n\}$ می‌تواند به صورت $X = \{x, t = 1, ..., T\}$ بیان شود و مسئله D به صورت برنامه‌ریزی خطی زیر که تعداد قیود آن نیز زیاد است، نوشته می‌شود:

$$\overline{D}: \; D_v = max \; w$$

$$S.t. \quad w \leq cx^t + \lambda(Ax^t - b) \qquad t = 1, ..., T$$

$$\lambda \geq 0$$

تابع v_λ پیوسته و مقعر بوده و در همه جا دیفرانسیل‌پذیر نیست ولی در همه جا زیردیفرانسیل‌پذیر است. از آنجایی که روش بهینه سازی گرادیان با جانشینی زیرگرادیان‌ها به جای گرادیان‌ها سازگار است. مسئله D را می‌توان با روش بهینه‌سازی زیرگرادیان حل کرد.

بردار m مؤلفه‌ای γ یک زیرگرادیان v_λ در $\lambda = \overline{\lambda}$ است اگر

$$v_\lambda \leq v_{\overline{\lambda}} + (\lambda - \overline{\lambda})\gamma \qquad \forall \; \lambda$$

واضح است که v_λ در $\lambda = \overline{\lambda}$ می‌تواند دارای چندین زیرگرادیان باشد و $\gamma = (Ax - b)$ یک زیرگرادیان v_λ در هر λ ای که LR_λ دارای جواب شدنی است می‌باشد. هر ترکیب محدب از زیرگرادیان ها در $\lambda = \overline{\lambda}$ نیز یک زیرگرادیان در این نقطه است.

در روش بهینه‌سازی زیرگرادیان، با بردار آغازین λ^0، دنباله $\{\lambda^k\}$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_i^{k+1} = max\{0, \lambda_i^k + \theta_k \gamma_i^k\} \qquad i = 1, ..., m$$

که γ^k یک زیرگرادیان در $\overline{\lambda} = \lambda$ و $0 < \theta_k$ اندازه گام است. پل و جک[15][11] ثابت کردند که اگر $0 \longrightarrow \theta_k$ و $\infty \longrightarrow \sum_k \theta_k$ آنگاه $v_D \longrightarrow v_{\lambda^k}$، که v_{λ^k} بردار v_λ در تکرار $k-$ ام است.
معمولاً در کاربردهای عملی اندازه گام از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\theta_k = \alpha_k \ (v^* - v_{\lambda^k})/\|\gamma^k\|^2$$

پارامتر α_k در اندازه گام یک اسکالر است که در رابطه $2 \leq \alpha_k \leq 0$ صدق می‌کند. v^* یک کران بالای v_D است که معمولاً با بکارگیری یک روش ابتکاری برای حل مسئله P به‌دست می‌آید. $\|\gamma^k\|$، نرم بردار زیرگرادیان در تکرار $k-$ ام است.

[15] Pol - Jak

فصل ۲

مسئله مکانیابی پوشش مجموعه

۱.۲ مسئله مکانیابی پوشش مجموعه

ساده‌ترین مدل از میان مدل‌های مکانیابی پوششی، مدل مکانیابی پوشش مجموعه است. فرض کنید n نقطه تقاضا و m نقطه کاندید برای تخصیص تسهیلات (سرویس‌دهنده‌ها) به آنها موجود باشد. در مسئله مکانیابی پوشش مجموعه هدف، یافتن مجموعه‌ای از مکان‌های کاندیدای تسهیلات با کمترین هزینه است به گونه‌ای که هر نقطه تقاضا حداقل با یک تسهیل پوشانده شود. به عبارت دیگر، هدف این مسئله به‌دست آوردن پوشش برای تمام نقاط تقاضا با کمترین هزینه است.

فرمول ریاضی مدل به صورت زیر است؛

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{j=۱}^{m} f_j X_j & & \\
S.t. \quad & \sum_{j=۱}^{m} a_{ij} X_j \geq ۱ & \quad i = ۱, ..., n & \\
& X_j \in \{۰, ۱\} & \quad j = ۱, ..., m &
\end{aligned}
\tag{۱.۲}
$$

که در آن :

$$
a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مکان کاندیدای } j \text{ بتواند نقطه تقاضای } i \text{ را بپوشاند} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

و

$$
X_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر در مکان کاندیدای } j \text{ تسهیلی قرار گیرد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

و f_j هزینه تأسیس تسهیل در مکان کاندیدای j می‌باشد.

تابع هدف، هزینه کل تأسیس تسهیلات را کمینه می‌سازد. قیود (۱.۲) نشان می‌دهند که هر نقطه تقاضا باید حداقل با یک تسهیل پوشانده شود.

برای هر نقطه تقاضای i، زیرمجموعه‌ای از مکان‌های کاندیدای تسهیلات (N_i) وجود دارد که می‌تواند به نقطه تقاضای i سرویس دهد و آن را بپوشاند. فرض کنید D_c فاصله پوششی و d_{ij} کمترین فاصله از گره i

به گره j باشد، در این صورت مجموعه N_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_i = \{j \mid d_{ij} \leq D_c\}$$

قیود (۱.۲) را به وسیله مجموعه N_i می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{j \in N_i} X_j \geq 1, \qquad \forall\, i \tag{۲.۲}$$

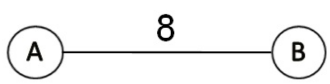
قیود (۱.۲) و (۲.۲) هم‌ارزند.

اگر تمام هزینه‌های تسهیلات با هم برابر باشند (مثلاً برای همه مکان‌های کاندیدای j، $f_j = 1$) تابع هدف به صورت زیر ساده می‌شود:

$$min \qquad \sum_{j=1}^{m} X_j$$

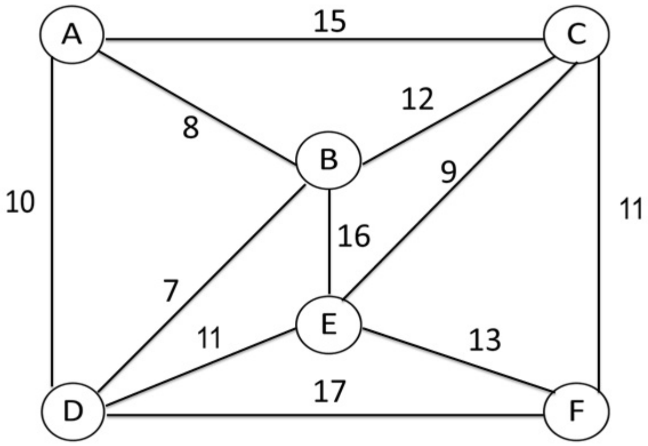
در این بخش، همواره این شکل ساده‌تر تابع هدف را در نظر می‌گیریم.

با وجود این که در اغلب موارد، مکان‌های کاندیدای تسهیلات همان گره‌های تقاضا فرض می‌شوند ولی لزوماً همیشه این‌گونه نیست. زمانی که مکان‌های کاندیدا را به یک مجموعه متناهی از گره‌ها (همان نقاط تقاضا) محدود می‌کنیم ممکن است برای پوشش تمام نقاط تقاضا به تعداد تسهیل بیشتری نیاز باشد نسبت به حالتی که مکان‌های کاندیدا، تمام نقاط شبکه انتخاب می‌شوند. این موضوع در شکل ۱.۲ نشان داده شده است. در این مثال فاصله پوششی (D_c) برابر ۵ است، اگر مکان‌های کاندیدا همان گره‌های تقاضا (A, B) باشند برای پوشش کامل به ۲ تسهیل (در گره‌های A و B) نیاز داریم ولی اگر تمام نقاط شبکه، مکان‌های کاندیدا فرض شوند با ۱ تسهیل در وسط خط واصل گره‌های A و B به پوشش کامل می‌رسیم.



شکل ۱.۲: مثالی برای نمایش مجموعه مکان‌های کاندیدا

مثال ۱.۱.۲. در شکل ۲.۲ فاصله پوششی ۱۱ و مکان‌های کاندیدای تسهیلات با نقاط تقاضا، برابر است. مدل پوشش مجموعه به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۲.۲: شبکه G

$$min \qquad X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F$$

$$S.t. \qquad X_A + X_B + X_D \geq ۱$$

$$X_A + X_B + X_D \geq ۱$$

$$X_C + X_E + X_F \geq ۱$$

$$X_A + X_B + X_D + X_E \geq ۱$$

$$X_C + X_D + X_E \geq ۱$$

$$X_C + X_F \geq ۱$$

$$X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F \in \{۰, ۱\}$$

وقتی تمام هزینه‌ها با هم برابر باشند می‌توانیم اندازه مسئله را با استفاده از قواعد کاهشی، کاهش دهیم.

۲.۲ قواعد کاهشی

۱.۲.۲ قاعده کاهش ستونی

در ماتریس ضرایب مسئله، دو ستون k و j را در نظر بگیرید. اگر برای تمام نقاط تقاضای i، $a_{ij} \leq a_{ik}$ و حداقل یک نقطه تقاضای i، موجود باشد که $a_{ij} < a_{ik}$، آنگاه مکان k تمام نقاط تقاضای پوشانده شده توسط مکان j را می‌پوشاند و می‌گوییم مکان k بر مکان j غالب است. در این حالت ستون j را حذف کرده و قرار می‌دهیم $X_j = ۰$. زیرا اگر قرار باشد تسهیلی را در مکان j قرار دهیم با قرار دادن آن در مکان k، هم پوشش مکان j را ایجاد می‌کنیم و هم حداقل یک نقطه تقاضا را که j نمی‌پوشاند، می‌پوشانیم. برای مثال، در مثال ۱.۱.۲ مکان کاندیدای D، بر مکان‌های A و Bغالب است (زیرا مکان D، گره‌های A، B، D و E را می‌پوشاند درحالی‌که مکان‌های A و B تنها گره‌های A، B و D را می‌پوشانند.) پس قرار می‌دهیم $X_A = X_B = ۰$. مشابهاً مکان کاندیدای C بر F غالب است لذا قرار می‌دهیم $X_F = ۰$.

تذکر ۱.۲.۲. *اگر مجموعه‌ای از مکان‌های هم‌ارز داشته باشیم، همه مکان‌ها غیر از یکی از آن‌ها را حذف می‌کنیم. (دو مکان k و j هم‌ارزند اگر برای تمام نقاط تقاضای i، $a_{ij} = a_{ik}$)*

بعد از این کاهش‌های ستونی، مسئله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} min \quad & X_C + X_D + X_E \\ S.t. \quad & X_D \geq ۱ \\ & X_D \geq ۱ \\ & X_C + X_E \geq ۱ \\ & X_D + X_E \geq ۱ \\ & X_C + X_D + X_E \geq ۱ \end{aligned}$$

$$X_C \geq 1$$

$$X_C, X_D, X_E \in \{0, 1\}$$

۲.۲.۲ قواعد کاهش سطری

سطر i را در نظر بگیرید. اگر $\sum_j a_{ij} = 1$ ، آنگاه تنها یک مکان تسهیل وجود دارد که می‌تواند گره i را بپوشاند. در این حالت مکان j^* را که $a_{ij^*} = 1$ می‌یابیم و قرار می‌دهیم $X_{j^*} = 1$. سپس هر سطری که در آن X_{j^*} حضور دارد را حذف می‌کنیم، زیرا با $X_{j^*} = 1$ این قیود برقرار خواهند بود. (این گره‌ها، با تسهیلی که در مکان j^* قرار می‌گیرد پوشانده می‌شوند.) برای مثال، در مسئله‌ی قبل در اولین قید، تنها یک ضریب غیر صفر وجود دارد که مربوط به مکان D است. پس قرار می‌دهیم $X_D = 1$ و آنگاه قیود متناظر با سطرهای A، B، D و E را حذف می‌کنیم. زیرا این گره‌های تقاضا همگی توسط تسهیلی که در مکان D قرار می‌گیرد پوشانده می‌شوند. مشابهاً، قید متناظر گره F، تنها یک ضریب غیر صفر دارد پس قرار می‌دهیم $X_C = 1$ و سطرهای متناظر گره‌های C و F را خارج می‌سازیم. بدین ترتیب هیچ سطر دیگری باقی نمی‌ماند و مسئله به مسئله ساده‌ی کمینه‌سازی X_E با قید ۱ یا $X_E = 0$ تبدیل می‌شود.

همان‌طور که مشاهده شد توانستیم یک مسئله $Np-$ کامل[1] که یافتن جواب بهینه آن دشوار است را با استفاده از قواعد کاهشی سطری و ستونی بدون نیاز به جستجو برای یک تکنیک بهینه‌سازی (مثل برنامه‌ریزی خطی) حل کنیم.

قواعد کاهشی سطری و ستونی توضیح داده شده را می‌توان مکرراً استفاده کرد تا زمانی که هیچ یک از آنها به ما اجازه ندهند که سطر یا ستونی را حذف کنیم. کاربرد مکرر این قواعد معمولاً به ما کمک می‌کند تا مسئله را کاملاً حل کنیم، ولی در بعضی موارد این‌طور نیست. مثال زیر را در نظر بگیرید که موجب می‌شود قاعده کاهش سطری دیگری را معرفی کنیم.

---

[1] Np - complete

مثال ۲.۲.۲. در شبکه شکل ۲.۲ با فاصله پوششی ۱۸ مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر است؛

$$\begin{aligned}
min \quad & X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F \\
S.t. \quad & X_A + X_B + X_C + X_D \geq 1 \\
& X_A + X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1 \\
& X_A + X_B + X_C + X_E + X_F \geq 1 \\
& X_A + X_B + X_D + X_E + X_F \geq 1 \\
& X_B + X_C + X_D + X_E + X_F \geq 1 \\
& X_C + X_D + X_E + X_F \geq 1 \\
& X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

با استفاده از قاعده کاهشی ستونی، ستون‌های نظیر مکان‌های A و F را حذف کرده و قرار می‌دهیم $X_A = X_F = 0$. مسئله حاصل به صورت زیر است؛

$$\begin{aligned}
min \quad & X_B + X_C + X_D + X_E \\
S.t. \quad & X_B + X_C + X_D \geq 1 \\
& X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1 \\
& X_B + X_C + X_E \geq 1 \\
& X_B + X_D + X_E \geq 1 \\
& X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1 \\
& X_C + X_D + X_E \geq 1 \\
& X_B, X_C, X_D, X_E \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

از آنجایی که هیچ سطری نیست که تنها دارای یک عنصر باشد، نمی‌توانیم از قاعده کاهش سطری توضیح داده شده استفاده کنیم. در این شرایط از قاعده دوم کاهش سطری استفاده می‌کنیم.

دو سطر m و n را در نظر بگیرید. اگر برای تمام مکان‌های کاندیدای j، $a_{mj} \leq a_{nj}$ و حداقل برای یک مکان کاندیدای j، $a_{mj} < a_{nj}$ ، آنگاه می‌توانیم سطر n را حذف کنیم. زیرا پوشانده شدن نقطه تقاضای m، پوشانده شدن گره تقاضای n را نیز ضمانت می‌کند. (هر مکان تسهیلی که گره m را بپوشاند، گره تقاضای n را نیز خواهد پوشاند.) در مسئله قبل این قاعده به ما اجازه می‌دهد که سطرهای نظیر گره‌های B و E را حذف کنیم. زیرا هر تسهیلی که گره A را بپوشاند (تسهیل واقع در گره B، C یا D) گره‌های B و E را نیز خواهد پوشاند.

تذکر: در مجموعه‌ای از گره‌های تقاضای هم‌ارز، همه آنها غیر از یکی را حذف می‌کنیم. (گره‌های تقاضای m و n هم‌ارزند اگر برای همه مکان‌های کاندیدای j، $a_{mj} = a_{nj}$ باشد.)

بعد از اعمال کاهش‌های سطری ذکر شده، مسئله زیر را خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}
min \quad & X_B + X_C + X_D + X_E \\
S.t. \quad & X_B + X_C + X_D \geq ۱ \\
& X_B + X_C + X_E \geq ۱ \\
& X_B + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_C + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_B, X_C, X_D, X_E \in \{۰, ۱\}
\end{aligned}$$

متأسفانه، دیگر نمی‌توان اندازه مسئله را کاهش داد. قاعده کاهش ستونی و دو قاعده کاهش سطری، دیگر هیچ سطر یا ستونی را حذف نمی‌کنند. پس باید راه دیگری برای حل مسئله بیابیم.

یک روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، حل مسئله آزادسازی برنامه‌ریزی خطی آنها و به‌دست

آوردن جواب بهینه‌ی صحیح از جواب مسئله آزادسازی خطی با استفاده از تکنیک شاخه و کران می‌باشد. این روش را برای مسئله فوق پیاده می‌سازیم؛ ابتدا مسئله آزادسازی برنامه‌ریزی خطی آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
min \quad & X_B + X_C + X_D + X_E \\
S.t. \quad & X_B + X_C + X_D \geq ۱ \\
& X_B + X_C + X_E \geq ۱ \\
& X_B + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_C + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_B, X_C, X_D, X_E \geq ۰
\end{aligned}$$

با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی حاصل، جواب $X_B = X_C = X_D = X_E = \frac{۱}{۳}$ با مقدار تابع هدف $\frac{۴}{۳}$ به‌دست می‌آید. واضح است که این جواب، صحیح نیست و مسئله اصلی پوشش مجموعه را حل نمی‌کند. ولی مقدار بهینه‌ی تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی $(\frac{۴}{۳} = ۱/۳)$ یک کران پایین برای تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح است. از آنجایی که مقدار تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح، یک عدد صحیح است این کران پایین را عدد ۲ انتخاب نموده و قید $X_B + X_C + X_D + X_E \geq ۲$ را به مسئله برنامه‌ریزی خطی اضافه می‌کنیم.

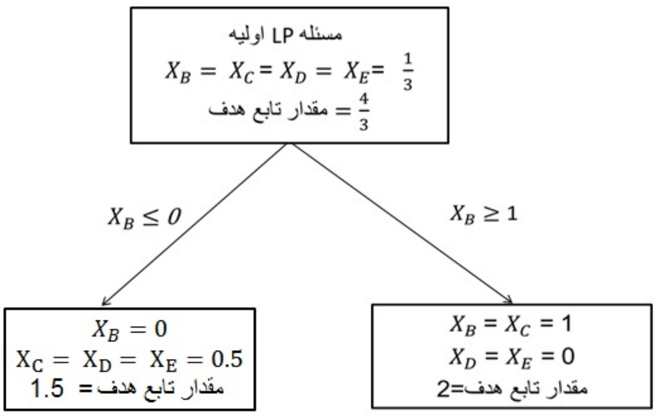
$$\begin{aligned}
min \quad & X_B + X_C + X_D + X_E \\
S.t. \quad & X_B + X_C + X_E \geq ۱ \\
& X_B + X_C + X_D \geq ۱ \\
& X_B + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_C + X_D + X_E \geq ۱ \\
& X_B + X_C + X_D + X_E \geq ۲
\end{aligned}$$

$$X_B, X_C, X_D, X_E \geq ۰$$

در بیشتر مواقع، با اضافه کردن این قید به مسئله برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه صحیح به‌دست می‌آید. ولی اگر حتی با اضافه کردن این قید هم به مسئله برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه صحیح به‌دست نیاید، از تکنیک شاخه و کران برای به‌دست آوردن جواب صحیح استفاده می‌کنیم.

۳.۲ تکنیک شاخه و کران

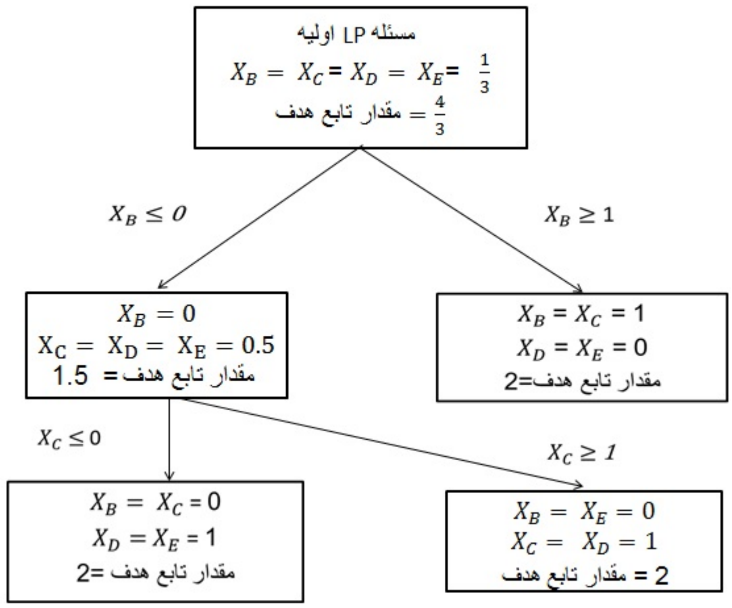
برای درک روش شاخه و کران، کاربرد آن را در مثال بالا نشان می‌دهیم.
با جواب کسری $X_B = X_C = X_D = X_E = \frac{۱}{۳}$ شروع می‌کنیم. یک متغیر غیر صحیح را از این جواب انتخاب کرده و روی آن شاخه می‌دهیم. برای مثال می‌دانیم X_B که در جواب برنامه‌ریزی خطی برابر $\frac{۱}{۳}$ است باید در جواب صحیح صفر یا یک باشد. پس روی X_B شاخه می‌دهیم و دو مسئله جدید، یکی با اضافه کردن قید $X_B \geq ۱$ به مسئله برنامه‌ریزی خطی و دیگری با اضافه کردن قید $X_B \leq ۰$ به مسئله برنامه‌ریزی خطی ایجاد می‌کنیم. نتایج در شکل ۳.۲ نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: نتایج شاخه بندی روی X_B

تحمیل قید $X_B \geq ۱$ منجر به جواب صحیح $(X_B = X_C = ۱\ ,\ X_D = X_E = ۰)$ با مقدار تابع هدف ۲ می‌شود. بنابراین، حالا می‌دانیم که جواب بهینه‌ی صحیح نمی‌تواند مقداری بیشتر از ۲ داشته باشد. اگر قید $X_B \leq ۰$ را به مسئله برنامه‌ریزی خطی اضافه کنیم یک جواب کسری دیگر به‌دست می‌آوریم که در

آن $X_C = X_D = X_E = ۰/۵$ و تابع هدف برابر ۱/۵ است. از آنجایی که این جواب، صحیح نیست دوباره یکی از متغیرهای غیر صحیح (مثل X_C) را انتخاب می‌کنیم و روی آن شاخه می‌دهیم. دوباره دو مسئله جدید یکی با اضافه کردن قید $X_C \geq ۱$ به مسئله قبلی و دیگری با اضافه کردن قید $X_C \leq ۰$ به آن به‌دست می‌آید. توجه کنید که قید $X_B \leq ۰$ نیز در این دو مسئله جدید به کار گرفته می‌شود. نتایج را در شکل ۴.۲ می‌بینیم.



شکل ۴.۲: نتایج شاخه بندی روی X_B و X_C

هر دو مسئله جدید دارای جواب بهینه صحیح با مقدار تابع هدف ۲ می‌باشند. پس به شاخه بندی دیگری نیاز نیست. بدین ترتیب با روش شاخه و کران ۳ جواب بهینه برای این مسئله به‌دست آمد. می‌توان ثابت کرد که انتخاب هر دو گره از ۴ گره B ، C ، D و E در شکل ۲.۲ با فاصله پوششی ۱۸ جواب بهینه است. پس ۶ جواب بهینه داریم که ۳ تا از آنها را با روش شاخه و کران به‌دست آوردیم.

حال الگوریتم شاخه و کران را برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح (که در آن قیود صحیح آزاد می‌شوند) بیان می‌کنیم. الگوریتم برای مسئله کمینه‌سازی توصیف شده، روند مشابهی برای مسئله ماکزیمم‌سازی به کار می‌رود. فقط واضح است که کران پایین و کران بالا، کوچکتر و بزرگتر باید مانند کمینه‌سازی و ماکزیمم‌سازی

تعویض شوند.

الگوریتم شاخه و کران شامل تولید یک درخت شاخه و کران مانند شکل ۴.۲ است. اولین گره و یا گره بالایی، گره ریشه است. گره‌هایی که بلافاصله زیر گره دیگر قرار می‌گیرند، گره فرزند گره بالایی خود هستند، مشابهاً گره‌ای که بلافاصله بالای گره دیگر قرار می‌گیرد، گره والد آن گره می‌باشد. مرتبط با هر گره، یک مسئله بهینه‌سازی وجود دارد که باید حل شود. مسئله در گره فرزند، همانند مسئله در گره والد است فقط با این تفاوت که یک قید اضافی به مسئله گره فرزند تحمیل می‌شود. یک گره در درخت شاخه و کران پایانی[۲] نامیده می‌شود اگر شاخه بندی دیگری از آن گره اتفاق نیفتد. و در یکی از این ۳ حالت رخ می‌دهد:

الف) جواب در آن گره از درخت، در تمام قیود آزاد شده مسئله اصلی صدق کند. یعنی جواب مسئله بهینه‌سازی متناظر با این گره، صحیح باشد.

ب) مسئله بهینه‌سازی (مسئله برنامه‌ریزی خطی) که باید در آن گره حل شود، نشدنی باشد. در این حالت نیز گره، پایانی است. زیرا اضافه کردن قیود بیشتر به مسئله، آن را شدنی نمی‌سازد. پس شاخه بندی بیشتر از چنین گره‌ای مفید نیست.

ج) مسئله بهینه‌سازی متناظر با گره، شدنی است اما مقدار تابع هدف آن بزرگتر از جواب صحیحی است که در گره‌های قبلی به‌دست آمده، در این صورت اضافه کردن قیود دیگر به مسئله بهینه‌سازی متناظر با گره، تنها مقدار تابع هدف را بدتر و بزرگتر می‌سازد. از اینرو نتیجه می‌گیریم که جواب بهینه مسئله اصلی نمی‌تواند با شاخه بندی بیشتر از این گره به‌دست آید. چنین گره‌ای نیز، یک گره پایانی است.

با این پیش‌زمینه می‌توانیم یک روند را برای استفاده از الگوریتم شاخه و کران همراه با آزادسازی برنامه‌ریزی خطی مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح توصیف کنیم. یک روند گام به گام در زیر ارائه شده است:

گام اول: بهترین مقدار جواب یافته شده را بی نهایت قرار دهید.

گام دوم: همه قیود صحیح را آزاد کنید و مسئله برنامه‌ریزی خطی حاصل را حل کنید. اگر جواب آن در تمام

[۲] Fathomed

قیود صحیح آزاد شده صدق کند، توقف کنید، جواب بهینه است. در غیر این صورت به گام سوم بروید.

گام سوم: یک گره غیرپایانی (والد) را در درخت شاخه و کران انتخاب کنید. (در ابتدا، اگر آزادسازی برنامه‌ریزی خطی مسئله اصلی در تمام قیود صحیح صدق نکند، تنها یک گره ریشه داریم.) اگر گره غیرپایانی موجود نباشد، توقف می‌کنیم و بهترین جواب یافته شده بهینه است. اگر گره غیرپایانی موجود باشد، یک متغیر تصمیم را که مقدار آن در مسئله آزاد شده مربوط به آن گره، غیرصحیح است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X این متغیر و γ مقدار غیرصحیح آن باشد.

♦ دو گره فرزند برای گره غیرپایانی ایجاد کنید. در گره فرزند سمت چپ قید $X \leq \lfloor\gamma\rfloor$ را به مسئله بهینه‌سازی حل شده در گره والد اضافه کرده و مسئله حاصل را حل کنید. ($\lfloor\gamma\rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کمتر از γ است.) اگر گره فرزند به هر یک از ۳ دلیل گفته شده بتواند خاتمه یابد، آن را خاتمه دهید. اگر گره، پایانی باشد به این دلیل که جواب بهتری برای مسئله اصلی یافت شده، بهترین کران بالای یافته شده را به‌روز کنید و هر گره‌ای در درخت که مقدار تابع هدف آن کمتر از مقدار جواب یافته شده نباشد، را پایان دهید.

♦ در گره فرزند سمت راست، قید $X \geq \lceil\gamma\rceil$ را به مسئله بهینه‌سازی حل شده در گره والد اضافه کنید و مسئله حاصل را حل کنید. ($\lceil\gamma\rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از γ است.) اگر گره فرزند به هر یک از ۳ دلیل گفته شده، بتواند خاتمه یابد، آن را خاتمه دهید. اگر گره، پایانی باشد به این دلیل که جواب بهتری برای مسئله اصلی یافت شده، بهترین کران بالای یافته شده را به‌روز کنید و هر گره ای در درخت که مقدار تابع هدف آن کمتر از مقدار جواب یافته شده نباشد را پایان دهید.

گام چهارم: به گام سوم برگردید.

در استفاده از این روند برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح، باید حداقل به ۲ نکته مهم توجه کرد: ابتدا، باید یک قانون برای انتخاب گره غیرپایانی بعدی برای شاخه بندی روی آن وضع شود. این انتخاب به ۲ روش امکان‌پذیر است. در اولین روش، شاخه بندی روی گره غیرپایانی انجام می‌شود که جواب مسئله برنامه‌ریزی خطی آن، کمترین مقدار تابع هدف را دارد. ولی در این روش ممکن است به دلیل جابجایی زیاد از یک گره به گره دیگر، قبل از رسیدن به اولین جواب شدنی برای مسئله اصلی، اندازه درخت خیلی بزرگ

شود. در دومین روش، شاخه بندی همیشه روی سمت راست‌ترین گره غیرپایانی انجام می‌شود. با استفاده از این روش، سریعتر به اولین جواب شدنی برای مسئله اصلی می‌رسیم و همین‌طور، درخت شاخه و کران در طول مراحل، نسبتاً کوچک باقی می‌ماند.

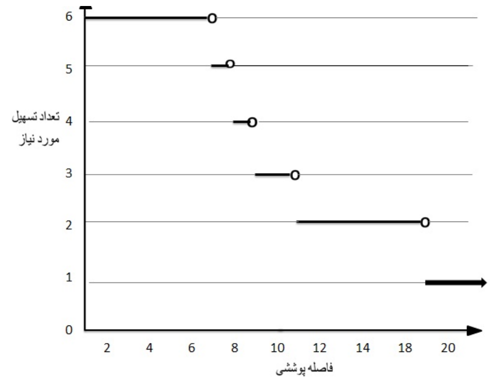
دومین موضوع که در پیاده‌سازی روند شاخه و کران برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح باید به آن توجه کرد، انتخاب متغیر تصمیم غیرصحیح در یک گره برای شاخه بندی روی آن است. این متغیر معمولاً، متغیر غیرصحیحی است که مقدار آن به یک عدد صحیح نزدیکتر است.

با افزایش فاصله پوششی، یک تسهیل می‌تواند نقاط تقاضای بیشتری را بپوشاند. بنابراین تعداد تسهیلات مورد نیاز برای پوشش نقاط تقاضا با افزایش فاصله پوششی، کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، جدول ۱.۲ جواب مسئله پوشش مجموعه را برای شبکه شکل ۲.۲ با فواصل پوششی متفاوت نشان می‌دهد.

جدول ۱.۲: تعداد تسهیلات شکل ۲.۲ بر اساس فواصل پوششی

تعداد تسهیلات	مکان جواب	فاصله پوششی
۶	A, B, C, D, E, F	کمتر از ۷
۵	A, B, C, E, F	۷
۴	B, C, E, F	۸
۳	B, E, F	۹،۱۰
۲	C, D	۱۱-۱۸
۱	C	۱۹ یا بیشتر

شکل ۵.۲ نیز نشانگر تعداد تسهیلات مورد نیاز بر حسب فاصله پوششی است.



شکل ۵.۲: تعداد تسهیل مورد نیاز شکل ۲.۲ بر اساس فاصله پوششی

همان‌طور که در شکل ۵.۲ می‌بینیم، تعداد تسهیلات مورد نیاز با افزایش فاصله پوششی به صورت یک تابع پله‌ای کاهش می‌یابد.

۴.۲ توسیعی از مدل پوشش مجموعه

در این بخش مدلی را ارائه می‌دهیم که علاوه بر هدف اصلی مسئله پوشش مجموعه که یافتن کمترین تعداد تسهیل مورد نیاز برای پوشش تمام نقاط تقاضا است، هدف دیگری را نیز که در مکانیابی تسهیلات مهم است برآورده می‌کند. این هدف، فراهم کردن پوشش پشتیبان برای بیشترین تعداد نقاط تقاضا است. این مدل زمانی شکل می‌گیرد که برای یک فاصله پوششی معین چندین جواب بهینه وجود داشته باشد.
به جدول ۲.۲ نگاه کنید. برای فاصله پوششی ۱۵، ۱۰ جواب بهینه وجود دارد. هر ۱۰ جواب بهینه، همه گره‌های تقاضا را می‌پوشانند ولی از میان آنها ترکیبات (A, C) ، (B, C)، (C, D) و (C, E) بیشترین تعداد گره (۳ گره)، را ۲ بار می‌پوشانند. پس، هر یک از این ۴ ترکیب پوشش پشتیبان را برای تعداد گره‌های بیشتری نسبت به ۶ ترکیب دیگر فراهم می‌کنند.

جدول ۲.۲: جواب‌های بهینه‌ی شکل ۲.۲ با فاصله پوششی ۱۵

مکان‌های کاندیدا	گره‌هایی که دو بار پوشانده می‌شوند
A, C	A, B, C
A, E	C, D
A, F	C
B, C	A, B, C
B, E	C, D
B, F	C
C, D	A, B, E
C, E	C, E, F
D, E	D, E
D, F	E

در این توسیع از مدل پوشش مجموعه، هدف یافتن جوابی از میان جواب‌های بهینه‌ی مسئله پوشش مجموعه است که بیشترین تعداد گره تقاضا را حداقل ۲ بار می‌پوشاند. این مسئله می‌تواند به صورت زیر فرمول‌بندی شود؛

$$\begin{aligned}
min \quad & (I+1)\sum_{j=1}^{m} X_j - \sum_{i=1}^{n} S_i & & (3.2)\\
S.t. \quad & \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j - S_i \geq 1 & i = 1, ..., n\\
& X_j \in \{0, 1\} & j = 1, ...m\\
& S_i \in \{0, 1\} & i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

که I، تعداد گره‌های تقاضا است و

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره تقاضای } i \text{ حداقل ۲ بار پوشانده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع هدف (۳.۲) تعداد تسهیلات $(\sum_j X_j)$، با وزن $(I+1)$ منهای تعداد گره‌های تقاضایی که چند بار پوشانده می‌شوند $(\sum_i S_i)$ را کمینه می‌سازد. توجه کنید که کمینه‌سازی قرینه یک کمیت، معادل بیشینه‌سازی آن است. پس مدل، تعداد تسهیلات را کمینه و تعداد گره‌های تقاضایی که حداقل ۲ بار پوشانده می‌شوند را بیشینه می‌سازد. دادن وزن $(I+1)$ به اولین عبارت تابع هدف، تضمین می‌کند که تعداد تسهیلات جواب بیشتر از کمترین تعداد تسهیل مورد نیاز برای پوشش همه نقاط تقاضا نباشد. به عبارت دیگر وزن $(I+1)$ در اولین عبارت تابع هدف تضمین می‌کند که جواب مسئله فوق، جواب بهینه مسئله پوشش مجموعه باشد.

در ادامه به اثبات ادعای فوق می‌پردازیم.

علت اینکه عبارت $\sum_j X_j$ در تابع هدف توسیع مسئله پوشش مجموعه دارای ضریب است این است که، در این مسئله تفاضل دو تابع یعنی $\sum_j X_j - \sum_i S_i$ کمینه می‌شود، در حالی که این کمینه ممکن است به ازای کمترین مقدار $\sum_j X_j$ به‌دست نیامده و به ازای بیشترین مقدار $\sum_i S_i$ به‌دست آید. بنابراین برای این که به کمترین تسهیل ممکن دست یابیم به تعداد تسهیلات $(\sum_j X_j)$ ضریب w را داده و این ضریب را به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب نقش عبارت اول تابع هدف پررنگتر شده و کمینه تابع هدف به ازای کمترین تعداد تسهیل به‌دست می‌آید. پس تابع هدف توسیع مسئله پوشش مجموعه را به صورت زیر

می‌نویسیم؛

$$min \quad w\sum_j X_j - \sum_i S_i$$

مثال زیر تأثیر w را روی جواب بهینه نشان می‌دهد.

مثال ۱.۴.۲. در شبکه‌ای با ۱۲ گره تقاضا، ماتریس ضرائب پوششی به صورت زیر است:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تنها ۲ تسهیل برای پوشش ۱۲ نقطه تقاضا کافی است. دو جواب شدنی $x_4 = x_5 = 1$ (جواب شدنی ۱ که جواب بهینه مسئله پوشش مجموعه است) و $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ (جواب شدنی ۲) را برای توسیع مسئله پوشش مجموعه در نظر می‌گیریم. اگر $w = 12$ اختیار شود مقدار تابع هدف برای جواب شدنی ۱، ۲۲ و برای جواب شدنی ۲، ۲۱ است یعنی وقتی $w = 12$، جواب بهینه مسئله جواب شدنی ۲ می‌باشد که دارای کمترین تعداد تسهیل نیست. اما وقتی $w = 14$، مقدار تابع هدف برای جواب شدنی ۱، ۲۶ و برای جواب شدنی ۲، ۲۷ است پس جواب بهینه مسئله، جواب شدنی ۱ می‌باشد که کمترین تعداد تسهیل را داراست.

همان‌طور که در این مثال دیدیم، اگر w، ضریب مربوط به تعداد تسهیلات در تابع هدف، به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود جواب بهینه توسیع مسئله پوشش مجموعه شامل کمترین تعداد تسهیل که برای پوشش همه نقاط تقاضا لازم است، بوده و در واقع همان جواب بهینه مسئله پوشش مجموعه خواهد بود.

گزاره ۲.۴.۲. *فرض کنید $\{X_j^*, S_i^*\}$ جواب بهینه توسیع مسئله‌ی پوشش مجموعه و $\{X_j', S_i'\}$ جواب شدنی آن باشد، اگر $\sum_i S_i^* < w$ آنگاه*

$$\sum_j X_j' > \sum_j X_j^* - ۱$$

یا

$$\sum_j X_j' \geq \sum_j X_j^*$$

برهان. به برهان خلف فرض کنید

$$\sum_j X_j' \leq \sum_j X_j^* - ۱$$

یا

$$\sum_j X_j' - \sum_j X_j^* + ۱ \leq ۰$$

از بهینه بودن $\{X_j^*, S_i^*\}$ نتیجه می‌شود؛

$$\begin{aligned} w\sum_j X_j^* - \sum_i S_i^* &\leq w\sum_j X_j' - \sum_i S_i' \\ \sum_i S_i' &\leq w(\sum_j X_j' - \sum_j X_j^*) + \sum_i S_i^* \\ &< w(\sum_j X_j' - \sum_j X_j^*) + w \end{aligned}$$

$$\implies \qquad \sum_i S_i' < w(\sum_j X_j' - \sum_j X_j^* + ۱) \leq ۰ \implies \sum_i S_i' < ۰$$

این یک تناقض است زیرا برای هر i، $S_i' \geq ۰$ و در نتیجه $\sum_i S_i' \geq ۰$. پس فرض خلف باطل می‌شود و داریم؛

$$\sum_j X_j' > \sum_j X_j^* - ۱$$

□

پس طبق گزاره‌ی (۲.۴.۲) اگر $\sum_i S_i^* < w$ ، جواب بهینه‌ی توسیع مسئله‌ی پوشش مجموعه دارای کمترین تسهیل از میان جواب‌های شدنی مسئله است.از آنجایی که $\sum_i S_i^*$ حداکثر I است، باید $w > I$ باشد تا جواب بهینه‌ی توسیع مسئله‌ی پوشش مجموعه همان جواب بهینه‌ی مسئله‌ی پوشش مجموعه باشد.

به همین دلیل ضریب w در فرمول (۳.۲)، $I + ۱$ انتخاب شده است.

فصل ۳

مسئله مکانیابی بیشترین پوشش

۱.۳ مقدمه

یکی از مشکلات مهم مرتبط با مدل پوشش مجموعه این است که ممکن است تعداد تسهیلات مورد نیاز برای پوشش کامل نقاط تقاضا بیشتر از تعدادی باشد که به دلیل بودجه و دلایلی از این دست میتوانند ساخته شوند. به عبارت دیگر ممکن است تعداد تسهیلاتی که می‌توانند ساخته شوند برای پوشش تمام نقاط تقاضا کافی نباشد. این دلیل موجب می‌شود که هدف پوشش کامل نقاط تقاضا را نادیده بگیریم و در جستجوی بیشترین جمعیتی باشیم که با تعداد محدود تسهیلاتمان پوشانده می‌شوند و این دقیقاً همان مساله مکانیابی بیشترین پوشش است.

در مسئله مکانیابی بیشترین پوشش برخلاف مسئله پوشش مجموعه، تعدا تسهیلات یک مقدار معلوم و ثابت است. هدف این مسئله نیز یافتن بیشترین جمعیتی است که با فاصله پوششی معلوم s از طریق مکانیابی تعداد ثابتی تسهیل پوشانده می‌شوند.

۲.۳ فرمول ریاضی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش

فرمول ریاضی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش برای اولین بار توسط چرچ و ریول [۳] به صورت زیر ارائه شد؛

$$I \qquad max \qquad z = \sum_{i \in N} a_i y_i$$

$$S.t. \qquad \sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i \qquad i \in N \tag{۱.۳}$$

$$\sum_{j \in M} x_j = p \tag{۲.۳}$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad j \in M \tag{۳.۳}$$

$$y_i \in \{۰, ۱\} \qquad i \in N \tag{۴.۳}$$

که در آن :

N = مجموعه گره‌های تقاضا، M = مجموعه مکان‌های تسهیلات، s = فاصله پوششی، d_{ij} = کمترین

فاصله از گره i به گره j، a_i = جمعیت گره i و p = تعداد تسهیلاتی که باید مکانیابی شوند.

متغیرهای تصمیم مسئله نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر به مکان } j \text{ تسهیل اختصاص یابد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$y_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر نقطه تقاضای } i \text{ پوشانده شود} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$N_i = \{j \in M \mid d_{ij} \leq s\}$ ، مجموعه‌ی مکان تسهیلاتی است که می‌توانند نقطه تقاضای i را بپوشانند.

همان‌طور که در فصل اول ذکر کردیم یک نقطه تقاضا پوشانده می‌شود اگر حداقل یک تسهیل، در فاصله کوچکتر و یا مساوی s از آن قرار گیرد و در غیر این صورت پوشانده نمی‌شود.

تابع هدف مسئله، میزان جمعیتی که با فاصله پوششی s، سرویس‌دهی می‌شوند (پوشانده می‌شوند)، را بیشینه می‌سازد. طبق قید (۱.۳)، y_i تنها زمانی می‌تواند ۱ باشد که حداقل یک تسهیل در مجموعه N_i قرار گیرد و طبق قید (۲.۳) تعداد تسهیلاتی که باید مکانیابی شوند، برابر p است.

جواب این مسئله بیشترین جمعیتی که با p تسهیل پوشانده می‌شوند و نیز p مکانی که بیشترین پوشش را ایجاد می‌کنند تعیین می‌کند.

یک فرمول هم‌ارز برای مسئله با قرار دادن $y_i = ۱ - \overline{y}_i$ به‌دست می‌آید که

$$\overline{y}_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر نقطه تقاضای } i \text{ پوشانده نشود} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با این تغییر متغیر، تابع هدف به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$max \qquad (\sum_{i \in N} a_i + \sum_{i \in N} -a_i \overline{y}_i)$$

از آنجایی که بیشینه‌سازی قرینه یک کمیت معادل با کمینه‌سازی آن است و نیز اولین مجموع در تابع هدف یک مقدار ثابت و معلوم می‌باشد، تابع هدف مسئله به صورت زیر خلاصه می‌شود؛

$$min \qquad \sum_{i \in N} a_i \overline{y}_i$$

این تابع هدف، تعداد افرادی که با فاصله پوششی مورد نظر سرویس‌دهی نمی‌شوند را کمینه می‌سازد. مسئله کامل حاصل از این تغییر متغیر به صورت زیر است؛

$$II \qquad min \qquad z = \sum_{i \in N} a_i \overline{y}_i$$

$$S.t. \qquad \sum_{j \in N_i} x_j + \overline{y}_i \geq ۱ \qquad i \in N \tag{۵.۳}$$

$$\sum_{j \in M} x_j = p \tag{۶.۳}$$

$$x_j \in \{۰, ۱\} \qquad j \in M \tag{۷.۳}$$

$$y_i \in \{۰, ۱\} \qquad i \in N \tag{۸.۳}$$

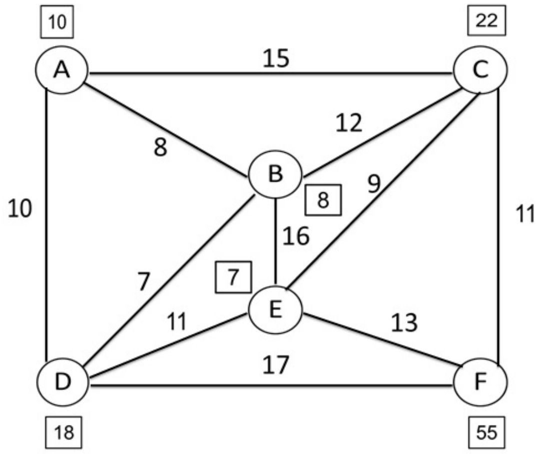
قید (۵.۳) نشان می‌دهد که برای نقطه تقاضای i

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq ۱ \qquad \text{یا} \qquad \overline{y}_i = ۱$$

یعنی یا حداقل یک تسهیل در فاصله s از نقطه تقاضای i ساخته می‌شود و یا این که گره i پوشانده نمی‌شود و $\overline{y}_i = ۱$.

مسئله‌های (I) و (II) معادلند، زیرا مسئله اول بیشترین جمعیتی که با فاصله پوششی s پوشانده می‌شود را می‌یابد که معادل است با یافتن کمترین جمعیتی که با فاصله s پوشانده نمی‌شود یعنی مسئله دوم.

مثال ۱.۲.۳. برای شبکه‌ی شکل ۱.۳ با $s = ۱۱$ و $p = ۱$، مدل مکانیابی بیشترین پوشش به صورت زیر است:



شکل ۱.۳: شبکه‌ی G_1

$$\max \quad 10y_A + 8y_B + 22y_C + 18y_D + 7y_E + 55y_F$$

$$
\begin{aligned}
S.t. \quad & x_A + x_B + x_D \geq y_A \\
& x_A + x_B + x_D \geq y_B \\
& x_C + x_E + x_F \geq y_C \\
& x_A + x_B + x_D + x_E \geq y_D \\
& x_C + x_D + x_E \geq y_E \\
& x_C + x_F \geq y_F \\
& x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F = 1 \\
& x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F \in \{0, 1\} \\
& y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

با تکنیک کاهش ستونی، ستون‌های A، B و F را حذف کرده و قرار می‌دهیم $x_A = x_B = x_F = 0$. مسئله حاصل عبارت است از؛

$$\begin{aligned} max \quad & ۱۰y_A + ۸y_B + ۲۲y_C + ۱۸y_D + ۷y_E + ۵۵y_F \\ S.t. \quad & x_D \geq y_A \\ & x_D \geq y_B \\ & x_C + x_E \geq y_C \\ & x_D + x_E \geq y_D \\ & x_C + x_D + x_E \geq y_E \\ & x_C \geq y_F \\ & x_C + x_D + x_E = ۱ \\ & x_C, x_D, x_E \in \{۰, ۱\} \\ & y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F \in \{۰, ۱\} \end{aligned}$$

متأسفانه هیچ یک از روندهای کاهش سطری برای مسئله مکانیابی بیشترین پوشش نمی‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. جواب این مسئله کوچک را با شمارش کلی به صورت زیر به‌دست آوردیم:

$(x_A = x_B =)x_D = x_E(= x_F) = ۰$ و $x_C = ۱$

(جواب‌های به دست آمده از کاهش های ستونی در پرانتز نشان داده شدند.)

$y_C = y_E = y_F = ۱$ و $y_A = y_B = y_D = ۰$

که مقدار تابع هدف آن یعنی بیشترین جمعیتی که می تواند با ۱ تسهیل پوشانده شود برابر ۸۴ است.

۳.۳ تکنیک‌های حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش

۱.۳.۳ روشهای ابتکاری

اولین روش ابتکاری، الگوریتم افزایشی حریصانه[۱] (GA) است. الگوریتم حریصانه برای به‌دست آوردن بیشترین پوشش با p تسهیل تحت فاصله پوششی داده شده، با یک مجموعه خالی جواب شروع می‌کند و هر بار بهترین مکان را به این مجموعه اضافه می‌کند. بدین صورت که برای اولین تسهیل، مکانی را انتخاب می‌کند که بیشترین جمعیت را از جمعیت کل می‌پوشاند. برای دومین تسهیل، مکانی را برمی‌دارد که بیشترین جمعیت را از میان جمعیتی که با اولین تسهیل پوشانده نشده، می‌پوشاند. به همین ترتیب سومین مکان تسهیل، مکانی است که بیشترین جمعیت را از میان جمعیتی که با اولین و دومین تسهیل پوشانده نشده، می‌پوشاند. این عمل ادامه می‌یابد تا زمانی که p تسهیل انتخاب شود و یا این که کل جمعیت پوشانده شود.

مثال ۱.۳.۳. در شکل ۱.۳ فرض می‌کنیم $s = ۹$ و مسئله مکانیابی بیشترین پوشش را برای آن با الگوریتم GA حل می‌کنیم. جدول ۱.۳ نقاط و میزان تقاضایی که هر مکان کاندیدا می‌پوشاند را نشان می‌دهد. واضح است که بهترین مکان برای اولین تسهیل گره F است که تقاضایی برابر با ۵۵ را می‌پوشاند.

جدول ۱.۳: نقاط و میزان تقاضایی که هر مکان کاندیدا می‌پوشاند

مکان کاندیدا	گره‌هایی که میپوشاند	تقاضایی که میپوشاند
A	A, B	۱۸
B	A, B, D	۳۶
C	C, E	۲۹
D	B, D	۲۶
E	C, E	۲۹
F	F	۵۵

خارج کردن نقاط تقاضای پوشانده شده توسط F (خود نقطه F) از مسئله، میزان تقاضای پوشانده شده توسط سایر گره‌ها را در این مثال تغییر نمی‌دهد. پس دومین مکان، مکان B است که گره‌های A، B و D را با تقاضای کل ۳۶ می‌پوشاند. با خارج کردن گره‌های پوشانده شده توسط گره B، جدول ۲.۳ حاصل می‌شود.

[۱] Greedy Adding

جدول ۲.۳: پوشش هر مکان کاندیدا بعد از قرار گرفتن تسهیل در مکان‌های B و F

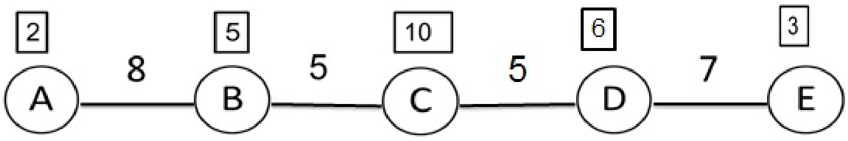
مکان کاندیدا	گره‌هایی که از گره‌های باقیمانده میپوشاند	تقاضایی که از جمعیت باقیمانده میپوشاند
A	$-$	۰
B	$-$	۰
C	C, E	۲۹
D	$-$	۰
E	C, E	۲۹
F	$-$	۰

سومین مکان می‌تواند یکی از گره‌های C یا E باشد، با این انتخاب، همه نقاط تقاضا پوشانده شده و الگوریتم متوقف می‌شود.

تذکر: زمانی که $p = ۱$، جوابی که از الگوریتم GA به‌دست می‌آید بهینه است زیرا جواب الگوریتم GA با $p = ۱$ طبق تعریف، مکانی است که بیشترین جمعیت را از جمعیت کل می‌پوشاند. اما زمانی که $p > ۱$، بهینگی جواب به‌دست آمده از GA تضمین نمی‌شود.

دومین روش ابتکاری که بر مبنای روش اول ساخته شده، الگوریتم افزایشی حریصانه با جانشینی[۲] (GAS) است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید در شکل ۲.۳ فاصله پوششی (s) برابر ۹ باشد.



شکل ۲.۳: شبکه‌ی $G_۲$

جدول ۳.۳ گره‌های تقاضا و میزان تقاضایی را که هر مکان کاندیدا می‌پوشاند نشان می‌دهد.

[۲] Greedy Adding and Substitution Algorithm

جدول ۳.۳: گره‌ها و میزان تقاضایی که هر مکان کاندیدا می‌پوشاند

مکان کاندیدا	گره‌های تحت پوشش	تقاضای تحت پوشش
A	A, B	۷
B	A, B, C	۱۷
C	B, C, D	۲۱
D	C, D, E	۱۹
E	D, E	۹

با استفاده از الگوریتم حریصانه اولین تسهیل در گره C قرار می‌گیرد (زیرا تقاضایی برابر ۲۱ را می‌پوشاند.) و بدین ترتیب گره‌های تقاضای B ، C و D پوشانده می‌شوند. دومین تسهیل می‌تواند در یکی از گره‌های D یا E قرار گیرد، زیرا هر یک از آنها ۳ تقاضا را از ۵ تقاضای باقیمانده می‌پوشانند. بعد از قرار گرفتن تسهیل در یکی از این دو مکان، گره تقاضای E نیز پوشانده خواهد شد. برای پوشش همه نقاط تقاضا لازم است که سومین تسهیل را در یکی از گره‌های A یا B قرار دهیم تا ۲ تقاضای باقیمانده نیز پوشانده شود. اما اگر تسهیلات را در دو گره B و D قرار می‌دادیم تنها با ۲ تسهیل می‌توانستیم تمام نقاط تقاضا را بپوشانیم. پس پوششی که با ۲ تسهیل از روش افزایشی حریصانه به‌دست آمده بهینه نیست. حال فرض کنید بعد از قرار دادن دومین تسهیل، امکان انتقال یکی از تسهیلات را به یک مکان آزاد در نظر بگیریم. اگر اولین تسهیل در گره C و دومین تسهیل در گره E قرار گرفته باشد، انتقال تسهیل از گره C به گره B، پوشش کل را از ۲۳ تقاضا به ۲۵ تقاضا افزایش می‌دهد و تمام نقاط تقاضا پوشانده خواهند شد. در واقع جانشینی گره آزاد B به جای گره C در مجموعه جواب، میزان پوشش کل با ۲ تسهیل را افزایش داده است و این یعنی ادغام روند جانشینی با الگوریتم افزایشی حریصانه.

روند جانشینی امکان تعویض هر مکان انتخاب شده در مجموعه جواب را با مکان‌های انتخاب نشده در نظر می‌گیرد، اگر چنین تعویضی باعث بهبود تابع هدف شود این تعویض و جانشینی صورت می‌گیرد. الگوریتم افزایشی حریصانه با جانشینی، مکان‌های جدید را درست همانند الگوریتم افزایشی حریصانه تعیین می‌کند، اما علاوه بر آن بعد از انتخاب هر مکان جدید بررسی می‌کند که آیا امکان بهبود جواب با جانشینی یک مکان آزاد به جای یک مکان در مجموعه جواب وجود دارد یا نه.

در روند جانشینی، برای هر گره در مجموعه جواب، از میان گره‌های آزادی که می‌توانند جانشین آن شوند، بهترین گره که باعث بیشترین افزایش در تابع هدف می‌شود انتخاب خواهد شد.

وقتی جواب مسئله‌ی مکانیابی بیشترین پوشش با p تسهیل را با الگوریتم‌های GA و GAS به‌دست می‌آوریم الگوریتم به طور اتوماتیک، مقادیر بیشترین پوشش را برای مسائل با ۱، ۲، ... تا p تسهیل به‌دست می‌آورد.

شایان ذکر است که حتی با ادغام الگوریتم جانشینی (که به میزان قابل ملاحظه‌ای زمان اجرای عملیات را افزایش می‌دهد) هم تضمینی برای به‌دست آوردن جواب بهینه برای الگوریتم افزایشی حریصانه وجود ندارد. با این حال برای پی بردن به اهمیت استفاده از الگوریتم جانشینی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۳.۳. قرار است ۸۸ شهر پر جمعیت در ایالات متحده با فاصله پوششی ۷۲۰ مایل پوشانده شوند. جواب به‌دست آمده از الگوریتم افزایشی حریصانه در جدول ۴.۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۴.۳: جواب به‌دست آمده از الگوریتم افزایشی حریصانه

تعداد مکان‌ها	مکان‌های انتخاب شده	درصد پوشش
۱	$Indianapolis$	۶۰/۶۵
۲	$Indianapolis, ElPaso$	۸۸/۶۱
۳	$Indianapolis, ElPaso, Salt\ Lake\ City$	۹۷/۴۲
۴	$Indianapolis, ElPaso, Salt\ Lake\ City, Raleigh$	۹۹/۹۵
۵	$Indianapolis, ElPaso, Salt\ Lake\ City, Raleigh, Detroit$	۱۰۰/۰۰

طبق جدول، برای پوشش کامل نقاط تقاضا با استفاده از روش افزایشی حریصانه به ۵ تسهیل نیاز داریم. اما اگر از الگوریتم افزایشی حریصانه با جانشینی استفاده کنیم، بعد از قرار گرفتن دومین تسهیل در ال‌پاسو، الگوریتم جانشینی شهر سیسیناتی را جانشین شهر ایندیاناپلیس می‌کند. سپس، الگوریتم حریصانه تسهیل بعدی را در شهر سالت‌لیک‌سیتی قرار می‌دهد. بعد از آن الگوریتم جانشینی نیوارلینز را جانشین ال‌پاسو و سپس، سیسیناتی را با دترویت تعویض می‌کند. بعد از این جانشینی هر ۸۸ شهر پوشانده شده و الگوریتم متوقف می‌شود جدول ۵.۳ .

جدول ۵.۳: جواب به‌دست آمده از الگوریتم افزایشی حریصانه با جانشینی

درصد پوشش	مکان‌های انتخاب شده	تعداد مکان‌ها
۶۰/۶۵	$Indianapolis$	۱
۸۸/۶۱	$Indianapolis, ElPaso$	۲
۸۸/۹۸	$Cincinnati, ElPaso$	۲
۹۷/۷۹	$Cincinnati, ElPaso, Salt\ Lake\ City$	۳
۹۸/۵۹	$Cincinnati, NewOrleans, Salt\ Lake\ City$	۳
۱۰۰/۰۰	$Detroit, NewOrleans, Salt\ Lake\ City$	۳

همان‌طوری که دیدیم با جانشینی یک مکان آزاد به جای یک مکان در مجموعه جواب الگوریتم حریصانه توانستیم میزان پوشش را با همان تعداد تسهیل افزایش دهیم و بدین ترتیب با تعداد تسهیل کمتر به پوشش تمام نقاط تقاضا برسیم.

۲.۳.۳ روش برنامه ریزی خطی

روش برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه مسئله‌ی مکانیابی بیشترین پوشش را به‌دست می‌آورد [۳]. برای حل این مسئله با روش برنامه‌ریزی خطی تنها لازم است که متغیرهای صفر و یک x_j و $\overline{y}_i$ را در مسئله II آزاد ساخته و به متغیرهای نامنفی تبدیل کنیم.

در جواب بهینه آزادسازی برنامه‌ریزی خطی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش، متغیر x_j هرگز بزرگتر از ۱ نخواهد بود. (مگر این که پوشش کل به‌دست آید.) زیرا اگر x_j ای در جواب بهینه بیشتر از ۱ باشد، بدون این که هیچ یک از قیود (۵.۳) نقض شود، می‌توان آن را به ۱ کاهش داد. این کاهش طبق قید (۶.۳) موجب افزایش در مقادیر x_j دیگر می‌شود. این افزایش ممکن است موجب شود که مقادیری از $\overline{y}_i$ کاهش یافته و به تبع آن تابع هدف نیز کاهش یابد که این با بهینگی جواب در تناقض است.

به دلیل این که تابع هدف، کمینه‌سازی متغیرهای $\overline{y}_i$ است و چون لازم نیست متغیر $\overline{y}_i$ برای این که در قید (۵.۳) صدق کند بزرگتر از ۱ باشد، $\overline{y}_i$ نیز در جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی هرگز بزرگتر از ۱ نخواهد بود. پس در جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی داریم،

$$\forall\, j \in M\,; \qquad 0 \leq x_j \leq 1 \quad \text{و} \quad \forall\, i \in N\,; \qquad 0 \leq \overline{y}_i \leq 1$$

اگر پوشش کامل رخ ندهد، جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش به یکی از دو حالت زیر است:

حالت اول) همه مقادیر x_j و $\overline{y}_i$ صفر و یک هستند که این جواب، جواب همه صحیح[۳] نامیده می‌شود.

حالت دوم) مقدار بعضی از متغیرهای x_j کسری است که این جواب، جواب کسری نامیده می‌شود.

اگر در جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی همه مقادیر x_j و $\overline{y}_i$ صفر و یک باشند، جواب بهینه مسئله بیشترین پوشش به‌دست آمده است ولی اگر برنامه‌ریزی خطی به حالت دوم خاتمه یابد، جواب بهینه به‌دست آمده برای مسئله اصلی صفر و یک شدنی نیست.

تجارب محاسباتی نشان داده است که تقریباً ۸۰ درصد مواقع جواب بهینه آزادسازی برنامه‌ریزی خطی، همه صحیح است و تنها ۲۰ درصد مواقع جواب‌های کسری به‌دست می‌آید. دو روش متفاوت، باز بینی و شاخه و کران برای به‌دست آوردن جواب‌های همه صحیح از جواب‌های کسری برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شوند.

روش بازبینی: در روش بازبینی، با اطلاعات به‌دست آمده از جواب بهینه همه صحیح با $(p-۱)$ تسهیل و جواب بهینه کسری با p تسهیل، جواب بهینه همه صحیح با p تسهیل را به‌دست می‌آوریم.

با یک مثال، این روش را روشن می‌کنیم.

مثال ۴.۳.۳. مسئله مکانیابی بیشترین پوشش روی یک شبکه‌ی ۵۵ گره‌ای با جمعیت کل ۶۴۰ برای مقادیر $p=۱$ تا $p=۹$ با روش برنامه‌ریزی خطی حل شده است. همه جواب‌ها غیر از جواب‌های مربوط به مقادیر $p=۸$ و $p=۹$ همه صحیح هستند. جواب بهینه مسئله با ۷ تسهیل همه گره‌ها به جز گره‌های تقاضای B و A را می‌پوشاند. جمعیت گره A، ۵ و جمعیت گره B، ۲ و کمترین جمعیت گره‌ها نیز ۲ می‌باشد. هر نقطه تقاضا نیز یک مکان کاندیدا برای تسهیلات است. جمعیت تحت پوشش با جواب بهینه اما کسری برنامه‌ریزی خطی برای $p=۸$، ۶۳۹ است. حال مسئله، یافتن جواب بهینه همه صحیح برای $p=۸$ و $p=۹$ تنها با استفاده از اطلاعات فوق است. برای انجام این کار باید به ۲ نکته زیر توجه کرد:

۱) از آنجایی که جواب بهینه با ۷ تسهیل، همه گره‌ها به جز گره‌های B و A را می‌پوشاند، جمعیت تحت

[۳] all intejer

پوشش این جواب برابر ۶۳۳ است. $(۶۳۳ = ۶۴۰ - ۵ - ۲)$

۲) جواب بهینه همه صحیح با ۸ تسهیل یا کل جمعیت را می‌پوشاند و یا این که حداکثر تمام جمعیت جز جمعیت کوچکترین گره را می‌پوشاند و این یعنی میزان پوشش برای جواب بهینه با ۸ تسهیل یا ۶۴۰ است و یا حداکثر ۶۳۸ می‌باشد.

از آنجایی که میزان پوشش برای جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی با $p = ۸$، ۶۳۹ است جواب بهینه همه صحیح آن نمی‌تواند تمام جمعیت را بپوشاند. پس طبق مشاهده ۲ جواب بهینه همه صحیح با $p = ۸$، حداکثر جمعیت ۶۳۸ را می‌پوشاند. با اضافه کردن گره A به جواب بهینه مسئله برای $p = ۷$، یک مجموعه جواب با ۸ تسهیل شکل می‌گیرد که پوشش آن ۶۳۸ است. از آنجایی که این جواب بیشترین پوشش ممکن را با ۸ تسهیل ایجاد می‌کند، یک جواب بهینه برای $p = ۸$ است. چون جواب بهینه با ۸ تسهیل نمی‌تواند کل جمعیت را بپوشاند، هر جوابی با ۹ تسهیل که بتواند پوشش کامل را ایجاد کند، بهینه است. چنین جوابی با اضافه کردن گره‌های A و B به جواب بهینه مسئله برای $p = ۷$ تولید می‌شود. بنابراین اطلاعات به‌دست آمده از جواب بهینه همه صحیح با $(p - ۱)$ تسهیل در تعیین جواب بهینه همه صحیح با p تسهیل می‌تواند مفید باشد.

روش شاخه و کران: روش شاخه و کران برای جواب‌های کسری برنامه‌ریزی خطی که با روش بازبینی به جواب همه صحیح تبدیل نمی‌شوند، به کار می‌رود. این روش به تفصیل در فصل قبل بیان شده است.

۴.۳ مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها

برای مقایسه عملکرد روش برنامه‌ریزی خطی با روش‌های ابتکاری GA و GAS در حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش، چرچ و ریول [۳] تعداد ۲۷ مسئله (۲۷ مقدار مختلف برای ترکیبات (s,p)) را روی شبکه‌ی ۵۵ گره‌ای معرفی شده در تز دکترای سوین[۴] در نظر گرفتند و این مسائل را با روش‌های برنامه‌ریزی خطی، GA و GAS حل نمودند.

[۴] Swain

در این آزمون، برای هر فاصله‌ی پوششی s، مسائل برنامه‌ریزی خطی با مقادیر مختلف p حل شده و الگوریتم‌های GA و GAS با برنامه فورترن[۵] در سیستم آی.بی.ام [۶] ۷۰۹۴ IV اجرا شدند. برای به‌دست آوردن جواب صحیح از جواب کسری برنامه‌ریزی خطی ابتدا روش بازبینی به کار گرفته می‌شود و اگر یک جواب کسری با روش بازبینی به جواب صحیح تبدیل نشود، روش شاخه و کران برای آن به کار می‌رود. نتایج این آزمون در جدول ۶.۳ نشان داده شده است.

جدول ۶.۳: مقایسه روش برنامه‌ریزی خطی با روشهای GA و GAS در حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش

		برنامه‌ریزی خطی			الگوریتم GA	الگوریتم GAS
مقدار s	محدوده p	جواب‌های کسری	بازبینی	شاخه و کران	غیربهینه	غیربهینه
۱۰	۱تا۹	۸،۹	۸،۹	–	۴،۵،۶،۷،۸،۹	۴،۵،۷،۸
۱۲	۱تا۷	۳،۴	–	۳،۴	۲،۳،۴،۵،۶	۲،۳،۴،۵،۶،۷
۱۵	۱تا۵	۵	۵	–	۲،۳،۴،۵	۳،۴،۵
۱۹	۱تا۳	۳	–	۳	۲،۳	۲
۲۰	۱تا۳	–	–	–	۲	–
تعداد کل جوابها	۲۷	۶	۳	۳	۱۸	۱۴

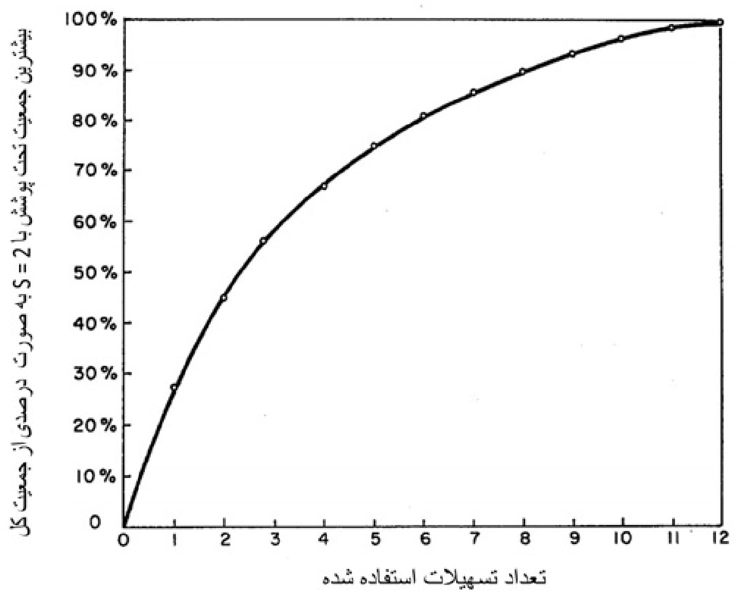
توضیح: در جدول ۶.۳ منظور از غیربهینه، مقادیر p که جواب الگوریتم‌های GA و GAS برای آنها غیربهینه است، می‌باشد. منظور از شاخه و کران ، مقادیر p که نیازمند شاخه و کران بودند و در آخر منظور از بازبینی، مقادیر p که جواب برنامه‌ریزی خطی آنها با روش بازبینی به جواب صحیح تبدیل شدند، می‌باشد.

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، تقریباً ۸۰ درصد برنامه‌ریزی‌های خطی به جواب همه صحیح ختم شدند و تقریباً ۹۰ درصد کل مسائل با ترکیب برنامه‌ریزی خطی و روش بازبینی حل شدند. تنها ۱۰ درصد مواقع روش شاخه و کران برای تبدیل جواب‌های کسری به جواب‌های همه صحیح مورد نیاز بوده است. الگوریتم GA بیشتر از ۶۰ درصد مواقع و الگوریتم GAS تقریباً ۵۰ درصد مواقع غیربهینه است.

[۵]Fortran
[۶]IBM

۵.۳ منحنی هزینه - جمعیت

در هر شبکه برای هر مقدار مطلوب s (فاصله پوششی) و p (تعداد تسهیلاتی که مکانیابی می‌شوند) یک مسئله مکانیابی بیشترین پوشش تعریف می‌شود. با ثابت نگاه داشتن s و حل مسئله روی مقادیر p می‌توان منحنی هزینه - جمعیت را برای آن شبکه به‌دست آورد. منحنی هزینه - جمعیت تغییر در جمعیت تحت پوشش را در حالی که هزینه‌ی سیستم با افزایش یا کاهش تعداد تسهیلات تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. شکل ۳.۳ منحنی هزینه - جمعیت را برای مسئله مکانیابی بیشترین پوشش روی شبکه‌ی ۳۰ گره‌ای طراحی شده توسط رجسکی[۷] و ریول [۲۱] برای فاصله پوششی ثابت $s = ۲$ نشان می‌دهد.



شکل ۳.۳: منحنی هزینه - جمعیت برای یک شبکه ۳۰ گره‌ای با $s = ۲$

در این منحنی جواب بهینه‌ی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش برای مقادیر مختلف p مشاهده می‌شود. طبق نمودار، میزان افزایش در جمعیت تحت پوشش با افزایش تعداد تسهیلات کاهش می‌یابد. جواب بهینه برای $p = ۱۲$، جواب بهینه‌ی مسئله مکانیابی پوشش مجموعه برای $s = ۲$ نیز می‌باشد. زیرا $p = ۱۲$ کمترین

[۷] Rojeski

تعداد تسهیلی است که با آن پوشش ۱۰۰ درصد برای $s = ۲$ به‌دست می‌آید.

یک موضوع مهم در تصمیم‌گیری این است که تعیین شود چه سطحی از مخارج (چه تعداد تسهیل) با پوشش حاصل از آن برای یک مسئله خاص توجیه‌پذیر و منطقی است. برای مثال، در شبکه‌ی ذکر شده حتی اگر سرمایه کافی برای تأسیس ۱۲ تسهیل و به‌دست آوردن پوشش ۱۰۰ درصد فراهم باشد، باز هم جواب ۸ تسهیل با پوشش ۹۰ درصد قابل قبولتر است و این کاهش در هزینه‌ی مکانیابی می‌تواند صرف بالا بردن سطح سایر خدماتی که مربوط به مکانیابی نیستند بشود. بنابراین منحنی هزینه- جمعیت اطلاعات بسیار سودمندی را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد.

۶.۳ بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم

در بعضی از موارد تصمیم‌گیرنده علاوه بر اینکه می‌خواهد بیشترین پوشش ممکن را با فاصله پوششی مطلوب s ایجاد کند، به کیفیت خدمات ارائه شده به جمعیتی که با این فاصله پوشانده نمی‌شوند نیز توجه می‌کند. در چنین شرایطی او فاصله T ($T > s$) را تعیین کرده و مکانیابی تسهیلات را به گونه‌ای انجام می‌دهد که بیشترین جمعیت ممکن را با فاصله مطلوب s بپوشاند و در عین حال جمعیتی که با فاصله s پوشانده نمی‌شوند، حداقل یک تسهیل را در فاصله‌ی T از خود بیابند (پوشش کامل با فاصله T تضمین شود). این مسئله، مسئله‌ی مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم نامیده می‌شود که به طور خلاصه می‌توان آن را چنین تعریف کرد؛

قرار دادن p تسهیل در مکان‌های ممکن شبکه برای ماکزیمم ساختن جمعیت تحت پوشش با فاصله‌ی پوششی معلوم s در حالی که تضمین شود مصرف‌کننده‌ها در تمام نقاط تقاضا، تسهیلی را در فاصله T ($T > s$) از خود می‌یابند.

در واقع قیود نزدیکی لازم (پوشش کامل با فاصله T) یک مکانیزم برای ارائه‌ی سطحی از خدمات به جمعیت پوشانده نشده با فاصله مطلوب s می‌باشد. هر چه T به s نزدیکتر باشد، جواب به‌دست آمده برای جمعیت پوشانده نشده با فاصله s بهتر است.

فرمول ریاضی این مسئله خیلی شبیه مسئله I است. تابع هدف و قید مربوط به تعداد تسهیلات آن مانند مسئله I می‌باشد با این تفاوت که در این مسئله ۲ نوع قید پوششی وجود دارد؛

$$\sum_{j\in N_i} x_j \geq y_i \qquad \forall\, i \in N \tag{۹.۳}$$

$$\sum_{j\in M_i} x_j \geq 1 \qquad \forall\, i \in N \tag{۱۰.۳}$$

که $M_i = \{j \mid d_{ij} \leq T\}$.

توجه کنید که چون $s < T$، مجموعه M_i شامل مجموعه N_i است.

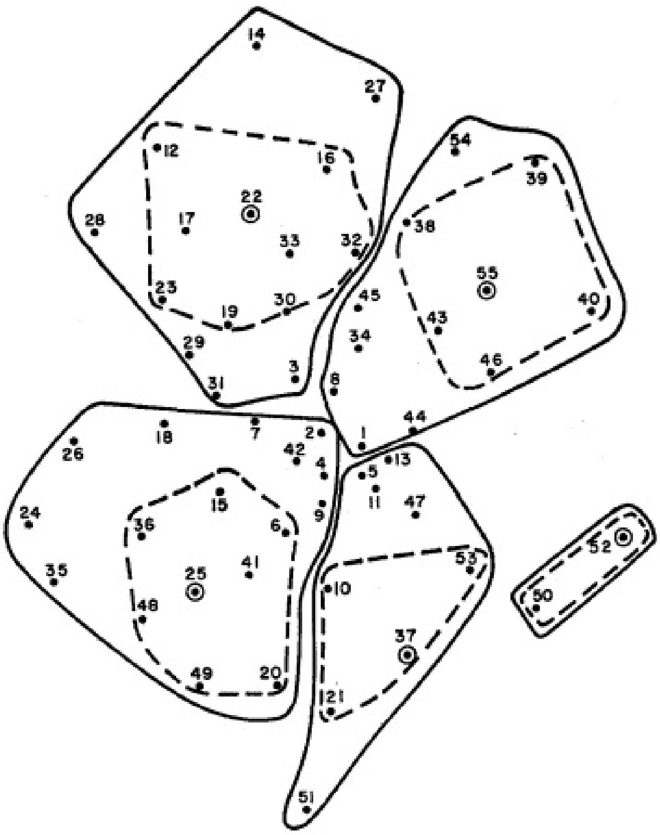
قید (۱۰.۳) نشان می‌دهد که باید حداقل یک تسهیل در فاصله T از نقطه تقاضای i موجود باشد. تغییر متغیر ذکر شده در بخش ۲.۳ می‌تواند برای این مسئله نیز به کار رود و آن را به مسئله‌ی کمینه‌سازی جمعیت پوشانده نشده با فاصله s در حالی که پوشش کامل با فاصله T حفظ می‌شود، تبدیل کند. بر خلاف مسئله مکانیابی بیشترین پوشش، مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم، تنها برای مقادیر خاصی از p دارای جواب شدنی است. حد پایین این مقادیر p، کمترین تعداد تسهیل مورد نیاز برای پوشش تمام نقاط تقاضا با فاصله پوششی T می‌باشد.

فرض کنید که برای یک مسئله خاص، p^* کمترین تعداد تسهیل مورد نیاز برای ایجاد پوشش کامل با فاصله T باشد. هر جواب p^*- تسهیل که پوشش کامل را با فاصله T دارد، جواب بهینه مسئله پوشش مجموعه است. اما ممکن است چند جواب p^*- تسهیل که پوشش کامل را با فاصله T دارند (چند جواب بهینه برای مسئله پوشش مجموعه) موجود باشد. اگر بخواهیم مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم را با p^* تسهیل حل کنیم چون هدف به‌دست آوردن بیشترین پوشش با فاصله s است در حالی که پوشش کامل با فاصله T حفظ می‌شود، باید جوابی را از میان جواب‌های بهینه مسئله پوشش مجموعه با فاصله پوششی T بیابیم که بیشترین جمعیت را با فاصله کوچکتر s می‌پوشاند. پس به کار بردن مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم، تکنیکی برای به‌دست آوردن مطلوب‌ترین جواب از میان جواب‌های بهینه‌ی مسئله

مکانیابی پوشش مجموعه است. زیرا جواب این مسئله، علاوه بر اینکه پوشش کامل را با فاصله T دارد، بیشترین پوشش را با فاصله‌ی کوتاهتر و مطلوبتر s، نسبت به سایر جواب‌های بهینه‌ی مسئله مکانیابی پوشش مجموعه دارا می‌باشد.

مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم، هم با روش برنامه‌ریزی خطی که روی فرم کمینه‌سازی مسئله پیاده می‌شود و هم با روشهای ابتکاری، قابل حل است.

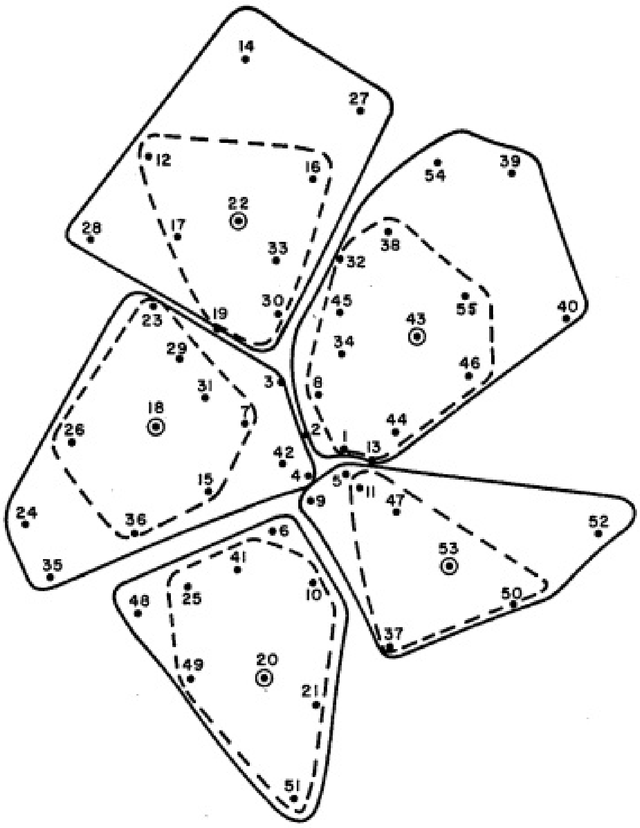
مثال ۱.۶.۳. فرض کنید تصمیم‌گیرنده بخواهد همه نقاط تقاضای یک شبکه‌ی ۵۵ گره‌ای (شبکه‌ی معرفی شده توسط سوین) را با کمترین تسهیل و با فاصله پوششی ۱۵ بپوشاند. واضح است که مسئله، مسئله‌ی مکانیابی پوشش مجموعه با $s = ۱۵$ است. شکل ۴.۳ جواب این مسئله را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۳: جواب مسئله پوشش مجموعه با $s = ۱۵$

گره‌هایی که در شکل دور آنها خط کشیده شده ۵ مکانی هستند که تسهیلات در آنها قرار می‌گیرند، یعنی

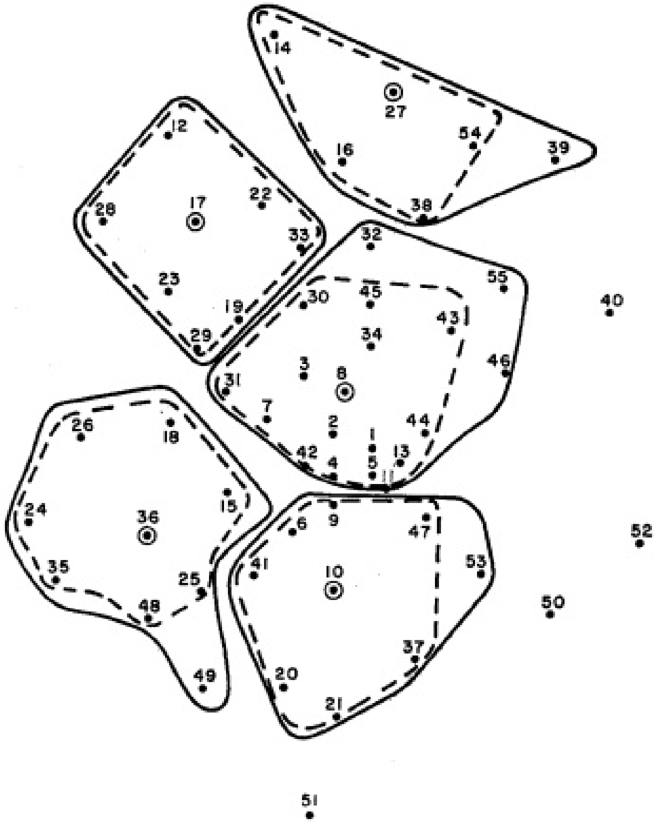
کمترین تعداد تسهیل برای پوشش تمام نقاط تقاضا در این مسئله ۵ است. هر گره‌ی تقاضا به نزدیکترین تسهیلش اختصاص یافته و بدین ترتیب شبکه به ۵ مجموعه افراز شده است. در شکل ۴.۳ دو نوع تقسیم‌بندی وجود دارد که یکی با خط کامل و دیگری با خط‌چین نشان داده شده است. مجموعه‌هایی که با خط کامل مشخص شدند، نشان‌دهنده گره‌هایی هستند که با $s = ۱۵$ پوشانده شدند و مجموعه‌هایی که با خط‌چین مشخص شدند، نشان‌دهنده گره‌هایی می‌باشند که با $s = ۱۰$ پوشانده شدند. شکل ۴.۳ نشان می‌دهد که این جواب بهینه‌ی مسئله‌ی پوشش مجموعه، جمعیتی برابر با ۲۰۱ را با فاصله پوششی ۱۰ می‌پوشاند و بقیه جمعیت یعنی ۴۳۹ تای دیگر در فاصله بین ۱۰ و ۱۵ از نزدیکترین تسهیلشان قرار می‌گیرند. همان‌طور که ذکر شد مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم، می‌تواند برای به‌دست آوردن جوابی از جواب‌های بهینه‌ی مسئله‌ی پوشش مجموعه که بیشترین جمعیت را با یک فاصله درونی و مطلوبتر می‌پوشاند، به کار رود. در این مثال نیز با حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم برای $s = ۱۰$ و $T = ۱۵$ با همان ۵ تسهیل، جوابی از جواب‌های بهینه مسئله پوشش مجموعه با فاصله پوششی ۱۵ به‌دست می‌آید که بیشترین جمعیت را با فاصله ۱۰ می‌پوشاند. این جواب که جمعیت تحت پوشش آن با فاصله پوششی ۱۰، برابر ۳۵۴ از جمعیت کل ۶۴۰ می‌باشد، در شکل ۵.۳ نشان داده شده است.



شکل ۵.۳: جواب بهینه مسئله پوشش مجموعه که بیشترین پوشش را با فاصله ۱۰ دارد.

واضح است که جواب فوق بهتر از جواب نشان داده شده در شکل ۴.۳ می‌باشد، زیرا ضمن اینکه پوشش کامل را با فاصله پوششی ۱۵ دارد، میزان پوشش آن با فاصله پوششی ۱۰، ۷۵ درصد بیشتر از جواب شکل ۴.۳ است. طبق تعریف مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم، نمی‌توانیم با ۵ تسهیل جمعیتی بیشتر از ۳۵۴ را با فاصله پوششی ۱۰ در حالی که پوشش کامل با فاصله ۱۵ حفظ می‌شود بپوشانیم، اما اگر تعداد تسهیلات را افزایش دهیم و یا اینکه قید پوشش کامل با فاصله پوششی ۱۵ را نادیده بگیریم، میزان پوشش با فاصله پوششی ۱۰ افزایش می‌یابد. شکل ۶.۳ جواب مسئله مکانیابی بیشترین پوشش را با فاصله پوششی $s = ۱۰$ نشان می‌دهد. گره‌هایی که در هیچ یک از مجموعه‌ها قرار نمی‌گیرند با فاصله $T = ۱۵$ پوشانده نمی‌شوند.

برای پوشاندن تمام نقاط تقاضا با فاصله پوششی ۱۵، جمعیت تحت پوشش با فاصله پوششی ۱۰، از



شکل ۶.۳: جواب بهینه مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با $s = 10$

۶۰۹ که از مسئله مکانیابی بیشترین پوشش به‌دست آمده به ۳۵۴ که از مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم به‌دست آمد، کاهش یافته است. این کاهش ۲۵۵ تایی در جمعیت تحت پوشش با فاصله پوششی ۱۰ هزینه‌ی ایجاد پوشش کامل با فاصله پوششی ۱۵ است، زیرا با در نظر گرفتن قیود نزدیکی لازم تنها جمعیتی برابر با ۱۲ از جمعیت کل ۶۴۰ (در ۴ گره از ۵۵ گره) تسهیلی را در فاصله ۱۵ از خود می‌یابند، در حالی که جمعیتی برابر با ۲۵۵ خارج از فاصله سرویس ۱۰ قرار می‌گیرند.

از دیدگاه تصمیم‌گیرنده جواب مسئله مکانیابی بیشترین پوشش در این مثال مطلوبتر از جواب مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با قیود نزدیکی لازم است. چون با نادیده گرفتن قیود نزدیکی لازم (پوشش کامل با فاصله پوششی ۱۵) نه تنها بیشترین جمعیت تحت پوشش با فاصله پوششی ۱۰ به میزان قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته (از ۳۵۴ به ۶۰۹)، بلکه تعداد افرادی که خارج از فاصله سرویس ۱۵ قرار می‌گیرند (۱۲ از ۶۴۰) نیز

بسیار اندک است.

۷.۳ حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش با روش ابتکاری آزادسازی لاگرانژ

فرمول مسئله مکانیابی بیشترین پوشش را که در بخش ۲.۳ بیان شد به یاد آورید؛

$$P: \quad max \quad \sum_{i\in N} a_i y_i$$

$$S.t. \quad y_i \leq \sum_j a_{ij} x_j \qquad i \in N \tag{۱۱.۳}$$

$$\sum_{j\in M} x_j = p \tag{۱۲.۳}$$

$$x_j \in \{۰,۱\} \qquad j \in M \tag{۱۳.۳}$$

$$y_i \in \{۰,۱\} \qquad i \in N \tag{۱۴.۳}$$

قید (۱۱.۳) آنالیز را پیچیده می‌کند زیرا متغیرهای مکان x_j را به متغیرهای پوششی y_i مرتبط می‌سازد، به همین دلیل تصمیم می‌گیریم این قید را آزاد کنیم. (توجه کنید که ممکن است در مسائل دیگر آزادسازی قیودی که متغیرهای تصمیم را به هم مرتبط می‌کنند پیشنهاد نشود. در واقع، در خیلی از مسائل چندین قید برای آزادسازی وجود دارد و باید قیدی را انتخاب کرد که آزادسازی آن کمک بیشتری به حل مسئله می‌کند.)
بعد از آزاد سازی قید (۱۱.۳) با استفاده از ضرایب لاگرانژی λ_i ، مسئله زیر به‌دست می‌آید؛

$$D: \quad min_\lambda \ \ max_{x,y} \quad \sum_i a_i y_i + \sum_i \lambda_i \ (\sum_j a_{ij} x_j - y_i)$$

$$S.t. \quad \sum_j x_j = p$$

$$x_j \in \{۰,۱\} \qquad j \in M$$

$$y_i \in \{۰,۱\} \qquad i \in N$$

تابع هدف را بر حسب متغیرهای تصمیم x_j و y_i ماکزیمم و بر حسب متغیرهای لاگرانژی λ_i کمینه می‌سازیم.
توجه کنید که برای هر یک از قیودی که آزاد می‌شوند یک ضریب لاگرانژی نیاز داریم. از آنجایی که تعداد

قیود (۱۱.۳) به اندازه نقاط تقاضا است به ازای هر نقطه تقاضای i، یک ضریب لاگرانژی λ_i مورد نیاز است.

با ترکیب عبارات مربوط به y_i در تابع هدف، مسئله زیر را داریم؛

$$\begin{array}{ll} min_{\lambda} \;\; max_{x,y} & \sum_i (a_i - \lambda_i) y_i + \sum_j (\sum_i a_{ij} \lambda_i) x_j \\ S.t. & \sum_j x_j = p \\ & x_j \in \{0, 1\} \qquad j \in M \\ & y_i \in \{0, 1\} \qquad i \in N \\ & \lambda_i \geq 0 \end{array}$$

از آنجایی که $\sum_j a_{ij} x_j - y_i \geq 0$، با انتخاب $\lambda_i \geq 0$ مقدار بهینه تابع هدف دوگان لاگرانژی به ازای هر مجموعه از مقادیر ثابت و نامنفی ضرایب لاگرانژی، یک کران بالا برای مقدار بهینه تابع هدف مسئله P خواهد بود.

برای مقادیر ثابت ضرایب لاگرانژی، مسئله دوگان به ۲ زیر مسئله، یکی مربوط به متغیرهای x_j و دیگری مربوط به متغیرهای y_i تجزیه می‌شود که هر کدام از آنها به راحتی قابل حل هستند. جواب زیر مسئله مربوط به y_i به صورت زیر است؛

$$y_i = \begin{cases} 1 & a_i - \lambda_i > 0 \text{ اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای حل زیر مسئله مربوط به x_j ، p مکانی که بزرگترین ضریب را در تابع هدف دوگان دارند یافته و برای آنها قرار می‌دهیم $x_j = 1$ ، برای سایر مکان‌ها نیز x_j را برابر صفر قرار می‌دهیم.

۱.۷.۳ پیدا کردن یک جواب شدنی و یک کران پایین

مقادیر x_j و y_i که از حل زیرمسائل دوگان به‌دست می‌آیند ممکن است برای مسئله اصلی شدنی نباشند. زیرا ممکن است قید (۱۱.۳) یعنی قید آزاد شده را نقض کنند. ولی می‌توانیم یک جواب شدنی را از این مقادیر، با یافتن میزان تقاضای کل پوشانده شده توسط p مکانی که مقدار x_j آنها ۱ است به‌دست آوریم. این جواب شدنی، یک کران پایین برای تابع هدف مسئله p است. فرض کنید LB^n مقدار این کران پایین در تکرار n ام و LB بهترین کران پایین (با بزرگترین مقدار) تا تکرار nام باشد.

همان‌طور که دیدیم با هر مجموعه از مقادیر ثابت ضرایب لاگرانژی یک کران بالا و یک کران پایین برای جواب بهینه مسئله مکانیابی بیشترین پوشش به‌دست می‌آید. در واقع روش آزادسازی لاگرانژ، یک روش جستجو برای یافتن کران‌های بهتر برای جواب بهینه مسئله می‌باشد.

۲.۷.۳ به‌روز رسانی ضرایب لاگرانژی

مقادیر ضرایب لاگرانژی همان‌طور که در فصل اول گفته شد، از روش بهینه‌سازی زیرگرادیان به‌دست می‌آیند،

$$\lambda_i^{n+۱} = max\{۰, \lambda_i^n - t^n(\sum_j a_{ij}x_j^n - y_i^n)\}$$

که t^n اندازه گام در تکرار n ام است و طبق رابطه زیر تعیین می‌شود؛

$$t^n = \frac{\alpha^n(L - LB)}{\sum_i(\sum_j a_{ij}x_j^n - y_i^n)^۲}$$

L بهترین کران بالا تا تکرارn ام وα^n اسکالری است که در رابطه‌ی $۰ \leq \alpha^n \leq ۲$ صدق می‌کند. مقدار اولیه آن ($\alpha^۱$) معمولاً ۲ بوده و هرگاه کران بالا بعد از تعداد معینی از تکرارها کاهش پیدا نکند، نصف می‌شود.

۳.۷.۳ شرط خاتمه

هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد، جستجو خاتمه می‌یابد:

۱) تعداد معین و از پیش تعیین شده‌ای از تکرارها انجام شده باشد.

۲) بهترین کران پایین با بهترین کران بالا برابر باشد و یا به اندازه کافی به آن نزدیک باشد.

۳) α^n کوچک شده باشد. وقتی α^n خیلی کوچک باشد، تغییرات در λ_i نیز خیلی کوچک خواهد بود و این تغییرات کوچک به حل مسئله کمک نمی‌کند.

مثال ۱.۷.۳. ۳ تکرار اول روش آزادسازی لاگرانژ را برای حل مسئله مکانیابی بیشترین پوشش تعریف شده روی شبکه شکل ۱.۳ با فاصله پوششی ۱۰ ارائه می‌دهیم. برای نمایش مراحل کاهش α^n، هرگاه که کران بالا از تکراری به تکرار دیگر کاهش نیابد α^n را به ۲ تقسیم می‌کنیم. مقادیر اولیه λ_i را با استفاده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم؛

$$\lambda_i = \overline{a} + ۰/۵(a_i - \overline{a})$$

که $\overline{a}$ میانگین تقاضای گره‌هاست. جداول ۷.۳ ، ۸.۳ و ۹.۳ نشان‌دهنده‌ی این ۳ تکرار می‌باشند.

جدول ۷.۳: اولین تکرار آزادسازی لاگرانژ

گره	a_i	λ_i	y_i	$(a_i-\lambda_i)y_i$	$\sum_i a_{ij}\lambda_i$	x_j	$(\sum_i a_{ij}\lambda_i)x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j - y_i$
A	۱۰	۱۵	۰	۰	۴۸	۱	۴۸	۲	۲
B	۸	۱۴	۰	۰	۴۸	۱	۴۸	۲	۲
C	۲۲	۲۱	۱	۱	۳۴/۵	۰	۰	۰	−۱
D	۱۸	۱۹	۰	۰	۴۸	۰	۰	۲	۲
E	۷	۱۳/۵	۰	۰	۳۴/۵	۰	۰	۰	۰
F	۵۵	۳۷/۵	۱	۱۷/۵	۳۷/۵	۰	۰	۰	−۱

کران بالا=۱۱۴/۵ بهترین کران بالا=۱۱۴/۵ بهترین کران پایین=۳۶

$t^n = ۱۱/۲۱۴۳ \qquad \alpha = ۲ \qquad \overline{a} = ۲۰$

جدول ۸.۳: دومین تکرار آزادسازی لاگرانژ

گره	a_i	λ_i	y_i	$(a_i-\lambda_i)y_i$	$\sum_i a_{ij}\lambda_i$	x_j	$(\sum_i a_{ij}\lambda_i)x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j - y_i$
A	۱۰	۰	۱	۱۰	۰	۰	۰	۰	−۱
B	۸	۰	۱	۸	۰	۰	۰	۰	−۱
C	۲۲	۳۲/۲۱	۰	۰	۴۵/۷۱	۱	۴۵/۷۱	۱	۱
D	۱۸	۰	۱	۱۸	۰	۰	۰	۰	−۱
E	۷	۱۳/۵	۰	۰	۴۵/۷۱	۰	۰	۱	۱
F	۵۵	۴۸/۷۱	۱	۶/۲۹	۴۸/۷۱	۱	۴۸/۷۱	۱	۰

کران بالا=۱۳۶/۷۱ بهترین کران بالا=۱۱۴/۵ بهترین کران پایین=۸۴

$\alpha = ۱ \qquad t^n = ۱۰/۵۴۲۹$

جدول ۹.۳: سومین تکرار آزادسازی لاگرانژ

گره	a_i	λ_i	y_i	$(a_i - \lambda_i)y_i$	$\sum_i a_{ij}\lambda_i$	x_j	$(\sum_i a_{ij}\lambda_i)x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j$	$\sum_j a_{ij}x_j - y_i$
A	۱۰	۱۰/۵۴	۰	۰	۳۱/۶۳	۱	۳۱/۶۳	۱	۱
B	۸	۱۰/۵۴	۰	۰	۳۱/۶۳	۰	۰	۱	۱
C	۲۲	۲۱/۶۷	۱	۰/۳۳	۲۴/۶۳	۰	۰	۰	−۱
D	۱۸	۱۰/۵۴	۱	۷/۴۶	۳۱/۶۳	۰	۰	۱	۰
E	۷	۲/۹۶	۱	۴/۰۴	۲۴/۶۳	۰	۰	۰	−۱
F	۵۵	۴۸/۷۱	۱	۶/۲۹	۴۸/۷۱	۱	۴۸/۷۱	۱	۰

کران بالا= ۹۸/۴۵۷۱ بهترین کران بالا= ۹۸/۴۵۷۱ بهترین کران پایین= ۹۱

$\alpha = ۱ \qquad t^n = ۱/۸۶۴۲۹$

روش آزادسازی لاگرانژ یک روش ابتکاری است و مانند روش‌های ابتکاری GA و GAS تضمینی برای به‌دست آوردن جواب بهینه با این روش وجود ندارد.

۸.۳ مدل مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار

در بعضی از موارد، تسهیلاتی که می‌خواهیم مکانیابی کنیم به گونه‌ای هستند که ممکن است وقتی از سرویس‌دهنده تقاضای سرویس می‌شود با وجود این که در فاصله پوششی از نقطه تقاضا قرار دارد و می‌تواند آن را بپوشاند، به دلیل سرویس‌دهی به نقطه تقاضای دیگر مشغول و خارج از دسترس باشد و عملاً نتواند به نقطه تقاضای مورد نظر سرویس دهد و آن را بپوشاند. به عنوان نمونه‌ای از این تسهیلات می‌توان آمبولانس‌ها و ماشین‌های آتش‌نشانی را نام برد. داسکین در اوایل دهه ۱۹۸۰[۸]، مدل مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار را برای مکانیابی این‌گونه تسهیلات معرفی کرد. او با فرض این که سرویس‌دهنده‌ها در تمام مکان‌های کاندیدا با یک احتمال قابل محاسبه‌ی معین (q) مشغول و خارج از دسترس هستند، به جای ماکزیمم ساختن جمعیت تحت پوشش، جمعیتی که با توجه به احتمال مشغول بودن سرویس‌دهنده‌ها انتظار می‌رود تحت پوشش قرار بگیرد را ماکزیمم ساخت. مسئله‌ی مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار $(MEXCLP)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

قرار دادن تعداد ثابت p تسهیل در مکان‌های ممکن شبکه برای ماکزیمم ساختن جمعیتی که با توجه به احتمال مشغول بودن سرویس‌دهنده‌ها انتظار می‌رود با فاصله پوششی s تحت پوشش قرار بگیرد.

اگر n_i تسهیل نقطه تقاضای i را بپوشانند (در فاصله s از نقطه تقاضای i باشند)، احتمال این که این نقطه توسط تسهیل‌هایی در دسترس سرویس‌دهی شود $1 - q^{n_i}$ است. حال اگر تسهیل دیگری که آن هم گره i را می‌پوشاند، اضافه شود این احتمال به $1 - q^{(n_i+1)}$ افزایش می‌یابد. داریم،

$$\{1 - q^{(n_i+1)}\} - \{1 - q^{n_i}\} = q^{n_i}(1 - q)$$

پس $a_i\{q^{n_i}(1-q)\}$ میزان افزایش پوشش قابل انتظار در گره i (میزان افزایش جمعیتی که انتظار می‌رود در گره i تحت پوشش قرار بگیرد) با افزایش تعداد تسهیلاتی که گره i را می‌پوشانند از n_i تسهیل به $(n_i + 1)$ تسهیل می‌باشد.

با این پیش‌زمینه، می‌توانیم فرمول ریاضی مسئله مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار را بیان کنیم.

$$\begin{array}{lll}
max & (1-q)\sum_i a_i\{\sum_{k=1}^{p} q^{k-1} Z_{ik}\} & \\
S.t. & \sum_k Z_{ik} \leq \sum_j a_{ij}x_j & \forall\ i \in N \\
 & \sum_j x_j = p & \\
 & x_j \geq 0 \quad and \quad Integer & \forall\ j \in M \\
 & Z_{ik} \in \{0, 1\} & \forall\ i, k
\end{array}$$

که x_j تعداد تسهیلاتی می‌باشد که در گره j قرار می‌گیرند و

$$Z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } i \text{ حداقل } k \text{ بار پوشانده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

عبارت درونی سیگما، $a_i\{\sum_{k=1}^{p} q^{k-1} Z_{ik}\}$، وقتی در $(1-q)$ ضرب می‌شود، میزان تقاضایی که انتظار می‌رود در گره i تحت پوشش قرار بگیرد را نشان می‌دهد که با جمع این مقادیر روی اندیس i، میزان کل پوشش قابل انتظار به‌دست می‌آید.

ضرایب تابع هدف برای هر گره i، توابع نزولی از k می‌باشند زیرا q کمتر از ۱ است. پس اگر $Z_{ik} = ۱$، آنگاه $Z_{i,k-۱} = ۱$. به طور مشابه، اگر $Z_{ik} = ۰$، آنگاه $Z_{i,k+۱} = ۰$.

توجه کنید که در این مدل به دلیل احتمال مشغول بودن سرویس‌دهنده‌ها، قرار دادن چند تسهیل در یک مکان می‌تواند بهینه باشد.

بیشتر تکنیک‌هایی که برای حل مسائل قبلی ارائه دادیم، مثل الگوریتم افزایشی حریصانه و الگوریتم افزایشی حریصانه با جانشینی و روش شاخه و کران برای حل این مسئله می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند.

مثال ۱.۸.۳. مسئله مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار برای شبکه شکل ۱.۳ با $q = ۰/۶$ ، $p = ۳$ و $Dc = ۱۰$ دارای جواب بهینه‌ی $Z_{F۲} = ۱$، $Z_{F۱} = ۱$، $Z_{D۱} = ۱$ ، $Z_{B۱} = ۱$ ، $Z_{A۱} = ۱$ ، $x_F = ۲$ و $x_D = ۱$ می‌باشد. (سایر متغیرهای x_j و Z_{ik} برابر صفر هستند.) توجه کنید که ۲ تسهیل در گره F قرار می‌گیرد و گره F، ۲ بار پوشانده می‌شود، در حالی که گره‌های C و E اصلاً پوشانده نمی‌شوند. جداول ۱۰.۳ و ۱۱.۳ این جواب بهینه را نشان می‌دهند.

جدول ۱۰.۳: تعداد تسهیلات در هر مکان کاندیدا در جواب بهینه

مکان کاندیدا	تعداد تسهیلات
A	۰
B	۰
C	۰
D	۱
E	۰
F	۲

جدول ۱۱.۳: سهم هر گره تقاضا در پوشش قابل انتظار جواب بهینه

گره تقاضا	تقاضا	تعداد دفعاتی که پوشانده می‌شود	سهم گره تقاضا در تابع هدف
A	۱۰	۱	۴
B	۸	۱	۳/۲
C	۲۲	۰	۰
D	۱۸	۱	۷/۲
E	۷	۰	۰
F	۵۵	۲	۳۵/۲

مقدار تابع هدف برای جواب بهینه ۴۹/۶ است، این نشان می‌دهد که در بهترین حالت تنها انتظار می‌رود ۴۹/۶ تقاضا از ۱۲۰ تقاضا با یک تسهیل در دسترس پوشانده شوند. (پوشش قابل انتظار ۴۹/۶ از ۱۲۰ تقاضاست) ولی اگر احتمال مشغول بودن تسهیلات را نادیده بگیریم با ۳ تسهیل، یکی در گره A، B یا D، دیگری در گره C یا E و تسهیل سوم در گره F، هر ۶ گره تقاضا دقیقاً ۱ بار پوشانده می‌شوند.

لازم به ذکر است که در مدل داسکین [۸]، احتمال مشغول بودن تسهیل در تمام مکان‌های کاندیدا با هم برابر است و همین‌طور احتمال مشغول بودن یک تسهیل مستقل از مشغول بودن یا نبودن تسهیل دیگر می‌باشد.

$MEXCLP$ را می‌توان با استفاده از یک تابع هدف غیرخطی با تعداد متغیر کمتر نیز فرمول‌بندی کرد. فرض کنید n_i تعداد دفعاتی باشد که گره i پوشانده می‌شود، پس پوشش قابل انتظار برای هر نقطه تقاضای i، $a_i(۱-q^{n_i})$ می‌باشد. می‌دانیم تعداد تسهیلاتی که قادر به پوشاندن نقطه تقاضای i هستند $\sum_{j\in M} a_{ij}x_j$ است، بنابراین برای هر i داریم $\sum_{j\in M} a_{ij}x_j = n_i$. بدین ترتیب فرمول غیرخطی $MEXCLP$ به صورت زیر به‌دست می‌آید؛

$$
\begin{array}{lll}
max & \sum_i a_i(۱-q^{n_i}) & \\
S.t. & \sum_{j\in M} a_{ij}x_j = n_i & \forall\, i\in N \\
 & \sum_j x_j = p & \\
 & x_j \in \{۰,۱,۲,...,p\} & \forall\, j\in M \\
 & n_i \in \{۰,۱,۲,...,p\} & \forall\, i\in N
\end{array}
$$

در زندگی واقعی با مسائل مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار در مقیاس بزرگ مواجه هستیم مثل مکانیابی واحدهای آمبولانس در یک شهر. آی توگ و سی دام [۱] مسئله مکانیابی بیشترین پوشش قابل انتظار را در مقیاس بزرگ با الگوریتم ژنتیک در زمان مناسب و منطقی حل کردند. با وجود این که هر دو فرمول ارائه شده برای $MEXCLP$ از نظر تئوری شبیه به هم هستند اما پیاده سازی الگوریتم ژنتیک

به وسیله فرمول غیرخطی آن آسانتر است. زیرا تابع هدف غیرخطی مستقیماً می‌تواند تابع برازش الگوریتم ژنتیک باشد. به دلیل این که برای هر جواب شدنی، محاسبه تعداد دفعاتی که هر گره پوشانده می‌شود (n_i) و در نتیجه محاسبه تابع هدف غیرخطی ساده است.

فصل ۴

مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله

۱.۴ مقدمه

مدل‌های مکانیابی پوشش مجموعه و بیشترین پوشش برای مکانیابی تسهیلات مطلوب مانند شعبه‌های بانک، فروشگاه‌های زنجیره‌ای، رستوران‌ها و ... به کار می‌روند. اما زمانی که تسهیلات نامطلوب و ناخوشایند باشند مثل زباله‌دانی‌ها، زندان‌ها، کارخانه‌ها و ... مکانیابی آنها به گونه‌ای صورت می‌گیرد که کمترین جمعیت ممکن به وسیله‌ی آنها پوشانده شود. به عبارت دیگر، تابع هدف پوششی برای تسهیلات نامطلوب کمینه‌سازی جمعیت تحت پوشش می‌باشد. مثل کارخانه‌ها و کارگاه‌های تولیدی یک شهر که به دلیل آلودگی صوتی و آلودگی هوا مکانیابی آنها به گونه‌ای انجام می‌شود که در دورترین نقطه از مناطق مسکونی قرار بگیرند و یا حتی الامکان در نزدیکی مناطق مسکونی با کمترین جمعیت باشند تا بدین ترتیب کمترین جمعیت ممکن درگیر مشکلات ناشی از آنها باشد.

در این فصل مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله ($MCLPDC$) بررسی می‌شود که هدف آن مکانیابی تعداد ثابت p تسهیل در مکان‌های ممکن شبکه برای کمینه ساختن جمعیت تحت پوشش با آنها می‌باشد، با این قید که فاصله هیچ دو تسهیلی از یکدیگر کمتر از مقدار معین و از پیش تعیین شده r نباشد. به عنوان یک مثال از این مسئله می‌توان مکانیابی راکتورهای هسته‌ای را نام برد. مکانیابی راکتورها به گونه‌ای انجام می‌شود که اولاً به دلیل خطرات جدی که برای افراد دارند کمترین جمعیت ممکن تحت پوشش آنها قرار بگیرد و ثانیاً برای جلوگیری از تجمع آنها در یک مکان به دلایل امنیتی، فاصله هیچ دو راکتوری کمتر از یک مقدار معین و از پیش تعیین شده نباشد. (زیرا اگر چند راکتور در یک مکان باشند ممکن است همه آنها توسط یک مهاجم مورد حمله قرار گرفته و از بین بروند.)

۲.۴ فرمول‌های ریاضی برای $MCLPDC$

اولین فرمول‌بندی $MCLPDC$ به صورت زیر بیان شده است؛

$$MCLPDC1 \qquad min \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$S.t. \qquad y_j + y_k \leq 1 \qquad \forall\, j,k \in M \ \ni \ d(j,k) < r \qquad (1.4)$$

$$x_i \geq y_j \quad i \in N,\ j \in M_i \qquad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = p \qquad (3.4)$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\} \qquad i \in N,\ j \in M \qquad (4.4)$$

که در آن :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر حداقل یک تسهیل در فاصله کمتر از } s \text{ از نقطه تقاضای } i \text{ قرار بگیرد و آن را بپوشاند.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تسهیلی در مکان } j \text{ تاسیس شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

N مجموعه نقاط تقاضا، M مجموعه مکان‌های کاندیدای تسهیلات، c_i جمعیت گره i و $M_i = \{j \in M \mid d(i,j) < s\}$.

قرارداد: در این فصل یک نقطه تقاضا پوشانده نامیده می‌شود اگر حداقل یک تسهیل در فاصله کمتر از فاصله پوششی s از آن موجود باشد.

قیود (۱.۴) بیان می‌کنند که اگر فاصله دو مکان کمتر از r باشد، حداکثر به یکی از آنها تسهیل اختصاص می‌یابد. قیود (۲.۴) نشان می‌دهند که گره i پوشانده می‌شود ($x_i = 1$) اگر تسهیلی در M_i موجود باشد و اگر هیچ تسهیلی در M_i نباشد، گره i پوشانده نمی‌شود و x_i مساوی صفر خواهد بود. طبق قید (۳.۴)، تعداد تسهیلاتی که می‌خواهیم مکانیابی کنیم برابر p است و در آخر قید (۴.۴)، محدودیت‌های دودویی را برای متغیرهای تصمیم ایجاد می‌کند.

حال گراف $G' = (N', L')$ که $N' = M$ و $L' = \{(j,k) \mid d(j,k) < r \ : \ j,k \in M \ ; \ j \neq k\}$ را می‌سازیم و فرمول دوم $MCLPDC$ را با توجه به خوشه‌های آن بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۴. یک خوشه در G'، یک زیر گراف کاملاً همبند از آن است.

تعریف ۲.۲.۴. خوشه ماکزیمال، خوشه‌ای است که زیر مجموعه خوشه بزرگتری نباشد.

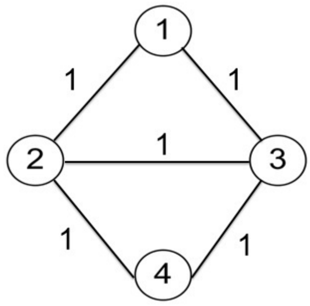
هر خوشه‌ی G'، طبق تعریف ۱.۲.۴، زیر گراف کاملاً همبندی از G' می‌باشد پس هر دو رأسی در آن توسط یک یال عضو مجموعه L' به یکدیگر متصلند. از تعریف L' نتیجه می‌شود که فاصله هر دو رأسی در خوشه کمتر از r می‌باشد. بنابراین طبق قید (۱.۴) در هر خوشه‌ی G' حداکثر یک تسهیل می‌تواند قرار بگیرد. اما از آنجایی که یک خوشه ممکن است زیر مجموعه خوشه بزرگتری باشد، نتیجه کلی‌تر و درست‌تر این است که در هر خوشه ماکزیمال G' حداکثر می‌توان یک تسهیل قرار داد. بدین ترتیب اگر MC مجموعه خوشه‌های ماکزیمال گراف G' باشد، قید (۱.۴) در $MCLPDC۱$ را در گراف G' با توجه به خوشه‌های آن می‌توان به صورت زیر بیان کرد؛

$$\forall\, C \in MC \ ; \quad \sum_{k \in C} y_k \leq ۱$$

و فرمول دوم $MCLPDC$ به صورت زیر شکل می‌گیرد؛

$$\begin{aligned} MCLPDC۲ \qquad & min \qquad \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i \\ & S.t. \qquad (۲.۴), (۳.۴)\ and\ (۴.۴) \\ & \qquad\qquad \sum_{k \in C} y_k \leq ۱ \qquad \forall\, C \in MC \qquad (۵.۴) \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.۴. در شکل ۱.۴، $M = N$، $s = ۱,\ r = ۱/۵,\ p = ۲$ و یالها به طول واحد هستند و برای هر i داریم $c_i = ۱$.



شکل ۱.۴:شبکه‌ی G_1

تنها جواب شدنی، قرار دادن ۲ تسهیل در گره‌های ۱ و ۴ با مقدار تابع هدف ۲ است. گرچه مقدار تابع هدف برای جواب بهینه آزادسازی خطی $MCLPDC1$ نیز ۲ است، ولی مقدار هر متغیر در این جواب بهینه $\frac{1}{2}$ می‌باشد. اما اگر این مسئله را با $MCLPDC2$ حل کنیم، داریم $MC = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$. چون در هر یک از این خوشه‌های ماکزیمال حداکثر یک تسهیل قرار می‌گیرد، به جای قیود (۱.۴) در $MCLPDC1$ قیود

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_2 + y_3 + y_4 \leq 1 \end{cases}$$

در $MCLPDC2$ قرار می‌گیرند. با حل آزادسازی برنامه‌ریزی خطی $MCLPDC2$، جواب همه صحیح به‌دست می‌آید که به وضوح جواب بهینه مسئله است.

در حالت کلی همان‌طور که در این مثال نیز دیدیم، آزادسازی برنامه‌ریزی خطی $MCLPDC2$، به جواب‌های صحیح‌تری نسبت به آزادسازی برنامه‌ریزی خطی $MCLPDC1$ منجر می‌شود. ولی اشکال عمده فرمول $MCLPDC2$ این است که ممکن است تعداد خوشه‌های ماکزیمال گراف G' ، نمایی باشد که در این صورت نوشتن تمام قیود لازم برای آن غیرممکن است.

فرمول سوم $MCLPDC$ به صورت زیر است:

$$MCLPDC۳ \qquad min \qquad \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i$$
$$S.t. \qquad (۲.۴),(۳.۴)\ and\ (۴.۴)$$

$$p(۱-y_j) \geq \sum_{k\in Q_j} y_k \qquad j \in M \qquad (۶.۴)$$

که برای $j \in M$ ، $Q_j = \{k \in M \mid d(k,j) < r\ ,\ k \neq j\}$.

قید (۶.۴) معادل قیود (۱.۴) و (۵.۴) است و تأسیس دو تسهیل در فاصله کمتر از r از یکدیگر را ممنوع می‌کند. بدین ترتیب که اگر تسهیلی در $j \in M$ تأسیس شود، برای هر $k \in Q_j$ که فاصله‌اش از j کمتر از r است باید $y_k = ۰$. همچنین قید (۶.۴) بیان می‌کند که اگر در مکان j تسهیلی تأسیس نشود حداکثر p تسهیل می‌تواند در مجموعه Q_j قرار بگیرد. واضح است که $MCLPDC۳$ قیود کمتری نسبت به $MCLPDC۱$ دارد.

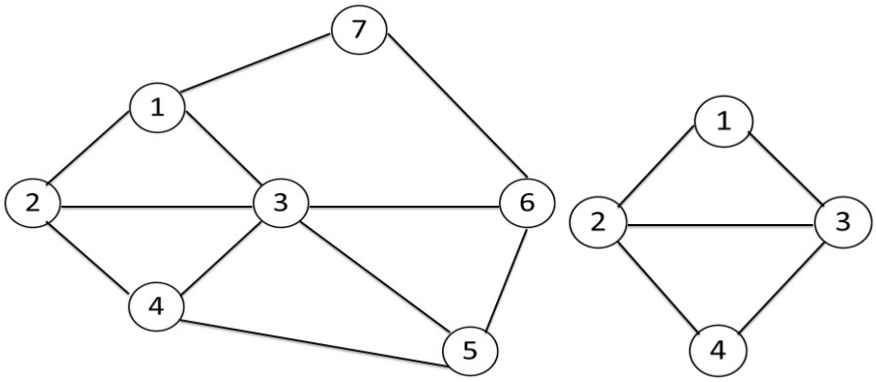
حال فرمول چهارم $MCLPDC$ را ارائه می‌دهیم،

$$MCLPDC۴ \qquad min \qquad \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i$$
$$S.t. \qquad (۲.۴),(۳.۴)\ and\ (۴.۴)$$

$$n_j(۱-y_j) \geq \sum_{k\in Q_j} y_k \qquad j \in M \qquad (۷.۴)$$

گراف $G' = (N',L')$ را که قبلاً ساختیم به یاد آورید. فرض کنید G'_j زیر گراف G' القا شده توسط $Q_j \cup \{j\}$ و q_j اندازه بزرگترین مجموعه مستقل G'_j باشد. اگر تسهیلی در مکان j تأسیس نشود، حداکثر به اندازه بزرگترین مجموعه مستقل G'_j که نشان‌دهنده بزرگترین زیرمجموعه Q_j است که فاصله هیچ دو عضوی در آن کمتر از r نیست در Q_j می‌توانیم تسهیل تأسیس کنیم. پس $n_j = min\{p,q_j\}$ ، تعداد تسهیلات مجاز در Q_j می‌باشد. قید (۷.۴) در $MCLPDC۴$ همین مطلب را بیان می‌کند. مسئله‌ی یافتن بزرگترین مجموعه مستقل، یک مسئله‌ی $Np-$ کامل است اما از آنجایی که G'_j معمولاً یک گراف کوچک است، q_j می‌تواند به آسانی با شمارش کامل به‌دست آید.

مثال ۴.۲.۴. شکل ۲.۴ مثالی از G' با $p = ۳$ می‌باشد. $G'_۲$ در سمت راست شکل نشان داده شده و دیده می‌شود بزرگترین مجموعه مستقل آن، $\{۱, ۴\}$ است پس $q_۲ = ۲$ و $n_۲ = ۲$.



شکل ۲.۴:شبکه‌ی $G_۲$

در صورت تأسیس نشدن تسهیل در مکان j طبق قید (۶.۴) تعداد تسهیلات مجاز در Q_j ، حداکثر p می‌باشد ولی در قید (۷.۴) این تعداد حداکثر $n_j \leq p$ است پس به وضوح قید (۷.۴) کران دقیقتری را برای تعداد تسهیلات مجاز در Q_j نسبت به قید (۶.۴) ارائه می‌دهد.

فرض کنید C_j، خوشه ماکزیمال شامل گره j از گراف G' باشد. برای مثال، در شکل قبل $C_۱$، $\{۱, ۲, ۳\}$ یا $\{۱, ۷\}$ است. از $Q_j \cup \{j\}$ تمام عناصر C_j را خارج کرده و مجموعه حاصل را Q'_j می‌نامیم. یعنی

$$Q'_j = \{k \mid k \in Q_j \cup \{j\} \ , \ k \notin C_j\}$$

توجه کنید که Q'_j می‌تواند تهی باشد. همانند n_j، ضریب n'_j برای Q'_j تعریف می‌شود. دوباره به مثال قبل نگاه کنید. داریم،

$$Q_۶ \cup \{۶\} = \{۳, ۵, ۶, ۷\} \quad , \quad n_۶ = ۲$$

اگر $C_۶$ مجموعه $\{۳, ۵, ۶\}$ انتخاب شود داریم، $Q'_۶ = \{۷\}$ پس $n'_۶ = ۱$.

از آنجایی که $Q_j = Q'_j \cup (C_j \setminus \{j\})$ و C_j یک خوشه است داریم،

$$n'_j \leq n_j \leq n'_j + ۱ \quad , \ j \in M$$

مجموعه همه خوشه‌های ماکزیمال شامل اعضای M را با $L_۱$ و مجموعه همه Q'_j های ناتهی $(j \in M)$ را با $L_۲$ نشان دهید. از آنجایی که ممکن است چند عضو M در یک خوشه ماکزیمال سهیم باشند و نیز ممکن است بعضی از Q'_j ها تهی باشند. اندازه $L_۱$ و $L_۲$ میتواند از $|M|$ کمتر باشد. به کمک مطالب گفته شده می‌توانیم پنجمین فرمول را برای $MCLPDC$ ارائه دهیم،

$$MCLPDC۵ \qquad min \qquad \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i$$

$$S.t. \qquad (۲.۴), (۳.۴) \; and \; (۴.۴)$$

$$\sum_{k \in C_j} y_k \leq ۱ \qquad C_j \in L_۱ \tag{۸.۴}$$

$$n'_j(۱ - y_j) \geq \sum_{k \in Q'_j} y_k \qquad Q'_j \in L_۲ \tag{۹.۴}$$

وقتی $r \geq ۲s$ ، حداکثر یک تسهیل می‌تواند در M_i $(i \in N)$ قرار بگیرد بنابراین قید (۲.۴) را می‌توان با قید فشرده‌تر زیر جانشین کرد،

$$\sum_{j \in M_i} y_j = x_i \tag{۱۰.۴}$$

قید (۱۰.۴) نشان می‌دهد که وقتی $r \geq ۲s$، اگر نقطه تقاضای i پوشانده شود دقیقاً یک تسهیل در M_i قرار می‌گیرد و اگر هیچ تسهیلی در M_i نباشد، گره i پوشانده نمی‌شود. با جایگذاری سمت چپ عبارت (۱۰.۴) به جای x_i در تابع هدف، قید (۱۰.۴) را حذف کرده و تابع هدف جدیدی به‌دست می‌آوریم،

$$min \quad \sum_{i=۱}^{n} c_i \sum_{j \in M_i} y_j = \; min \quad \sum_{j=۱}^{m} (\sum_{k \in E_j} c_k) y_j$$

که $E_j = \{k \in N \mid d(j,k) < s\}$.

در عبارت سمت راست جمعیت تحت پوشش با هر یک از تسهیلات محاسبه شده و در نهایت با هم جمع می‌شوند و چون هر نقطه تقاضا وقتی $r \geq ۲s$ فقط در یکی از E_j ها قرار می‌گیرد، ضریب هزینه آن در این عبارت تنها یک بار محاسبه می‌شود. پس عبارت سمت راست دقیقاً برابر جمعیت تحت پوشش است.

قرار دهید $K = max\{\sum_{k \in E_j} c_k\}$. در این صورت یک مسئله هم‌ارز با $MCLPDC$ وقتی $r \geq ۲s$، به صورت زیر به‌دست می‌آید؛

$$max \quad \sum_{j=۱}^{m} (K - \sum_{k \in E_j} c_k) y_j$$

$S.t.$ (۱.۴) یا (۵.۴) یا (۶.۴) یا (۷.۴) یا (۸.۴) و (۹.۴)

$$\sum_{j=۱}^{m} y_j = p$$

$$y_j \in \{۰, ۱\} \qquad j \in M$$

۳.۴ تجارب محاسباتی

برمن و هوآنگ [۲] عملکرد فرمول‌های ارائه شده برای $MCLPDC$ را روی ۴۵۰ مسئله نمونه بررسی کردند. برای ایجاد این مسائل، آنها تعداد گره‌ها (n) را اعداد ۱۰۰ ، ۲۰۰ ، ۳۰۰ ، ۴۰۰ و ۵۰۰ تعداد تسهیلات (p) را مقادیر ۵، ۱۰، ۱۵ و ترکیبات (s, r) را مقادیر $(۱۰, ۱۵)$ و $(۱۵, ۲۵)$ و $(۲۰, ۳۰)$ انتخاب کردند، بدین ترتیب ۴۵ ترکیب مختلف از پارامترها را ایجاد نموده و برای هر ترکیب n, p, s, r، ۱۰ مسئله نمونه را تولید کردند.

مسائل نمونه با استفاده از رسم‌کننده تصادفی گراف در زبان C به وسیله تابع عدد تصادفی ویژوال استاندارد $C++$ رسم شدند، بدین ترتیب که ابتدا مختصات کارتزین گره‌ها در مستطیل $(۰, ۱۰۰)^۲$ به طور یکنواخت ایجاد شد. سپس گره‌ها به طور تصادفی به هم متصل شدند تا یک درخت شکل بگیرد و در آخر یک تعداد تصادفی از یالها به درخت تولید شده اضافه شد. وزن گره‌ها نیز به طور تصادفی از میان اعداد صحیح بین ۱ و اندازه گراف انتخاب و طول یالها با استفاده از فرمول فاصله اقلیدسی محاسبه شد.

برمن و هوآنگ این مسائل را با فرمول‌های اول، سوم، چهارم و پنجم $MCLPDC$ با ماشین دِل اپتیپِلِکس[۱] $GX۲۷۰$ که مجهز به پردازشگر GHZ ۲/۷۹۳ و حافظه M ۵۱۲ می‌باشد، حل کردند. به دلیل احتمال

[۱] Dell Optiplex GX270

وجود تعداد نمایی از خوشه‌های ماکزیمال، فرمول دوم در این مقایسه وارد نشده است.

برای به‌دست آوردن مجموعه $L_۱$ در $MCLPDC۵$، به شکل حریصانه برای هر j، C_j را تولید کردند و برای اطمینان از زائد نبودن اعضای $L_۱$، مجموعه گام به گام بررسی شده است. برای به‌دست آوردن n'_j، بزرگترین مجموعه مستقل Q'_j را با حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر با آی لوگ سی پلکس ۸/۱ [۲] به‌دست آوردند.

$$
\begin{aligned}
& max \quad \sum_{v \in Q'_j} x_v \\
& S.t. \quad x_u + x_v \leq ۱ \quad \forall\, u,v \in Q'_j \;\; and \;\; (u,v) \in G' \\
& \qquad\quad x_v \in \{۰,۱\} \quad \forall\, v \in Q'_j
\end{aligned}
$$

از آنجایی که Q'_j معمولاً کوچک است، این گام زمان زیادی برای هیچ یک از مسائل نمونه برنمی‌دارد. زمان اجرای فرمول‌ها برای این مسائل نمونه در جداول ۱.۴ تا ۹.۴ مشاهده می‌شود.

جدول ۱.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r = ۱۵$، $s = ۱۰$، $p = ۵$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
۲۰۰	۰/۰۲	۰/۵۱	۰/۳۵	۰/۰۲
۳۰۰	۰/۰۶	۱۱/۹۱	۱۰/۷۱	۰/۰۶
۴۰۰	۰/۱۱	۳۱۳/۴۴	۲۸۱/۵۹	۰/۱۶
۵۰۰	۰/۲۱	۱۲۷۸/۶۹	۱۲۴۶/۶۶	۰/۳۴

جدول ۲.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r = ۱۵$، $s = ۱۰$، $p = ۱۰$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۰
۲۰۰	۰/۰۲	۱/۱۳	۰/۷۴	۰/۰۳
۳۰۰	۰/۰۶	۳۵/۵۱	۳۳/۶۰	۰/۰۸
۴۰۰	۰/۱۲	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۱۹
۵۰۰	۰/۲۶	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۴۶

[۲] ILOG CPLEX 8.1

جدول ۳.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r = ۱۵$، $s = ۱۰$، $p = ۱۵$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۰۱
۲۰۰	۰/۰۲	۰/۸۳	۰/۹۰	۰/۰۴
۳۰۰	۰/۰۷	۱۰۵۷/۸۳	۵۷۴/۸۴	۰/۱۰
۴۰۰	۰/۱۴	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۲۸
۵۰۰	۰/۲۸	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۴۹

جدول ۴.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r = ۲۵$، $s = ۱۵$، $p = ۵$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۱	۰/۴۸	۰/۳۷	۰/۰۲
۲۰۰	۰/۰۵	۳۷۹/۶۳	۳۵۱/۸۸	۰/۰۸
۳۰۰	۰/۲۸	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۵۲
۴۰۰	۲۳۸/۱۶	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۸۸۱/۹۵
۵۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

جدول ۵.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r = ۲۵$، $s = ۱۵$، $p = ۱۰$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۲	۰/۳۸	۰/۵۲	۰/۰۲
۲۰۰	۰/۰۷	۱۶۶۹/۱۹	۱۶۸۹/۲۱	۰/۱۲
۳۰۰	۰/۹۹	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۳/۰۰
۴۰۰	۷۵۷/۲۲	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۴۹۳/۱۰
۵۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

جدول ۶.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r =$ ۲۵، $s =$ ۱۵، $p =$ ۱۵

n	$MCLPDC$۱	$MCLPDC$۳	$MCLPDC$۴	$MCLPDC$۵
۱۰۰	۰/۰۱	۰/۴۵	۰/۸۴	۰/۰۲
۲۰۰	۰/۰۷	۹۵۸/۰۷	۱۸۰۰	۰/۱۷
۳۰۰	۰/۴۲	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱/۹۲
۴۰۰	۲۱/۱۹	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۴۴۶/۹۶
۵۰۰	۱۳۶۸/۶۲	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

جدول ۷.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r =$ ۳۰، $s =$ ۲۰، $p =$ ۵

n	$MCLPDC$۱	$MCLPDC$۳	$MCLPDC$۴	$MCLPDC$۵
۱۰۰	۰/۰۲	۱۰/۵۱	۸/۶۴	۰/۰۲
۲۰۰	۰/۲۸	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۰/۶۵
۳۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰
۴۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰
۵۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

جدول ۸.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r =$ ۳۰، $s =$ ۲۰، $p =$ ۱۰

n	$MCLPDC$۱	$MCLPDC$۳	$MCLPDC$۴	$MCLPDC$۵
۱۰۰	۰/۰۲	۱/۵۴	۱۳/۲۵	۰/۰۵
۲۰۰	۰/۵۹	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱/۳۴
۳۰۰	۱۲۷۳/۳۳	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰
۴۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰
۵۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

جدول ۹.۴: زمان اجرای فرمول‌ها با $r=۳۰$، $s=۲۰$، $p=۱۵$

n	$MCLPDC۱$	$MCLPDC۳$	$MCLPDC۴$	$MCLPDC۵$
۱۰۰	۰/۰۴	۱/۱۳	۲/۳۵	۰/۱۱
۲۰۰	۰/۰۴	۱/۱۳	۲/۳۵	۰/۱۱
۳۰۰	۲۱۲/۴۱	۱۸۰۰	۹۷۳/۹۲	۹۹/۷۷
۴۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۴۶۳/۸۹
۵۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰

همان‌طور که در جداول دیده می‌شود:

۱- $MCLPDC۱$ و $MCLPDC۵$ به طور قابل ملاحظه‌ای زمان اجرای کمتری نسبت به $MCLPDC۳$ و $MCLPDC۴$ دارند.

۲- $MCLPDC۴$ به میزان خیلی کمی سریعتر از $MCLPDC۳$ است یعنی سرعت این دو فرمول نزدیک به هم است.

۳- در کل، فرمول $MCLPDC۱$ سریعتر از فرمول $MCLPDC۵$ است، اما همان‌طور که در جدول ۹.۴ می‌بینیم، وقتی که $p=۱۵$، $s=۲۰$، $r=۳۰$ و $n=۳۰۰$ یا ۴۰۰، $MCLPDC۵$ سریعتر از $MCLPDC۱$ است. در بیشتر مثالهایی که $MCLPDC۵$ سریعتر از $MCLPDC۱$ است، قیود فاصله ناسازگارند یعنی مسئله، نشدنی است.

۴.۴ روشهای حل مسئله $MCLPDC$

۱.۴.۴ روش ابتکاری حریصانه

الگوریتم حریصانه برای حل $MCLPDC$ با یک مجموعه خالی Y شروع می‌کند. در اولین تکرار مکانی را از میان مکان‌های کاندیدا برمی‌گزیند که کمترین جمعیت را تحت پوشش قرار می‌دهد، و در تکرارهای بعدی نیز مکانی را به Y اضافه می‌کند که اضافه کردن آن باعث کمترین افزایش در مقدار تابع هدف (جمعیت تحت پوشش) شود و در ضمن قیود فاصله را نیز رعایت کند یعنی فاصله‌اش از هر یک از مکان‌های انتخاب شده بزرگتر و یا مساوی r باشد. این اضافه کردن مکان‌ها تا زمانی ادامه می‌یابد که p تسهیل انتخاب شده باشد و یا این که اضافه کردن تسهیل بعدی به مجموعه مکان‌ها ممکن نباشد یعنی دیگر نتوان مکانی را

انتخاب کرد که در فاصله بزرگتر و یا مساوی r از مکان‌های انتخاب شده باشد.

۲.۴.۴ روش ابتکاری آزادسازی لاگرانژ

در این زیر بخش، ۲ روند آزادسازی لاگرانژ را برای حل $MCLPDC$ ارائه می‌دهیم. یکی برای حالت $r < ۲s$ و دیگری برای حالت $r \geq ۲s$. آزمایشات محاسباتی انجام شده توسط چرچ و موری[3] [۱۶] نشان داد که قیدهای (۸.۴) و (۹.۴) برای آزادسازی لاگرانژ مناسبترند. به همین دلیل، الگوریتم آزادسازی لاگرانژ را بر روی $MCLPDC۵$ اعمال می‌کنیم. قبلاً بیان شد که اگر $r \geq ۲s$، $MCLPDC۵$ به صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{j=۱}^{m}(K - \sum_{k\in E_j} c_k)y_j \\
S.t. \quad & \sum_{k\in C_j} y_k \leq ۱ \qquad C_j \in L_۱ && (۱۱.۴)\\
& n'_j(۱ - y_j) \geq \sum_{k\in Q'_j} y_k \qquad Q'_j \in L_۲ && (۱۲.۴)\\
& \sum_{j=۱}^{m} y_j = p \\
& y_j \in \{۰, ۱\} \qquad j \in M
\end{aligned}
$$

با دادن ضرایب لاگرانژی به قیود (۱۱.۴) و (۱۲.۴) آنها را آزاد کرده و به تابع هدف می‌بریم و دوگان لاگرانژی را به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
min_{\lambda,\theta} \quad max_{y_j} \quad & \sum_{j=۱}^{m}(K - \sum_{k\in E_j} c_k)y_j + \sum_{j=۱}^{|L_۱|}\lambda_j(۱ - \sum_{k\in C_j} y_k) + \\
& \sum_{j=۱}^{|L_۲|}\theta_j(n'_j - n'_j y_j - \sum_{k\in Q'_j} y_k) \\
S.t. \quad & \sum_{j=۱}^{m} y_j = p
\end{aligned}
$$

[3] Murray

$$y_j \in \{0,1\} \quad j \in M$$

برای مقادیر ثابت ضرایب لاگرانژی، مسئله دوگان به آسانی حل می‌شود زیرا تابع هدف به صورت $\sum_j a_j y_j + b$ است که a_j و b اعداد ثابتی هستند و a_j ها می‌توانند به ترتیب نزولی مرتب شوند پس جواب مسئله دوگان برای هر $j=1,...,p$، $y_j = 1$ و برای بقیه y_j ها، $y_j = 0$ می‌باشد.

اگر $r < 2s$ ، شکل اولیه $MCLPDC5$ را در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
S.t. \quad & \sum_{k \in C_j} y_k \leq 1 \qquad C_j \in L_1 && (13.4)\\
& n'_j(1-y_j) \geq \sum_{k \in Q'_j} y_k \qquad Q'_j \in L_2 && (14.4)\\
& x_i \geq y_j \qquad i \in N \ , \ j \in M_i && (15.4)\\
& \sum_{j=1}^{m} y_j = p && (16.4)\\
& x_i, y_j \in \{0,1\} \qquad i \in N \ , \ j \in M && (17.4)
\end{aligned}$$

با آزادسازی قیود (۱۳.۴) ، (۱۴.۴) و (۱۶.۴) دوگان لاگرانژی $MCLPDC5$ را به‌دست می‌آوریم و آن را مسئله L می‌نامیم.

$$\begin{aligned}
max_{\lambda,\theta} \quad min_{x_i,y_j} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{|L_1|} \lambda_j (\sum_{k \in C_j} y_k - 1) + \sum_{j=1}^{|L_2|} \theta_j (\sum_{k \in Q_j} y_k - n'_j + n'_j y_j) \\
& + \tau (p - \sum_{j=1}^{m} y_j) \\
S.t. \quad & x_i \geq y_j \qquad i \in N \ , \ j \in M_i && (18.4)\\
& x_i, y_j \in \{0,1\} \qquad i \in N \ , \ j \in M && (19.4)
\end{aligned}$$

برای مقادیر ثابت ضرایب لاگرانژی τ و $\theta_j \ (j=1,...,|L_2|)$ و $\lambda_j \ (j=1,...,|L_1|)$ یک مسئله کمینه‌سازی داریم که آن را $L(\lambda,\theta,\tau)$ می‌نامیم (λ, θ بردار هستند).

تعریف ۱.۴.۴. یک ماتریس تک پیمانه‌ای (TU) نامیده می‌شود اگر دترمینان هر زیرماتریس مربعی آن ۰، ۱ یا ۱− باشد.

می‌دانیم که اگر A یک ماتریس TU و b برداری از اعداد صحیح باشد، چندوجهی $p(A) = \{x \mid Ax \leq b\}$ دارای نقاط رأسی صحیح است. پس اگر ماتریس قیود مسئله $L(\lambda, \theta, \tau)$ ، TU باشد، به آسانی می‌توانیم قیود دودویی را آزاد کرده و آن را به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی حل کنیم. برای اثبات این که ماتریس قیود مسئله $L(\lambda, \theta, \tau)$ ، TU است به قضیه زیر نیاز داریم.

قضیه ۲.۴.۴. *فرض کنید A ماتریسی باشد که مؤلفه‌های آن ۰، ۱ یا ۱− است. همچنین، فرض کنید Q مجموعه زیر ماتریس‌های مربعی A باشد که هر مجموع سطری و ستونی آنها زوج است. اگر مجموع مؤلفه‌های هر $B \in Q$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه A ، TU است* [۲۳].

حال آماده‌ایم که قضیه زیر را بیان کنیم:

قضیه ۳.۴.۴. *ماتریس قیود مسئله $L(\lambda, \theta, \tau)$، TU است* [۲].

برهان. فرض کنید B زیر ماتریس مربعی ماتریس قیود $L(\lambda, \theta, \tau)$ با مجموع‌های سطری و ستونی زوج باشد. از آنجایی که هر مجموع سطری B صفر است، مجموع مؤلفه‌های B نیز صفر خواهد بود که بر ۴ بخش‌پذیر است. پس طبق قضیه (۲.۴.۴)، ماتریس قیود مسئله $L(\lambda, \theta, \tau)$، TU است.

□

حال قیود

$$\circ \leq x_i \leq 1 \ , \ \ \circ \leq y_j \leq 1 \quad \forall\, i, j$$

می‌توانند جانشین قیود (۱۹.۴) شوند.

مقادیر ضرایب لاگرانژی با روش بهینه‌سازی زیرگرادیان به‌دست می‌آیند.

با ضرایب آغازین داده شده‌ی

$$\lambda_j^\circ \ \ (j = 1, ..., |L_1|) \ , \quad \theta_j^\circ \ \ (j = 1, ..., |L_2|) \ , \quad \tau^\circ$$

یک دنباله از ضرایب با روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda_j^{n+1} = max\ \{0, \lambda_j^n + t^n(\sum_{k\in C_j} y_k - 1)\} \tag{۲۰.۴}$$

$$\theta_j^{n+1} = max\ \{0, \theta_j^n + t^n(\sum_{k\in Q'_j} y_k - n'_j + n'_j y_j)\} \tag{۲۱.۴}$$

$$\tau_j^{n+1} = max\ \{0, \tau^n + t^n(p - \sum_{j=1}^{m} y_j)\} \tag{۲۲.۴}$$

که y_j جواب بهینه مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ (جواب بهینه دوگان لاگرانژی در تکرار $n-$ ام) و t^n اسکالر مثبت اندازه گام است که از رابطه زیر تعیین می‌شود،

$$t^n = \frac{\alpha^n (Z^u - Z^L)}{\sum_{j=1}^{|L_1|}(\sum_{k\in C_j} y_k - 1)^2 + \sum_{j=1}^{|L_2|}(\sum_{k\in Q'_j} y_k - n'_j + n'_j y_j)^2 + (\sum_{j=1}^{m} y_j - p)^2} \tag{۲۳.۴}$$

α^n نیز یک اسکالر است که در رابطه $2 \leq \alpha^n \leq 0$ صدق می‌کند. Z^u بهترین کران بالای یافت شده و Z^L بهترین کران پایین یافت شده است. با $\alpha^\circ = 2$ شروع می‌کنیم. هرگاه مقدار تابع هدف مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ و مقدار $Z^L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ بعد از تعداد ثابتی از تکرارها افزایش نیابد، α^n را به ۲ تقسیم می‌کنیم. اگر کران‌های بالا و پایین به مقدار کافی به هم نزدیک باشند و یا به حد تکرار رسیده باشیم الگوریتم خاتمه می‌یابد. (مقادیر اولیه ضرائب لاگرانژی را نیز صفر انتخاب می‌کنیم.)

الگوریتم آزادسازی لاگرانژ وقتی $r < 2s$ به صورت زیر است:

گام ۱ : قرار دهید $n = 0$. مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ را با $\theta_j^n = 0$ و $\lambda_j^n = 0$ برای هر j و $\tau^n = 0$ حل کنید. بهترین کران پایین (Z^L) را صفر و بهترین کران بالا (Z^u) را مجموع همه c_j ها قرار دهید.

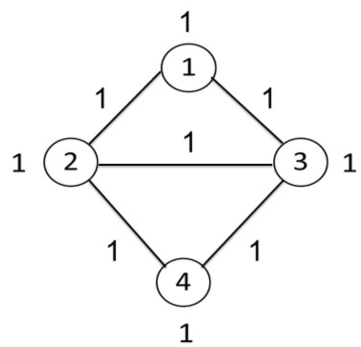
گام ۲ : قرار دهید $n := n + 1$ و λ_j^n، θ_j^n و τ^n را طبق روابط گفته شده به‌روز کنید.

گام ۳ : مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ را حل کنید و Z^L را در صورت لزوم به‌روز کنید. در واقع با حل مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ یک کران پایین برای جواب بهینه مسئله اصلی به‌دست می‌آید. جواب مسئله $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ ممکن است برای مسئله اصلی شدنی نباشد اما با استفاده از آن می‌توانیم یک جواب شدنی برای مسئله اصلی

پیدا کنیم . بدین ترتیب که اگر جواب $L(\lambda^n, \theta^n, \tau^n)$ در قیود (۱۳.۴) و (۱۴.۴) صدق نکند به شکل حریصانه تسهیلات تأسیس شده را حذف می‌کنیم تا نقض قیود (۱۳.۴) و (۱۴.۴) از بین برود و اگر تعداد تسهیلات تأسیس شده بیشتر از p باشد به روش حریصانه حذف را انجام می‌دهیم تا زمانی که دقیقاً p تسهیل موجود باشد ولی اگر تعداد تسهیلات تأسیس شده کمتر از p باشد، به روش حریصانه تسهیلات را به گونه‌ای که قیود (۱۳.۴) و (۱۴.۴) اجازه می‌دهند اضافه می‌کنیم تا زمانی که p تسهیل ایجاد شود و یا این که دیگر نتوان تسهیلی را اضافه کرد. بدین ترتیب یک جواب شدنی برای مسئله اصلی پیدا می‌شود که یک کران بالا برای جواب بهینه مسئله اصلی است. در صورت لزوم Z^u را به‌روز کنید.

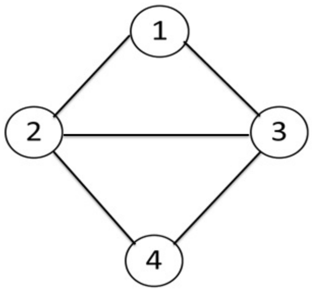
گام ۴ : اگر n به حد تکرار برسد و یا این که اختلاف کران‌های بالا و پایین به مقدار کافی کم باشد، توقف کنید. در غیر این صورت به گام ۲ بروید.

مثال ۴.۴.۴. برای شکل ۳.۴ با $s = ۱$، $r = ۱/۵$، $p = ۲$ و $M = N$ مسئله $MCLPDC$ را با روش آزادسازی لاگرانژ حل می‌کنیم.



شکل ۳.۴: گراف G

ابتدا لازم است گراف G' برای گراف فوق رسم شود. طبق تعریف، گراف G' همان گراف G خواهد بود.



شکل ۴.۴: گراف G'

در گراف G' داریم:

$$G'_۱ = \{۱, ۲, ۳\} \Longrightarrow q_۱ = ۰ \Longrightarrow n_۱ = min\{۲, ۰\} = ۰$$

$$Q'_۱ = (Q_۱ \cup \{۱\}) - C_۱ = \{۱, ۲, ۳\} - \{۱, ۲, ۳\} = \emptyset$$

$$G'_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Longrightarrow q_۲ = ۲ \Longrightarrow n_۲ = min\{۲, ۲\} = ۲$$

$$Q'_۲ = (Q_۲ \cup \{۲\}) - C_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴\} - \{۱, ۲, ۳\} = \{۴\} \Longrightarrow n'_۲ = ۱$$

$$G'_۳ = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Longrightarrow q_۳ = ۲ \Longrightarrow n_۳ = min\{۲, ۲\} = ۲$$

$$Q'_۳ = (Q_۳ \cup \{۳\}) - C_۳ = \{۱, ۲, ۳, ۴\} - \{۲, ۳, ۴\} = \{۱\} \Longrightarrow n'_۳ = ۱$$

$$G'_۴ = \{۲, ۳, ۴\} \Longrightarrow q_۴ = ۰ \Longrightarrow n_۴ = min\{۲, ۰\} = ۰$$

$$Q'_۴ = (Q_۴ \cup \{۴\}) - C_۴ = \{۲, ۳, ۴\} - \{۲, ۳, ۴\} = \emptyset$$

حال لازم است مجموعه‌های $L_۱$ و $L_۲$ تعیین شوند.

در G'، تنها ۲ خوشه ماکزیمال $C_۲ = \{۱, ۲, ۳\}$ و $C_۳ = \{۲, ۳, ۴\}$ را داریم پس

$$L_۱ = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۲, ۳, ۴\}\}$$

Q'_j های ناتهی نیز عبارتند از $Q'_۳ = \{۱\}$ و $Q'_۲ = \{۴\}$، پس $L_۲ = \{\{۴\}, \{۱\}\}$. در این صورت مسئله

$L(\lambda, \theta, \tau)$ به صورت زیر است؛

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{i=1}^{4} x_i + \lambda_2(y_1 + y_2 + y_3 - 1) + \lambda_3(y_2 + y_3 + y_4 - 1) + \\ & \theta_2(y_4 - 1 + y_2) + \theta_3(y_1 - 1 + y_3) + \tau(2 - \sum_{j=1}^{4} y_j) \\ S.t. \quad & x_1 \geq y_1 \\ & x_2 \geq y_2 \\ & x_3 \geq y_3 \\ & x_4 \geq y_4 \\ & x_i, y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i, \forall\, j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

چون در این مثال $r = 1/5 < 2s = 2$، طبق الگوریتم آزادسازی لاگرانژ وقتی $r < 2s$ عمل می‌کنیم:

گام ۱: قرار می‌دهیم $n = 0$ و $\lambda_2^0 = \lambda_3^0 = \theta_2^0 = \theta_3^0 = \tau^0 = 0$ و آزادسازی خطی مسئله $L(\lambda^0, \theta^0, \tau^0)$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} min \qquad & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ S.t. \qquad & x_1 \geq y_1 \\ & x_2 \geq y_2 \\ & x_3 \geq y_3 \\ & x_4 \geq y_4 \\ & 0 \leq x_i, y_i \leq 1 \qquad \forall\, i, \forall\, j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

جواب بهینه این مسئله برابر صفر است که یک کران پایین برای جواب بهینه مسئله اصلی می‌باشد، چون در گام اول هستیم آن را بهترین کران پایین (Z^L) قرار داده و بهترین کران بالا (Z^u) را مجموع همه c_i ها یعنی

مقدار ۴ انتخاب می‌کنیم.

گام ۲: قرار می‌دهیم $n=1$ و طول گام و ضرایب لاگرانژی را طبق روابط گفته شده به‌روز می‌کنیم.

$$t^{0}=\frac{2(4-0)}{(0-1)^{2}+(0-1)^{2}+(0-1+0)^{2}+(0-1+0)^{2}+(0-2)^{2}}=1$$

$$\lambda_{2}^{1}=max\ \{0,0+1(0-1)\}=0\quad,\quad \lambda_{3}^{1}=max\ \{0,0+1(0-1)\}=0$$

$$\theta_{2}^{1}=max\ \{0,0+1(0-1+0)\}=0\quad,\quad \theta_{3}^{1}=max\ \{0,0+1(0-1+0)\}=0$$

$$\tau^{1}=max\ \{0,0+1(2-0)\}=2$$

گام ۳: آزادسازی خطی مسئله $L(\lambda^{1},\theta^{1},\tau^{1})$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{4}x_i+2(2-\sum_{j=1}^{4}y_j) \\ S.t. & x_1\geq y_1 \\ & x_2\geq y_2 \\ & x_3\geq y_3 \\ & x_4\geq y_4 \\ & 0\leq x_i,y_i\leq 1 \qquad \forall\, i,\forall\, j\in\{1,2,3,4\} \end{array}$$

جواب بهینه این مسئله، $x_1=...=x_4=y_1=...=y_4=1$ با مقدار تابع هدف صفر است. پس بهترین کران پایین (Z^l) همچنان صفر خواهد بود. این جواب برای مسئله اصلی شدنی نیست زیرا در قیود (۱۳.۴) و (۱۶.۴) صدق نمی‌کند. پس به روش حریصانه، تسهیلات اضافی را حذف می‌کنیم تا قیود (۱۳.۴) و (۱۶.۴) برقرار شود و یک جواب شدنی برای مسئله اصلی و در نتیجه یک کران بالا برای جواب بهینه آن به‌دست آید. این جواب شدنی قرار دادن ۲ تسهیل در گره‌های ۱ و ۴ با مقدار هدف ۲ می‌باشد. پس بهترین کران بالا (Z^u) در این تکرار ۲ است.

تذکر ۵.۴.۴. *در این مثال هرگاه بهترین کران پایین (Z^L)، از تکراری به تکرار دیگر افزایش نیابد، α^n را به*

۲ تقسیم می‌کنیم.

در تکرار سوم، طول گام و ضرایب لاگرانژی مقادیر زیر می‌باشند:

$$t^{۱} = \frac{۱(۲-۰)}{(۳-۱)^{۲}+(۳-۱)^{۲}+(۱-۱+۱)^{۲}+(۱-۱+۱)^{۲}+(۴-۲)^{۲}} = \frac{۱}{۷}$$
$$\lambda_{۲}^{۲} = \lambda_{۳}^{۲} = max\ \{۰, ۰ + \frac{۱}{۷}(۳-۱)\} = \frac{۲}{۷}$$
$$\theta_{۲}^{۲} = \theta_{۳}^{۲} = max\ \{۰, ۰ + \frac{۱}{۷}(۱-۱+۱)\} = \frac{۱}{۷}$$
$$\tau^{۲} = max\ \{۰, ۲ + \frac{۱}{۷}(۲-۴)\} = \frac{۱۲}{۷} \qquad \alpha^{۱} = ۱$$

و تابع هدف مسئله $L(\lambda^{۲}, \theta^{۲}, \tau^{۲})$ نیز به صورت زیر خواهد بود؛

$$min \quad \sum_{i=۱}^{۴} x_i + \frac{۲}{۷}(y_۱ + y_۲ + y_۳ - ۱) + \frac{۲}{۷}(y_۲ + y_۳ + y_۴ - ۱) +$$
$$\frac{۱}{۷}(y_۴ - ۱ + y_۲) + \frac{۱}{۷}(y_۱ - ۱ + y_۳) + \frac{۱۲}{۷}(۲ - \sum_{j=۱}^{۴} y_j)$$

که شکل ساده شده آن به صورت زیر می‌باشد؛

$$min \quad \sum_{i=۱}^{۴} x_i - \frac{۹}{۷}y_۱ - y_۲ - y_۳ - \frac{۹}{۷}y_۴ + \frac{۱۸}{۷}$$

جواب بهینه این مسئله $x_۱ = ... = x_۴ = y_۱ = ... = y_۴ = ۱$ با مقدار هدف ۲ است، پس بهترین کران پایین (Z^L) در این تکرار برابر با ۲ می‌باشد. از آنجایی که این جواب برای مسئله اصلی شدنی نیست، مانند تکرار قبل با استفاده از روش حریصانه، جواب شدنی $x_۱ = x_۴ = y_۱ = y_۴ = ۱$، با مقدار هدف ۲ را برای مسئله اصلی به‌دست می‌آوریم، بدین ترتیب بهترین کران بالا (Z^u) نیز در این تکرار ۲ می‌شود. در تکرار سوم بهترین کران بالا (Z^u) و بهترین کران پایین (Z^L) با هم برابرند پس جواب شدنی $x_۱ = x_۴ = y_۱ = y_۴ = ۱$، جواب بهینه مسئله اصلی خواهد بود و الگوریتم متوقف می‌شود.

فصل ۵

روش ابتکاری جستجوی ممنوع

۱.۵ مقدمه

الگوریتم‌های ابتکاری بسیاری برای دستیابی به حداقل یک جواب خوب (نه لزوماً بهترین) برای یک مسئله N_p- سخت به وجود آمده‌اند. بسیاری از این روشها از یک مکانیزم جستجوی محلی بهره می‌گیرند. جستجوی محلی (LS) یک روش جستجوی تکراری است که با یک جواب شدنی آغاز می‌شود و با اعمال یک سری اصلاحات محلی آن را بهبود می‌بخشد. در هر تکرار، جستجو به یک جواب شدنی بهتر که تنها مقدار کمی با جواب قبلی متفاوت است، می‌رسد. (در واقع، تفاوت بین جواب‌های قبلی و جدید به یکی از این اصلاحات محلی مربوط می‌شود.) جستجو وقتی که به یک بهینه موضعی می‌رسد، متوقف می‌شود، در حالی که این بهینه موضعی تنها یک جواب معمولی و متوسط است و این یک محدودیت (LS) است.

۲.۵ روش جستجوی ممنوع

فرد گلوور[۱] در سال ۱۹۸۶ [۱۳] روش جدیدی را به نام جستجوی ممنوع معرفی کرد که به روشهای جستجوی محلی اجازه می‌دهد بر بهینگی موضعی غلبه کنند. استراتژی جستجوی ممنوع (TS)برای غلبه بر بهینگی موضعی این است که به LS اجازه می‌دهد در مواجهه با یک بهینه موضعی حرکت‌هایی که بهبود دهنده نیستند را مجاز بداند، بدین ترتیب جستجو ادامه یافته و از دام بهینگی موضعی رهایی حاصل می‌شود. اما زمانی که برای رهایی از دام دهنده نیستند را مجاز می‌دانیم، نیاز به ابزاری است که از دور زدن و بازگشت به جواب‌هایی که پیش از این بدست آمده، جلوگیری کند. این ابزار حافظه‌ای کوتاه مدت به نام لیست ممنوع است که جواب‌ها و یا حرکت‌های اخیر را در خود ضبط می‌کند و برای مدتی معین، انجام آن‌ها را ممنوع می‌سازد. این مدت معین بنابر الگوریتم حل و نوع مسئله و ماهیت حرکت‌ها متفاوت است.

تعریف ۱.۲.۵. حرکت، تغییر شکل و یا اصلاحی است که روی جواب انجام می‌شود.

در روش جستجوی ممنوع، ۲ مفهوم اساسی وجود دارد: فضای جستجو و ساختار همسایگی.

[۱] Fred Glover

تعریف ۲.۲.۵. فضای جستجو، فضای همه جواب‌هایی است که می‌توانند در طول جستجو در نظر گرفته شوند (ملاقات شوند).

تعریف ۳.۲.۵. ساختار همسایگی، مفهوم کاملاً نزدیک و مرتبط با فضای جستجو است. همسایگی جواب a، زیرمجموعه‌ای از فضای جستجو است که با نماد $N(a)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$N(a) =$ { جواب‌هایی که با به کارگیری یک حرکت محلی روی a به‌دست می‌آیند. }

چنانچه از تعریف برمی‌آید، ساختار همسایه می‌تواند حتی شامل تمامی فضای جواب نیز باشد. برای یک مسئله خاص، نوع حرکت تعریف شده، نقشی اساسی در وسعت همسایگی به وجود آمده دارد.

همان‌طور که گفته شد، ممنوعیت‌ها عناصر متمایز جستجوی ممنوع در مقایسه با سایر روشهای جستجوی محلی هستند و در واقع یک جستجوی ممنوع ساده را می‌توان ترکیبی از لیست ممنوع با جستجوی محلی دانست. میزان اطلاعات ضبط شده در لیست ممنوع می‌تواند متفاوت باشد.

در یک نوع از لیست ممنوع، جواب‌ها به طور کامل ذخیره می‌شوند اما این کار نیاز به فضای زیادی برای نگهداری اطلاعات دارد و همین‌طور بررسی این که یک حرکت خاص ممنوع است یا نه را پر هزینه می‌سازد، به همین دلیل به ندرت استفاده می‌شود. نوع دیگر لیست ممنوع که رایج‌ترین آن نیز می‌باشد، چند حرکت اخیر که روی جواب انجام شده است را در خود ذخیره می‌کند و انجام حرکت‌های معکوس آنها را ممنوع می‌سازد. سایر انواع لیست ممنوع ویژگیهای کلیدی جواب‌ها و یا حرکت‌ها را در خود ضبط می‌کنند.

حافظه مورد استفاده برای نگهداری ممنوعیت‌ها، معمولاً گردشی و دارای طول ثابت است. ولی مشاهده شده است که لیست‌های ممنوع با طول ثابت همیشه نمی‌توانند از دور زدن جلوگیری کنند. به همین دلیل بعضی از نویسنده‌ها (مثل گلوور و تیلرد[۲]) تغییر طول لیست ممنوع را در جستجو پیشنهاد دادند.

راه حل دیگر این است که مدت زمان ممنوعیت هر حرکت به صورت تصادفی از یک بازه معین تعیین شود. در این صورت، در لیست ممنوع هر حرکت دارای یک برچسب است که شماره تکراری که تا آن تکرار حرکت مورد نظر ممنوع است را در خود ذخیره می‌کند.

[۲] Taillard

اگر بخواهیم روش جستجوی ممنوع را به طور خلاصه توضیح دهیم باید بگوییم که روش جستجوی ممنوع، با یک جواب شدنی شروع نموده و با اعمال یک حرکت روی آن، همسایگی‌اش را ایجاد می‌کند. در هر تکرار از میان جواب‌های همسایگی که ممنوع نیستند، جوابی که بیشترین بهبود را برای تابع هدف به همراه دارد انتخاب نموده و به لیست ممنوع اضافه می‌کند. در صورتی که جواب فعلی بهینه موضعی باشد، جستجو حرکت‌هایی که بهبود دهنده نیستند را مجاز می‌داند. بهترین جواب در هر تکرار جواب آغازین تکرار بعدی است.

۳.۵ الگوریتم روش جستجوی ممنوع

فرض کنید می‌خواهیم تابع f را با روش جستجوی ممنوع، کمینه سازیم. نمادهای زیر را داریم:

a : جواب کنونی و a^* : بهترین جواب یافت شده و $N(a)$: همسایگی a،

f^* : مقدار تابع هدف برای a^* و $\overline{N}(a)$: زیر مجموعه قابل قبول $N(a)$ که ممنوع نیست.

الگوریتم روش جستجوی ممنوع به صورت زیر است:

مرحله آغازین:

یک جواب آغازین $a_\circ$ انتخاب کنید. قرار دهید

$T = \emptyset$ و $a^* = a_\circ$ و $f^* = f(a_\circ)$ و $a = a_\circ$

مرحله جستجو:

تا زمانی که شرط خاتمه برقرار نشده، انجام دهید:

۱- یک $a' \in \overline{N}(a)$ انتخاب کنید.

۲- اگر $f(a') < f^*$ ، آنگاه قرار دهید: $a^* = a'$ و $f^* = f(a')$.

۳- این حرکت را در لیست ممنوع قرار دهید و قدیمی‌ترین ورودی لیست را (اگر لازم است) حذف کنید.

۴.۵ معیار آزادسازی از لیست

تحت شرایطی، بعضی از لیست‌های ممنوع بسیار قوی هستند و از حرکت‌های جذاب و خوب جلوگیری می‌کنند و این در حالی است که ممکن است هیچ خطری جهت افتادن در دور وجود نداشته باشد و یا ممکن است این حرکات باعث بهبود کلی جستجو شوند.

از اینرو لازم است که از ابزاری استفاده کنیم تا ممنوع بودن را برای آن مورد خاص لغو کند و اجازه دهد آن جواب وارد جستجو شود. این ابزار معیار آزادسازی از لیست نام دارد.

ساده‌ترین و پراستفاده‌ترین معیار آزادسازی که تقریباً در تمامی جستجوهای ممنوع استفاده می‌شود، به این صورت است که یک حرکت ممنوع، اگر به جوابی بهتر از جواب بهینه فعلی منجر گردد، باید آن حرکت انجام شود یعنی ممنوعیت آن لغو گردد (زیرا قبلاً چنین جوابی مشاهده نشده است)،

دو معیار برای آزادسازی از لیست ممنوع وجود دارد:

معیار ۱ : یک جواب باید از لیست ممنوع خارج شود، اگر از هر جوابی که قبلاً به‌دست آمده بر اساس مقدار تابع هدف بهتر باشد.

معیار ۲ : هرگاه ساختار روش و لیسست‌های ممنوع در مرحله‌ای از فرآیند تکرار به گونه‌ای باشد که امکان هیچ‌گونه حرکت وجود نداشته باشد در این صورت حرکتی که در صف خارج شدن از لیست ممنوع از همه به خروج نزدیک‌تر است انتخاب و ممنوعیت آن برداشته می‌شود.

۵.۵ شروط پایانی

شروط پایانی پرکاربرد در TS عبارتند از:

۱. توقف بعد از تعداد تکرار مشخص، به عنوان مثال پس از ۵۰۰ یا ۱۰۰۰ تکرار و یا پس از کارکرد CPU به اندازه یک مدت زمان مشخص.

۲. پس از تعدادی تکرار بدون این که مقدار تابع هدف تغییر کند (این مورد، بیشترین استفاده را تا به حال داشته است).

۳. وقتی که جواب به یک حد آستانه‌ای و مقدار از پیش تعیین شده برسد.

۶.۵ تقویت و تنوع در جواب

مکانیسم تقویت[۳] در جستجوی ممنوع به مکانیسمی اطلاق می‌شود که بر اساس آن جواب‌ها و حرکت‌هایی که باعث رسیدن به جواب‌های خوب شده‌اند، تقویت می‌شوند. به عبارت بهتر، این استراتژی به بازگشت به جواب‌های نخبه و جستجوی بیشتر در محدوده‌ی آنها، اشاره دارد. از آنجا که جواب‌های نخبه برای مقایسه‌های بعدی مورد نیاز هستند، نحوه‌ی پیاده‌سازی این مفهوم شامل در نظر گرفتن یک حافظه‌ی مشخص برای این مجموعه از جواب‌ها است.

استراتژی‌های تقویت به ابزاری برای مشخص کردن مجموعه‌ای از جواب‌های نخبه نیاز دارند، تا پایه‌ای برای ترکیب خصوصیات خوب جهت ساخت جواب‌های تازه، در دست داشته باشند. عضویت در این مجموعه از جواب‌ها اغلب با در نظر گرفتن یک آستانه برای مقدار تابع هدف انجام می‌پذیرد.

یکی از مهمترین مشکلات روشهای مبتنی بر جستجوی محلی، گرایش این روشها به محلی بودن است. آنها تمایل دارند تا بیشتر در یک منطقه محدود به جستجو بپردازند. از نکات منفی که می‌توان در این روشها به آن رسید این است که هر چند ممکن است جواب‌های خوبی پیدا شوند، اما ممکن است تمامی ناحیه جواب بررسی نشود و ممکن است بهینه‌ای پیدا شود که از جواب بهینه فعلی پیدا شده بسیار بهتر باشد. استراتژی تنوع[۴] در جستجوی ممنوع یک مکانیسم است که کوشش می‌کند این مشکل را با انتقال جستجو به ناحیه‌های کمتر مورد بررسی قرار گرفته و یا مورد بررسی قرار نگرفته حل کند. دو روش عمده برای تنوع وجود دارد:

- شروع دوباره: جستجو را از نقاطی که کمتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند و یا از جواب بهینه‌ای که پیدا کرده است، دوباره شروع می‌کند (نقاط دیگر را در داخل لیست ممنوع قرار می‌دهد).
- هدایت جستجو: قرار دادن مکانیسمی در فرآیند جستجو که کار رعایت پراکندگی را از همان ابتدا در دستور کار قرار می‌دهد.

[۳] Intensification
[۴] Diversification

۷.۵ حافظه‌ها در جستجوی ممنوع

ساختار حافظه‌ی کوتاه مدت[۵] در رویکرد جستجوی ممنوع به طور معمول به بخشی از حافظه اطلاق می‌شود که یا برای پیاده‌سازی استراتژی تقویت به کار برده می‌شود و یا برای انجام LS مورد نیاز است. از آن جمله می‌توان حافظه‌ی اختصاص یافته به لیست ممنوع را، به عنوان حافظه‌ای که برای عدم تکرار به کار برده می‌شود، در این دسته قرار داد.

حافظه‌ی بلند مدت[۶]، در جستجوی ممنوع با هدف جهت دادن به روند جستجو پیاده‌سازی می‌شود. به عبارت بهتر، معمولاً این حافظه برای پیاده‌سازی معیار تنوع است. تذکر این نکته لازم است که در TS برای افزایش پراکندگی جستجو و هدایت آن، معمولاً راه حل‌ها از یک مسئله به مسئله‌ی دیگر متفاوت است.

۸.۵ حل مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله $(MCLPDC)$ با روش جستجوی ممنوع

روش جستجوی ممنوع برای حل مسائل مکانیابی با موفقیت به کار رفته است. مسئله $p-$ میانه[۷]و مسئله مکانیابی تسهیلات با ظرفیت نامحدود نمونه‌هایی از مسائل مکانیابی هستند که با این روش به خوبی حل شده‌اند.

جستجوی ممنوع برای حل $MCLPDC$، از جواب نهایی الگوریتم حریصانه به عنوان جواب آغازین شروع می‌کند. فرض کنید Y این جواب آغازین باشد که لزوماً شدنی نیست. حرکت را تعویض یک عضو Y با یک عضو $M-Y$ تعریف کنید.(M مجموعه مکان‌های کاندیدای تسهیلات است.) با تعریف این حرکت، فضای جستجو، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های p عضوی مجموعه M خواهد بود که قیود فاصله را رعایت می‌کنند و ۲ نوع لیست ممنوع شکل می‌گیرد:

یکی لیست عناصر ممنوع برای اضافه شدن؛ که در آن مکان‌های حذف شده قرار می‌گیرند و تا مدتی اضافه شدن آنها ممنوع می‌شود. دیگری لیست عناصر ممنوع برای حذف شدن؛ که در آن مکان‌های اضافه شده قرار

[۵] Short Term Memory
[۶] Long Term Memory
[۷] p-median

می‌گیرند و تا مدتی حذف آنها ممنوع می‌شود.

در هر تکرار از میان حرکت‌هایی که ممنوع نیستند، حرکتی که بیشترین بهبود (بیشترین کاهش) را برای تابع هدف به همراه دارد انتخاب می‌شود و اگر امکان کاهش تابع هدف نباشد (جواب فعلی، بهینه موضعی باشد) حرکتی که کمترین افزایش را در تابع هدف داشته باشد، انتخاب می‌شود. حرکت انتخاب شده در لیست ممنوع قرار می‌گیرد و این جواب، جواب آغازین تکرار بعدی خواهد بود.

حافظه مورد استفاده برای نگهداری عناصر ممنوع را یک آرایه مدور با طول ثابت انتخاب می‌کنیم که در صورت پر شدن لیست، اولین عنصر آرایه از آن خارج می‌شود. شرط خاتمه را نیز انجام جستجو تا تعداد تکرار معین تعریف می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر تعداد تکرارها کمتر از حد داده شده باشد ولی امکان هیچ حرکتی وجود نداشته باشد، یعنی تمامی حرکت‌ها ممنوع باشند و یا اینکه حرکت ممنوع، منجر به تولید جوابی بهتر از جواب بهینه فعلی شود طبق معیار آزادسازی از لیست، ممنوعیت حرکت‌ها را در این موارد خاص لغو می‌کنیم.

۹.۵ مقایسه روش جستجوی ممنوع با روشهای حریصانه و آزادسازی لاگرانژ در حل مسئله $MCLPDC$

برمن و هوآنگ [۲] برای مشاهده عملکرد روشهای حریصانه، جستجوی ممنوع و آزادسازی لاگرانژ در حل مسئله $MCLPDC$، مسائل جداول ۱.۴، ۲.۴، ۴.۴ و ۵.۴ را به عنوان نمونه با این ۳ روش حل نمودند. آنها در آزمونشان، تعداد تکرار برای جستجوی ممنوع را ۵۰، طول لیست ممنوع را ۲۰ و تعداد تکرار برای آزادسازی لاگرانژ را ۱۰۰ در نظر گرفتند، همین‌طور فرض کردند که هرگاه کران پایین بعد از ۱۰ تکرار متوالی افزایش نیابد، اسکالر α نصف شود. جدول ۱.۵ نتایج محاسباتی این آزمون را نشان می‌دهد.

هرگاه که یکی از روشهای ابتکاری حریصانه، جستجوی ممنوع و آزادسازی لاگرانژ جواب شدنی به‌دست می‌آورد، گپ (فاصله) بین این جواب شدنی و بهترین جواب به‌دست آمده از این ۳ روش از رابطه زیر تعیین

می‌شود؛

گپ جواب شدنی = (بهترین جواب این ۳ روش ابتکاری - جواب شدنی مورد نظر) تقسیم بر (بهترین جواب این ۳ روش ابتکاری)

جدول ۱.۵: مقایسه روش جستجوی ممنوع با روشهای حریصانه و آزادسازی لاگرانژ در حل مسئله $MCLPDC$

لاگرانژ		جستجوی ممنوع		حریصانه					
میانگین گپ	موارد موفق	میانگین گپ	موارد موفق	میانگین گپ	موارد موفق	r	s	p	n
۰	۸	۰	۱۰	۰	۱۰	۱۵	۱۰	۵	۱۰۰
۰/۰۰۲۰	۹	۰	۱۰	۰/۰۰۱۸	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰	۱۰۰
۰	۱۰	۰	۱۰	۰	۱۰	۱۵	۱۰	۵	۲۰۰
۰/۰۰۹۴	۵	۰	۱۰	۰/۰۰۲۴	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰	۲۰۰
۰/۰۱۰۳	۱۰	۰	۱۰	۰/۰۰۶۷	۱۰	۱۵	۱۰	۵	۳۰۰
۰/۰۰۲۶	۹	۰	۱۰	۰/۰۱۶۶	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰	۳۰۰
۰/۰۰۷۵	۱۰	۰	۱۰	۰/۰۰۷۵	۱۰	۱۵	۱۰	۵	۴۰۰
۰/۰۰۹۸	۸	۰	۱۰	۰/۰۰۲۲	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰	۴۰۰
۰	۱۰	۰	۱۰	۰/۰۰۲۰	۱۰	۱۵	۱۰	۵	۵۰۰
۰/۰۱۵۲	۹	۰/۰۰۴۰	۱۰	۰/۰۱۳۷	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰	۵۰۰
۰	۸	۰	۱۰	۰	۱۰	۲۵	۱۵	۵	۱۰۰
۰/۰۰۵۲	۴	۰/۰۰۰۱	۱۰	۰/۰۱۲۸	۱۰	۲۵	۱۵	۱۰	۱۰۰
۰/۰۳۹۰	۸	۰	۱۰	۰/۰۷۷۸	۱۰	۲۵	۱۵	۵	۲۰۰
۰/۰۰۳۴	۲	۰/۰۰۱۸	۱۰	۰/۰۰۹۶	۱۰	۲۵	۱۵	۱۰	۲۰۰
۰	۵	۰	۱۰	۰/۰۰۳۳	۱۰	۲۵	۱۵	۵	۳۰۰
۰/۰۰۳۵	۹	۰/۰۰۳۵	۱۰	۰/۰۰۳۵	۱۰	۲۵	۱۵	۱۰	۳۰۰
۰	۷	۰	۱۰	۰	۱۰	۲۵	۱۵	۵	۴۰۰
۰/۰۱۲۷	۱	۰/۰۰۰۷	۱۰	۰/۰۰۲۹	۱۰	۲۵	۱۵	۱۰	۴۰۰
۰	۷	۰	۱۰	۰/۰۰۲۰	۱۰	۲۵	۱۵	۵	۵۰۰
۰/۰۶۵۶	۲	۰/۰۰۸۰	۱۰	۰/۰۰۰۸	۱۰	۲۵	۱۵	۱۰	۵۰۰

همان‌طور که در بخش ۳.۴ متذکر شدیم، برای هر ترکیب از مقادیر (n, p, s, r)، ۱۰ مسئله نمونه در نظر گرفته شده است. تعداد موارد موفق از این ۱۰ مسئله که جواب شدنی حاصل شده است و نیز میانگین گپ جواب‌های شدنی را برای روشهای حریصانه، جستجوی ممنوع و آزادسازی لاگرانژ در جدول ۱.۵ می‌بینیم. همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، عملکرد روش حریصانه در کل خوب است به جز زمانی که $r =$ ۲۵، $s =$ ۱۵ ، $p =$ ۵ و $n =$ ۲۰۰. میانگین گپ روش حریصانه برای این حالت ۷/۷۸ درصد است که خیلی بیشتر از گپ آزادسازی لاگرانژ می‌باشد. علت آن هم، وجود یک مسئله نمونه است که جواب روش حریصانه

برای آن ۴۸/۵ درصد بیشتر از جواب بهینه است. چون روش جستجوی ممنوع از جواب نهایی الگوریتم حریصانه به عنوان جواب آغازین شروع می‌کند، واضح است که عملکرد بهتری از روش حریصانه دارد. بر خلاف انتظار ما، روش حریصانه از نظر تعداد دفعاتی که جواب شدنی به‌دست آورده، موفق‌تر از آزادسازی لاگرانژ بوده است. طبق جدول، روش آزادسازی لاگرانژ وقتی $r = ۲۵$، در بیشتر مواقع در به‌دست آوردن جواب شدنی ناموفق است. ولی هرگاه که هم حریصانه و هم آزادسازی لاگرانژ یک جواب شدنی به‌دست می‌آورند، این جواب‌ها نزدیک به هم بوده و سخت است که بگوییم کدام جواب بهتر است.

نتیجه‌ی مهمی که از جدول ۱.۵ حاصل می‌شود، این است که روش جستجوی ممنوع برای حل مسئله مکانیابی کمترین پوشش با قیود فاصله موفق‌تر از روشهای حریصانه و آزادسازی لاگرانژ بوده است. به ویژه برای شبکه‌های بزرگ، حل مسئله با روش جستجوی ممنوع بسیار مناسب است.

تذکر ۱.۹.۵. *در این آزمون تنها مسائلی بررسی شده که در آنها $r < ۲s$. برای حالتی که $r \geq ۲s$، نیز نتایج محاسباتی کاملاً شبیه حالت $r < ۲s$ می‌باشد.*

۱۰.۵ کاربردهای جستجوی ممنوع

روش جستجوی ممنوع قابلیت حل تعداد زیادی از مسائل علوم کاربردی، تجاری و مهندسی را دارد که به اختصار برخی از آنها را بیان می‌کنیم.

۱. برنامه‌ریزی

برنامه‌ریزی نیروی انسانی

زمان‌بندی در کارگاه

۲. طراحی

طراحی شبکه حمل و نقل

طراحی شبکه با هزینه ثابت

۳. مکانیابی و واگذاری

مکانیابی و واگذاری چند معیاره

۴. منطق و هوش مصنوعی

شبکه مصنوعی، آموزش طراحی

منطق احتمالی

۵. تکنولوژی

لرزه نگاری

توزیع نیروی برق

۶. ارتباط تلفنی

مسیریابی تلفن

شبکه‌های نوری

۷. تولید، انبار و سرمایه‌گذاری

سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر

سرمایه‌گذاری مجموعه ثابت

۸. مسیریابی

فروشنده دوره‌گرد

۹. بهینه‌سازی گراف

رنگ کردن گراف

مسائل $p-$ میانه

۱۰. بهینه‌سازی

برنامه‌ریزی صفر و یک

برنامه‌ریزی غیرخطی غیرمحدب

مراجع

[1] H. Aytug , C. Saydam, *Solving large - scale maximum expected covering location problems by genetic algorithms: A comarative study*, European Journal of Operational Research, **141** (2002), 480 – 494.

[2] O. Berman, R. Haung, *The minimum weighted covering location problem with distance constraints*, Computers and Operation Research, **35** (2008), 356 – 372.

[3] R. L. Church, C. Revelle, *The maximal covering location problem*, Papers of Regional Science Association, **32** (1974), 101– 118.

[4] M. S. Daskin, E. H. Stern, *A hierachial objective set covering model for emergency medical service vehicle deployment*, Transportation Science, **15** (1981), 137–152.

[5] M. S. Daskin, *Application of an expected covering location model to emergency medical service system design*, Decision Sciences, **13** (1982), 416 – 439.

[6] M. S. Daskin, *A maximal expected covering location model: Formulation properties and heuristic solution*, Transportation Science, **17** (1983), 48 – 69.

[7] M. S. Daskin, K. Hogan, C. Revelle, *Integration of multiple excess backup and expected covering models*, Environment and Planning B : Planning and Design, **15** (1988), 15 – 35.

[8] M. S. Daskin, *Network and descrete location : models, algorithms and applications*, New York : Wiley and Sons, 1995.

[9] M. Desrochers, P. Marcotte, *The congested facility location problem*, Location Science, **3** (1995), 9 – 32.

[10] J. Dreo, A. Petrowski, P. Siarry, E. Taillard, *Metaheuristics for hard optimization*, Springer, (2006).

[11] H. A. Eiselt, V. Marianov, *Foundations of location analysis*, Springer, (2011).

[12] M. Gendreau, G. Laporte, F. Semet, *Solving an ambulance location model by tabu search*, Location Science, **5** (1997), 75 – 88.

[13] F. Glover, G. A. Kochenberger, *Hand book of metaheuristics* , Kluwer Academic Publishers, (2003).

[14] K. Hogan, C. Revelle, *Concepts and applications of backup coverage*, Management Science, **32** (1986), 1435 – 1444.

[15] S. O. Krumke, *Integer Programming, polyhedra and algorithms*, Technical University Kaiserslautern, (2006).

[16] A. T. Murray, R. L.Church, *Solving the anti - location problem using lagrangean relaxation*, Comuters and Operational Research, **24** (1997), 127 – 140.

[17] S. H. Owen, M. S. Daskin, *Strategic facility location: A review*, European Journal of Operational Research, **111** (1998), 423 - 447.

[18] C. Revelle, D. Bigman, D. Schilling, J. Cohon, R. Church, *Facility Location : A review of context free and EMS models* , Health Services Research, 12 (1977), 129 – 146.

[19] C. Revelle, *Review , extension and prediction in emergency siting models*, European Journal of Operational Research, **40** (1989), 58 – 69.

[20] C. Revelle, K. Hogan, *The maximum availability location problem*, Transportation Science, **23** (1989), 192 – 200.

[21] P. Rojeski, C. Revelle, *Central facilities under an investment constraint*, Geographical Analysis, 2 (1970).

[22] D. A. Schilling, V. Jayaraman, R. Barkhi, *A review of covering problems in facility location*, Location Science, **1** (1993), 25 – 55.

[23] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, New York: Wiley, (1986).

[24] C. Toregas, R. Swain, C. Revelle, L. Bergman, *The location of emergency service facilities*, Operation Research, **19** (1971), 1363 – 1373.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابتکاری	Heuristic
آزادسازی	Relaxation
آزادسازی لاگرانژ	Lagrangean relaxation
آزادسازی برنامه‌ریزی خطی	Linear programming relaxation
الگوریتم ژنتیک	Genetic algorithm
بازبینی	Inspection
برنامه‌ریزی عدد صحیح	Integer programming
بهینه	Optimal
بیشترین پوشش قابل انتظار	Maximum expected covering
پوشش	Covering
پوشش پشتیبان	Backup coverage
پوشش چندگانه	Multiple coverage
تسهیل	Facility
تک پیمانه‌ای	Unimodular
جستجوی ممنوع	Tabu search
جمعیت	Population
چندجمله‌ای	Polynomial

چندوجهی	Polyhedron
حرکت	Move
خطی	Linear
خوشه	Clique
در دسترس	Available
دوگان	Dual
ریشه	Root
زیرگرادیان	Subgradient
ساختار همسایگی	Neighborhood structure
سرویس‌دهنده	Server
شبکه	Network
شاخه و کران	Branch and bound
غیرخطی	Nonlinear
فاصله پوششی	Coverage distance
فضای جستجو	Search space
کران	Bound
کاملاً همبند	Fully connected
کسری	Fractional
گرادیان	Gradient
گره فرزند	child node
گره والد	parent node
لیست ممنوع	Tabu list

مسئله مکانیابی تسهیلات با ظرفیت نامحدود .... Uncapacitated facility location problem

معیار آزادسازی از لیست .... Aspiration criteria

متغیر مکان .... Location variable

متغیر پوششی .... Coverage variable

مکانیابی .... Location

مستولی، غالب .... Dominated

نامطبوع، ناخوشایند .... Obnoxious

نمایی .... Exponential

نقطه تقاضا .... Demand node

هزینه .... Cost

Surname: Sohrabi Soraki
Name: Asiye

Title: Covering Problem

Supervisor: Dr.Jafar Fathali
Advisor: Dr.Alireza Nazemi

Degree: Master of Science
Subject: Applied Mathematics
Field: Operation Research

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences
Date: feb 2013
Number of pages: 100

Keywords: Location, covering, coverage distance, facility, server, demand node

Abstract

In recent years, covering location studies are considered as one of the key elements for success and survival of industrial and service centers. Therefore, objectives and solution techniques recognition of covering location problems is very important. In this thesis, first we present an introduction to location problems and covering concept and present a history of covering location problems. Then we express the set covering location problem and the maximum covering location problem and present a number of heuristic methods for solving them. After a discussion on maximum covering location problem, we introduce the maximum expected covering location model. As the third covering problem, we explain the minimum covering location problem with distance constraints (MCLPDC) and present several formulations for it. Then we compare the running time of these formulations with each other. Finally, we introduce the tabu search heurist method and compare the performance of it for solving MCLPDC with other heuristic methods that are proposed for solving this problem.

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Covering Problem

Supervisor

Dr.Jafar Fathali

Advisor

Dr.Alireza Nazemi

by

Asiye Sohrabi Soraki

feb 2013