فضای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت

نرگس ملک

۱۵ اسفند ۱۳۹۱

صفحة تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضاي اصل هیأت داوران مورد قبول است)

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشته های من است...

تقدیم به گوهرهای گرانمایه زندگیم

پدر و مادرم

آنان که ناتوان شدند تا به توانایی برسم

و موهایشان سپید گشت تا رو سپید شوم

و

همسر مهربانم

کسی که آفتاب را به زندگیم هدیه نمود

و عاشقانه سوخت تا گرما بخش وجود و روشنگر راهم باشد.

پیشگفتار

در سال (۲۰۰۵)، در [۶] کاربرد فضای برداری توپولوژیکی مرتب و مخروط نرمال در قضایای بهینه سازی توسط H. Mohebi مطرح شد و باعث بررسی های زیادی در زمینه فضای برداری توپولوژیکی مرتب گردید. با توجه به این که قضیه نقطه ثابت جایگاه خاصی در مطالعه فضای متریک به خود اختصاص داده است، یکی از سوالات مهمی که خیلی از ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بود، این بود که آیا متریک بودن فضا برای این قضیه کافی می باشد یا خیر؟ بالاخره در سال (۲۰۰۷)، Z. Xian و H. Long-Guang با معرفی مفهوم فضای متریک مخروطی به این سوال پاسخ منفی دادند. آن ها با جایگزینی فضای باناخ مرتب به جای مجموعه اعداد حقیقی در فضای متریک، مفهوم فضای متریک مخروطی را بیان کردند [۵]. همچنین خواص همگرایی دنباله ها و قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض در این فضا را بررسی نمودند. بعد از آن ها افراد دیگری به تعمیم و گسترش مباحث پیرامون فضای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض تعریف شده روی این فضا با در نظر گرفتن شرایط مختلف، پرداختند [۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲]. همچنین در [۱]، فضای متریک مستطیلی مخروطی معرفی شده است که ما با توجه به آن، قضیه نقطه ثابت را بدون در نظر گرفتن نرمال بودن مخروط اثبات کرده ایم. این پایان نامه شامل سه فصل می باشد. در فصل اول، مقدماتی از نظریه نقطه ثابت و مخروط بیان می شود. در فصل دوم، به معرفی فضای متریک مخروطی و همگرایی دنباله ها در این فضا می پردازیم. در فصل آخر، قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض در فضای متریک مخروطی و فضای متریک مستطیلی مخروطی را بیان و اثبات می نماییم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه و تعاریف مقدماتی

در این فصل، نظریه نقطه ثابت را بیان کرده و به بحث پیرامون وجود و یکتایی آن می پردازیم. در ادامه، مخروط را معرفی نموده و خواص مربوط به آن را بیان می کنیم. در حقیقت در این فصل با توجه به [۲, ۴, ۵, ۱۳]، تعاریف، لم ها و قضایای موردنیاز در پایان نامه را بیان نموده و از بیان تعاریف مقدماتی اجتناب می ورزیم.

لازم به ذکر است که در بعضی از قسمت های این پایان نامه، تابع $T(x)$ را به صورت T_x نمایش می دهیم.

۱.۱ نظریه نقطه ثابت

در این بخش، ابتدا نگاشت های انقباضی، ناانبساطی و نقطه ثابت توابع را تعریف کرده و مثاله ایی از آن ها ارائه می نماییم. در ادامه، اصل انقباض باناخ در فضای متریک را بیان و اثبات می کنیم و آن را در فصل های بعد تعمیم خواهیم داد.

تعریف ۱.۱.۱. *اگر (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک و $T : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ نگاشت دلخواهی باشد، آن گاه:*

الف: نگاشت T را لیپ شیتز گوییم هرگاه ثابت $k > 0$ ای موجود باشد به قسمی که به ازای هر x و z در X، نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\rho(T(x), T(z)) \leq kd(x, z).$$

کوچکترین عدد صادق در رابطه بالا را ثابت لیپ شیتز گوییم و با $L(T)$ نمایش می دهیم.

ب: نگاشت T را انقباض با ثابت $L(T)$ گوییم هرگاه $L(T) < 1$، یعنی به ازای هر x و z متمایز در X، داشته باشیم:

$$\rho(T(x), T(z)) < d(x, z).$$

ج: نگاشت T را ناانبساطی گوییم هرگاه $L(T) \leq 1$، یعنی به ازای هر x و z در X، داشته باشیم:

$$\rho(T(x), T(z)) \leq d(x, z).$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X فضای دلخواه و T نگاشتی به صورت $T: X \longrightarrow X$ باشد. نقطه $x \in X$، نقطه ثابت نگاشت T نامیده می شود هرگاه $T(x) = x$.

مثال. نگاشت T را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ به صورت

$$T(x) = \begin{cases} x sin(\frac{۱}{x}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

تعریف می کنیم. واضح است نگاشت T دارای بینهایت نقطه ثابت می باشد. همچنین T ناانبساطی نیست، زیرا اگر $y = \frac{۲}{۳\pi}$ و $x = \frac{۲}{\pi}$، آن گاه

$$| T(x) - T(y) | = \frac{۸}{۳\pi} > \frac{۴}{۳\pi} = | x - y | .$$

تعریف ۳.۱.۱. فضای برداری مختلط X را فضای خطی نرمدار یا به طور اختصار فضای نرمدار می نامیم، اگر به هر $x \in X$، عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x، چنان مربوط شده باشد که:

الف: به ازای هر x و y در X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

ب: اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = | \alpha | \, \|x\|$؛

ج: $\|x\| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب نماید.

بنابر (الف) نامساوی مثلثی برقرار است:

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

که در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha = ۰$ و $\alpha = -۱$) و (ج) نشان می دهد $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی X تعریف می نماید.

هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش، تام باشد.

در اصل انقباض باناخ، وجود و یکتایی نقطه ثابت برای نگاشت انقباض T در فضای متریک (Y,d) بیان می شود.

قضیه ۴.۱.۱. (*اصل انقباض باناخ*) [۱]

اگر (Y,d) فضای متریک تام و $T:Y\longrightarrow Y$ نگاشت انقباض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی مانند u دارد و برای هر $y\in Y$، دنباله $T^n(y)$ به u همگراست.

برهان: *فرض کنید $k<۱$ ثابت انقباض برای نگاشت انقباض T باشد. ابتدا ثابت می کنیم حداکثر یک نقطه ثابت برای نگاشت T وجود دارد:*

فرض کنیم $x_۰$ و $y_۰$ دو نقطه ثابت برای نگاشت T باشند، از این رو برای $x_۰\neq y_۰$، $T(x_۰)=x_۰$ و $T(y_۰)=y_۰$. لذا

$$d(x_۰,y_۰)=d(T(x_۰),T(y_۰))\leq kd(x_۰,y_۰)<d(x_۰,y_۰).$$

که این تناقض است. بنابراین نگاشت T حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

اینک نشان می دهیم برای هر $y\in Y$، دنباله $T^n(y)$ به نقطه ثابت u همگراست. طبق تعریف (۱.۱.۱)،

$$d(T(y),T^۲(y))\leq kd(y,T(y))$$

برقرار است، لذا

$$d(T^n(y),T^{n+۱}(y))\leq kd(T^{n-۱}(y),T^n(y))\leq k^۲d(T^{n-۲}(y),T^{n-۱}(y))$$

$$\leq\ldots\leq k^nd(y,T(y)).$$

[۱] Banach contraction principle

بنابراین برای هر دو عدد صحیح و مثبت n و p داریم:

$$\begin{aligned} d(T^n(y),T^{n+p}(y)) &\leq d(T^n(y),T^{n+1}(y))+d(T^{n+1}(y),T^{n+2}(y))+\cdots+d(T^{n+p-1}(y),T^{n+p}(y)) \\ &\leq k^n d(y,T(y))+k^{n+1}d(y,T(y))+\cdots+k^{n+p-1}d(y,T(y)) \\ &=(k^n+\ldots+k^{n+p-1})d(y,T(y)) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}d(y,T(y)). \end{aligned}$$

چون $k<1$، $k^n \longrightarrow 0$ و سمت راست رابطه بالا به صفر میل می کند. که این نشان می دهد $\{T^n(y)\}$ دنباله کشی است. چون Y فضای متریک تام و هر دنباله کشی در فضای تام همگراست، پس وجود دارد $u\in Y$ که $T^n(y) \longrightarrow u$. همچنین طبق پیوستگی T، $T(T^n(y)) \longrightarrow T(u)$. از طرفی $\{T^{n+1}(y)\}$ زیر دنباله ای از $\{T^n(y)\}$ است، بنابراین طبق یکتایی حد $T(u)=u$. لذا u یک نقطه ثابت برای نگاشت T می باشد. ■

نتیجه ۵.۱.۱. فرض کنید (Y,d) فضای متریک تام و برای $y_0\in Y$ و ثابت مثبت r داشته باشیم:

$$B=B(y_0,r)=\{y\in Y|d(y,y_0)<r\}.$$

همچنین نگاشت $T:B\longrightarrow Y$ با ثابت مثبت $k<1$ انقباض باشد. اگر $d(T(y_0),y_0)<(1-k)r$، آن گاه T نقطه ثابت یکتا دارد.

برهان: ثابت $\varepsilon<r$ را طوری انتخاب می کنیم که $d(T(y_0),y_0)\leq(1-k)\varepsilon<(1-k)r$. نشان می دهیم T نگاشتی از گوی بسته $K=\{y\in Y|d(y,y_0)\leq\varepsilon\}$ به خودش است.

با توجه به این که نگاشت T انقباض است، برای $y\in K$،

$$d(T(y),y_0)\leq d(T(y),T(y_0))+d(T(y_0),y_0)\leq kd(y,y_0)+(1-k)\varepsilon\leq k\varepsilon+\varepsilon-k\varepsilon=\varepsilon.$$

بنابراین $T(y)\in K$ و $T:K\longrightarrow K$. چون Y فضای متریک تام و K زیرمجموعه بسته آن می باشد، K تام است و با توجه به اصل انقباض باناخ (۴.۱.۱)، حکم برقرار است. ■

اکنون نشان خواهیم داد که فرض نگاشت انقباض در اصل انقباض باناخ را حتی اندکی نمی توان تغییر داد. به طوری که در مثال زیر اگر به جای کل فضای تام X، زیر مجموعه بسته ای از آن مانند N را در نظر بگیریم، دیده می شود که نگاشت T یک انقباض است اما دارای نقطه ثابت نمی باشد.

مثال. *فضای متریک تام $X = C([۰,۱])$ متشکل از همه توابع حقیقی یا مختلط پیوسته روی بازه $[۰,۱]$ با سوپریمم نرم $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۰,۱]\}$ و زیر مجموعه بسته N از X را به صورت زیر در نظر می گیریم:*

$$N = \{f \in C([۰,۱]) : f(۱) = ۱\}.$$

حال اگر نگاشت $T : N \longrightarrow N$ را به قسمی در نظر بگیریم که به ازای هر t در $[۰,۱]$، $T(f)(t) = tf(t)$، آن گاه به ازای هر f و g متمایز در N، $\|T(f) - T(g)\|_\infty < \|f - g\|_\infty$. همچنین T دارای نقطه ثابت نیست.

حل: اولاً به وضوح N زیر مجموعه بسته فضای متریک تام X می باشد، لذا N فضای متریک تام است. حال اگر f و g دو تابع متمایز در N باشند، آن گاه $| T(f) - T(g) |$ در $C([۰,۱])$ می باشد و چون $[۰,۱]$ فشرده است، لذا $| T(f) - T(g) |$ ماکزیمم مقدار خود را نقطه ای مانند $t.$ از بازه $[۰,۱]$ اختیار می کند. از این رو

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty = sup_{t\in[۰,۱]} | T(f)(t) - T(g)(t) | = | T(f)(t.) - T(g)(t.) |$$

$$= | t.f(t.) - t.g(t.) | = t. | f(t.) - g(t.) | .$$

از این که $f(۱) - g(۱) = ۰$ و $t.$ نقطه ماکزیممی در بازه $[۰,۱]$ است، $t. < ۱$. لذا اگر $f \neq g$،

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty < | f(t.) - g(t.) | \leq \|f - g\|_\infty.$$

از طرفی اگر T بخواهد نقطه ثابت داشته باشد باید به ازای fای در N، $T(f) = f$. لذا به ازای هر t در $[۰,۱]$، $tf(t) = f(t)$. از این جا به ازای هر t در $[۰,۱)$، $f(t) = ۰$. از طرفی $f(۱) = ۱$، که با فرض پیوستگی f در تناقض است، پس نگاشت T دارای نقطه ثابت نیست.

۲.۱ مخروط

در این بخش، مخروط P که زیرمجموعه ای از فضای باناخ حقیقی E می باشد را معرفی کرده و رابطه مرتب جزئی روی P تعریف می کنیم. در ادامه، مخروط نرمال و مخروط منتظم را تعریف کرده و اثبات می کنیم هر مخروط منتظم، نرمال است و با ارائه مثال هایی، در مورد ثابت نرمال در مخروط نرمال بحث خواهیم کرد و اینکه مخروط نرمال با ثابت نرمال $M < ۱$ وجود ندارد.

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید E فضای باناخ حقیقی و P زیر مجموعه ای از E باشد. P یک مخروط نامیده می شود اگر:*

الف: P بسته، ناتهی و $P \neq \{۰\}$؛

ب: اگر $x, y \in P$، $a, b \in \mathbb{R}$ و $a, b \geq ۰$، آن گاه $ax + by \in P$؛

ج: اگر $x \in P$ و $-x \in P$، آن گاه $x = ۰$. به عبارتی $P \cap -P = \{۰\}$.

اگر $P \subset E$ یک مخروط باشد، رابطه $\leq$ روی P را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$x \leq y \longleftrightarrow y - x \in P. \tag{۱.۱}$$

نماد $x < y$ را زمانی به کار می بریم که $x \leq y$ و $x \neq y$. از طرفی

$$x \ll y \longleftrightarrow y - x \in intP. \tag{۲.۱}$$

که $intP$ همان درون P است. حال نشان می دهیم رابطه $\leq$ مرتب جزئی است:

خاصیت بازتابی: چون $۰ \in P$ ، واضح است که برای هر نقطه x، $x \leq x$ برقرار است.

خاصیت تقارنی: اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آن گاه $y - x \in P$ و $x - y \in P$ و $-(y-x) = x - y \in P$. طبق خاصیت سوم در تعریف مخروط، $y - x = ۰$. یعنی $x = y$.

خاصیت تعدی: اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آن گاه $y - x \in P$ و $z - y \in P$. طبق خاصیت دوم در تعریف مخروط، $(y-x) + (z-y) \in P$. لذا $z - x \in P$. یعنی $x \leq z$.

لازم به ذکر است درون برخی مخروط ها تهی است. به طور مثال، هر نیم خط با شروع از مبدأ در فضای $E = \mathbb{R}^2$ یک مخروط است که درون آن تهی خواهد بود.

تعریف ۲.۲.۱. *مخروط P نرمال نامیده می شود اگر $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$ با شرط $0 \leq x \leq y$،*

$$\|x\| \leq M\|y\|.$$

کوچکترین عدد مثبتی که در رابطه بالا صدق کند، ثابت نرمال مخروط P نامیده می شود.

تعریف ۳.۲.۱. *مخروط P منتظم نامیده می شود اگر هر دنباله صعودی از بالا کراندار در آن، همگرا باشد. درحقیقت، اگر $\{x_n\}$ دنباله ای در P باشد و به ازای عضوی مانند $y \in E$ داشته باشیم:*

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y،$$

آن گاه $x \in E$ موجود باشد به طوری که $\|x_n - x\| \to 0$.

به طور معادل، P منتظم است اگر هر دنباله نزولی از پایین کراندار در آن، همگرا باشد.

لم ۴.۲.۱. *هر مخروط منتظم یک مخروط نرمال است.*

برهان: فرض کنید P مخروط منتظمی باشد که نرمال نیست. برای هر $n \geq 1$، $t_n, s_n \in P$ را طوری انتخاب می کنیم که $t_n - s_n \in P$ و $\|s_n\| > n^2\|t_n\|$. همچنین برای هر $n \geq 1$، x_n و y_n را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|} \qquad \text{و} \qquad x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}.$$

از طرفی طبق تعریف مخروط (۱.۲.۱)،

$$t_n - s_n \in P \qquad \Rightarrow \qquad s_n \leq t_n \qquad \Rightarrow \qquad x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|} \leq \frac{t_n}{\|t_n\|} = y_n.$$

لذا با توجه به $x_n \leq y_n$ و قسمت (ب) تعریف مخروط، $x_n, y_n, y_n - x_n \in P$. همچنین برای هر $n \geq ۱$، $\|y_n\| = ۱$ و $\|x_n\| > n^۲$.

چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}\|y_n\|$ همگرا و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P می باشد)، عضوی مانند $y \in P$ وجود دارد به طوری که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} y_n = y$. از طرفی

$$۰ \leq x_۱ \leq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ \leq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ + \frac{۱}{۳^۲}x^۳ \leq \ldots \leq y.$$

بنابراین به دلیل منتظم بودن مخروط P، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}x_n$ همگراست. لذا $lim_{n\to\infty}\frac{\|x_n\|}{n^۲} = ۰$ و این با $\|x_n\| > n^۲$ متناقض است. در نتیجه حکم برقرار می باشد. ∎

لم ۱.۲.۵. مخروط نرمال با ثابت نرمال $M < ۱$ وجود ندارد.

برهان: فضای باناخ حقیقی E و $P \subseteq E$ را مخروط نرمال با ثابت نرمال $M < ۱$ در نظر می گیریم. عنصر ناصفر $x \in P$ و $۰ < \epsilon < ۱$ را با شرط $M < ۱ - \epsilon$ انتخاب می کنیم. همچنین طبق تعریف مخروط (۱.۲.۱)، $(۱ - \epsilon)x \leq x$. لذا با توجه به نرمال بودن P،

$$\|(۱ - \epsilon)x\| = (۱ - \epsilon)\|x\| \leq M\|x\|. \tag{۱.۳}$$

از طرفی با توجه به این که $M < ۱ - \epsilon$ انتخاب شده بود، $M\|x\| < (۱ - \epsilon)\|x\|$، که با رابطه (۱.۳) متناقض است. لذا مخروط نرمال با ثابت نرمال $M < ۱$ وجود ندارد. ∎

مثال. فرض کنید فضای باناخ $E = C([۰, ۱])$ با سوپریمم نرم $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۰, ۱]\}$ و مخروط $P = \{f \in E : f \geq ۰\}$ را داشته باشیم. نشان می دهیم P مخروط نرمال با ثابت نرمال $M = ۱$ است.

توابع $f, g \in P$ را طوری در نظر می گیریم که $۰ \leq f \leq g$. بنابراین برای هر $x \in [۰, ۱]$،

$$f(x) \leq g(x) \leq sup_{x\in[۰,۱]}|g(x)| = \|g\|_\infty.$$

لذا

$$sup_{x\in[۰,۱]}|f(x)| \leq \|g\|_\infty.$$

بنابراین $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$. با توجه به لم قبل، چون همواره $M \geq ۱$، بنابراین کوچکترین مقدار مثبت M، ۱ می باشد. لذا $M = ۱$.

گزاره ۶.۲.۱. برای هر $k > ۱$، مخروط نرمال با ثابت نرمال $M > k$ وجود دارد.

برهان: فرض کنید $k > ۱$ و E فضای برداری حقیقی متشکل از تمام توابع $f : [۱ - \frac{۱}{k}, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = ax + b$ باشد. در این صورت $E = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$. فضای باناخ حقیقی E را با سوپریمم نرم $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۱ - \frac{۱}{k}, ۱]\}$ و مخروط $P = \{ax + b \mid a \leq ۰, b \geq ۰\}$ زیر مجموعه E را در نظر می گیریم. ابتدا نشان می دهیم P منتظم و لذا نرمال است. با توجه به تعریف مخروط منتظم، باید هر دنباله صعودی از بالا کراندار، همگرا باشد. دنباله صعودی $\{a_n x + b_n\}$ در P را در نظر می گیریم که از بالا کراندار است، پس عنصر $cx + d \in E$ وجود دارد به طوری که

$$a_۱x + b_۱ \leq a_۲x + b_۲ \leq \cdots \leq a_nx + b_n \leq \cdots \leq cx + d. \tag{۴.۱}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴.۱)، $a_{n-۱}x + b_{n-۱} \leq a_nx + b_n$، لذا طبق رابطه ترتیبی (۱.۱)،

$$(a_n - a_{n-۱})x + (b_n - b_{n-۱}) \in P$$

لذا با توجه به تعریف $P = \{ax + b \mid a \leq ۰, b \geq ۰\}$، $b_n \geq b_{n-۱}$ و $a_n \leq a_{n-۱}$. پس $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله در $\mathbb{R}$ هستند به طوری که

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq c. \qquad \text{و} \qquad b_۱ \leq b_۲ \leq \cdots \leq d$$

می دانیم هر دنباله صعودی از بالا کراندار و هر دنباله نزولی از پایین کراندار، همگراست. پس $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند. لذا وجود دارند $a, b \in \mathbb{R}$ به طوری که $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. همچنین طبق مخروط تعریف شده P، $ax + b \in P$. از طرفی $a_nx + b_n \longrightarrow ax + b$ (در این جا نرم $\|.\|_\infty$ را در نظر می گیریم). بنابراین دنباله صعودی

$\{a_nx+b_n\}$ همگرا و مخروط P منتظم است. با توجه به لم (۱.۲.۴)، مخروط P نرمال نیز می باشد. پس طبق لم (۱.۲.۵)، وجود دارد $M \geq ۱$ به طوری که برای هر $f,g \in E$ که $۰ \leq g \leq f$، $\|g\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$.

حال نشان می دهیم $M > k$. اگر $f(x) = -kx + k$ و $g(x) = k$ باشد، ملاحظه می کنیم که

$$f, g, f-g \in P.$$

چون $f-g \in P$، پس طبق رابطه ترتیبی (۱.۱)، $g \leq f$. لذا $\|g\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$. از طرفی $\|g\|_\infty = k$. چون تابع f نزولی است، لذا

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۱ - \frac{۱}{k}, ۱]\} = -k(۱ - \frac{۱}{k}) + k = ۱.$$

بنابراین با توجه به $\|g\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$، $k \leq M$.

از طرفی اگر $f(x) = -(k + \frac{۱}{k})x + k$ و $g(x) = k$، آن گاه $f, g, f-g \in P$، همچنین $\|g\|_\infty = k$. از طرفی چون تابع f نزولی است، لذا

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۱ - \frac{۱}{k}, ۱]\} = -(k + \frac{۱}{k})(۱ - \frac{۱}{k}) + k = ۱ - \frac{۱}{k} + \frac{۱}{k^۲}.$$

بنابراین $k\|f\|_\infty = k + \frac{۱}{k} - ۱ < \|g\|_\infty = k$. اما $\|g\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ و $k\|f\|_\infty < \|g\|_\infty$. پس $k\|f\|_\infty < M\|f\|_\infty$. لذا $M > k$. ■

بیشتر مخروط ها، نرمال هستند. در این جا با ارائه مثالی نشان می دهیم مخروط غیر نرمال نیز وجود دارد.

مثال. فرض کنیم فضای باناخ $E = C^۲_{\mathbb{R}}([۰, ۱])$ با نرم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ و $P = \{f \in E : f \geq ۰\}$ مخروطی در E باشد. نشان می دهیم P مخروط غیر نرمال است.

برای $k \geq ۱$، $f(x) = x$ و $g(x) = x^{۲k}$ را در نظر می گیریم. با توجه به این که $x \in [۰, ۱]$، لذا $۰ \leq g \leq f$.

از طرفی با توجه به $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [۰, ۱]\}$،

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|x\|_\infty + \|۱\|_\infty = ۱ + ۱ = ۲,$$

$$\|g\| = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|x^{۲k}\|_\infty + \|۲kx^{۲k-۱}\|_\infty = ۲k + ۱.$$

چون $k \geq ۱$، $۲k < ۲k + ۱$. بنابراین $\|g\| < k\|f\|$. لذا P مخروط غیر نرمال می باشد.

فصل ۲

فضای متریک مخروطی

قضیه نقطه ثابت جایگاه خاصی در مطالعه فضای متریک به خود اختصاص داده است. این که آیا متریک بودن فضا برای قضیه نقطه ثابت کافی می باشد یا خیر؟، یکی از سوالات مهمی بود که خیلی از ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بود. بالاخره Z. Xian و H. Long-Guang در [۵] با معرفی مفهوم فضای متریک مخروطی به این سوال پاسخ منفی دادند. آن ها قضیه نقطه ثابت را در این فضا اثبات کردند که در فصل بعد آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در این فصل، ابتدا فضای متریک مخروطی (X,d) را تعریف خواهیم کرد که تعمیمی از فضای متریک است و با جایگزینی فضای باناخ حقیقی به جای اعداد حقیقی مرتب بدست می آید. همچنین با ارائه مثال هایی مفهوم فضای متریک مخروطی را بهتر نشان می دهیم. در ادامه، همگرایی در این فضا را تعریف کرده و لم های متعددی را بیان و اثبات می نماییم.

۱.۲ فضای متریک مخروطی

در این بخش، با جایگزینی فضای باناخ حقیقی به جای اعداد حقیقی مرتب در فضای متریک، فضای متریک مخروطی تعریف می شود و با ارائه مثال هایی تفاوت فضای متریک مخروطی با فضای متریک را واضح تر بیان می کنیم.

از این پس E را فضای باناخ حقیقی، P را مخروطی در E با شرط $intP \neq \varnothing$ و $\leq$ را رابطه مرتب جزئی روی P در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۲. *اگر X یک مجموعه ناتهی، E فضای باناخ حقیقی و نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ شرایط زیر را داشته باشد:*

الف: برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq ۰$ و $d(x,y) = ۰ \longleftrightarrow x = y$؛

ب: برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

ج: برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

آن‌گاه d یک متر مخروطی روی X و (X,d) فضای متریک مخروطی نامیده می‌شود.

مثال. فرض کنید $E=\mathbb{R}^{۲}$، $P=\{(x,y)\in E|x,y\geq ۰\}$، $X=\mathbb{R}$ و $d:X\times X\longrightarrow E$ با ضابطه

$$d(x,y)=(\mid x-y\mid,\alpha\mid x-y\mid),\qquad \alpha\geq ۰,$$

تعریف شود. چون $\mid x-y\mid$ و $\alpha\mid x-y\mid$ مثبت هستند، با توجه به مخروط P، $d(x,y)\in P$. لذا $d(x,y)\geq ۰$. اگر $d(x,y)=(\mid x-y\mid,\alpha\mid x-y\mid)=(۰,۰)$، آن‌گاه $\mid x-y\mid=۰$ و $\alpha\mid x-y\mid=۰$. پس $x=y$. چون $\mid x-y\mid=\mid y-x\mid$ لذا $d(x,y)=d(y,x)$. به راحتی می‌توان نشان داد که نامساوی مثلثی برقرار است. بنابراین (X,d) یک فضای متریک مخروطی می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده کردید با جایگزینی فضای باناخ حقیقی به جای $\mathbb{R}$ در فضای متریک، فضای متریک مخروطی تعریف شد. لذا $d(x,y)$ عدد حقیقی نیست بلکه برداری در E می‌باشد. در مثال بعد، از این که متر d به صورت نقطه تعریف شده است این مطلب کاملاً واضح می‌باشد.

مثال. اگر $E=\mathbb{R}^{۲}$، $P=\{(x,y)\in E|x,y\geq ۰\}$، $X=\mathbb{N}$ و نگاشت $d:X\times X\longrightarrow E$ با ضابطه

$$d(x,y)=\begin{cases}(۰,۰) & x=y\\ (۳,۹) & x,y\in\{۱,۲\},x\neq y\\ (۱,۳) & o.w\end{cases}$$

تعریف شود، آن‌گاه (X,d) یک فضای متریک مخروطی نیست، زیرا خاصیت سوم یعنی نامساوی مثلثی در آن برقرار نمی‌باشد، در حقیقت با توجه به این که $(۳,۹)-(۲,۶)=(۱,۳)\in P$، می‌توان نوشت

$$(۳,۹)=d(۱,۲)>d(۱,۳)+d(۳,۲)=(۱,۳)+(۱,۳)=(۲,۶).$$

در این مثال مشاهده کردید که ضابطه d به صورت نقطه تعریف شده است و برداری بودن $d(x,y)$ را کاملاً نشان می‌دهد. از طرفی با وجود رابطه ترتیبی $<$، نگاشت d شرط لازم برای یک متر مخروطی را نداشت.

مثال. *فضای $E = l^1 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid < \infty\}$ با نرم $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid$ را در نظر می گیریم. فرض کنید $P = \{\{x_n\} \in E | \forall n, x_n \geq 0\}$، (X, ρ) فضای متریک و نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ برای $n \geq 1$، به صورت $d(x, y) = \{\frac{\rho(x, y)}{2^n}\}$ تعریف شود.*

نشان می دهیم (X, d) فضای متریک مخروطی است:

فضای (X, ρ) یک فضای متریک است، پس $\rho(x, y) \geq 0$. لذا $\frac{\rho(x, y)}{2^n} \geq 0$. پس با توجه به تعریف مخروط در این مثال، $\{\frac{\rho(x, y)}{2^n}\} \in P$، لذا $d(x, y) \geq 0$. همچنین $\rho(x, y) = \rho(y, x)$، بنابراین $d(x, y) = d(y, x)$.

چون خاصیت نامساوی مثلثی در فضای متریک برای متر ρ برقرار است، لذا برای $x, y, z \in X$ داریم،

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

پس (X, d) فضای متریک مخروطی است.

۲.۲ همگرایی در فضای متریک مخروطی

در این بخش، همگرایی در فضای متریک مخروطی را تعریف کرده و لم های متعددی را بیان و اثبات می نماییم.

تعریف ۱.۲.۲. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد و $\{x_n\}$ دنباله ای در X در نظر گرفته شود. در این صورت گوییم دنباله $\{x_n\}$ به x همگراست هرگاه برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، وجود داشته باشد $N \in \mathbb{N}$ به طوری که برای هر $n > N$، $d(x_n, x) \ll c$. به عبارتی $x_n \longrightarrow x (n \to \infty)$ یا $lim_{n \to \infty} x_n = x$.*

لم ۲.۲.۲. *فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی باشد. مخروط P را نرمال با ثابت نرمال M و $\{x_n\}$ را دنباله ای در X در نظر می گیریم. در این صورت می گوییم دنباله $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و فقط اگر $d(x_n, x) \longrightarrow 0 (n \to \infty)$.*

برهان: فرض کنید $\{x_n\}$ به x همگرا باشد. در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، $c \in E$ را با شرایط $c \gg 0$ و $M\|c\| < \varepsilon$ انتخاب می کنیم. به علت همگرایی $\{x_n\}$، وجود دارد N ای به طوری که برای هر $n > N$،

$d(x_n,x) \ll c$. با توجه به نرمال بودن P، برای $n > N$، $\|d(x_n,x)\| \leq M\|c\| < \varepsilon$. لذا $d(x_n,x) \longrightarrow 0$.

برعکس، فرض کنید $d(x_n,x) \longrightarrow 0$. برای هر $c \in E$ با شرط $c \gg 0$، $\delta > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که برای هر $y \in E$ با شرط $\|y\| < \delta$ داشته باشیم $c - y \in intP$. با توجه به این که $d(x_n,x) \in E$، لذا برای این δ، وجود دارد N ای به طوری که برای هر $n > N$ با شرط $\|d(x_n,x)\| < \delta$ داشته باشیم $c - d(x_n,x) \in intP$. با توجه به رابطه ترتیبی (۲.۱)، $d(x_n,x) \ll c$ و طبق تعریف همگرایی (۲.۲.۱)، $x_n \longrightarrow x$. ■

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. اگر برای هر $c \in E$ با شرط $c \gg 0$، وجود داشته باشد N ای که برای هر $n, m > N$، $d(x_n,x_m) \ll c$، آن گاه $\{x_n\}$ دنباله کشی در X نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۴. اگر (X,d) فضای متریک مخروطی و هر دنباله کشی در X همگرا باشد، آن گاه X فضای متریک مخروطی تام نامیده می شود.

لم ۲.۲.۵. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال M و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. دنباله $\{x_n\}$ کشی است اگر و فقط اگر $d(x_n,x_m) \longrightarrow 0 (n,m \to \infty)$.

برهان: ابتدا فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله کشی باشد. برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، $c \in E$ را با شرایط $M\|c\| < \varepsilon$ و $c \gg 0$ انتخاب می کنیم. با توجه به این که $\{x_n\}$ دنباله کشی است، پس وجود دارد N ای به طوری که برای هر $n, m > N$، $d(x_n,x_m) \ll c$. پس با توجه به نرمال بودن P، برای $n, m > N$، $\|d(x_n,x_m)\| \leq M\|c\| < \varepsilon.$ لذا $d(x_n,x_m) \longrightarrow 0 (n,m \to \infty)$.

بر عکس، فرض کنید $d(x_n,x_m) \longrightarrow 0 (n,m \to \infty)$. برای هر $c \in E$ با شرط $c \gg 0$، $\delta > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که برای هر $y \in E$ با شرط $\|y\| < \delta$، داشته باشیم $c - y \in intP$. چون $d(x_n,x_m) \in E$، لذا برای این δ، وجود دارد N ای به طوری که برای هر $n, m > N$ با شرط $\|d(x_n,x_m)\| < \delta$، داشته باشیم $c - d(x_n,x_m) \in intP$. لذا با توجه به رابطه ترتیبی (۲.۱)، $d(x_n,x_m) \ll c$. پس با توجه به تعریف

(۲.۲.۳)، $\{x_n\}$ دنباله کشی در X است. ■

لم ۲.۲.۶. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال M، $\{x_n\}$ و $\{y_m\}$ دو دنباله در X باشند. اگر $(n,m\to\infty)$، $y_m\longrightarrow y$ و $x_n\longrightarrow x$، آن‌گاه $d(x_n,y_m)\longrightarrow d(x,y)$.

برهان: فرض کنید $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. $c\in E$ را با شرایط $c\gg ۰$ و $\|c\|<\dfrac{\varepsilon}{۴M+۲}$ انتخاب می‌کنیم. چون $y_m\longrightarrow y$ و $x_n\longrightarrow x$، پس وجود دارد N ای به طوری که برای هر $n,m>N$،

$$d(x_n,x)\ll c \qquad \text{و} \qquad d(y_m,y)\ll c.$$

بنابراین با توجه به تعریف (۲.۲.۱)،

$$d(x_n,y_m)\leq d(x_n,x)+d(x,y)+d(y_m,y)\ll d(x,y)+۲c. \tag{۲.۱}$$

و

$$d(x,y)\leq d(x_n,x)+d(x_n,y_m)+d(y_m,y)\ll d(x_n,y_m)+۲c. \tag{۲.۲}$$

با توجه به روابط (۲.۱) و (۲.۲)،

$$۰\leq d(x,y)+۲c-d(x_n,y_m)\leq ۲c+۲c+d(x_n,y_m)-d(x_n,y_m)=۴c.$$

از طرفی با توجه به نرمال بودن مخروط،

$$\begin{aligned}\|d(x_n,y_m)-d(x,y)\| &\leq \|d(x,y)-d(x_n,y_m)+۲c\|+\|۲c\|\\ &\leq ۴M\|c\|+۲\|c\|=(۴M+۲)\|c\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

لذا $d(x_n,y_m)\longrightarrow d(x,y)$. ■

تعریف ۲.۲.۷. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی باشد. اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X، وجود داشته باشد زیردنباله $\{x_{n_i}\}$، به طوری که $\{x_{n_i}\}$ در X همگرا باشد، آن‌گاه X فضای متریک مخروطی فشرده دنباله ای نامیده می شود.

فصل ۳

بررسی قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض

در این فصل، با توجه به [۱, ۵, ۱۰] قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض بررسی خواهد شد. در بخش اول، این قضایا در فضای متریک مخروطی (X,d) بررسی و اثبات خواهد شد که تعمیمی از قضایای نقطه ثابت در فضای متریک می باشد. تفاوت این قضایا با آن چه در فضای متریک با نام اصل انقباض باناخ (۴.۱.۱) معرفی شد، قابل تأمل است.

در بخش دوم، قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض در فضای متریک مخروطی مستطیلی ارائه خواهد شد.

۱.۳ بررسی وجود نقطه ثابت نگاشت های انقباض در فضای متریک مخروطی

در این بخش، قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض در فضای متریک مخروطی بیان و اثبات می شود. در این قضایا وجود و یکتایی نقطه ثابت، برای نگاشت T با داشتن شرایط مختلف اثبات می شود. در انتها، بعضی از قضایای مطرح شده به صورت یک قضیه واحد ارائه می گردد.

قضیه ۱.۱.۳. *فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی تام و P مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. اگر $T:X\longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط*

$$d(T_x,T_y)\leq kd(x,y),\qquad x,y\in X,$$

باشد، به طوری که $k\in[۰,۱)$، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x\in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: فرض کنید $x_۰\in X$. با انتخاب

$$x_۱=T_{x_۰},x_۲=T_{x_۱}=T_{x_۰}^۲,\dots,x_{n+۱}=T_{x_n}=T_{x_۰}^{n+۱}$$

و با توجه به شرط انقباض نگاشت T داریم:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-1}}) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) = kd(T_{x_{n-1}}, T_{x_{n-2}}) \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq k^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

لذا برای $n > m$،

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq k^{n-1} d(x_1, x_0) + k^{n-2} d(x_1, x_0) + \ldots + k^m d(x_1, x_0) \\
&= (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m) d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).$$

لذا با توجه به نرمال بودن مخروط P،

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq M \frac{k^m}{1-k} \|d(x_1, x_0)\|.$$

اگر $n, m \to \infty$، چون $k \in [0, 1)$، سمت راست رابطه بالا به صفر میل می کند. بنابراین

$$(n, m \to \infty) \qquad d(x_n, x_m) \longrightarrow 0.$$

پس با توجه به لم (۵.۲.۲)، $\{x_n\}$ دنباله کشی است. چون X فضای متریک مخروطی تام و در فضای تام هر دنباله کشی همگراست، لذا وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگرا می باشد. از طرفی

$$d(T_{x^*},x^*) \leq d(T_{x_n},T_{x^*}) + d(T_{x_n},x^*) \leq kd(x_n,x^*) + d(x_{n+1},x^*).$$

با توجه به این که P مخروط نرمال با ثابت نرمال M است،

$$\|d(T_{x^*},x^*)\| \leq M\|kd(x_n,x^*) + d(x_{n+1},x^*)\| \leq M(k\|d(x_n,x^*)\| + \|d(x_{n+1},x^*)\|).$$

از طرفی $x_n \longrightarrow x^*(n \to \infty)$. پس طبق لم (۲.۲.۲)،

$$\|d(x_n,x^*)\| \longrightarrow 0 \qquad \text{و} \qquad \|d(x_{n+1},x^*)\| \longrightarrow 0.$$

بنابراین $\|d(T_{x^*},x^*)\| = 0$. لذا $T_{x^*} = x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T می باشد.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو

$$d(x^*,y^*) = d(T_{x^*},T_{y^*}) \leq kd(x^*,y^*) < d(x^*,y^*).$$

این یک تناقض است. لذا $x^* = y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

نتیجه ۲.۱.۳. *فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی تام و P مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. برای $c \in E$ با شرط $0 \ll c$ و $x_0 \in X$ تعریف می کنیم:*

$$B = B(x_0,c) = \{x \in X | d(x_0,x) \leq c\}.$$

اگر نگاشت $T : X \longrightarrow X$ برای $x,y \in B(x_0,c)$ و $k \in [0,1)$ در شرط $d(T_x,T_y) \leq kd(x,y)$ صدق نماید و همچنین نامساوی $d(T_{x_0},x_0) \leq (1-k)c$ برقرار باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در $B(x_0,c)$ دارد.

برهان: با توجه به قضیه (۱.۱.۳)، کافیست ثابت کنیم B تام است و برای هر $x \in B(x_0,c)$، $T_x \in B(x_0,c)$. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله کشی در $B(x_0,c)$ باشد، لذا $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در X است. چون X فضای متریک مخروطی تام و هر دنباله کشی در فضای تام همگراست، پس وجود دارد $x \in X$ به طوری که $x_n \longrightarrow x(n \to \infty)$.

با توجه به این که $x_n \in B$،

$$d(x_\circ, x) \leq d(x_n, x_\circ) + d(x_n, x) \ll d(x_n, x) + c.$$

همچنین $x_n \longrightarrow x$، بنابراین طبق لم (۲.۲.۲)، $d(x_n, x) \longrightarrow \circ$. لذا طبق تعریف همگرایی (۱.۲.۲)، $d(x_\circ, x) \ll c$. با توجه به تعریف B، $x \in B = B(x_\circ, c)$. یعنی نقطه حدی x داخل $B(x_\circ, c)$ می باشد و $B(x_\circ, c)$ تام است. از طرفی برای هر $x \in B(x_\circ, c)$،

$$d(x_\circ, T_x) \leq d(T_{x_\circ}, x_\circ) + d(T_{x_\circ}, T_x) \leq (1-k)c + kd(x_\circ, x) \leq (1-k)c + kc = c.$$

بنابراین $T_x \in B(x_\circ, c)$. طبق قضیه قبل، حکم برقرار و T نقطه ثابت یکتایی در B دارد. ■

نتیجه ۳.۱.۳. اگر (X, d) فضای متریک مخروطی تام، P مخروط نرمال با ثابت نرمال M و نگاشت $T : X \longrightarrow X$ برای عدد صحیح مثبت n و برای هر $x, y \in X$، با شرط

$$d(T^n_x, T^n_y) \leq kd(x, y), \qquad k \in [\circ, 1),$$

انقباض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در X دارد.

برهان: طبق قضیه (۱.۱.۳)، نگاشت T^n نقطه ثابت یکتایی مانند x^* دارد، یعنی $T^n_{x^*} = x^*$. از طرفی

$$T^n(T_{x^*}) = T(T^n_{x^*}) = T_{x^*}.$$

لذا T_{x^*} نقطه ثابتی برای T^n است. چون T^n نقطه ثابت یکتا دارد پس $T_{x^*} = x^*$. مشاهده می شود x^* نقطه ثابت نگاشت T است. به دلیل این که هر نقطه ثابت T، نقطه ای ثابت برای T^n می باشد، لذا T فقط یک نقطه ثابت دارد. ■

در مثال زیر، وجود نقطه ثابت یکتایی برای نگاشت T در فضای متریک مخروطی (X, d) نشان داده شده است.

مثال. فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی تام باشد، به طوری که $E = \mathbb{R}^۲$، زیر مجموعه ای از آن به صورت $P = \{(x, y) | x, y \geq \circ\}$ و

$$X = \{(x, ۰) \in E | ۰ \leq x \leq ۱\} \cup \{(۰, x) \in E | ۰ \leq x \leq ۱\}.$$

اگر نگاشت E $d : X \times X \longrightarrow$ با ضابطه

$$d((x, ۰), (y, ۰)) = (\frac{۴}{۳} \mid x - y \mid, \mid x - y \mid),$$

$$d((۰, x), (۰, y)) = (\mid x - y \mid, \frac{۲}{۳} \mid x - y \mid),$$

$$d((x, ۰), (۰, y)) = d((۰, y), (x, ۰)) = (\frac{۴}{۳}x + y, x + \frac{۲}{۳}y),$$

تعریف شود، آن گاه با بررسی شرایط تعریف (۱.۱.۲)، (X, d) فضای متریک مخروطی است. فرض کنید a_n دنباله کشی در X باشد که به صورت $a_n = (x_n, ۰)$، $a_n = (۰, y_n)$ و یا به صورت ترکیبی از $(x_n, ۰)$ و $(۰, y_n)$ هاست. لذا دنباله a_n به هر صورتی که باشد، عضو $E = \mathbb{R}^۲$ است و چون $\mathbb{R}^۲$ تام می باشد، وجود دارد $a \in \mathbb{R}^۲$، به طوری که a_n به آن همگراست. اینک نشان می دهیم X بسته و لذا تام است.

فرض کنید $a_n \longrightarrow a$. در این صورت سه حالت زیر را داریم:

۱) $(x_n, ۰) \longrightarrow (x, ۰)$

۲) $(۰, y_n) \longrightarrow (۰, y)$

۳) ترکیبی از $(۰, y_n)$ و $(x_n, ۰)$ که به $(۰, ۰)$ میل میکند.

که هر سه حالت $(x, ۰)$، $(۰, y)$ و $(۰, ۰)$ عضوی از X می باشد، لذا X بسته است.

حال نگاشت T را با ضابطه

$$T((۰, x)) = (\frac{۱}{۲}x, ۰) \qquad \text{و} \qquad T((x, ۰)) = (۰, x)$$

در نظر می گیریم. به راحتی اما با محاسبات کمی خسته کننده می توان نشان داد T یک نگاشت انقباض با ثابت انقباض $k = \frac{۳}{۴}$ است. چون (X, d) فضای متریک مخروطی تام است، طبق قضیه (۱.۱.۳)، T نقطه ثابت یکتایی دارد. لذا با توجه به معادلات

$$T((\text{۰},x))=(\text{۰},x)=(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x,\text{۰}) \qquad \text{و} \qquad T((x,\text{۰}))=(x,\text{۰})=(\text{۰},x)$$

واضح است که $(\text{۰},\text{۰})$ نقطه ثابت یکتایی برای نگاشت T در X است.

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی فشرده دنباله ای و P مخروط منتظم باشد. اگر نگاشت $T:X\longrightarrow X$ نگاشت انقباض به طوری که

$$d(T_x,T_y)<d(x,y), \qquad x,y\in X, \qquad x\neq y,$$

مفروض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در X دارد.

برهان: فرض کنید $x_{\cdot}\in X$. همچنین فرض کنید

$$x_\text{۱}=T_{x_\cdot},x_\text{۲}=T_{x_\text{۱}}=T^\text{۲}_{x_\cdot},\ldots,x_{n+\text{۱}}=T_{x_n}=T^{n+\text{۱}}_{x_\cdot}.$$

در این صورت اگر به ازای **لااقل یک** n، $x_n=x_{n+\text{۱}}$، آن گاه x_n نقطه ثابت برای T خواهد بود. پس اثبات تمام است.

حال فرض کنید برای هر n، $x_n\neq x_{n+\text{۱}}$. در این صورت $d_n=d(x_n,x_{n+\text{۱}})$ را در نظر می گیریم. آن گاه

$$d_{n+\text{۱}}=d(x_{n+\text{۱}},x_{n+\text{۲}})=d(T_{x_n},T_{x_{n+\text{۱}}})<d(x_n,x_{n+\text{۱}})=d_n.$$

پس d_n دنباله نزولی و از پایین کراندار به صفر است. مخروط P منتظم است، لذا با توجه به تعریف مخروط منتظم (۳.۲.۱)، $d^*\in E$ وجود دارد به طوری که $d_n\longrightarrow d^*(n\to\infty)$. طبق تعریف فشردگی دنباله ای (۷.۲.۲)، زیر دنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ و $x^*\in X$ وجود دارد به طوری که $x_{n_i}\longrightarrow x^*(i\to\infty)$. از طرفی برای $i=\text{۱},\text{۲},\text{۳},\ldots$ داریم $d(T_{x_{n_i}},T_{x^*})\leq d(x_{n_i},x^*)$. با توجه به قضیه (۴.۲.۱)، هر مخروط منتظم نرمال است. پس P مخروط نرمال با ثابت نرمال M می باشد، لذا

$$\|d(T_{x_{n_i}},T_{x^*})\|\leq M\|d(x_{n_i},x^*)\|.$$

چون $x^* \longrightarrow x_{n_i}$، پس با توجه به لم (۲.۲.۲)، $\|d(x_{n_i}, x^*)\| \longrightarrow 0$. بنابراین $\|d(T_{x_{n_i}}, T_{x^*})\| \longrightarrow 0$. لذا با توجه به لم (۲.۲.۲)، $T_{x_{n_i}} \longrightarrow T_{x^*} (i \to \infty)$. به طور مشابه $T^2_{x_i} \longrightarrow T^2_{x^*} (i \to \infty)$. طبق لم (۶.۲.۲)،

$$d(T_{x_{n_i}}, x_{n_i}) \longrightarrow d(T_{x^*}, x^*),$$

$$d(T^2_{x_{n_i}}, T_{x_{n_i}}) \longrightarrow d(T^2_{x^*}, T_{x^*}).$$

واضح است که

$$d(T_{x_{n_i}}, x_{n_i}) = d_{n_i} \longrightarrow d^* = d(T_{x^*}, x^*) \qquad (i \to \infty).$$

حال ثابت می کنیم $T_{x^*} = x^*$. فرض کنیم $T_{x^*} \neq x^*$، بنابراین $d^* \neq 0$. لذا

$$d^* = d(T_{x^*}, x^*) > d(T^2_{x^*}, T_{x^*}) = lim_{i\to\infty} d(T^2_{x_{n_i}}, T_{x_{n_i}}) = lim_{i\to\infty} d(T_{x_{n_i+1}}, x_{n_i+1})$$

$$= lim_{i\to\infty} d_{n_i+1} = d^*.$$

که این تناقض است. پس $T_{x^*} = x^*$. بنابراین x^* نقطه ثابت نگاشت T می باشد.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو

$$d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) < d(x^*, y^*).$$

که این یک تناقض است. لذا $x^* = y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی تام و P مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. اگر نگاشت $T : X \longrightarrow X$ با شرط انقباض

$$d(T_x, T_y) \leq k(d(T_x, x) + d(T_y, y)), \qquad \forall x, y \in X, \qquad k \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right),$$

مفروض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در X دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T^n_x\}$ به همان نقطه ثابت همگراست.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$. با انتخاب

$$x_1 = T_{x_0}, x_2 = T_{x_1} = T^2_{x_0}, \dots, x_{n+1} = T_{x_n} = T^{n+1}_{x_0}$$

با توجه به شرط انقباض نگاشت T داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-1}}) &\leq k \left(d(T_{x_n}, x_n) + d(T_{x_{n-1}}, x_{n-1}) \right) \\ &= k \left(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_{n+1}, x_n)(1-k) \leq k d(x_n, x_{n-1}).$$

در نهایت با در نظر گرفتن $h = \dfrac{k}{1-k}$،

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}).$$

بنابراین برای $n > m$،

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq h d(x_{n-1}, x_{n-2}) + h d(x_{n-2}, x_{n-3}) + \dots + h d(x_m, x_{m-1}) \\ &\leq h^2 d(x_{n-2}, x_{n-3}) + h^2 d(x_{n-3}, x_{n-4}) + \dots + h^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq h^{n-1} d(x_1, x_0) + h^{n-2} d(x_1, x_0) + \dots + h^m d(x_1, x_0) \\ &= (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

چون P نرمال است،

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq M\frac{h^m}{1-h}\|d(x_1, x_0)\|.$$

اگر $(n, m \to \infty)$، چون $h \in [0, 1)$، آن‌گاه سمت راست رابطه بالا به صفر میل می‌کند. بنابراین

$$(n, m \to \infty) \qquad d(x_n, x_m) \longrightarrow 0.$$

لذا با توجه به لم (۵.۲.۲)، $\{x_n\}$ دنباله کشی است. چون X فضای تام و در فضای تام هر دنباله کشی همگراست، پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست.

از طرفی

$$d(T_{x^*}, x^*) \leq d(T_{x_n}, T_{x^*}) + d(T_{x_n}, x^*) \leq k\left(d(T_{x_n}, x_n) + d(T_{x^*}, x^*)\right) + d(x_{n+1}, x^*).$$

لذا

$$d(T_{x^*}, x^*) - kd(T_{x^*}, x^*) \leq kd(T_{x_n}, x_n) + d(x_{n+1}, x^*).$$

درنهایت

$$d(T_{x^*}, x^*) \leq \frac{1}{1-k}\left(kd(T_{x_n}, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)\right).$$

با توجه به این که P مخروط نرمال است،

$$\|d(T_{x^*}, x^*)\| \leq M\frac{1}{1-k}\left(k\|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|\right).$$

از طرفی $x_n \longrightarrow x^*(n \to \infty)$، لذا $\|d(x_{n+1}, x^*)\| \longrightarrow 0$. پس سمت راست نامساوی به صفر میل می‌کند و $\|d(T_{x^*}, x^*)\| = 0$. بنابراین $T_{x^*} = x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال اگر نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، آن‌گاه

$$d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) \leq k\left(d(T_{x^*}, x^*) + d(T_{y^*}, y^*)\right).$$

چون $T_{x^*} = x^*$ و $T_{y^*} = y^*$، سمت راست نامساوی صفر است، بنابراین $d(x^*, y^*) = ۰$ و $x^* = y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی تام و P مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. اگر $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط

$$d(T_x, T_y) \leq k(d(T_x, y) + d(T_y, x)), \qquad x, y \in X,$$

باشد به طوری که $k \in \left[۰, \frac{۱}{۲}\right)$، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در X دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به همان نقطه ثابت همگراست.

برهان: فرض کنید $x_۰ \in X$. با انتخاب

$$x_۱ = T_{x_۰}, x_۲ = T_{x_۱} = T_{x_۰}^۲, \ldots, x_{n+۱} = T_{x_n} = T_{x_۰}^{n+۱}$$

داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-۱}}) &\leq k\left(d(T_{x_n}, x_{n-۱}) + d(T_{x_{n-۱}}, x_n)\right) \\ &= k\left(d(T_{x_n}, T_{x_{n-۲}}) + d(x_n, x_n)\right) = kd(T_{x_n}, T_{x_{n-۲}}) \\ &\leq k\left(d(T_{x_n}, x_n) + d(x_n, T_{x_{n-۲}})\right) = k\left(d(x_{n+۱}, x_n) + d(x_n, x_{n-۱})\right). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_{n+۱}, x_n) - kd(x_{n+۱}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-۱}).$$

در نهایت با در نظر گرفتن $h = \frac{k}{۱-k}$،

$$d(x_{n+۱}, x_n) \leq \frac{k}{۱-k} d(x_n, x_{n-۱}) = hd(x_n, x_{n-۱}).$$

بنابراین برای $n > m$،

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \ldots + d(x_{m+۱}, x_m) \\ &\leq hd(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + hd(x_{n-۲}, x_{n-۳}) + \ldots + hd(x_m, x_{m-۱}) \\ &\vdots \\ &\leq (h^{n-۱} + h^{n-۲} + \ldots + h^m) d(x_۱, x_۰) \\ &\leq \frac{h^m}{۱-h} d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

چون P مخروط نرمال است،

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq M \frac{h^m}{۱-h} \|d(x_۱, x_۰)\|.$$

اگر $(n, m \to \infty)$، چون $h \in [۰, ۱)$، آن گاه سمت راست نامساوی به صفر میل می کند. لذا

$$(n, m \to \infty) \qquad d(x_n, x_m) \longrightarrow ۰.$$

پس با توجه به لم (۵.۲.۲)، $\{x_n\}$ دنباله کشی است. چون X فضای تام و در فضای تام هر دنباله کشی همگراست، پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست. از طرفی

$$\begin{aligned} d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_{x_n}, T_{x^*}) + d(T_{x_n}, x^*) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, x_n) + d(T_{x_n}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, x^*) + d(x^*, x_n) + d(x_{n+۱}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*). \end{aligned}$$

لذا

$$d(T_{x^*}, x^*) \leq \frac{۱}{۱-k} \left(k(d(x_n, x^*) + d(x_{n+۱}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*) \right).$$

با توجه به این که P مخروط نرمال است،

$$\|d(T_{x^*}, x^*)\| \leq M \frac{۱}{۱-k} \left(k(\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+۱}, x^*)\|) + \|d(x_{n+۱}, x^*)\|\right).$$

از طرفی $(n \to \infty)$ $x_n \longrightarrow x^*$، لذا $\|d(x_n, x^*)\| \longrightarrow ۰$ و $\|d(x_{n+۱}, x^*)\| \longrightarrow ۰$. پس سمت راست نامساوی به صفر میل می کند و $\|d(T_{x^*}, x^*)\| = ۰$. بنابراین $T_{x^*} = x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(T_{x^*}, T_{y^*}) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, y^*) + d(T_{y^*}, x^*)) \\ &= k(d(x^*, y^*) + d(y^*, x^*)) \\ &= ۲kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*). \end{aligned}$$

که این تناقض است. در نتیجه $x^* = y^*$، یعنی نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

در ادامه، بعضی از قضایای بیان شده که تعمیمی از قضایای نقطه ثابت در فضای متریک به فضای متریک مخروطی است، بدون در نظر گرفتن نرمال بودن مخروط P اثبات می شوند که نشان می دهد شرط نرمال بودن یک شرط اساسی در اثبات قضایای نقطه ثابت نمی باشد.

قضیه ۳.۱.۷. *فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی تام باشد. اگر $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط*

$$d(T_x, T_y) \leq kd(x, y), \qquad x, y \in X, \qquad k \in [۰, ۱),$$

باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: فرض کنید $x_. \in X$. برای $n \geq ۱$ با انتخاب

$$x_۱ = T_{x.}, x_۲ = T_{x_۱} = T^۲_{x.}, \ldots, x_{n+۱} = T_{x_n} = T^{n+۱}_{x.}$$

داریم:

$$d(x_{n+۱}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-۱}}) \leq kd(x_n, x_{n-۱}) \leq k^۲ d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) \leq \ldots \leq k^n d(x_۱, x.).$$

بنابراین برای $n > m$،

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \ldots + d(x_{m+۱}, x_m) \\ &\leq k^{n-۱} d(x_۱, x.) + k^{n-۲} d(x_۱, x.) + \ldots + k^m d(x_۱, x.) \\ &= (k^{n-۱} + k^{n-۲} + \ldots + k^m) d(x_۱, x.) \\ &\leq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x.). \end{aligned}$$

ثابت $c \gg ۰$ را در نظر می‌گیریم. $\delta > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $c + N_\delta(۰) \subseteq P$ که در آن

$$N_\delta(۰) = \{y \in E, \| y \| < \delta\}.$$

عدد طبیعی $N_۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x.) \in N_\delta(۰)$. بنابراین برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x.) \ll c$ و برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x.) \ll c.$$

لذا طبق تعریف (۳.۲.۲)، $\{x_n\}$ دنباله کشی در (X, d) می باشد. چون X فضای تام است، هر دنباله کشی در آن همگراست. پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست. لذا با توجه به تعریف همگرایی (۱.۲.۲)، عدد طبیعی $N_۲$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $n > N_۲$، $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{۲}$. بنابراین برای هر

$n > N_۲$،

$$\begin{aligned} d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_{x_n}, T_{x^*}) + d(T_{x_n}, x^*) \\ &\leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+۱}, x^*) \\ &\leq d(x_n, x^*) + d(x_{n+۱}, x^*) \\ &\ll \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} = c. \end{aligned}$$

با توجه به این که برای $m \geq ۱$، $\frac{c}{m} \in intP$، لذا $d(T_{x^*}, x^*) \ll \frac{c}{m}$. بنابراین طبق رابطه (۲.۱)، برای $m \geq ۱$، $\frac{c}{m} - d(T_{x^*}, x^*) \in P$. چون $\frac{c}{m} \longrightarrow ۰ \ (m \to \infty)$ و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*}, x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*}, x^*) \in P$، بنابراین طبق تعریف مخروط، $d(T_{x^*}, x^*) = ۰$. لذا $T_{x^*} = x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال اگر نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، آن گاه

$$d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) \leq kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

این یک تناقض است. لذا $x^* = y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

نتیجه ۸.۱.۳. اگر (X, d) فضای متریک مخروطی تام و نگاشت $T : X \longrightarrow X$ برای عدد صحیح مثبت n و برای هر $x, y \in X$، با شرط

$$d(T_x^n, T_y^n) \leq kd(x, y), \qquad k \in [۰, ۱),$$

انقباض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی در X دارد.

برهان: طبق قضیه (۷.۱.۳)، نگاشت T^n نقطه ثابت یکتایی مانند x^* دارد، یعنی $T_{x^*}^n = x^*$. از طرفی

$$T^n(T_{x^*}) = T(T_{x^*}^n) = T_{x^*}.$$

لذا T_{x^*} نقطه ثابتی برای T^n است. چون T^n نقطه ثابت یکتا دارد پس $T_{x^*} = x^*$. مشاهده می شود x^* نقطه ثابت نگاشت T است. به دلیل این که هر نقطه ثابت T، نقطه ای ثابت برای T^n می باشد، لذا T فقط یک نقطه ثابت دارد. ■

قضیه ۹.۱.۳. اگر (X, d) فضای متریک مخروطی تام و $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط

$$d(T_x, T_y) \leq k(d(T_x, x) + d(T_y, y)), \qquad x, y \in X,$$

به طوری که $k \in [۰, \frac{۱}{۲})$، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: فرض کنید $x_. \in X$. با انتخاب

$$x_۱ = T_{x_.}, x_۲ = T_{x_۱} = T_{x_.}^۲, \ldots, x_{n+۱} = T_{x_n} = T_{x_.}^{n+۱}$$

داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, x_n) &= d(T_{x_n}, T_{x_{n-۱}}) \\ &\leq k(d(T_{x_n}, x_n) + d(T_{x_{n-۱}}, x_{n-۱})) \\ &= k(d(x_{n+۱}, x_n) + d(x_n, x_{n-۱})). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_{n+۱}, x_n)(۱ - k) \leq kd(x_n, x_{n-۱}).$$

در نهایت با در نظر گرفتن $h = \dfrac{k}{۱ - k}$،

$$d(x_{n+۱}, x_n) \leq \frac{k}{۱ - k} d(x_n, x_{n-۱}) = hd(x_n, x_{n-۱}).$$

بنابراین برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m)$$
$$\leq h^{n-1}d(x_1, x_0) + h^{n-2}d(x_1, x_0) + \ldots + h^m d(x_1, x_0)$$
$$= (h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^m)d(x_1, x_0)$$
$$\leq \frac{h^m}{1-h}d(x_1, x_0).$$

ثابت $c \gg 0$ را در نظر می گیریم. $\delta > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که $c + N_\delta(0) \subseteq P$ که در آن

$$N_\delta(0) = \{y \in E, \| y \| < \delta\}.$$

عدد طبیعی N_1 را طوری انتخاب می کنیم که برای $m > N_1$، $\frac{k^m}{1-k}d(x_1, x_0) \in N_\delta(0)$. بنابراین برای $m > N_1$، $\frac{k^m}{1-k}d(x_1, x_0) \ll c$ و برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k}d(x_1, x_0) \ll c.$$

پس با توجه به تعریف (۲.۲.۳)، دنباله $\{x_n\}$ در (X, d) کشی است. چون X فضای تام می باشد، هر دنباله کشی در آن همگراست. پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست. حال با توجه به تعریف همگرایی (۲.۲.۱)، عدد طبیعی N_2 را انتخاب می کنیم به طوری که برای هر $n > N_2$ داشته باشیم:

$$d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c(1-k)}{2} \qquad \text{و} \qquad d(x_{n+1}, x_n) \ll \frac{c(1-k)}{2k}$$

بنابراین برای هر $n > N_2$،

$$d(T_{x^*}, x^*) \leq d(T_{x_n}, T_{x^*}) + d(T_{x_n}, x^*)$$
$$\leq k(d(T_{x_n}, x_n) + d(T_{x^*}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*).$$

لذا

$$(1-k)d(T_{x^*},x^*) \leq kd(x_{n+1},x_n)+d(x_{n+1},x^*).$$

و

$$d(T_{x^*},x^*) \leq \frac{1}{1-k}\left(kd(x_{n+1},x_n)+d(x_{n+1},x^*)\right) \ll \frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c.$$

پس برای $m \geq 1$، با توجه به این که $\frac{c}{m} \in intP$، $\frac{c}{m} \gg d(T_{x^*},x^*)$. لذا طبق رابطه (۲.۱)، برای $m \geq 1$، $\frac{c}{m} - d(T_{x^*},x^*) \in P$. چون $(m \to \infty)$ $\frac{c}{m} \longrightarrow 0$ و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*},x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*},x^*) \in P$. بنابراین طبق تعریف مخروط (۱.۲.۱)، $d(T_{x^*},x^*) = 0$. پس $T_{x^*}=x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو $T_{x^*}=x^*$ و $T_{y^*}=y^*$.

پس

$$d(x^*,y^*)=d(T_{x^*},T_{y^*}) \leq k(d(T_{x^*},x^*)+d(T_{y^*},y^*))=0.$$

لذا $d(x^*,y^*)=0$، پس $x^*=y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

قضیه ۱۰.۱.۳. اگر (X,d) فضای متریک مخروطی تام و $T: X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط

$$d(T_x,T_y) \leq k(d(T_x,y)+d(T_y,x)), \qquad x,y \in X,$$

به طوری که $k \in [0,\frac{1}{2})$، آن‌گاه T نقطه ثابت یکتا دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به همان نقطه ثابت همگراست.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$. برای $n \geq 1$ با انتخاب

$$x_1=T_{x_0}, x_2=T_{x_1}=T_{x_0}^2,\ldots,x_{n+1}=T_{x_n}=T_{x_0}^{n+1}$$

داریم:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-1}}) \leq k(d(T_{x_n}, x_{n-1}) + d(T_{x_{n-1}}, x_n))$$
$$= k(d(T_{x_n}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n))$$
$$= kd(T_{x_n}, x_{n-1}) = kd(x_{n+1}, x_{n-1})$$
$$\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})).$$

بنابراین

$$d(x_{n+1}, x_n)(1 - k) \leq kd(x_n, x_{n-1}).$$

در نهایت با در نظر گرفتن $h = \dfrac{k}{1-k}$،

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = hd(x_n, x_{n-1}).$$

بنابراین برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m)$$
$$\leq h^{n-1} d(x_1, x_0) + h^{n-2} d(x_1, x_0) + \ldots + h^m d(x_1, x_0)$$
$$= (h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^m) d(x_1, x_0)$$
$$\leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0).$$

ثابت $c \gg 0$ را در نظر می گیریم. $\delta > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که $c + N_\delta(0) \subseteq P$ که در آن

$$N_\delta(0) = \{y \in E, \| y \| < \delta\}.$$

عدد طبیعی N_1 را طوری انتخاب می کنیم که برای $m > N_1$، $\dfrac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in N_\delta(0)$. بنابراین برای $m > N_1$، $\dfrac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$ و برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_.) \ll c.$$

پس با توجه به تعریف (۳. ۲. ۲)، دنباله $\{x_n\}$ در (X, d) کشی است. چون X فضای تام می باشد، هر دنباله کشی در آن همگراست. پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست.

لذا با توجه به تعریف همگرایی، عدد طبیعی $N_۲$ را طوری انتخاب می کنیم که برای هر $n > N_۲$،

$$d(x_n, x^*) \ll \frac{c(۱-k)}{۳}.$$

بنابراین برای هر $n > N_۲$،

$$\begin{aligned} d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_{x_n}, T_{x^*}) + d(T_{x_n}, x^*) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, x_n) + d(T_{x_n}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(T_{x_n}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+۱}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*). \end{aligned}$$

لذا

$$d(T_{x^*}, x^*) \leq \frac{۱}{۱-k}(k(d(x_n, x^*) + d(x_{n+۱}, x^*)) + d(x_{n+۱}, x^*)) \ll \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} = c.$$

با توجه به این که برای $m \geq ۱$، پس $\frac{c}{m} \in intP$، $d(T_{x^*}, x^*) \ll \frac{c}{m}$. لذا با توجه به رابطه (۲. ۱)، برای $m \geq ۱$، $\frac{c}{m} - d(T_{x^*}, x^*) \in P$. اگر $m \to \infty$، آن گاه $\frac{c}{m} \longrightarrow ۰$ و چون P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*}, x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*}, x^*) \in P$. بنابراین طبق تعریف مخروط، $d(T_{x^*}, x^*) = ۰$.

پس $T_{x^*} = x^*$. لذا x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(T_{x^*}, T_{y^*}) \\ &\leq k(d(T_{x^*}, y^*) + d(T_{y^*}, x^*)) \\ &= k(d(x^*, y^*) + d(y^*, x^*)) \\ &= 2kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*). \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. در نتیجه $x^* = y^*$ و نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

قضیه ۳.۱.۱۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی تام و $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط

$$d(T_x, T_y) \leq kd(x, y) + ld(y, T_x), \qquad x, y \in X, \qquad k, l \in [0, 1),$$

باشد، آن گاه T نقطه ثابت دارد و در حالتی که $k + l < 1$، نقطه ثابت T یکتاست.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$. با انتخاب

$$x_1 = T_{x_0}, x_2 = T_{x_1} = T^2_{x_0}, \ldots, x_{n+1} = T_{x_n} = T^{n+1}_{x_0}$$

داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(T_{x_n}, T_{x_{n-1}}) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) + ld(T_{x_{n-1}}, x_n) \\ &= kd(x_n, x_{n-1}) + ld(x_n, x_n) = kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

بنابراین برای $n > m$،

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \ldots + d(x_{m+۱}, x_m) \\
&\leq k^{n-۱} d(x_۱, x_۰) + k^{n-۲} d(x_۱, x_۰) + \ldots + k^m d(x_۱, x_۰) \\
&= (k^{n-۱} + k^{n-۲} + \ldots + k^m) d(x_۱, x_۰) \\
&\leq \frac{k^m}{۱ - k} d(x_۱, x_۰).
\end{aligned}$$

ثابت $c \gg ۰$ را در نظر می گیریم. $\delta > ۰$ را طوری انتخاب می کنیم که $c + N_\delta(۰) \subseteq P$ که درآن

$$N_\delta(۰) = \{y \in E, \| y \| < \delta\}.$$

عدد طبیعی $N_۱$ را طوری انتخاب می کنیم که برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰) \in N_\delta(۰)$. بنابراین برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰) \ll c$ و برای $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰) \ll c.$$

پس با توجه به تعریف (۳.۲.۲)، دنباله $\{x_n\}$ در (X, d) کشی است. چون X فضای تام می باشد و هر دنباله کشی درآن همگراست، پس وجود دارد $x^* \in X$ که $\{x_n\}$ به آن همگراست. لذا عدد طبیعی $N_۲$ را طوری انتخاب می کنیم که برای هر $n > N_۲$ ، $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{۳}$. بنابراین برای هر $n > N_۲$،

$$\begin{aligned}
d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(x_n, T_{x^*}) + d(x_n, x^*) \\
&= d(T_{x_{n-۱}}, T_{x^*}) + d(x_n, x^*) \\
&\leq k d(x_{n-۱}, x^*) + l d(T_{x_{n-۱}}, x^*) + d(x_n, x^*) \\
&\leq d(x_{n-۱}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_n, x^*) \\
&\ll \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} = c.
\end{aligned}$$

با توجه به این که برای $m \geq ۱$، $\frac{c}{m} \in intP$، لذا $d(T_{x^*}, x^*) \ll \frac{c}{m}$. بنابراین برای $m \geq ۱$ داریم $\frac{c}{m} - d(T_{x^*}, x^*) \in P$. چون $(m \to \infty)$ $\frac{c}{m} \longrightarrow ۰$ و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*}, x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*}, x^*) \in P$. بنابراین طبق تعریف مخروط، $d(T_{x^*}, x^*) = ۰$. پس $T_{x^*} = x^*$. لذا x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال اگر نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد و $k + l < ۱$، آن گاه

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) &\leq kd(x^*, y^*) + ld(T_{x^*}, y^*) \\ &= kd(x^*, y^*) + ld(x^*, y^*) \\ &= (k + l)d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*). \end{aligned}$$

این یک تناقض است و $x^* = y^*$. پس در حالتی که $k + l < ۱$، نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

قضایای (۷.۱.۳)، (۹.۱.۳)، (۱۰.۱.۳) و (۱۱.۱.۳) به صورت یک قضیه واحد آورده شده است که در زیر ارائه می گردد.

قضیه ۱۲.۱.۳. اگر (X, d) فضای متریک مخروطی تام و نگاشت $T : X \longrightarrow X$ برای هر $x, y \in X$ با شرایط

$$a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵ \in [۰, ۱), a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ < ۱,$$

$$d(T_x, T_y) \leq a_۱ d(T_x, x) + a_۲ d(T_y, y) + a_۳ d(T_y, x) + a_۴ d(T_x, y) + a_۵ d(y, x). \qquad (۱.۳)$$

انقباض باشد، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: در ابتدا بدون این که به نتیجه کلی خللی وارد شود فرض کنید $a_۱ = a_۲$ و $a_۳ = a_۴$. بنابراین طبق رابطه (۱.۳)، خواهیم داشت:

$$d(T_x, T_y) \leq \frac{a_۱ + a_۲}{۲}(d(T_x, x) + d(T_y, y)) + \frac{a_۳ + a_۴}{۲}(d(T_y, x) + d(T_x, y)) + a_۵ d(y, x). \qquad (۲.۳)$$

در رابطه (۱.۳) قرار می دهیم $y = T_x$ ، پس

$$d(T_x, T(T_x)) \leq a_۱ d(T_x, x) + a_۲ d(T(T_x), T_x) + a_۳ d(T(T_x), x) + a_۴ d(T_x, T_x) + a_۵ d(T_x, x).$$

بنابراین

$$d(T_x, T_x^۲) \leq (a_۱ + a_۵) d(T_x, x) + a_۲ d(T_x^۲, T_x) + a_۳ d(T_x^۲, x).$$

لذا

$$d(T_x, T_x^۲) \leq \frac{a_۱ + a_۵}{۱ - a_۲} d(T_x, x) + \frac{a_۳}{۱ - a_۲} d(T_x^۲, x). \tag{۳.۳}$$

از طرفی با توجه به نامساوی مثلثی $d(T_x^۲, x) \leq d(T_x, T_x^۲) + d(T_x, x)$،

$$d(T_x, T_x^۲) \geq d(T_x^۲, x) - d(T_x, x).$$

با توجه به رابطه (۳.۳)،

$$d(T_x^۲, x) - d(T_x, x) \leq \frac{a_۱ + a_۵}{۱ - a_۲} d(T_x, x) + \frac{a_۳}{۱ - a_۲} d(T_x^۲, x). \tag{۴.۳}$$

لذا

$$(۱ - \frac{a_۳}{۱ - a_۲}) d(T_x^۲, x) \leq (\frac{a_۱ + a_۵}{۱ - a_۲} + ۱) d(T_x, x).$$

بنابراین

$$d(T_x^۲, x) \leq \frac{۱ + a_۱ + a_۵ - a_۲}{۱ - a_۲ - a_۳} d(T_x, x). \tag{۵.۳}$$

از طرفی طبق رابطه (۳.۳) و (۵.۳)،

$$d(T_x^۲, T_x) \leq \frac{a_۱ + a_۵}{۱ - a_۲} d(T_x, x) + \frac{a_۳}{۱ - a_۲} . \frac{۱ + a_۱ + a_۵ - a_۲}{۱ - a_۲ - a_۳} d(T_x, x).$$

در نتیجه

$$d(T_x^{۲}, T_x) \leq \frac{a_۱ + a_۵ + a_۳}{۱ - a_۲ - a_۳} d(T_x, x). \tag{۶.۳}$$

در ابتدا فرض کردیم $a_۱ = a_۲$ و $a_۳ = a_۴$. لذا در رابطه (۶.۳)، می توانیم $a_۱$ را با $a_۲$ و $a_۳$ را با $a_۴$ جایگزین کنیم. پس

$$d(T_x^{۲}, T_x) \leq \frac{a_۲ + a_۵ + a_۴}{۱ - a_۱ - a_۴} d(T_x, x).$$

اگر قرار دهیم

$$\alpha = min\left\{\frac{a_۱ + a_۵ + a_۳}{۱ - a_۲ - a_۳}, \frac{a_۲ + a_۵ + a_۴}{۱ - a_۱ - a_۴}\right\}$$

آن گاه

$$d(T_x^{۲}, T_x) \leq \alpha d(T_x, x), \qquad \alpha \in [۰, ۱).$$

زمانی که $m > n$ در نظر گرفته می شود، مشاهده می کنیم:

$$\begin{aligned} d(T_x^m, T_x^n) &\leq d(T_x^m, T_x^{m-۱}) + \ldots + d(T_x^{n+۱}, T_x^n) \\ &\leq \alpha^{m-۱} d(x, T_x) + \alpha^{m-۲} d(x, T_x) + \cdots + \alpha^n d(x, T_x) \\ &= \alpha^n (۱ + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-۱}) d(x, T_x) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{۱ - \alpha} d(x, T_x). \end{aligned}$$

ثابت $c \gg ۰$ را در نظر می گیریم. عدد طبیعی $N_۱$ را انتخاب می کنیم به طوری که برای $n \geq N_۱$،

$$\frac{\alpha^n}{۱ - \alpha} d(x, T_x) \ll c.$$

بنابراین برای $m > n$، c ، $d(T_x^m, T_x^n) \ll c$. لذا طبق تعریف (۳.۲.۲)، $\{T_x^n\}$ یک دنباله کشی در (X, d) می باشد و چون (X, d) فضای متریک مخروطی تام است هر دنباله کشی در آن همگرا می باشد، لذا وجود دارد $x^* \in X$ به

طوری که $\{T_x^n\}$ به آن همگراست. با توجه به تعریف همگرایی (۱.۲.۲)، عدد طبیعی $N_۲$ را طوری انتخاب می کنیم که برای $n \geq N_۲$،

$$d(T_x^n, x^*) \ll \frac{c(۱-(a_۲+a_۳))}{۲(a_۱+a_۴+۱)},$$
$$d(T_x^{n-۱}, x^*) \ll \frac{c(۱-(a_۲+a_۳))}{۲(a_۱+a_۳+a_۵)}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_x^n, T_{x^*}) + d(T_x^n, x^*) = d(T(T_x^{n-۱}), T_{x^*}) + d(T_x^n, x^*) \\ &\leq a_۱ d(T_x^n, T_x^{n-۱}) + a_۲ d(T_{x^*}, x^*) + a_۳ d(T_{x^*}, T_x^{n-۱}) \\ &\quad + a_۴ d(T_x^n, x^*) + a_۵ d(T_x^{n-۱}, x^*) + d(T_x^n, x^*) \\ &\leq a_۱ d(T_x^n, x^*) + a_۱ d(T_x^{n-۱}, x^*) + a_۲ d(T_{x^*}, x^*) + a_۳ d(T_{x^*}, x^*) \\ &\quad + a_۳ d(T_x^{n-۱}, x^*) + a_۴ d(T_x^n, x^*) + a_۵ d(T_x^{n-۱}, x^*) + d(T_x^n, x^*) \\ &\leq \frac{a_۱+a_۳+a_۵}{۱-(a_۲+a_۳)} d(T_x^{n-۱}, x^*) + \frac{a_۱+a_۴+۱}{۱-(a_۲+a_۳)} d(T_x^n, x^*) \\ &\ll \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} = c. \end{aligned}$$

بنابراین برای $m \geq ۱$، با توجه به این که $\frac{c}{m} \in intP$، $d(T_{x^*}, x^*) \ll \frac{c}{m}$. لذا $\frac{c}{m} - d(T_{x^*}, x^*) \in P$. چون $(m \to \infty)$ $\frac{c}{m} \longrightarrow ۰$ و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*}, x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*}, x^*) \in P$. بنابراین طبق تعریف مخروط، $d(T_{x^*}, x^*) = ۰$. پس $T_{x^*} = x^*$. لذا x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال فرض کنید نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، از این رو طبق رابطه (۱.۳)،

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) &\leq a_۱ d(T_{x^*}, x^*) + a_۲ d(T_{y^*}, y^*) + a_۳ d(T_{y^*}, x^*) \\ &\quad + a_۴ d(T_{x^*}, y^*) + a_۵ d(y^*, x^*). \end{aligned}$$

با توجه به $T_{x^*} = x^*$ *و* $T_{y^*} = y^*$،

$$d(x^*, y^*) \leq a_1 d(x^*, x^*) + a_2 d(y^*, y^*) + a_3 d(y^*, x^*) + a_4 d(x^*, y^*) + a_5 d(y^*, x^*)$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5) d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

این یک تناقض است. لذا $x^* = y^*$. *پس نقطه ثابت نگاشت* T *یکتاست.* ■

در قضیه اخیر اگر در رابطه (۱.۳)، $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ در نظر بگیریم قضیه (۷.۱.۳) به دست خواهد آمد و اگر قرار دهیم $a_3 = a_4 = a_5 = 0$، قضیه (۹.۱.۳) و با در نظر گرفتن $a_1 = a_2 = a_5 = 0$، قضیه (۱۰.۱.۳) و در نهایت اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$، قضیه (۱۱.۱.۳) را خواهیم داشت.

۲.۳ بررسی قضایای نقطه ثابت نگاشت های انقباض در فضای متریک مستطیلی مخروطی

در این بخش، ابتدا فضای متریک مستطیلی مخروطی را معرفی کرده و بعد از تعریف همگرایی دنباله ها در این فضا، در مورد قضیه نقطه ثابت نگاشت های انقباض روی این فضا بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۳. *اگر* X *یک مجموعه ناتهی،* E *فضای باناخ حقیقی و نگاشت* $d : X \times X \longrightarrow E$ *با شرایط*

الف: برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \geq 0$ *و* $d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y$؛

ب: برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$؛

ج: برای هر $x, y \in X$ *و نقاط مجزای* $w, z \in X - \{x, y\}$، $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, z) + d(z, y)$،

آن گاه d *یک متر مستطیلی مخروطی روی* X *است و* (X, d) *فضای متریک مستطیلی مخروطی نامیده می شود.*

طبق آن چه در تعریف همگرایی (۱.۲.۲) در فضای متریک مخروطی گفتیم، در (X, d) نیز داریم:

دنباله x_n به x همگراست اگر و فقط اگر برای هر $c \gg 0$ در E، وجود داشته باشد $n_0 \in \mathbb{N}$ به طوری که برای هر $n \geq n_0$، $d(x_n, x) \ll c$.

دنباله x_n کشی نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر $c \gg ۰$ در E، وجود داشته باشد $n. \in \mathbb{N}$ به طوری که برای هر $m, n \geq n.$، $d(x_n, x_m) \ll c$.

اگر هر دنباله کشی در (X, d) همگرا باشد، آن گاه (X, d) فضای متریک مستطیلی مخروطی تام نامیده می شود.

مثال. *اگر $E = \mathbb{R}^۲$، $P = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq ۰\}$، $X = \mathbb{N}$ و نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ با ضابطه*

$$d(x,y) = \begin{cases} (۰, ۰) & x = y \\ (۳, ۹) & x, y \in \{۱, ۲\}, x \neq y \\ (۱, ۳) & o.w \end{cases}$$

تعریف شود، آن گاه می توان نشان داد که متر d تمام شرایط یک متر مستطیلی مخروطی روی X را دارد. لذا (X, d) فضای متریک مستطیلی مخروطی نامیده می شود.

دو لم بعدی همانند لم های (۲.۲.۲) و (۵.۲.۲) هستند که در فضای متریک مخروطی بیان شدند. لذا ضمن بیان آن ها، از اثبات دوباره آن ها اجتناب می کنیم.

لم ۲.۲.۳. *فرض کنید (X, d) فضای متریک مستطیلی مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال M، $x \in X$ و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. دنباله x_n به x همگراست اگر و فقط اگر $۰ \longrightarrow \|d(x_n, x)\|(n \to \infty)$.*

لم ۳.۲.۳. *فرض کنید (X, d) فضای متریک مستطیلی مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال M و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. دنباله x_n کشی است اگر و فقط اگر $۰ \longrightarrow \|d(x_n, x_{n+m})\|(n \to \infty)$.*

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنید (X, d) فضای متریک مستطیلی مخروطی تام و P مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. اگر $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط*

$$d(T_x, T_y) \leq kd(x, y), \qquad x, y \in X,$$

به طوری که $k \in [۰, ۱)$، آن گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: *فرض کنید $x. \in X$ نقطه دلخواهی باشد. در ابتدا با انتخاب*

$$x_۱ = T_{x.}, x_۲ = T_{x_۱} = T^۲_{x.}, \dots, x_{n+۱} = T_{x_n} = T^{n+۱}_{x.}$$

فرض کنید به ازای یک n، $x_n = x.$. بنابراین برای هر $m \geq ۱$، $x_{nm} = x.$. لذا داریم:

$$d(x., T_{x.}) = d(x_n, T_{x_n}) = d(T^n_{x.}, T^{n+۱}_{x.}) \leq kd(T^{n-۱}_{x.}, T^n_{x.})$$
$$\leq k^۲ d(T^{n-۲}_{x.}, T^{n-۱}_{x.}) \leq \dots \leq k^n d(x., T_{x.}).$$

لذا $d(x., T_{x.}) \leq k^n d(x., T_{x.})$، یعنی $[k^n - ۱]\, d(x., T_{x.}) \in P$. زمانی که $m \to \infty$، $-d(x., T_{x.}) \in P$. و چون $d(x., T_{x.}) \in P$، طبق تعریف مخروط (۱.۲.۱)، $d(x., T_{x.}) = ۰$. این یعنی $x.$ نقطه ثابتی برای نگاشت T است.

حال با استفاده از خاصیت سوم در تعریف (۱.۲.۳)، برای هر $y \in Y$،

$$d(y, T^۴_y) \leq d(y, T_y) + d(T_y, T^۲_y) + d(T^۲_y, T^۴_y)$$
$$\leq d(y, T_y) + kd(y, T_y) + k^۲ d(y, T^۲_y).$$

به طور مشابه

$$d(y, T^۶_y) \leq d(y, T_y) + d(T_y, T^۲_y) + d(T^۲_y, T^۳_y) + d(T^۳_y, T^۴_y) + d(T^۴_y, T^۶_y)$$
$$\vdots$$
$$\leq d(y, T_y) + kd(y, T_y) + k^۲ d(y, T_y) + k^۳ d(y, T_y) + k^۴ d(y, T^۲_y)$$
$$= \sum_{i=۰}^{۳} k^i d(y, T_y) + k^۴ d(y, T^۲_y), \qquad \forall y \in X.$$

طبق استقرا برای هر $j = ۲, ۳, ۴, \cdots$،

$$d(y, T^{۲j}_y) \leq \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(y, T_y) + k^{۲j-۲} d(y, T^۲_y). \tag{۷.۳}$$

از طرفی برای هر $y \in X$،

$$\begin{aligned} d(y,T_y^{۵}) &\le d(y,T_y) + d(T_y,T_y^{۲}) + d(T_y^{۲},T_y^{۳}) + d(T_y^{۳},T_y^{۴}) + d(T_y^{۴},T_y^{۵}) \\ &\vdots \\ &\le d(y,T_y) + kd(y,T_y) + k^{۲}d(y,T_y) + k^{۳}d(y,T_y) + k^{۴}d(y,T_y) \\ &= \sum_{i=۰}^{۴} k^i d(y,T_y). \end{aligned}$$

طبق استقرا برای هر $j = ۰,۱,۲,\cdots$،

$$d(y,T_y^{۲j+۱}) \le \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(y,T_y). \tag{۸.۳}$$

فرض کنید برای هر $m,n \in \mathbb{N}$، $x_m \neq x_n$. لذا با توجه به نامساوی (۷.۳)، برای هر $j = ۱,۲,۳,\cdots$،

$$\begin{aligned} d(T_{x.}^n, T_{x.}^{n+۲j}) &\le k^n d(x.,T_{x.}^{۲j}) \\ &\le k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x.,T_{x.}) + k^{۲j-۲} d(x.,T_{x.}^{۲}) \\ &\le k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x.,T_{x.}) + k^{۲j-۲} d(x.,T_{x.}^{۲}) + \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x.,T_{x.}^{۲}) + k^{۲k-۲} d(x.,T_{x.}) \\ &= k^n \left[\sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i (d(x.,T_{x.}) + d(x.,T_{x.}^{۲})) + k^{۲k-۲}(d(x.,T_{x.}) + d(x.,T_{x.}^{۲}))\right] \\ &\le k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۲} k^i \left[d(x.,T_{x.}) + d(x.,T_{x.}^{۲})\right] \\ &= \frac{k^n(۱-k^{۲j-۱})}{۱-k} \left[d(x.,T_{x.}) + d(x.,T_{x.}^{۲})\right] \\ &\le \frac{k^n}{۱-k} \left[d(x.,T_{x.}) + d(x.,T_{x.}^{۲})\right]. \end{aligned}$$

به طور مشابه، طبق نامساوی (۸.۳)، برای هر $j = ۰, ۱, ۲, \cdots$،

$$\begin{aligned} d(T^n_{x.}, T^{n+۲j+۱}_{x.}) &\leq k^n d(x., T^{۲j+۱}_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T_{x.}) + \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T^{۲}_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i (d(x., T_{x.}) + d(x., T^{۲}_{x.})) \\ &\leq \frac{k^n}{۱-k}\left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^{۲}_{x.})\right]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(T^n_{x.}, T^{n+m}_{x.}) \leq \frac{k^n}{۱-k}\left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^{۲}_{x.})\right].$$

لذا با توجه به نرمال بودن مخروط P،

$$\|d(T^n_{x.}, T^{n+m}_{x.})\| \leq \frac{k^n}{۱-k} M \|d(x., T_{x.}) + d(x., T^{۲}_{x.})\|.$$

اگر $n \to \infty$، آن‌گاه چون $k \in [۰, ۱)$، سمت راست نامساوی به صفر میل می کند، بنابراین

$$\|d(T^n_{x.}, T^{n+m}_{x.})\| = \|d(x_n, x_{n+m})\| \longrightarrow ۰.$$

لذا با توجه به لم (۳.۲.۳)، $\{x_n\}$ دنباله کشی است. چون X فضای متریک مستطیلی مخروطی تام و در فضای تام هر دنباله کشی همگراست، لذا وجود دارد $x^* \in X$ که $\{x_n\}$ به آن همگراست. با توجه به این که $x_n = T^n_{x.}$ انتخاب شده بود، $T^n_{x.} \longrightarrow x^*(n \longrightarrow \infty)$.

چون برای هر $n \neq m$، $x_n \neq x_m$. طبق خاصیت سوم تعریف (۳.۲.۱)،

$$\begin{aligned}
d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_{x^*}, T^n_{x.}) + d(T^n_{x.}, T^{n+1}_{x.}) + d(T^{n+1}_{x.}, x^*)\\
&\leq kd(x^*, T^{n-1}_{x.}) + kd(T^{n-1}_{x.}, T^n_{x.}) + d(T^{n+1}_{x.}, x^*)\\
&\leq kd(x^*, T^{n-1}_{x.}) + k^2 d(T^{n-2}_{x.}, T^{n-1}_{x.}) + d(T^{n+1}_{x.}, x^*)\\
&\vdots\\
&\leq kd(x^*, T^{n-1}_{x.}) + k^n d(x., T_{x.}) + d(T^{n+1}_{x.}, x^*).
\end{aligned}$$

با توجه به این که P مخروط نرمال است،

$$0 \leq \|d(T_{x^*}, x^*)\| \leq M\left[k\|d(x^*, T^{n-1}_{x.})\| + k^n\|d(x., T_{x.})\| + \|d(T^{n+1}_{x.}, x^*)\|\right].$$

از طرفی وقتی $n \to \infty$، $k^n \longrightarrow 0$. همچنین $T^n_{x.} \longrightarrow x^*(n \to \infty)$. پس طبق لم (۳.۲.۲)،

$$\|d(T^{n+1}_{x.}, x^*)\| \longrightarrow 0 \qquad \text{و} \qquad \|d(x^*, T^{n-1}_{x.})\| \longrightarrow 0$$

بنابراین سمت راست رابطه بالا به صفر میل می کند، پس $\|d(T_{x^*}, x^*)\| = 0$. لذا $T_{x^*} = x^*$ و x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال اگر نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، آن گاه

$$d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) \leq kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

این یک تناقض است. لذا $y^* = x^*$. یعنی نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

در ادامه، قضیه قبل را بدون در نظر گرفتن نرمال بودن مخروط اثبات خواهیم کرد که نشان می دهد شرط نرمال بودن یک شرط اساسی در اثبات قضایای نقطه ثابت نمی باشد.

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنید (X,d) فضای متریک مستطیلی مخروطی تام باشد. اگر $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض با شرط*

$$d(T_x, T_y) \leq kd(x,y), \qquad x, y \in X,$$

باشد، به طوری که $k \in [۰,۱)$، آن‌گاه T نقطه ثابت یکتایی دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_x^n\}$ به نقطه ثابت نگاشت T همگراست.

برهان: فرض کنید $x. \in X$، در ابتدا با انتخاب

$$x_۱ = T_{x.}, x_۲ = T_{x_۱} = T_{x.}^۲, \ldots, x_{n+۱} = T_{x_n} = T_{x.}^{n+۱}$$

فرض کنید به ازای یک n، $x_n = x.$. بنابراین برای هر $m \geq ۱$، $x_{nm} = x.$. لذا داریم:

$$d(x., T_{x.}) = d(x_n, T_{x_n}) = d(T_{x.}^n, T_{x.}^{n+۱}) \leq kd(T_{x.}^{n-۱}, T_{x.}^n)$$

$$\leq k^۲ d(T_{x.}^{n-۲}, T_{x.}^{n-۱}) \leq \ldots \leq k^n d(x., T_{x.}).$$

لذا $d(x., T_{x.}) \leq k^n d(x., T_{x.})$، یعنی $[k^n - ۱]d(x., T_{x.}) \in P$. زمانی که $m \to \infty$، $-d(x., T_{x.}) \in P$. چون $d(x., T_{x.}) \in P$، طبق تعریف مخروط (۱.۲.۱)، $d(x., T_{x.}) = ۰$. یعنی $x.$ نقطه ثابت برای نگاشت T است.

حال با استفاده از خاصیت سوم در تعریف (۱.۲.۳)، برای هر $y \in Y$،

$$d(y, T_y^۴) \leq d(y, T_y) + d(T_y, T_y^۲) + d(T_y^۲, T_y^۴)$$

$$\leq d(y, T_y) + kd(y, T_y) + k^۲ d(y, T_y^۲).$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} d(y,T_y^{6}) &\leq d(y,T_y)+d(T_y,T_y^{2})+d(T_y^{2},T_y^{3})+d(T_y^{3},T_y^{4})+d(T_y^{4},T_y^{6}) \\ &\vdots \\ &\leq d(y,T_y)+kd(y,T_y)+k^{2}d(y,T_y)+k^{3}d(y,T_y)+k^{4}d(y,T_y^{2}) \\ &= \sum_{i=0}^{3} k^i d(y,T_y)+k^{4}d(y,T_y^{2}), \qquad \forall y\in X. \end{aligned}$$

طبق استقرا برای هر $j=2,3,4,\cdots$،

$$d(y,T_y^{2j}) \leq \sum_{i=0}^{2j-3} k^i d(y,T_y)+k^{2j-2}d(y,T_y^{2}). \tag{۹.۳}$$

فرض کنید برای هر $m,n\in\mathbb{N}$، $x_m\neq x_n$. از طرفی برای هر $y\in X$،

$$\begin{aligned} d(y,T_y^{5}) &\leq d(y,T_y)+d(T_y,T_y^{2})+d(T_y^{2},T_y^{3})+d(T_y^{3},T_y^{4})+d(T_y^{4},T_y^{5}) \\ &\vdots \\ &\leq d(y,T_y)+kd(y,T_y)+k^{2}d(y,T_y)+k^{3}d(y,T_y)+k^{4}d(y,T_y) \\ &= \sum_{i=0}^{4} k^i d(y,T_y). \end{aligned}$$

طبق استقرا برای هر $j=0,1,2,\cdots$،

$$d(y,T_y^{2j+1}) \leq \sum_{i=0}^{2j} k^i d(y,T_y). \tag{۱۰.۳}$$

لذا با توجه به نامساوی (۹.۳)، برای هر $j = ۱, ۲, ۳, \cdots$،

$$\begin{aligned} d(T^n_{x.}, T^{n+۲j}_{x.}) &\leq k^n d(x., T^{۲j}_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x., T_{x.}) + k^{۲j-۲} d(x., T^۲_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x., T_{x.}) + k^{۲j-۲} d(x., T^۲_{x.}) + \sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i d(x., T^۲_{x.}) + k^{۲k-۲} d(x., T_{x.}) \\ &\leq k^n \left[\sum_{i=۰}^{۲j-۳} k^i (d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.})) + k^{۲k-۲} (d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.})) \right] \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j-۲} k^i \left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.}) \right] \\ &= \frac{k^n (۱ - k^{۲j-۱})}{۱ - k} \left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.}) \right] \\ &\leq \frac{k^n}{۱ - k} \left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.}) \right]. \end{aligned}$$

به طور مشابه طبق نامساوی (۱۰.۳)، برای هر $j = ۰, ۱, ۲, \cdots$،

$$\begin{aligned} d(T^n_{x.}, T^{n+۲j+۱}_{x.}) &\leq k^n d(x., T^{۲j+۱}_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T_{x.}) + \sum_{i=۰}^{۲j} k^i d(x., T^۲_{x.}) \\ &\leq k^n \sum_{i=۰}^{۲j} k^i (d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.})) \\ &\leq \frac{k^n}{۱ - k} \left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.}) \right]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(T^n_{x.}, T^{n+m}_{x.}) \leq \frac{k^n}{۱ - k} \left[d(x., T_{x.}) + d(x., T^۲_{x.}) \right].$$

ثابت $c \gg ۰$ را در نظر می گیریم. $\delta > ۰$ را طوری انتخاب می کنیم که $c + N_\delta(۰) \subseteq P$ که در آن

$$N_\delta(\cdot) = \{y \in E, \| y \| < \delta\}.$$

عدد طبیعی $N_۱$ را طوری انتخاب می کنیم که برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k}d(x_۱, x_.) \in N_\delta(\cdot)$. لذا برای $m > N_۱$، $\frac{k^m}{۱-k}d(x_۱, x_.) \ll c$. بنابراین برای $n > m$،

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{k^m}{۱-k}d(x_۱, x_.) \ll c.$$

پس $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در (X, d) است. چون X فضای تام و در فضای تام هر دنباله کشی همگراست، پس وجود دارد $x^* \in X$ به طوری که $\{x_n\}$ به آن همگراست. با توجه به تعریف همگرایی (۱.۲.۲)، عدد طبیعی $N_۲$ را طوری انتخاب می کنیم که برای هر $n \geq N_۲$، $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{۳}$ و $d(x_n, x_{n+۱}) \ll \frac{c}{۳}$.

لذا برای هر $n > N_۲$،

$$\begin{aligned}
d(T_{x^*}, x^*) &\leq d(T_{x^*}, T^n_{x.}) + d(T^n_{x.}, T^{n+۱}_{x.}) + d(T^{n+۱}_{x.}, x^*) \\
&\leq kd(x^*, T^{n-۱}_{x.}) + d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x^*) \\
&\leq d(x^*, T^{n-۱}_{x.}) + d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x^*) \\
&\leq d(x^*, x_{n-۱}) + d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x^*) \\
&\ll \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} = c.
\end{aligned}$$

با توجه به این که برای $m \geq ۱$، $\frac{c}{m} \in intP$، لذا $d(T_{x^*}, x^*) \ll \frac{c}{m}$. بنابراین برای $m \geq ۱$ داریم $\frac{c}{m} - d(T_{x^*}, x^*) \in P$. چون $(m \to \infty)$ $\frac{c}{m} \longrightarrow \cdot$ و P بسته است (نقطه حدی آن در خود P است)، $-d(T_{x^*}, x^*) \in P$. از طرفی $d(T_{x^*}, x^*) \in P$. بنابراین طبق تعریف مخروط، $d(T_{x^*}, x^*) = \cdot$. پس $T_{x^*} = x^*$. لذا x^* نقطه ثابت نگاشت T است.

حال اگر نقطه ثابت T یکتا نباشد و y^* نقطه ثابت دیگری برای آن باشد، آن گاه

$$d(x^*, y^*) = d(T_{x^*}, T_{y^*}) \leq kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

که این یک تناقض است. لذا $x^* = y^*$. در نتیجه نقطه ثابت نگاشت T یکتاست. ■

در مثال زیر یک فضای متریک مستطیلی مخروطی را معرفی می کنیم که فضای متریک مخروطی نیست. همچنین وجود و یکتایی نقطه ثابت برای نگاشت T را نشان می دهیم.

مثال. *فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $E = \mathbb{R}^۲$ و $P = \{(x, y) \in E | x, y \geq ۰\}$ مخروط نرمال باشد. اگر نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ با ضابطه زیر تعریف شود:*

$$d(x, y) = ۰, \qquad x \in X$$

$$d(۱, ۲) = d(۲, ۱) = (۳, ۶),$$

$$d(۲, ۳) = d(۳, ۲) = d(۱, ۳) = d(۳, ۱) = (۱, ۲),$$

$$d(۱, ۴) = d(۴, ۱) = d(۲, ۴) = d(۴, ۲) = d(۳, ۴) = d(۴, ۳) = (۲, ۴)$$

واضح است شرایط (الف) و (ب) تعریف (۱.۲.۳) برقرار است، همچنین خاصیت سوم تعریف نیز برقرار می باشد، به طور مثال داریم؛

$$(۳, ۶) = d(۱, ۲) \leq d(۱, ۳) + d(۳, ۴) + d(۴, ۲) = (۱, ۲) + (۲, ۴) + (۲, ۴) = (۵, ۱۰).$$

از طرفی دنباله های کشی در این فضا یا دنباله های ثابت هستند یا دنباله هایی که از مرحله ای به بعد ثابت می شوند، لذا دنباله کشی در فضای X همگرا است. پس تمام شرایط یک فضای متریک مستطیلی مخروطی تام برای (X, d) برقرار است. اما یک فضای متریک مخروطی نمی باشد، زیرا

$$(۳, ۶) = d(۱, ۲) > d(۱, ۳) + d(۳, ۲) = (۱, ۲) + (۱, ۲) = (۲, ۴).$$

یعنی خاصیت مثلثی را ندارد. در حالی که رابطه ترتیبی در آن برقرار است، یعنی $(۳, ۶) - (۲, ۴) = (۱, ۲) \in P$. حال نگاشت $T : X \longrightarrow X$ با ضابطه

$$T(x) = \begin{cases} ۳ & x \neq ۴ \\ ۱ & x = ۴ \end{cases} \tag{۱۱.۳}$$

را در نظر می گیریم. بنابراین زمانی که $x \in X$ و $x \neq ۴$،

$$d(T(۱), T(۲)) = d(T(۱), T(۳)) = d(T(۲), T(۳)) = d(۳, ۳) = ۰.$$

از طرفی اگر x یا y، ۴ باشند، $d(x, y) = (۲, ۴)$. برای هر $x \in X$، $T(x) \in \{۱, ۳\}$. لذا برای هر $x, y \in X$ و با توجه به این که $d(۱, ۳) = d(۳, ۱) = (۱, ۲)$، $d(T_x, T_y) = (۱, ۲)$.

حال اگر $k = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته شود،

$$d(T_x, T_y) = (۱, ۲) \leq \frac{۱}{۲}(۲, ۴) = (۱, ۲) = kd(x, y), \qquad x, y \in X.$$

یعنی نگاشت T شرط انقباض را دارد، لذا همه شرایط قضیه (۴.۲.۳) برقرار و نگاشت T نقطه ثابت یکتایی در فضای (X, d) دارد. با توجه به تعریف نگاشت T، واضح است ۳ نقطه ثابت یکتایی برای نگاشت T می باشد.

مراجع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.

[2] Yongzhu Chen and Yingqian Wang. On the diameter of generalized Kneser graphs. *Discrete Math.*, 308(18):4276–4279, 2008.

[3] Tristan Denley. The odd girth of the generalised Kneser graph. *European J. Combin.*, 18(6):607–611, 1997.

[4] P. Erdős, Chao Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 12:313–320, 1961.

[5] P. Frankl. On the chromatic number of the general Kneser-graph. *J. Graph Theory*, 9(2):217–220, 1985.

[6] Martin Kneser. Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. *Math. Z.*, 61:429–434, 1955.

[7] L. Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. *J. Combin. Theory Ser. A*, 25(3):319–324, 1978.

[8] A. Schrijver. Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 26(3):454–461, 1978.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

از بالا کراندار	bounded from below
اصل انقباض باناخ	Banach contraction principle
باز	open
بازه(فاصله)	interval
بسته	closed
پیوستگی	continuity
تام(کامل)	complete
ثابت نرمال	normal constant
داخلی(درونی)	interior
دنباله	sequence
دنباله ای	sequentially
دنباله دار	iterative
دنباله کشی	cauchy sequence
رابطه ترتیبی	partial ordering
رو به پایین	lower
سرعت همگرایی	convergence rate
صعودی	increasing
عملگر	operator
غیر نرمال	nonnormal
فشرده	compact
فشرده دنباله ای	sequentially compact
فضای باناخ حقیقی	real Banach spaces
فضای متریک مخروطی	cone metric spaces
فضای متریک مستطیلی مخروطی	cone rectangular metric spaces
فضای نرمدار مخروطی	cone normed spaces
متر مخروطی	cone metric
مخروط	cone
مخروط نرمال	normal cone
مرتب	regular
ناتهی	nonempty
نامثبت	nonositive
نامساوی	inequality

نقطه ثابت .... fixed point
نقطه حدی .... limit point
نقطه داخلی .... interior point
نگاشت انقباض .... contractive mapping
نگاشت ناانبساطی .... nonexpensive mapping
همگرا .... convergent
یکتا .... unique

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Banach contraction principle .... اصل انقباض باناخ
bounded from below .... از بالا کراندار
cauchy sequence .... دنباله کشی
closed .... بسته
cone .... مخروط
continuity .... پیوستگی
convergence rate .... سرعت همگرایی
cone Banach spaces .... فضای باناخ مخروطی
cone metric .... متر مخروطی
cone metric spaces .... فضای متریک مخروطی
cone rectangular metric spaces .... فضای متریک مستطیلی مخروطی
contractive mapping .... نگاشت انقباض
convergent .... همگرا
compact .... فشرده
complete .... تام(کامل)
fixed point .... نقطه ثابت
increasing .... صعودی
inequality .... نامساوی
iterative .... دنباله دار
iterative method .... روش تکراری
interior .... داخلی(درونی)
interior point .... نقطه داخلی
interval .... بازه(فاصله)
limit point .... نقطه حدی
lower .... رو به پایین
nonempty .... ناتهی
nonexpensive mapping .... نگاشت ناانبساطی
nonormal .... غیر نرمال
nonositive .... نامثبت
normal cone .... مخروط نرمال
normal constant .... ثابت نرمال
open .... باز

عملگر .... operator
رابطه ترتیبی .... partial ordering
فضای باناخ حقیقی .... real Banach spaces
مرتب .... regular
دنباله .... sequence
دنباله ای .... sequentially
فشرده دنباله ای .... sequentially compact
یکتا .... unique

Abstract

In this thesis, ...

Keywords: *Homomorphism, circular chromatic number, free coloring, fractional chromatic number, chromatic sum and dynamic chromatic number.*

Shahid Beheshti University

Facualty of Methematical Sciences

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Cone metric spaces and fixed point theorem

By:

Narges Malek

Supervisor:
Dr. Mahdi Iranmanesh

Advisor:
Advisor

Date