



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

کیلی گراف‌ها روی گروه‌های دووجهی

استاد راهنما

دکتر حیدر جعفری

استاد مشاور

دکتر نادر جعفری راد

پژوهشگر

زهره‌البدین زاده پیمانی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: عابدین زاده پسیخانی		نام: زهرا
عنوان: کیلی گراف ها روی گروه های دووجهی		
استاد راهنما: دکتر حیدر جعفری		
استاد مشاور: دکتر نادر جعفری راد		
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی	گرایش: جبر
دانشگاه: صنعتی شاهرود	دانشکده علوم ریاضی	
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱	تعداد صفحات: ۷۸	
واژگان کلیدی: گروه دووجهی D_n ، گراف کیلی، گراف یک-منتظم		
چکیده		
در این پایان نامه گراف های کیلی روی گروه های دووجهی را مطالعه می کنیم. در ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریه ی گراف ها و نظریه ی گروه ها را بیان می کنیم. سپس به تعریف گراف کیلی می پردازیم و گراف های کیلی یک-منتظم نرمال ۴-ظرفیت G را روی یک گروه دووجهی، که پایدار ساز رأس آن در $Aut(G)$ دوری است، مشخص می کنیم. هم چنین دسته ای از این چنین گراف ها با ظرفیت ۶ را مورد بررسی قرار می دهیم. این پایان نامه بر اساس مقاله [۱۲] تهیه و تدوین گردیده است.		

خدای متعال را سپاس که نعمتش بی شمار، قدرتش بی انتها، رحمتش فراگیر و الطافش لایتناهی است؛
او که در لحظه لحظه زندگی یاور و پشتیبانم بوده و در سختی ها و ناملايمات تکیه گاهم...

تقدیم به مادرم

دریای بی کران فداکاری و عشق
که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.

مشکرو قدردانی

حال که به یاری پروردگار، این دوره از تحصیلات خود را به پایان رساندم، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی پدر و مادر عزیزم و برادر و خواهران نازنینم و همسر مهربانم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند و صبورانه ادامه این راه را برایم هموار نمودند تشکر کنم.

از زحمات فراوان استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری که راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله فراوان ایشان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این پروژه داشت، صمیمانه تشکر می‌کنم. از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که به عنوان مشاور در این پروژه نقش داشتند و نیز جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی نهایت قدردانی را دارم و سلامتی و موفقیت همیشگی این بزرگواران را از درگاه یزدان پاک خواستارم.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پیشگفتار

در این پایان‌نامه، گراف‌ها متناهی، ساده و بدون جهت می‌باشند. فرض کنید $V(G)$ ، $E(G)$ ، $A(G)$ و $Aut(G)$ به ترتیب مجموعه‌ی رئوس، مجموعه‌ی یال‌ها، مجموعه‌ی کمان‌ها و همه‌ی خودریختی‌های گراف G باشند. حال رأس $v \in V(G)$ را در نظر بگیرید. $N_i(v)$ مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی از گراف G است که به فاصله‌ی i از رأس v قرار دارند. گراف G رأس-انتقالی، یال-انتقالی و کمان-انتقالی نامیده می‌شود اگر $Aut(G)$ به ترتیب روی مجموعه‌ی رئوس، مجموعه‌ی یال‌ها و مجموعه‌ی کمان‌ها، به‌طور انتقالی عمل کند. گراف G یک-منتظم است اگر $Aut(G)$ روی مجموعه‌ی کمان‌ها، $A(G)$ ، به‌طور انتقالی و نیم-منتظم عمل کند و همچنین پایدارساز کمان در $Aut(G)$ همانی باشد. گروه Γ و مجموعه‌ی مولد S از Γ که $S = S^{-1}$ و $1 \notin S$ داده شده است، گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ روی گروه Γ ، دارای مجموعه رئوس Γ و مجموعه یال‌های $\{ \{g, h\} \mid g^{-1}h \in S \}$ می‌باشد. $Aut(\Gamma, S) = \{ \alpha \in Aut(\Gamma) \mid \alpha(S) = S \}$ زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ است که S را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد. واضح است که $Aut(\Gamma, S)$ زیرگروهی از پایدارساز عنصر همانی 1 در $Aut(Cay(\Gamma, S))$ می‌باشد. گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه انتقال چپ $L(\Gamma)$ از Γ زیرگروه نرمالی از $Aut(Cay(\Gamma, S))$ باشد. در این پایان‌نامه، منظور از یک پایدارساز رأس از گراف G ، یک پایدارساز رأس تحت عمل $Aut(G)$ می‌باشد. برای $n \geq 2$ ، گروه دووجهی D_n ، یک گروه از مرتبه‌ی $2n$ است که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle.$$

برخی از ریاضیدانان به خودریختی گروه‌هایی از گراف‌های مکعبی کمان-انتقالی پرداختند. به‌عنوان مثال می‌توان به [۳، ۶، ۷، ۱۵، ۱۸] مراجعه نمود. ماروزیک^۱ و مالنیک^۲ [۱۳، ۱۴] تعدادی از گراف‌های یک-

^۱Marusic

^۲Malnic

منتظم نامتناهی را ساختند. ژو^۳ و همکارانش [۲۳] گراف‌های کیلی یک-منتظم از ظرفیت بیشتر از ۴ را روی گروه‌های جابه‌جایی متناهی مشخص کردند و برخی دیگر از ریاضیدانان [۱۱] تعدادی از گراف‌های یک-منتظم نامتناهی که از ظرفیت زوج و از کمر ۴ می‌باشند را مشخص کردند.

در بخش ۱.۲ نشان می‌دهیم که برای هر گراف کیلی همبند $Cay(D_n, S)$ از ظرفیت $k \geq 3$ ، اگر $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی k باشد که روی مجموعه‌ی $S = N_1(1)$ به‌طور انتقالی عمل کند، آنگاه $Cay(D_n, S)$ از کمر ۴ یا ۶ می‌باشد. برای هریک از این دو حالت، در بخش ۲.۲ کیلی گراف‌های ۴-ظرفیت یک-منتظم نرمال را روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری مشخص می‌کنیم. در فصل ۳ گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری که از کمر ۴ می‌باشند را مشخص می‌کنیم. همچنین در این فصل به گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری که از کمر ۶ می‌باشند نیز به‌طور جزئی پرداخته می‌شود.

زهرالعبدین زاوه پیحانی

۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱	تعاریف و مفاهیم اولیه	۱
۲	۱.۱ مفاهیمی از گروه‌ها	۱.۱
۵	۲.۱ مفاهیمی از گراف‌ها	۲.۱
۹	۳.۱ گراف کیلی	۳.۱
۱۳	۲ گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۴-ظرفیت روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری	۲
۱۴	۱.۲ قضیه‌های مقدماتی	۱.۲
۲۰	۲.۲ گراف‌های کیلی ۴-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه D_n با پایدارساز رأس دوری	۲.۲
۴۶	۳ گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۶-ظرفیت روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری	۳
	۱.۳ گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۶-ظرفیت روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری	۱.۳
۴۷	دوری	۴۷
۶۹	مراجع	۶۹
۷۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۷۱
۷۴	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۷۴

فصل ۱

تعاريف و مفاهيم اوليه

۱.۱ مفاهیمی از گروه‌ها

تذکر ۱.۱.۱. تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مرجع [۲] باز می‌گردد.

تعریف ۲.۱.۱. اگر یک n ضلعی منتظم را در یک صفحه در نظر بگیرید، آنگاه توسط n دوران حول مرکز n ضلعی به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ رادیان، برای $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n ضلعی، می‌توان n ضلعی را بر خودش منطبق نمود. مجموعه‌ی تمام این دوران‌ها و انعکاس‌ها تشکیل یک گروه به نام گروه تقارن‌های یک n ضلعی منتظم می‌دهد که آن را n -امین گروه دووجهی می‌نامند و با D_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. زیرگروه H را یک زیرگروه مشخصه‌ی G نامند در صورتی که برای هر خودریختی G مانند α ، $\alpha(H) = H$.

تعریف ۴.۱.۱. گروه Γ و مجموعه‌ی ناتهی X را در نظر بگیرید. فرض کنید به‌ازای هر g از Γ و هر x از X ، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$(۱) \text{ به‌ازای هر } x \text{ از } X, x \bullet 1 = x, \text{ و}$$

$$(۲) \text{ به‌ازای هر } g_1 \text{ و } g_2 \text{ از } \Gamma \text{ و هر } x \text{ از } X, x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2.$$

در این صورت گوئیم Γ بر X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل Γ بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به‌جای $x \bullet g$ از xg استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in \Gamma$ و $x \in X$. گوئیم g عضو (یا نقطه‌ی) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی اعضای Γ از Γ را که هر عضو x را ثابت نگه می‌دارد، هسته‌ی عمل می‌نامند.

مثال ۶.۱.۱. گروه متقارن S_X بر مجموعه‌ی ناتهی X با فرض $f \in S_X$ و $x \in X$ به‌صورت $x \bullet f = xf$ عمل می‌کند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$ ، در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in \Gamma \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در Γ می‌نامند و با علامت $St_\Gamma(x)$ نشان می‌دهند.

توجه ۸.۱.۱. از این پس برای سهولت در نوشتن به جای نماد $St_\Gamma(x)$ ، از نماد $St(x)_\Gamma$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوئیم $x_1 \sim x_2$ در صورتی که به ازای عضوی از Γ مانند g ، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک Γ -مدار، می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم‌ارزی شامل x را مدار x در Γ می‌نامیم و آن را با علامت $Orb_\Gamma(x)$ (یا مختصراً با $Orb(x)$) نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق، $Orb_\Gamma(x) = \{xg \mid g \in \Gamma\}$. بر طبق خواص رده‌های هم‌ارزی، معلوم می‌شود که مدارها افزایی از X اند و در نتیجه هر دو مدار متمایز از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با X است. در صورتی که $Orb_\Gamma(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در Γ می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند. برای هر g از Γ ، تابع $\varphi_g : X \rightarrow X$ را با ضابطه‌ی $x\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : \Gamma \rightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $g \mapsto \varphi_g$ یک هم‌ریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

نتیجه ۱۱.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و K هسته‌ی عمل باشد. در این صورت $K \triangleleft \Gamma$ و Γ/K با زیرگروهی از S_X یکرخت است.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱۲.۱.۱. (مدار-پایدارساز) فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت، تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی هم‌دسته‌های راست $St(x)$ در Γ وجود دارد. به‌ویژه اگر $Orb(x)$ متناهی باشد آنگاه $|\Gamma : St(x)| = |Orb(x)|$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه Γ باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$N_{\Gamma}(X) = \{g \in \Gamma \mid gXg^{-1} = X\}$$

زیرگروهی از Γ است و به آن نرمال‌ساز X در Γ گویند.

توجه ۱۴.۱.۱. از این پس برای سهولت در نوشتن، به جای نماد $N_{\Gamma}(X)$ از نماد $N(X)_{\Gamma}$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۱.۱. فرض کنیم Γ یک گروه باشد و $H, K \leq \Gamma$. در این صورت

(۱) $H \triangleleft K$ اگر و تنها اگر $K \leq N(H)_{\Gamma}$. به عبارت دیگر، $N(H)_{\Gamma}$ بزرگترین زیرگروه Γ است که H

در آن نرمال است. به ویژه $H \triangleleft \Gamma$ اگر و تنها اگر $\Gamma = N(H)_{\Gamma}$.

(۲) اگر $H \leq K$ آنگاه $N(H)_K = N(H)_{\Gamma} \cap K$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. $\square$

لم ۱۶.۱.۱. نگاشت $\alpha : D_n \rightarrow D_n$ با ضابطه‌ی $a \mapsto a^l$ و $b \mapsto a^k b$ که در آن $\gcd(l, n) = 1$ و

$0 \leq k \leq n-1$ ، یک خودریختی گروهی از D_n می‌باشد.

برهان. فرض کنید برای $0 \leq m_1, m_2, i_1, i_2 \leq n-1$ ، $a^{m_1}b, a^{m_2}b, a^{i_1}, a^{i_2} \in D_n$ دلخواه باشند.

اثبات خوش‌تعریفی: اگر $a^{m_1}b = a^{m_2}b$ ، آنگاه $a^{m_1} = a^{m_2}$ ، بنابراین $a^{m_1+l+k}b = a^{m_2+l+k}b$ و در نتیجه

$$\alpha(a^{m_1}b) = \alpha(a^{m_2}b)$$

حال کفایت نشان دهیم که $\alpha(a^{-1})\alpha(a)\alpha(b) = \alpha(a^{-1})$ و $\alpha(b)^2 = 1$.

$$\alpha(a) = a^l \text{ و } \gcd(l, n) = 1 \Rightarrow \alpha(a)^n = 1$$

$$(a^k b)^2 = 1 \text{ و } \alpha(b) = a^k b \Rightarrow \alpha(b)^2 = 1$$

$$\alpha(b^{-1})\alpha(a)\alpha(b) = a^{-l} \text{ و } \alpha(a^{-1}) = a^{-l} \Rightarrow \alpha(b^{-1})\alpha(a)\alpha(b) = \alpha(a^{-1}).$$

همچنین از آنجایی که $\langle \alpha(a), \alpha(b) \rangle = D_n$ ، پوشا نیز می‌باشد. $\square$

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند. عمل را انتقالی گوئیم در صورتی که X تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر برای هر دو عضو X مانند x_1 و x_2 ، عضوی از Γ مانند g موجود باشد به طوری که $x_1 g = x_2$. گاهی از اوقات به جای این که بگوئیم عمل انتقالی است خواهیم گفت Γ بر مجموعه‌ی X به طور انتقالی عمل می‌کند.

تعریف ۱۸.۱.۱. گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X نیم-منتظم عمل می‌کند هرگاه پایدار ساز هر عضو X در Γ همانی باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید Γ یک گروه و $g \in \Gamma$ باشد. نگاشت‌های $L_g, R_g : \Gamma \rightarrow \Gamma$ که به صورت

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg$$

تعریف می‌شوند را به ترتیب انتقال چپ و انتقال راست توسط g می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌های چپ Γ را با $L(\Gamma)$ و مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌های راست Γ را با $R(\Gamma)$ نشان می‌دهند.

۲.۱ مفاهیمی از گراف‌ها

تذکر ۱.۲.۱. تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مرجع [۱] باز می‌گردد.

تعریف ۲.۲.۱. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ رأس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ یال‌ها مجزا از $V(G)$ ، و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G ، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$ ، آن‌گاه می‌گویند e را به v وصل می‌کند، رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. تعداد یال‌هایی از گراف G که رأس v بر آنها واقع است را درجه یا ظرفیت رأس v می‌نامند و با $d_G(v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱. به گرافی که درجه‌ی هر رأس آن k باشد گراف k -ظرفیت گویند.

تعریف ۵.۲.۱. هر زوج مرتب به صورت (v_0, v_1) از رأس‌های به هم متصل گراف را یک کمان می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. گراف G را ساده نامند، هرگاه هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. در گراف G دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که جمله‌های آن به‌طورمتناوب رأس‌ها و یال‌های G می‌باشند را گشت می‌نامند. قابل ذکر است که در گراف‌های ساده گشت W بوسیله‌ی دنباله‌ی $v_0 v_1 \dots v_k$ مشخص می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ در گشت $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ مجزا باشند گشت W را گذر می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر علاوه بر مجزا بودن یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ در گشت $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ ، رأس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ نیز مجزا باشند گشت W را مسیر نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گذر بسته‌ای که رأس‌های داخلی و مبدأ آن مجزا باشند را دور می‌نامند.

تعریف ۱۱.۲.۱. دوری به طول k را یک k -دور می‌نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. طول کوتاهترین دور از گراف G را کمر G می‌نامند.

تعریف ۱۳.۲.۱. تعداد یال‌هایی که در کوتاهترین گشت رئوس u و v از گراف G را به‌هم متصل می‌کند را فاصله‌ی بین u و v می‌نامند و با نماد $d(u, v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۴.۲.۱. مجموعه‌ی همه‌ی رئوس از گراف G را که به فاصله‌ی i از رأس v قرار دارند را با $N_i(v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. گراف H را زیرگراف G نامند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ ، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد و آن را با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد و V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد. زیرگرافی از G را که مجموعه رأس‌هایش V' و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایش در V' است، زیرگراف القایی G نامند و با $G[V']$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۷.۲.۱. دو رأس u و v در گراف G را همبند نامند هرگاه مسیری از u به v در G موجود باشد. همبندی یک رابطه‌ی هم‌ارزی در مجموعه رئوس V از گراف G است، بنابراین افزایی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_k$ وجود دارد به‌طوری که دو رأس u و v همبند می‌باشند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه‌ی V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ و $G[V_k]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند.

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف G را همبند گویند هرگاه G دقیقاً دارای یک مؤلفه باشد، درغیراین‌صورت G را ناهمبند نامند.

تعریف ۱۹.۲.۱. گراف ساده‌ای را که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز بوسیله‌ی یک یال به هم متصل باشند را گراف کامل می‌نامند و با K_n نشان می‌دهند، که n تعداد رئوس گراف می‌باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. گراف G را دوبخشی می‌نامند هرگاه بتوان مجموعه رئوس G را به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز کرد که هر یال G دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. گراف دوبخشی کامل، گراف دوبخشی ساده‌ای با افراز (X, Y) می‌باشد که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ ، آنگاه گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف‌های ساده G و H را یکرخت می‌نامند در صورتی که دوسویی

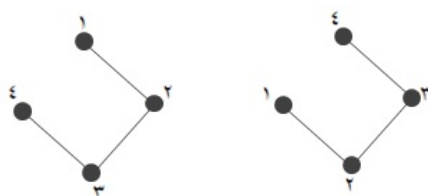
$$\theta: V(G) \rightarrow V(H) \text{ موجود باشد به‌طوری که } uv \in E(G) \text{ اگر و تنها اگر } \theta(u)\theta(v) \in E(H).$$

تعریف ۲۳.۲.۱. خودریختی گراف یک یکرختی از گراف به‌روی خودش است. خودریختی‌های گراف G تحت عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه خودریختی‌های گراف می‌گویند و با

$Aut(G)$ نشان می‌دهند. خودریختی در گراف‌های ساده را می‌توان به صورت جایگشتی روی مجموعه رئوس گراف که مجاورت را حفظ می‌کند نیز در نظر گرفت.

ملاحظه ۲۴.۲.۱. خودریختی γ از گراف G که کمان (u, v) را ثابت نگه می‌دارد را به صورت $\gamma \in Aut(G)_{(u,v)}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۵.۲.۱. گراف G را با مجموعه رئوس $\{1, 2, 3, 4\}$ و مجموعه یال‌های $\{12, 23, 34\}$ در نظر بگیرید. گراف G دارای دو خودریختی است، یکی جایگشت همانی و دیگری جایگشتی که رأس ۱ را به رأس ۴ و رأس ۲ را به رأس ۳ جابه‌جا کند، که شکل آن در زیر آورده شده است.



شکل ۱.۱: خودریختی‌های گراف G

تعریف ۲۶.۲.۱. گراف G را کمان-انتقالی گویند هرگاه $Aut(G)$ روی مجموعه کمان‌های G به طور انتقالی عمل کند.

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف G را رأس-انتقالی گویند هرگاه $Aut(G)$ روی مجموعه رئوس G به طور انتقالی عمل کند.

تعریف ۲۸.۲.۱. گراف G را یک-منتظم می‌نامند اگر $Aut(G)$ روی مجموعه کمان‌های G به طور انتقالی و نیم-منتظم عمل کند.

۳.۱ گراف کیلی

تذکر ۱.۳.۱. تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مراجع [۴] و [۱۲] باز می‌گردد.

فرض کنید Γ یک گروه متناهی با عنصر همانی 1 است و فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از Γ باشد با این

ویژگی که $1 \notin S$ و برای هر $s \in S$ ، $s^{-1} \in S$.

تعریف ۲.۳.۱. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ گراف ساده‌ای است که مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$V(G) = \Gamma \quad \text{و} \quad E(G) = \{ \{g, h\} \mid g^{-1}h \in S \}$$

لم ۳.۳.۱. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ یک گراف همبند است اگر و تنها اگر S یک مجموعه‌ی مولد برای G باشد.

برهان. ($\Rightarrow$) کافیت نشان دهیم از رأس 1 به هر رأس دلخواه a از G مسیری در G وجود دارد. از آنجایی که مجموعه‌ی S مولدی برای G است لذا هر رأس G را می‌توان به‌صورت حاصل ضربی از عناصر S نوشت. لذا $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ وجود دارند که $a = s_1 s_2 \dots s_k$. از آنجایی که یال‌های $\{1, s_1\}$ ، $\{s_1, s_1 s_2\}$ ، $\dots$ و $\{s_1 s_2 \dots s_{k-1}, s_1 s_2 \dots s_k\}$ در $E(G)$ موجود می‌باشند، لذا بین رأس 1 و رأس دلخواه a از G مسیری موجود است، بنابراین گراف کیلی G همبند است.

($\Leftarrow$) فرض کنید $g \in \Gamma$ دلخواه و ثابت باشد. چون G همبند است، مسیری بین g و 1 وجود دارد. فرض کنید

$$1 - s_1 - s_1 s_2 - \dots - s_1 \dots s_k = g$$

مسیری بین g و 1 باشد که در آن $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$. بنابراین S یک مجموعه‌ی مولد برای Γ است.

□

تذکر ۴.۳.۱. با توجه به لم قبل در سرتاسر این پایان نامه S را یک مجموعه‌ی مولد برای Γ در نظر می‌گیریم.

قضیه ۵.۳.۱. (۱) گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ رأس-انتقالی است.

(۲) فرض کنید π یک خودریختی گروهی از Γ باشد به طوری که $\pi(S) = S$ ، آنگاه π ، به عنوان جایگشتی از

رئوس $Cay(\Gamma, S)$ ، یک خودریختی گرافی است که رأس ۱ را ثابت نگه می‌دارد.

برهان. (۱) برای هر $g \in \Gamma$ ، جایگشت $\bar{g}$ از $V(G) = \Gamma$ را با ضابطه‌ی $\bar{g}(h) = gh$ ($h \in \Gamma$) تعریف

می‌کنیم. این جایگشت یک خودریختی از G است، زیرا

$$\{h, k\} \in E(G) \Rightarrow h^{-1}k \in S$$

$$\Rightarrow (gh)^{-1}(gk) = h^{-1}k \in S$$

$$\Rightarrow \{\bar{g}(h), \bar{g}(k)\} \in E(G)$$

مجموعه‌ی همه‌ی $\bar{g}$ ها گروه $\bar{\Gamma}$ (یکریخت با Γ) را می‌سازد که زیرگروهی از گروه همه‌ی خودریختی‌های

$Cay(\Gamma, S)$ است. حال از آنجایی که برای هر $h_1, h_2 \in \Gamma$ ، با قرار دادن $g = h_2 h_1^{-1}$ داریم

$$\bar{g}(h_1) = h_2, \text{ بنابراین } \bar{\Gamma} \text{ روی مجموعه رئوس } G \text{ به طور انتقالی عمل می‌کند.}$$

(۲) از آنجایی که π یک خودریختی گروهی است، π رأس ۱ را ثابت نگه می‌دارد به علاوه π یک خودریختی

گرافی است زیرا

$$\{h, k\} \in E(G) \Leftrightarrow h^{-1}k \in S$$

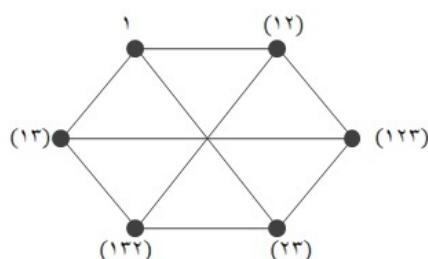
$$\Leftrightarrow \pi(h^{-1}k) \in S$$

$$\Leftrightarrow \pi(h^{-1})\pi(k) \in S$$

$$\Leftrightarrow \{\pi(h), \pi(k)\} \in E(G).$$

□

مثال ۶.۳.۱. در گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ ، Γ را گروه متقارن S_3 و S را مجموعه $\{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$ در نظر بگیرید. در این صورت گراف کیلی $Cay(S_3, S)$ یکرخت با $K_{3,3}$ می باشد. که شکل آن در صفحه بعد آورده شده است.

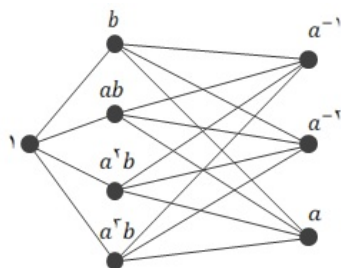


شکل ۲.۱: گراف کیلی $G = Cay(S_3, \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\})$

تعریف ۷.۳.۱. برای $n \geq 2$ ، گروه دووجهی D_n گروهی از مرتبه $2n$ است که به صورت زیر مشخص می شود.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$$

مثال ۸.۳.۱. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ برای $\Gamma = D_4$ و $S = \{b, ab, a^2b, a^3b\}$ به صورت زیر رسم می شود.



شکل ۳.۱: گراف کیلی $G = Cay(D_4, \{b, ab, a^2b, a^3b\})$

تعریف ۹.۳.۱. $\{\alpha \in \text{Aut}(\Gamma) \mid \alpha(S) = S\}$ زیرگروهی از $\text{Aut}(\Gamma)$ است که S را مجموعه وار ثابت نگه می‌دارد این مجموعه را $\text{Aut}(\Gamma, S)$ می‌نامند. به علاوه $\text{Aut}(\Gamma, S)$ زیرگروهی از پایدارساز عنصر همانی در $\text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$ می‌باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. گراف کیلی $\text{Cay}(\Gamma, S)$ را نرمال گویند هرگاه انتقال چپ $L(\Gamma)$ از Γ زیرگروه نرمالی از $\text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$ باشد.

فصل ۲

گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۴-ظرفیت
روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس
دوری

۱.۲ قضیه‌های مقدماتی

قضیه ۱.۱.۲. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$N(L(\Gamma))_{Aut(G)} = L(\Gamma)Aut(\Gamma, S) \quad (۱)$$

$$L(\Gamma) \triangleleft Aut(G) \text{ اگر و تنها اگر } Aut(G) = L(\Gamma)Aut(\Gamma, S) \quad (۲)$$

برهان. (۱) در ابتدا ثابت می‌کنیم $N(L(\Gamma))_{S_\Gamma} = L(\Gamma)Aut(\Gamma)$ با استفاده از تعریف (۱۳.۱.۱)، داریم $L(\Gamma) \subseteq N(L(\Gamma))_{S_\Gamma}$ و $Aut(\Gamma) \subseteq N(L(\Gamma))_{S_\Gamma}$ ، بنابراین $L(\Gamma)Aut(\Gamma) \subseteq N(L(\Gamma))_{S_\Gamma}$. حال کفایت نشان دهیم $N(L(\Gamma))_{S_\Gamma} \subseteq L(\Gamma)Aut(\Gamma)$. برای هر $a, d \in \Gamma$ و $\varphi, \psi \in N(L(\Gamma))_{S_\Gamma}$ ، قرار می‌دهیم $\psi = L_{d^{-1}}\varphi$ و تعریف می‌کنیم $\varphi(1) = d$ ، لذا $\psi(1) = 1$. از طرفی $\psi L_a \psi^{-1} \in L(\Gamma)$ ، لذا برای $L_b \in L(\Gamma)$ ، $b \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که $\psi L_a \psi^{-1} = L_b$. حال برای $g \in \Gamma$ داریم:

$$\begin{aligned} \psi L_a \psi^{-1}(g) &= L_b(g) \Rightarrow \psi(a\psi^{-1}(g)) = bg \\ &\Rightarrow a\psi^{-1}(g) = \psi^{-1}(bg). \end{aligned}$$

حال اگر $g = 1$ ، آنگاه $a\psi^{-1}(1) = \psi^{-1}(b)$ و در نتیجه $a = \psi^{-1}(b)$ و $\psi^{-1}(bg) = \psi^{-1}(b)\psi^{-1}(g)$. بنابراین $\psi \in Aut(\Gamma)$ ، لذا $\varphi \in L(\Gamma)Aut(\Gamma)$ و در نتیجه $N(L(\Gamma))_{S_\Gamma} \subseteq L(\Gamma)Aut(\Gamma)$. حال بنابر قضیه (۱۵.۱.۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} N(L(\Gamma))_{Aut(G)} &= N(L(\Gamma))_{S_\Gamma} \cap Aut(G) \\ &= L(\Gamma)Aut(\Gamma) \cap Aut(G) \end{aligned}$$

حال کفایت نشان دهیم $Aut(G) = L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)}$. می‌دانیم $L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)} \subseteq Aut(G)$ ، حال کفایت نشان دهیم $Aut(G) \subseteq L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)}$. خودریختی دلخواه $\varphi \in Aut(G)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $L_a \in L_\Gamma$ ای وجود دارد به طوری که $L_a\varphi(1) = 1$ ، لذا $L_a\varphi \in St(1)_{Aut(G)}$ و در نتیجه $\varphi \in L_aSt(1)_{Aut(G)}$.

بنابراین داریم:

$$N(L(\Gamma))_{Aut(G)} = L(\Gamma)Aut(\Gamma) \cap L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)} = L(\Gamma)(Aut(\Gamma) \cap St(1)_{Aut(G)}).$$

حال کفایت ثابت کنیم $Aut(\Gamma) \cap St(1)_{Aut(G)} = Aut(\Gamma, S)$. طبق قضیه (۵.۳.۱)،

$$Aut(\Gamma, S) \subseteq St(1)_{Aut(G)}. \text{ از آنجایی که } Aut(\Gamma, S) \subseteq Aut(\Gamma), \text{ لذا}$$

$$Aut(\Gamma, S) \subseteq Aut(\Gamma) \cap St(1)_{Aut(G)}.$$

حال خودریختی دلخواه $\gamma \in Aut(\Gamma) \cap St(1)_{Aut(G)}$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که $\gamma \in St(1)_{Aut(G)}$ ،

لذا γ مجموعه‌ی $S = N_1(1)$ را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد و از آنجایی که $\gamma \in Aut(G)$ ، در نتیجه

$$\gamma \in Aut(\Gamma, S), \text{ بنابراین } Aut(\Gamma) \cap St(1)_{Aut(G)} \subseteq Aut(\Gamma, S) \text{ و حکم برقرار است.}$$

□

(۲) با استفاده از قسمت (۱) و قضیه (۱۵.۱.۱) حکم برقرار است.

قضیه ۲.۱.۲. گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ نرمال است اگر و تنها اگر $Aut(\Gamma, S)$ پایدار ساز عنصر همانی در

$$Aut(Cay(\Gamma, S)) \text{ باشد.}$$

برهان. ($\Rightarrow$) اگر $Aut(\Gamma, S)$ پایدار ساز عنصر همانی در $Aut(Cay(\Gamma, S))$ باشد، آنگاه از آنجایی که

$$Aut(G) = L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)}, \text{ در نتیجه } Aut(G) = L(\Gamma)Aut(\Gamma, S). \text{ حال با استفاده از قسمت (۲) از}$$

قضیه (۱.۱.۲) حکم برقرار است.

($\Leftarrow$) اگر گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ نرمال باشد، آنگاه از قسمت (۲) از قضیه (۱.۱.۲) داریم

$$Aut(G) = L(\Gamma)Aut(\Gamma, S). \text{ از طرفی می‌دانیم } Aut(G) = L(\Gamma)St(1)_{Aut(G)}, \text{ لذا کفایت نشان دهیم}$$

$$St(1)_{Aut(G)} \subseteq Aut(\Gamma, S). \text{ خودریختی دلخواه } \varphi \text{ از } St(1)_{Aut(G)} \text{ را در نظر بگیرید. در این صورت}$$

$$\varphi \in L(\Gamma)Aut(\Gamma, S), \text{ لذا وجود دارد } L_a \in L(\Gamma) \text{ و } \psi \in Aut(\Gamma, S) \text{ به طوری که } \varphi = L_a\psi. \text{ بنابراین}$$

می‌توان نوشت:

$$\varphi(1) = L_a\psi(1) \Rightarrow \varphi(1) = a \Rightarrow a = 1, \quad \varphi = \psi$$

بنابراین $Aut(\Gamma, S) = St(1)_{Aut(G)}$ و در نتیجه $St(1)_{Aut(G)} \subseteq Aut(\Gamma, S)$.

□

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید $k \geq 3$ یک عدد صحیح و $Cay(D_n, S)$ یک گراف کیلی k -ظرفیت روی یک گروه دووجهی باشد. در این صورت $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه دوری از مرتبه k است که روی مجموعه $S = N_1(1)$ به طور انتقالی عمل می‌کند اگر و تنها اگر $Cay(D_n, S)$ با یکی از گراف‌های کیلی $(Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^{k-1} l^j b} \mid 0 \leq t \leq k-1\}), \text{ برای } (n, l) \text{ ای که } \sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}, \text{ یکرخت باشد.}$ به ویژه این گراف‌ها کمان-انتقالی هستند.

برهان. ($\Rightarrow$) فرض کنید $Cay(D_n, S)$ یک گراف کیلی همبند k -ظرفیت روی گروه دووجهی D_n باشد که $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه دوری از مرتبه k است که به طور انتقالی روی مجموعه $S = N_1(1)$ عمل می‌کند. فرض کنید $\alpha \in Aut(D_n, S)$ یک مولد از زیرگروه دوری گفته شده باشد. همچنین فرض کنید S برای برخی از اعداد صحیح t شامل a^t باشد. حال برای هر $\eta \in Aut(D_n)$ ، $\eta(\langle a \rangle)$ زیرگروه دوری از D_n می‌باشد که $|\eta(\langle a \rangle)| = |\langle a \rangle|$ ، حال از آنجایی که $\langle a \rangle$ تنها زیرگروه دوری D_n از مرتبه n است، بنابراین باید $\eta(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$ ، لذا $\langle a \rangle$ زیرگروه مشخصه D_n می‌باشد و همچنین $\langle a^t \rangle$ زیرگروه مشخصه D_n است. با توجه به زیرگروه مشخصه بودن $\langle a \rangle$ در D_n و تعریف $Aut(D_n, S)$ و انتقالی بودن عمل $Aut(D_n, S)$ روی $N_1(1)$ می‌توان نتیجه گرفت که $S \subseteq \langle a \rangle$ ، که این با مولد بودن S در تناقض است. بنابراین در حد یکرختی فرض می‌کنیم که $S = \{b, a^{i_1}b, a^{i_2}b, \dots, a^{i_{k-1}}b\}$ و

$$\alpha(b) = a^{i_1}b, \alpha(a^{i_1}b) = a^{i_2}b, \dots, \alpha(a^{i_{k-2}}b) = a^{i_{k-1}}b, \alpha(a^{i_{k-1}}b) = b.$$

از آنجایی که $\alpha \in Aut(D_n, S)$ و $\langle a \rangle$ زیرگروه مشخصه D_n می‌باشد، لذا $\alpha : \langle a \rangle \rightarrow \langle a \rangle$ یک

خودریختی گروهی است و تساوی زیر را می‌توان نوشت:

$$\alpha(a^{-i_j}) = \alpha(ba^{i_j}b) = a^{i_1}ba^{i_j+1}b = a^{i_1-i_j+1} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

که $i_k = 0$ تعریف می‌شود. حال از آنجایی که $\langle a^{i_{k-1}} \rangle$ زیرگروه مشخصه‌ی D_n است، لذا

$$\alpha(\langle a^{i_{k-1}} \rangle) = \langle a^{i_{k-1}} \rangle. \text{ از طرفی طبق رابطه‌ی قبل } \alpha(a^{-i_{k-1}}) = a^{i_1}, \text{ بنابراین } \langle a^{i_{k-1}} \rangle = \langle a^{i_1} \rangle \text{ و}$$

$$a^{-i_{k-2}} = \alpha^{-1}(a^{i_1-i_{k-1}}) = \alpha^{-1}(a^{i_1})\alpha^{-1}(a^{-i_{k-1}}) \in \langle \alpha^{-1}(a^{i_1}) \rangle = \langle a^{i_{k-1}} \rangle = \langle a^{i_1} \rangle,$$

$$a^{-i_{k-3}} = \alpha^{-1}(a^{i_1-i_{k-2}}) = \alpha^{-1}(a^{i_1})\alpha^{-1}(a^{-i_{k-2}}) \in \langle \alpha^{-1}(a^{i_1}) \rangle = \langle a^{i_1} \rangle,$$

$\vdots$

$$a^{-i_2} = \alpha^{-1}(a^{i_1-i_2}) = \alpha^{-1}(a^{i_1})\alpha^{-1}(a^{-i_2}) \in \langle \alpha^{-1}(a^{i_1}) \rangle = \langle a^{i_1} \rangle.$$

لذا برای $1 \leq s \leq k-1$ ، $a^{i_s} \in \langle a^{i_1} \rangle$ از آنجایی که

$$\langle b, a^{i_1}b, a^{i_2}b, \dots, a^{i_{k-1}}b \rangle \subseteq \langle a^{i_1} \rangle \cup \langle a^{i_1} \rangle b$$

بنابراین $D_n = \langle a^{i_1} \rangle \cup \langle a^{i_1} \rangle b = (i_1, n)$. حال در حد یکرختی می‌توان فرض کرد $i_1 = 1$ است،

بنابراین $S = \{b, ab, a^{i_2}b, \dots, a^{i_{k-1}}b\}$ و

$$\alpha(b) = ab, \alpha(ab) = a^{i_2}b, \dots, \alpha(a^{i_{k-2}}b) = a^{i_{k-1}}b, \alpha(a^{i_{k-1}}b) = b.$$

بنابراین معادلات زیر را داریم:

$$\alpha(a) = \alpha(ab) = \alpha(ab)\alpha(b) = a^{i_2}bab = a^{i_2-1}, \quad (1.2)$$

$$a^{i_2}b = \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = a^{i_2-1}ab = a^{i_2}b,$$

$$a^{i_3}b = \alpha(a^{i_2}b) = a^{(i_2-1)i_2}ab = a^{(i_2-1)i_2+1}b,$$

$\vdots$

$$a^{i_{k-1}}b = \alpha(a^{i_{k-2}}b) = a^{(i_{k-2}-1)i_{k-2}+1}b,$$

$$b = \alpha(a^{i_{k-1}}b) = a^{(i_{k-1}-1)i_{k-1}+1}b.$$

حال با مقایسه‌ی توان‌های a از دو طرف معادله‌ی (۱.۲) و با قرار دادن $l = i_2 - 1$ ، برای

$$t = 3, 4, \dots, k-1 \text{ داریم } \sum_{j=0}^{t-1} l^j \pmod{n} = i_t, \text{ و درنتیجه } \sum_{j=0}^{k-1} l^j \pmod{n} = 0.$$

($\Rightarrow$) گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^{k-1} l^j b} \mid 0 \leq t \leq k-1\})$ را که در آن $\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$ ، تشکیل می‌دهیم. حال نگاشت $\alpha : D_n \rightarrow D_n$ را با ضابطه‌ی $a \mapsto a^l$ و $b \mapsto ab$ تعریف می‌کنیم. از آنجایی که $\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$ ، لذا $\gcd(l, n) = 1$ ، بنابراین طبق لم (۱۶.۱.۱)، α یک خودریختی گروهی است. همچنین α یک خودریختی گرافی نیز می‌باشد زیرا برای هر $0 \leq m_1, m_2 \leq n-1$ داریم:

$$\begin{aligned} \{a^{m_1} b, a^{m_2}\} \in E(G) &\Leftrightarrow a^{m_1} b a^{m_2} \in S \Leftrightarrow a^{l(m_1 - m_2) + 1} b \in S \\ &\Leftrightarrow \alpha(a^{m_1} b) \alpha(a^{m_2}) \in S \\ &\Leftrightarrow \{\alpha(a^{m_1} b), \alpha(a^{m_2})\} \in E(G). \end{aligned}$$

حال از آنجایی که $\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$ ، لذا $\alpha^k(b) = b$. همچنین از $\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$ و $\sum_{j=1}^k l^j = 0 \pmod{n}$ نتیجه می‌گیریم که $l^k = 1 \pmod{n}$ ، بنابراین $\alpha^k(a) = a$. در این صورت $\langle \alpha \rangle$ زیرگروهی دوری از مرتبه‌ی k است که به‌طور انتقالی روی مجموعه‌ی $\{a^{\sum_{j=0}^{t-1} l^j b} \mid 0 \leq t \leq k-1\}$ عمل می‌کند.

□

توجه ۴.۱.۲. گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^{t-1} l^j b} \mid 0 \leq t \leq k-1\})$ که در آن

$\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$ ، یک گراف دوبخشی با مجموعه بخش‌های $\langle a \rangle$ و $\langle a \rangle b$ می‌باشد، زیرا برای $1 \leq i_p, i_q \leq n$ ، رئوس $a^{i_p} b$ و $a^{i_q} b$ از G ، نمی‌توانند مجاور یکدیگر باشند (چون $a^{i_p} b a^{i_q} b \notin S$). به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که برای $1 \leq i_s, i_t \leq n$ ، هیچ دو رأس a^{i_s} و a^{i_t} از گراف کیلی G نمی‌توانند مجاور هم باشند.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید $k \geq 3$ و $G = \text{Cay}(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^{t-1} l^j b} \mid 0 \leq t \leq k-1\})$ یک گراف کیلی k -ظرفیت باشد که در آن $\sum_{j=0}^{k-1} l^j = 0 \pmod{n}$. در این صورت داریم:

(۱) کمر G ۴ یا ۶ است.

(۲) اگر k زوج و $l^{\frac{k}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ آنگاه G یک-منتظم نیست.

برهان. (۱) از ملاحظه (۴.۱.۲) می‌دانیم گراف کیلی G یک گراف دوبخشی با مجموعه بخش‌های $\langle a \rangle$ و $\langle a \rangle b$ می‌باشد، بنابراین دوره‌هایی به‌طول فرد در گراف G وجود ندارد. همچنین از آنجایی که گراف G ساده است، لذا دوری به‌طول ۲ نیز در G وجود ندارد. از طرفی مسیر $(1, b, a^{-1}, a^l b, a^l, a^{l+1} b)$ یک ۶-دور در گراف G می‌باشد. بنابراین کمر G عددی زوج و کوچکتر یا مساوی ۶ می‌باشد.

(۲) از معادلات $\sum_{j=0}^{k-1} l^j \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^{\frac{k}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت

$$2 \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} l^j \equiv 0 \pmod{n}, \text{ بنابراین داریم:}$$

$$\{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq k-1\} = \{a^{\sum_{i=0}^r l^i} b, a^{\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} l^i + \sum_{j=0}^r l^j} b \mid 0 \leq r \leq \frac{k}{2} - 1\}.$$

رأس‌های a^{-1} و $a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j}$ در $N_1(b)$ را در نظر می‌گیریم، از آنجایی که

$$S = \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq k-1\}, \text{ لذا داریم:}$$

$$N_1(a^{-1}) = \{a^{-1} a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq k-1\}$$

$$= \{a^{\sum_{j=0}^t l^j - 1} b \mid 0 \leq t \leq k-1\}$$

$$N_1(a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j}) = \{a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j} a^{\sum_{i=0}^r l^i} b, a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j} a^{\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} l^i + \sum_{j=0}^r l^j} b \mid 0 \leq r \leq \frac{k}{2} - 1\}$$

$$= \{a^{\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} l^i + \sum_{j=0}^r l^j - 1} b, a^{2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} l^i + \sum_{j=0}^r l^j - 1} b\}.$$

حال از آنجایی که $2 \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} l^j \equiv 0 \pmod{n}$ ، لذا $N_1(a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j}) = N_1(a^{-1})$. حال α را خودریختی

از گراف کیلی G در نظر می‌گیریم که رئوس a^{-1} و $a^{\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} l^j}$ از G را جابه‌جا کند و بقیه رئوس G را ثابت

نگه دارد، بنابراین α یک خودریختی نابديهی از G می‌باشد که کمان $(1, b)$ را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین G

□

یک-منتظم نیست.

۲.۲ گراف‌های کیلی ۴-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه D_n با پایدارساز رأس دوری

در این بخش گراف‌های کیلی ۴-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری که از کمر ۴ یا ۶ می‌باشند را مشخص می‌کنیم، که از مرجع [۱۲] می‌باشد.

لم ۱.۲.۲. عمل طبیعی گروه متقارن S_k را روی مجموعه‌ی $X = \{1, 2, \dots, k\}$ در نظر بگیرید. تنها زیرگروه دوری از S_k که روی مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل می‌کند، زیرگروه دوری با مولد دوری به طول k است.

برهان. فرض کنیم این چنین نباشد. یعنی S_k دارای زیرگروه دوری چون H است که روی مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل می‌کند و به‌صورت حاصل ضرب حداقل دو دور مجزای α و β می‌باشد. حال اگر دو رأس a و b را به‌ترتیب از دورهای α و β انتخاب کنیم در این صورت H نمی‌تواند روی مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل کند که این با فرض در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

لم ۲.۲.۲. فرض کنید $k \geq 3$ یک عدد صحیح و G یک گراف کیلی k -ظرفیت روی گروه دووجهی D_n باشد، اگر G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری باشد آنگاه G یکریخت با گراف کیلی

$$Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq k-1\})$$

می‌باشد که در آن $\sum_{j=0}^t l^j = 0 \pmod{n}$.

برهان. طبق فرض می‌دانیم گراف کیلی G یک-منتظم است، لذا $Aut(G)$ روی مجموعه کمان‌های G به‌طور انتقالی عمل می‌کند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $St(1)_{Aut(G)}$ نیز روی مجموعه‌ی $X = N_1(1)$ به‌طور انتقالی عمل می‌کند. از نتیجه (۱.۱.۱)، داریم $S_X \hookrightarrow \frac{St(1)_{Aut(G)}}{K}$. از آنجایی که طبق فرض پایدارساز هر کمان در $Aut(G)$ همانی است، لذا K خودریختی همانی است. حال با استفاده از لم (۱.۲.۲) داریم

$$|St(1)_{Aut(G)}| = k.$$

از طرفی می‌دانیم گراف G نرمال است، لذا طبق قضیه (۲.۱.۲)،

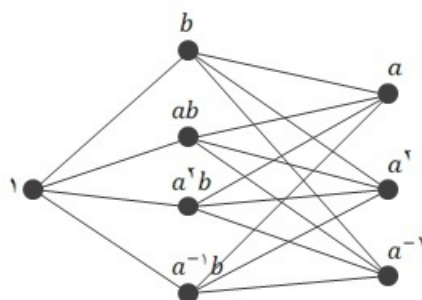
$$Aut(D_n, S) = St(1)_{Aut(G)}.$$

حال با استفاده از قضیه (۳.۱.۲) حکم نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۳.۲.۲. اگر $n < 10$ ، آنگاه برای (n, l) ای که $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، هیچ گراف کیلی ۴-ظرفیت $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ که یک-منتظم باشد وجود ندارد.

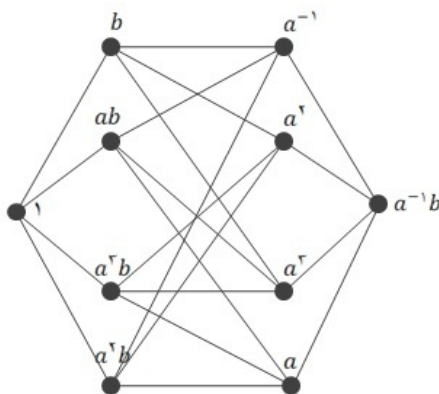
برهان. در ابتدا (n, l) هایی را که در دو شرط $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ و $2 \leq n \leq 9$ صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. با بررسی تمامی حالات ممکن، زوج‌های $(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 5), (7, 6), (8, 3), (8, 7), (9, 8)$ و $3 \leq n \leq 9$ در دو شرط $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ صدق می‌کنند. از طرفی به ازای (n, l) های $(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8)$ مجموعه $S = \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}$ در گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ به مجموعه $\{b, ab\}$ تبدیل می‌گردد، که این با ۴-ظرفیت بودن گراف کیلی G در تناقض است. حال یک-منتظم بودن گراف کیلی G به ازای (n, l) های $(1, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 8)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای اینکه ثابت کنیم گراف کیلی G یک-منتظم نمی‌باشد، کافی است یک خودریختی نابديهی از $\text{Aut}(G)$ پیدا کنیم که یک کمان G را ثابت نگه می‌دارد.

اگر $(n, l) = (4, 1)$ ، آنگاه $G = \text{Cay}(D_4, \{b, ab, a^2b, a^{-1}b\})$. با رسم شکل گراف کیلی موردنظر به آسانی می‌توان دید که همسایگی‌های رئوس a و a^2 یکسان می‌باشند، لذا کافیت خودریختی γ از $\text{Aut}(G)_{(1,b)}$ را جایگشتی درنظر بگیریم که رئوس a و a^2 را باهم جابه‌جا کند و بقیه رئوس G را ثابت نگه‌دارد. لذا G یک-منتظم نیست.



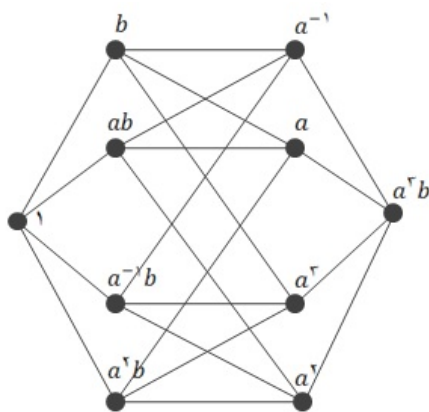
شکل ۱.۲: گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_4, \{b, ab, a^2b, a^{-1}b\})$

اگر $(n, l) = (5, 2)$ ، آنگاه $G = Cay(D_5, \{b, ab, a^3b, a^2b\})$. با رسم شکل گراف کیلی موردنظر می‌توان دید که اگر خودریختی γ از $Aut(G)_{(1,b)}$ را به صورت $\gamma = (a^{-1} \ a^2)(ab \ a^3b)$ در نظر بگیریم، γ خودریختی نابدیهی از $Aut(G)$ است که کمان $(1, b)$ را ثابت نگه می‌دارد، و لذا G یک-منتظم نیست.



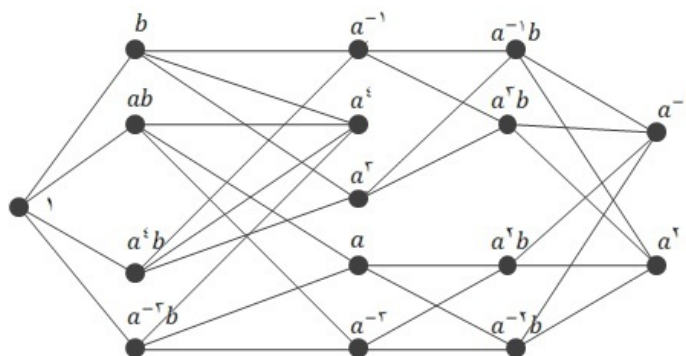
شکل ۲.۲: گراف کیلی $G = Cay(D_5, \{b, ab, a^3b, a^2b\})$

اگر $(n, l) = (5, 3)$ ، آنگاه $G = Cay(D_5, \{b, ab, a^{-1}b, a^2b\})$. حال با رسم شکل گراف کیلی موردنظر می‌توان دید که اگر خودریختی γ از $Aut(G)_{(1,b)}$ را به صورت $\gamma = (a \ a^3)(ab \ a^{-1}b)$ در نظر بگیریم، آنگاه γ یک خودریختی نابدیهی از $Aut(G)$ است که کمان $(1, b)$ را ثابت نگه می‌دارد، لذا G یک-منتظم نیست.



شکل ۳.۲: گراف کیلی $G = Cay(D_5, \{b, ab, a^{-1}b, a^2b\})$

اگر $(n, l) = (8, 3)$ ، آنگاه $G = Cay(D_8, \{b, ab, a^4b, a^{-3}b\})$. حال با رسم شکل گراف کیلی مورد نظر می‌توان دید که اگر خودریختی γ از $Aut(G)_{(1,b)}$ را جایگشتی در نظر بگیریم که رئوس a^2 و a^{-2} را باهم جابه‌جا می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که G یک-منتظم نیست.



شکل ۴.۲: گراف کیلی $G = Cay(D_8, \{b, ab, a^4b, a^{-3}b\})$

بنابراین به ازای (n, l) ای که $n < 10$ و $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، هیچ گراف کیلی ۴-ظرفیت $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ که یک-منتظم باشد، وجود ندارد.

□

حال گراف‌های کیلی را که از کمر ۴ یا ۶ می‌باشند را در دو زیربخش زیر به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گراف‌های کیلی از کمر ۴ روی گروه‌های دووجهی

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $l^k + 1 = 0 \pmod{n}$ و

$$G = Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b, a^{\sum_{i=s+1}^{k-1} l^i} b \mid 0 \leq t \leq k-1, 0 \leq s \leq k-1\})$$

یک گراف کیلی k -ظرفیت باشد. همچنین فرض کنید که

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} l^i + \sum_{i=0}^t l^i - \sum_{i=0}^s l^i &\neq 0 \pmod{n} \quad s.t. \quad 0 \leq s \leq k-2, 0 \leq t \leq k-1 \quad (2.2) \\ 2 \sum_{i=0}^{k-1} l^i - \sum_{i=0}^s l^i - \sum_{i=0}^t l^i &\neq 0 \pmod{n} \quad s.t. \quad 0 \leq s \leq k-2, 0 \leq t \leq k-2 \\ \sum_{i=0}^s l^i + \sum_{i=0}^t l^i &\neq 0 \pmod{n} \quad s.t. \quad 0 \leq s \leq k-1, 0 \leq t \leq k-1 \end{aligned}$$

آنگاه گراف کیلی G یک-منتظم و از کمر ۴ می‌باشد.

□

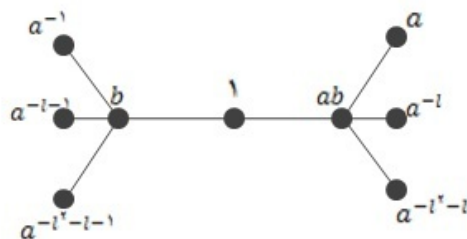
برهان. برای اثبات به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

لم ۵.۲.۲. فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت باشد که در آن $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ و $n \geq 10$. در این صورت G از کمر ۴ است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ یا $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$ برقرار باشد.

برهان. فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت باشد که در آن $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ و $n \geq 10$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$. بنابراین $S = \{b, ab, a^{l+1}b, a^l b\}$ و مسیر $(1, b, a^{-l}, ab)$ یک ۴-دور برای گراف G می‌باشد. به‌طور مشابه، اگر $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$ آنگاه مسیر $(1, b, a^{-l-1}, ab)$ یک ۴-دور برای گراف G است. لذا در هر دو صورت گراف کیلی G ، از کمر ۴ می‌باشد.

($\Leftarrow$) اگر گراف کیلی G از کمر ۴ باشد، از آنجایی که G ، طبق قضیه (۳.۱.۲)، کمان-انتقالی است، لذا ۴-دوری شامل کمان $(b, 1)$ در G موجود است. بنابراین ۴-دوری شامل یکی از ۲-مسیرهای $(b, 1, ab)$ ، $(b, 1, a^{l+1}b)$ و $(b, 1, a^{l^2+l+1}b)$ موجود است. به‌اختصار فرض می‌کنیم ۴-دوری شامل مسیر $(b, 1, ab)$ موجود باشد (دو حالت دیگر به طریق مشابه قابل بررسی است). بنابراین حداقل یکی از سه رأس در سمت راست شکل (۵.۲) باید مشابه یکی از سه رأس در سمت چپ شکل باشد.



شکل ۵.۲: ۴-مسیر شامل مسیر $(b, 1, ab)$

حال به بررسی حالات ممکن می‌پردازیم:

(۱) رأس a بر یکی از رؤوس a^{-1} یا a^{-l-1} یا a^{-l^2-l-1} منطبق شود.

• اگر رأس a بر رأس a^{-1} منطبق شود، آنگاه $a = a^{-1}$ ، لذا رأس a از مرتبه‌ی ۲ است، که این با از مرتبه‌ی n بودن a در تناقض است، لذا رأس a نمی‌تواند بر رأس a^{-1} منطبق شود.

• اگر رأس a بر رأس a^{-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a = a^{-l-1} \Rightarrow 1 = -l - 1 \pmod{n} \Rightarrow l = -2 \pmod{n}$$

از طرفی طبق فرض $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، لذا با قرار دادن $l = -2 \pmod{n}$ داریم $-5 = 0 \pmod{n}$ ، که این با فرض $n \geq 10$ در تناقض است، لذا رأس a نمی‌تواند بر رأس a^{-l-1} منطبق شود.

• اگر رأس a بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a = a^{-l^2-l-1} \Rightarrow l^2 + l + 1 = -1 \pmod{n}$$

حال با استفاده از فرض $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ داریم:

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow l(l^2 + l + 1) + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow l = 1 \pmod{n}$$

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n} \text{ و } l = 1 \pmod{n} \Rightarrow 4 = 0 \pmod{n}$$

که $4 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 10$ در تناقض است، لذا رأس a نمی‌تواند بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود.

(۲) رأس a^{-l} بر یکی از رئوس a^{-1} یا a^{-l-1} یا a^{-l^2-l-1} منطبق شود.

- اگر رأس a^{-l} بر رأس a^{-1} منطبق شود، آنگاه $l = 1 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که $4 = 0 \pmod{n}$ ، که این با فرض $n \geq 10$ در تناقض است، لذا رأس a^{-l} نمی‌تواند بر رأس a^{-1} منطبق شود.
- اگر رأس a^{-l} بر رأس a^{-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a^{-l} = a^{-l-1} \Rightarrow -l = -l-1 \pmod{n} \Rightarrow -1 = 0 \pmod{n}$$

که $-1 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 10$ در تناقض است، لذا رأس a^{-l} نمی‌تواند بر رأس a^{-l-1} منطبق شود.

- اگر رأس a^{-l} بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a^{-l} = a^{-l^2-l-1} \Rightarrow -l = -l^2-l-1 \pmod{n} \Rightarrow l^2+1 = 0 \pmod{n}$$

پس برای اینکه رأس a^{-l} بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود، باید شرط $l^2+1 = 0 \pmod{n}$ برقرار باشد.

(۳) رأس a^{-l^2-l} بر یکی از رئوس a^{-1} یا a^{-l-1} یا a^{-l^2-l-1} منطبق شود.

- اگر رأس a^{-l^2-l} بر رأس a^{-1} منطبق شود، آنگاه $-l^2-l = -1 \pmod{n}$. از طرفی طبق فرض $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، لذا داریم:

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow -l(-l^2 - l - 1) + 1 = 0 \pmod{n}$$

$$-l^2 - l = -1 \pmod{n} \text{ و } -l(-l^2 - l - 1) + 1 = 0 \pmod{n} \rightarrow 2l + 1 = 0 \pmod{n}$$

$$2l + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l = -1 \pmod{n} \text{ و } l + 1 = -l \pmod{n}$$

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n} \text{ و } l + 1 = -l \pmod{n} \Rightarrow l^3 = -l \pmod{n}$$

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l + 1 = 0 \pmod{n} \text{ و } l^3 = -l \pmod{n}$$

$$\Rightarrow l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$$

بنابراین برای اینکه رأس a^{-l^2-l} بر رأس a^{-1} منطبق شود، باید شرط $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ برقرار باشد.

• اگر رأس a^{-l^2-l} بر رأس a^{-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a^{-l^2-l} = a^{-l-1} \Rightarrow -l^2 - l = -l - 1 \pmod{n} \Rightarrow l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$$

لذا برای اینکه رأس a^{-l^2-l} بر رأس a^{-l-1} منطبق شود، باید شرط $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$ برقرار باشد.

• اگر رأس a^{-l^2-l} بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود، آنگاه داریم:

$$a^{-l^2-l} = a^{-l^2-l-1} \Rightarrow -l^2 - l = -l^2 - l - 1 \pmod{n} \Rightarrow -1 = 0 \pmod{n}$$

که $-1 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 1$ در تناقض است، لذا رأس a^{-l^2-l} نمی‌تواند بر رأس a^{-l^2-l-1} منطبق شود.

بنابراین با توجه به حالات بالا نتیجه می‌گیریم که

$$l^2 + 1 = 0 \pmod{n} \text{ یا } l^2 - 1 = 0 \pmod{n}.$$

□

لم ۶.۲.۲. فرض کنید $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$ و $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت باشد. در این صورت G یک-منتظم نیست.

برهان. با استفاده از قضیه (۵.۱.۲)، حکم به آسانی نتیجه می‌شود. $\square$

توجه ۷.۲.۲. در لم (۵.۲.۲)، اگر $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه شرط (۲.۲) از قضیه (۴.۲.۲)، با در نظر گرفتن $k = 2$ و $n \geq 10$ ، شرطی زاید می‌باشد. برای اثبات این گفته باید نشان دهیم از $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ داریم $l + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$ ، $2l + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$ و $2l + 2 \not\equiv 0 \pmod{n}$. فرض کنیم این چنین نباشد.

• اگر $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ و $l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه $l = -1 \pmod{n}$. در این صورت مجموعه‌ی $S = \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}$ در گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ به مجموعه‌ی $\{b, ab\}$ تبدیل می‌گردد، که این با ۴-ظرفیت بودن کیلی گراف G در تناقض است.

• اگر $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ و $2l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه داریم:

$$2l + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l^2 + l = 0 \pmod{n}$$

$$l^2 + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l^2 + 2 = 0 \pmod{n}$$

$$2l^2 + 2 = 0 \pmod{n} \text{ و } 2l^2 + l = 0 \pmod{n} \Rightarrow l = 2 \pmod{n}$$

$$l^2 + 1 = 0 \pmod{n} \text{ و } l = 2 \pmod{n} \Rightarrow 5 = 0 \pmod{n}$$

که $5 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 10$ در تناقض است.

• اگر $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ و $2l + 2 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه داریم:

$$2l + 2 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l^2 + 2l = 0 \pmod{n}$$

$$l^2 + 1 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l^2 + 2 = 0 \pmod{n}$$

$$2l^2 + 2 = 0 \pmod{n} \text{ و } 2l^2 + 2l = 0 \pmod{n} \Rightarrow 2l - 2 = 0 \pmod{n}$$

$$2l + 2 = 0 \pmod{n} \text{ و } 2l - 2 = 0 \pmod{n} \Rightarrow 4 = 0 \pmod{n}$$

که $4 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 10$ در تناقض است.

بنابراین با وجود رابطه‌ی $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، شرط (۲.۲) از قضیه (۴.۲.۲)، با در نظر گرفتن

$$k = 2 \text{ و } n \geq 10, \text{ شرطی زاید است.}$$

لم ۸.۲.۲. فرض کنید $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت باشد که در

آن $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ و $n \geq 10$. اگر $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ آنگاه G یک-منتظم است.

برهان. با استفاده از قضیه (۴.۲.۲) و ملاحظه (۷.۲.۲)، حکم به آسانی نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت و از کمر ۴ روی گروه دووجهی D_n باشد،

در این صورت G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است اگر و تنها اگر G با گراف کیلی

$$\text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}) \text{ یکریمت باشد، که در آن } n \geq 10 \text{ و } l^2 + 1 = 0 \pmod{n}.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت از کمر ۴ روی گروه دووجهی D_n باشد.

($\Leftarrow$) فرض کنید G گراف کیلی یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است. بنابر لم (۲.۲.۲)، G با

$$\text{گراف کیلی } \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}) \text{ یکریمت می‌باشد، که در آن}$$

$$l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}. \text{ طبق لم (۳.۲.۲)، اگر } n < 10, \text{ هیچ گراف کیلی ۴-ظرفیت}$$

$$\text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}) \text{ که یک-منتظم باشد وجود ندارد، بنابراین } n \geq 10. \text{ طبق لم (۵.۲.۲)،}$$

اگر گراف کیلی G از کمر ۴ باشد، آنگاه یکی از دو معادله‌ی $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ یا $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$

برقرار است. بنابر قضیه (۶.۲.۲)، اگر $l^2 - 1 = 0 \pmod{n}$ آنگاه G یک-منتظم نیست، لذا $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$.

$$\circ \pmod{n}$$

($\Rightarrow$) فرض کنید $n \geq 10$ و $l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ با گراف کیلی $\text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$

یکریخت باشد، لذا بنابر لم (۸.۲.۲)، G یک گراف یک-منتظم است. از یک-منتظمی گراف G می‌توان نتیجه گرفت که $Aut(G)$ روی مجموعه‌ی کمان‌ها به‌طور انتقالی عمل می‌کند، لذا $St(1)_{Aut(G)}$ نیز روی مجموعه‌ی $X = N_1(1)$ به‌طور انتقالی عمل می‌کند. با استفاده از قضیه (مدار-پایدارسان) داریم: $|St(1)_{Aut(G)}| = |orb(x_1)|$ حال از آنجایی که پایدارساز هر کمان همانی است، لذا $St(x_1)_{St(1)} = St(x_1)_{St(1)}$ همانی است، بنابراین $|orb(x_1)| = |St(1)_{Aut(G)}|$. همچنین $|orb(x_1)| = 4$ ، لذا

$|St(1)_{Aut(G)}| = 4$. از طرفی می‌دانیم $Aut(D_n, S) \leq St(1)_{Aut(G)}$ و طبق قضیه (۳.۱.۲)، $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی ۴ است که روی مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل می‌کند، بنابراین $Aut(D_n, S) = St(1)_{Aut(G)}$ ، لذا گراف کیلی G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری می‌باشد. $\square$

گراف‌های کیلی از کمر ۶ روی گروه‌های دووجهی

فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت و از کمر ۶ باشد که در آن $n \geq 10$ و $l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ روابط از هیچ‌کدام از روابط $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ با استفاده از قضیه (۵.۱.۲) و لم (۵.۲.۲) می‌دانیم ۶-کمره است اگر و تنها اگر هیچ‌کدام از روابط $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ برقرار نباشد. برای این که تعیین کنیم گراف G یک-منتظم هست یا نه، فرض کنید $\gamma \in Aut(G)_{(1,b)}$ یک خودریختی دلخواه باشد. از آنجایی که γ رأس ۱ را ثابت نگه می‌دارد، لذا γ یک یکریختی از زیرگراف القایی

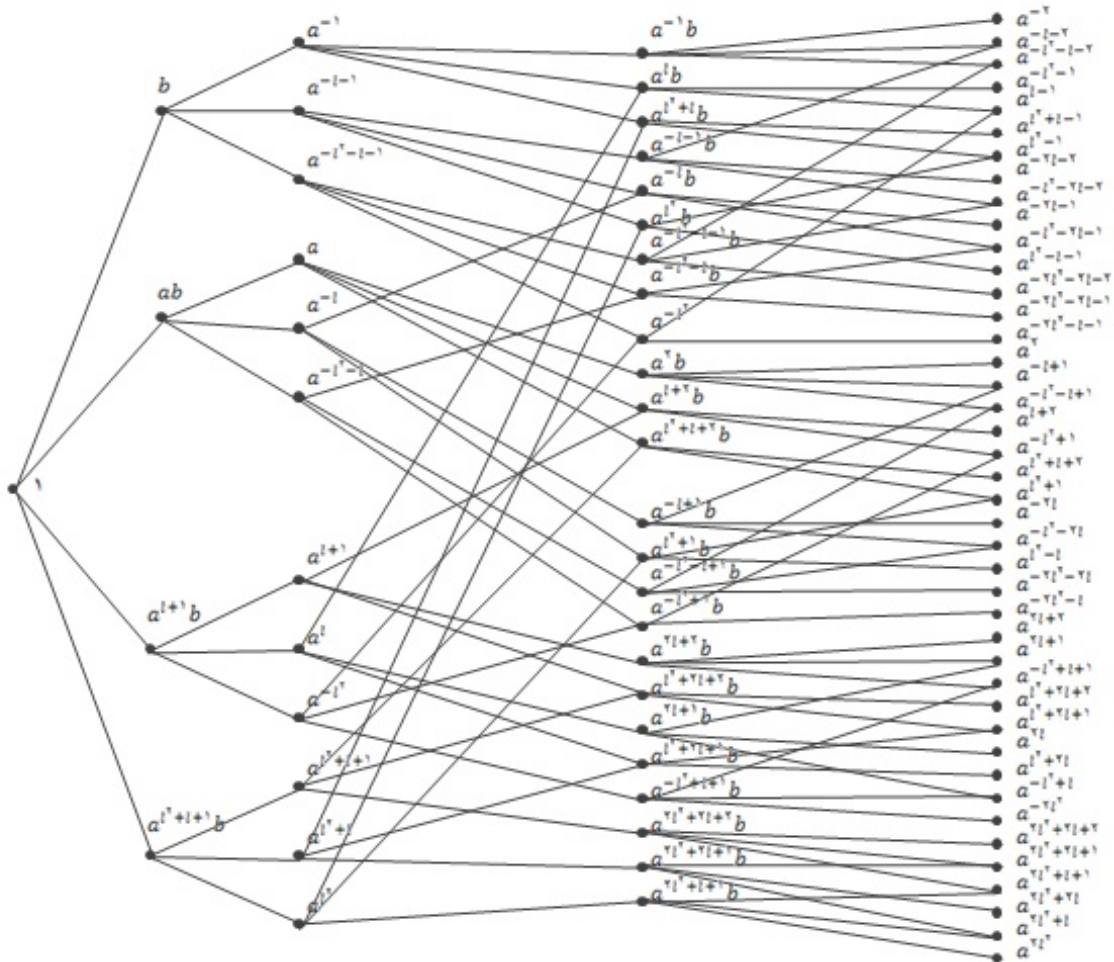
$$T := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1) \cup N_4(1)]$$

از G به‌توی خودش می‌نگارد، لذا تحدیدی از γ روی T یک خودریختی از گراف T می‌باشد. ادعا می‌کنیم با بررسی ساختار زیرگراف القایی T می‌توان خودریختی بدیهی بودن یا نبودن γ را تعیین کرد. در حالت کلی تعداد رئوس زیرگراف القایی T مشخص نیست و به انتخاب (n, l) ای که در شرط

$$n = l^3 + l^2 + l + 1 \text{ و } l \geq 5 \text{ بستگی دارد. حال اگر } l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

آنگاه تعداد رئوس زیرگراف القایی T از کیلی گراف $G' = Cay(D_{l^3+l^2+l+1}, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ مشخص است و بزرگتر یا مساوی از هر زیرگراف القایی ممکن T می‌باشد. که در شکل (۶.۲) رسم شده

و در این بخش با T نشان داده می‌شود. با مراجعه به شکل (۶.۲) می‌توان دید که ۲-مسیر $(1, b, a^{-1})$ در گراف T از طریق مسیرهای $(1, b, a^{-1}, a^{-1}b)$ ، $(1, b, a^{-1}, a^l b)$ و $(1, b, a^{-1}, a^{l^2+l}b)$ می‌تواند به یک ۳-مسیر گسترش یابد. که فقط یکی از این مسیرها، که مسیر $(1, b, a^{-1}, a^{-1}b)$ می‌باشد، نمی‌تواند به هیچ ۶-دوری گسترش یابد. حال با بررسی همه‌ی حالات ممکن در شکل (۶.۲) از گراف T می‌توان گفت که هر ۲-مسیری در T که رأس ابتدای آن رأس ۱ باشد، دارای این خاصیت می‌باشد. حال بحث را می‌توان به دو حالت تقسیم کرد: زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T باشد یا زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T نباشد.



شکل ۶.۲: زیرگراف القایی T از $Cay(D_{l^2+l+1}, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$

حالت ۱ در گراف کیلی G ، زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T_0 نباشد.

در ابتدا باید (n, l) هایی را که به ازای آن‌ها زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T_0 نمی‌باشد را تعیین کرد. در این حالت $|V(T)| \neq |V(T_0)|$ ، لذا حداقل دو عضو مشابه $V(T_0)$ در مجموعه‌ی $V(T)$ بر هم منطبق می‌شوند. حال برای $3 \leq i \leq 4$ ، همه‌ی رئوسی را که در همسایگی $N_i(1)$ از T_0 قرار دارند را بررسی می‌کنیم. برای مثال فرض کنید دو رأس $a^{2l+1}b$ و $a^{-l^2-l-1}b$ در $N_3(1)$ از T_0 ، مشابه هم در مجموعه‌ی رئوس $V(T)$ باشند. بنابراین چون دو رأس $a^{2l+1}b$ و $a^{-l^2-l-1}b$ در زیرگراف القایی T بر هم منطبق می‌شوند، لذا $(l^2 + 3l + 2) \equiv 0 \pmod{n}$. حال بدون اینکه خللی به کلیت مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد $2 \leq l \leq n - 2$. از آنجایی که $l^2 + 3l + 2 = (l^2 + 3l + 2)(l - 2) + 5l + 5$ ، لذا داریم $(5l + 5) \equiv 0 \pmod{n}$. از آنجایی که $2 \leq l \leq n - 2$ ، لذا $5 \leq 5l + 5 \leq 5n - 5$. حال بحث را به چهار مورد تقسیم می‌کنیم:

مورد (۱): $5l + 5 = n$. در این صورت $5|n$ ، لذا برای عدد صحیح t ، $n = 5t$. حال از $5l + 5 = n$ و $n = 5t$ می‌توان نتیجه گرفت که $l = t - 1$ ، لذا $l^2 + 3l + 2 = t^2 + t$. حال با استفاده از $(l^2 + 3l + 2) \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 + 3l + 2 = t^2 + t$ داریم $n|t^2 + t$. از طرفی می‌دانیم $n = 5t$ ، لذا $5|t + 1$ ، در نتیجه به ازای عدد صحیح s ، $t + 1 = 5s$. بنابراین برای عدد صحیح $s \geq 0$ داریم $(n, l) = (25s + 5, 5s + 3)$.

مورد (۲): $5l + 5 = 2n$. در این صورت $5|n$ ، لذا برای عدد صحیح t ، $n = 5t$. حال از $5l + 5 = 2n$ و $n = 5t$ می‌توان نتیجه گرفت که $l = 2t - 1$ ، بنابراین $l^2 + 3l + 2 = 4t^2 + 2t$. حال با استفاده از $(l^2 + 3l + 2) \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 + 3l + 2 = 4t^2 + 2t$ داریم $5|4t + 2$ ، لذا $5|2t + 1$. بنابراین برای عدد صحیح r ، $2t + 1 = 5r$ ، از آنجایی که $2|5r - 1$ ، بنابراین به ازای عدد صحیح s ، $r = 2s + 1$. بنابراین به ازای عدد صحیح $s \geq 0$ داریم $(n, l) = (25s + 10, 10s + 3)$.

مورد (۳): $5l + 5 = 3n$. در این صورت $5|n$ ، لذا به ازای عدد صحیح t ، $n = 5t$. حال از $5l + 5 = 3n$ و $n = 5t$ می‌توان نتیجه گرفت که $l = 3t - 1$. بنابراین $l^2 + 3l + 2 = 9t^2 + 3t$. حال با استفاده از $(l^2 + 3l + 2) \equiv 0 \pmod{n}$ و $l^2 + 3l + 2 = 9t^2 + 3t$ می‌توان نتیجه گرفت که $5|9t + 3$ ، لذا $5|3t + 1$.

بنابراین به‌ازای عدد صحیح r ، $5r = 3t + 1$. از آنجایی که $1 \leq 5r \leq 3t + 1$ ، لذا به‌ازای عدد صحیح s ، $r = 3s + 2$.

بنابراین به‌ازای عدد صحیح $s \geq 0$ ، داریم $(n, l) = (25s + 15, 15s + 8)$.

مورد (۴): $5l + 5 = 4n$. در این صورت $5|n$ ، بنابراین برای عدد صحیح t ، $n = 5t$. حال از $5l + 5 = 4n$

و $n = 5t$ می‌توان نتیجه گرفت که $l = 4t - 1$ ، لذا $16t^2 + 4t = l^2 + 3l + 2$. حال با استفاده از

$l^2 + 3l + 2 = 16t^2 + 4t \pmod{n}$ و $l^2 + 3l + 2 = 0 \pmod{n}$ داریم $4|16t + 4$ ، لذا $5|4t + 1$. بنابراین به‌ازای

عدد صحیح r ، $4t + 1 = 5r$ ، لذا $4|5r - 1$. بنابراین به‌ازای عدد صحیح s ، $r = 4s + 5$. لذا به‌ازای هر

عدد صحیح $s \geq 0$ داریم $(n, l) = (25s + 30, 20s + 23)$.

همه‌ی تطابق‌های ممکن دیگر نیز با استفاده از روش مشابه آنچه که در مثال قبل آورده شده است، قابل

بررسی است که به جزئیات آن نمی‌پردازیم. قابل ذکر است که (n, l) ‌هایی که در لم‌های (۱۰.۲.۲)، (۱۱.۲.۲)

و (۱۲.۲.۲) آورده شده‌اند، همه‌ی (n, l) ‌هایی می‌باشند که به‌ازای آن‌ها زیرگراف القایی T یکرخت با گراف

T_0 نمی‌باشد. حال به‌ازای این (n, l) ‌ها به بررسی یک-منتظم بودن G می‌پردازیم.

لم ۱۰.۲.۲. هیچ کدام از گراف‌های زیر یک-منتظم نیستند:

(۱) برای $(n, l) = (15, 2)$ ، گراف کیلی $G_1 = \text{Cay}(D_{15}, \{b, ab, a^3b, a^4b\})$

(۲) برای $(n, l) = (15, 8)$ ، گراف کیلی $G_2 = \text{Cay}(D_{15}, \{b, ab, a^{-6}b, a^{-2}b\})$

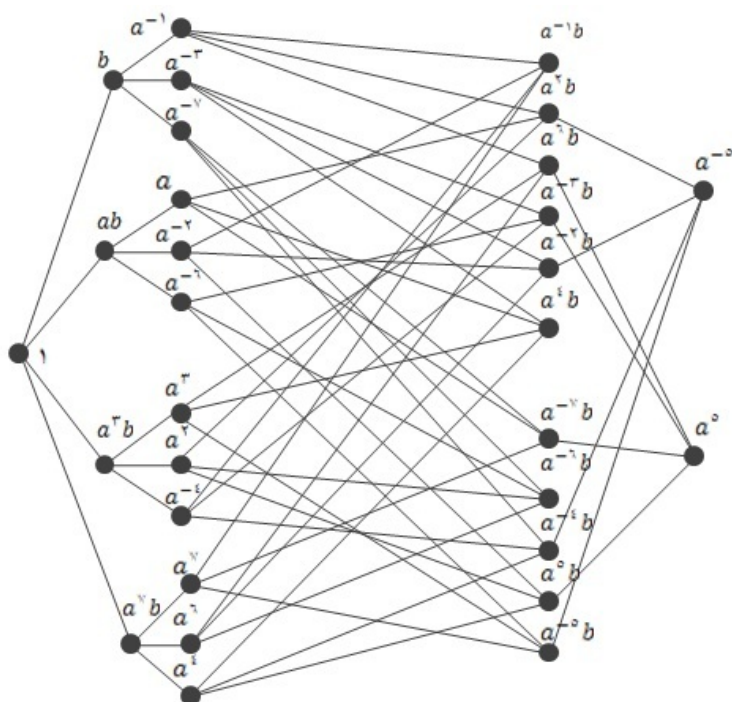
برهان. (۱) خودریختی گرافی γ از G_1 (شکل (۷.۲)) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\gamma = (ab \ a^4b)(a^{-3} \ a^{-7})(a \ a^6)(a^{-2} \ a^7)(a^{-6} \ a^4)(a^3 \ a^2)(a^2b \ a^6b)$$

$$(a^{-3}b \ a^{-4}b)(a^{-2}b \ a^{-7}b)(a^4b \ a^{-6}b)(a^5b \ a^{-5}b)(a^{-5} \ a^5)$$

γ یک خودریختی گرافی نابديهی از G_1 است که کمان $(1, b)$ را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین G_1 یک-منتظم

نیست.



(۲) نگاشت $\alpha : D_{15} \rightarrow D_{15}$ را با ضابطه‌ی $a \mapsto a^{-2}$ و $b \mapsto b$ تعریف می‌کنیم. طبق لم (۱۶.۱.۱)، α یک خودریختی گروهی است. همچنین α با حفظ مجاورت بین رئوس، یک خودریختی گرافی نیز می‌باشد. حال از آنجایی که $\alpha(\{b, ab, a^3b, a^5b\}) = \{b, ab, a^{-6}b, a^{-2}b\}$ ، لذا G_2 نیز یک-منتظم نمی‌باشد. $\square$

لم ۱۱.۲.۲. گراف‌های زیر یک-منتظم می‌باشند:

(۱) برای $(n, l) = (2^0, 17)$ ، گراف کیلی $G_1 = Cay(D_{2^0}, \{b, ab, a^{-2}b, a^2b\})$

(۲) برای $(n, l) = (20, 13)$ ، گراف کیلی $G_7 = Cay(D_{20}, \{b, ab, a^{-6}b, a^3b\})$

برهان. (۱) فرض کنید $\gamma \in \text{Aut}(G)_{(\gamma, b)}$ یک خودریختی گراف Γ دلخواه باشد. چون γ رأس b را ثابت نگه می‌دارد لذا همسایگی‌های b را نیز مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد، لذا γ یک خودریختی گرافی از زیرگراف القایی $\langle N_0(b) \cup N_1(b) \cup N_2(b) \cup N_3(b) \rangle$ به توی خودش نیز می‌باشد، که در شکل (۸.۲) نشان داده شده

است. از آنجایی که رأس $a^{-۴}$ ، رأس یکتایی در $N_۲(b) \cap N_۲(۱)$ است که مجاور سه رأس در $N_۲(b) \cap N_۲(۱)$ می‌باشد، لذا γ رأس $a^{-۴}$ را ثابت نگه می‌دارد. حال مجموعه‌ی

$$N_۱(a^{-۴}) \cap N_۲(b) \cap N_۲(۱) = \{a^{-۳}b, a^۳b, a^{-۶}b\}$$

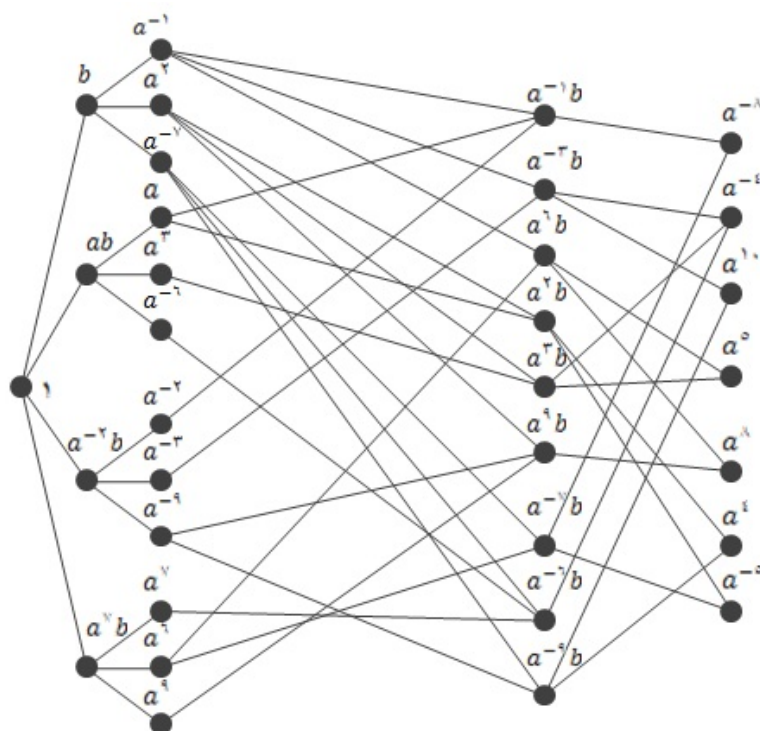
را تشکیل می‌دهیم، می‌توان دید که رأس $a^{-۶}b$ رأس یکتایی در $N_۱(a^{-۴}b) \cap N_۲(b) \cap N_۲(۱)$ است که مجاور سه رأس در $N_۲(۱)$ است، لذا γ رأس $a^{-۶}b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. به‌طور مشابه با تشکیل $N_۱(a^{-۶}b) \cap N_۲(۱) = \{a^{-۷}, a^{-۶}, a^۷\}$ می‌توان نتیجه گرفت که γ رأس $a^{-۷}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. اگر γ رئوس $a^{-۶}$ و $a^۷$ را با هم جابه‌جا کند و یا ثابت نگه دارد، γ باید رأس $a^{-۲}b$ را ثابت نگه دارد. از آنجایی که $a^{-۹}$ رأس یکتایی در $N_۱(a^{-۲}b) \cap N_۲(۱)$ می‌باشد که مجاور دو رأس در $N_۲(b) \cap N_۲(۱)$ است، لذا $a^{-۹}$ توسط γ ثابت نگه‌داشته می‌شود. با تشکیل $N_۱(a^{-۹}) \cap N_۲(۱) \cap N_۲(b) = \{a^{-۲}b, a^۹b, a^{-۹}b\}$ می‌توانیم نشان دهیم که γ رأس‌های $a^{-۹}b, a^۹b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. از آنجایی که $a^{-۹}b$ و $a^۹b$ مجاور تنها یک رأس در $N_۱(b) \cap N_۲(۱) = \{a^{-۱}, a^۲, a^{-۷}\}$ هستند، γ رأس‌های $a^۲$ و $a^{-۷}$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ ، مجموعه‌ی $N_۱(b)$ را نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارد. حال فرض کنیم γ کمان دلخواه (u, v) را ثابت نگه دارد. از آنجایی که طبق قضیه (۳.۱.۲) گراف کیلی G کمان-انتقالی است، لذا خودریختی‌ای چون φ از $Aut(G)$ موجود است که $\varphi(۱, b) = (u, v)$. حال داریم:

$$\varphi^{-۱}\gamma\varphi(b) = b \quad \text{و} \quad \varphi^{-۱}\gamma\varphi(۱) = ۱$$

با در نظر گرفتن $\varphi^{-۱}\gamma\varphi$ به جای γ ، همسایگی‌های b را نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارد. حال فرض کنید رأس y مجاور رأس b باشد. در این صورت داریم:

$$\varphi^{-۱}\gamma\varphi(y) = y \Rightarrow \gamma(\varphi(y)) = \varphi(y)$$

لذا γ با ثابت نگه داشتن کمان (u, v) ، همسایگی‌های v را نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارد. حال از آنجایی که طبق لم (۳.۳.۱)، G یک گراف همبند است می‌توان نتیجه گرفت γ همه‌ی رئوس G را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین $G_۱$ یک-منتظم است.



شکل ۸.۲: زیرگراف القایی از $Cay(D_{2^6}, \{b, ab, a^{-2}b, a^6b\})$

(۲) نگاشت $\alpha_1 : D_{2^6} \rightarrow D_{2^6}$ را با ضابطه‌ی $a \mapsto a^3$ و $b \mapsto b$ تعریف می‌کنیم. طبق لم (۱۶.۱.۱)، α یک خودریختی گروهی است. همچنین α با حفظ مجاورت بین رئوس، یک خودریختی گرافی نیز می‌باشد. حال از آنجایی که $\alpha_1\{b, ab, a^{-2}b, a^6b\} = \{b, ab, a^{-6}b, a^3b\}$ ، لذا G_2 نیز یک-منتظم است. $\square$

لم ۱۲.۲.۲. گراف‌های کیلی زیر برای هر عدد صحیح $s \geq 0$ ، یک-منتظم هستند:

$$(۱) \text{ برای } (n, l) = (25s + 10, 20s + 7), G_1 = Cay(D_{2^{5s+10}}, \{b, ab, a^{-5s-2}b, a^{-10s-3}b\})$$

$$(۲) \text{ برای } (n, l) = (25s + 10, 10s + 3), G_2 = Cay(D_{2^{5s+10}}, \{b, ab, a^{10s+4}b, a^{5s+3}b\})$$

$$(۳) \text{ برای } (n, l) = (25s + 20, 10s + 7), G_3 = Cay(D_{2^{5s+20}}, \{b, ab, a^{10s+8}b, a^{-5s-3}b\})$$

$$(۴) \text{ برای } (n, l) = (25s + 20, 5s + 3), G_4 = Cay(D_{2^{5s+20}}, \{b, ab, a^{5s+4}b, a^{-10s-7}b\})$$

$$(5) \text{ برای } (n, l) = (25s + 30, 15s + 17), G_5 = Cay(D_{25s+30}, \{b, ab, a^{-10s-12}b, a^{5s+7}b\})$$

$$(6) \text{ برای } (n, l) = (25s + 30, 20s + 23), G_6 = Cay(D_{25s+30}, \{b, ab, a^{-5s-6}b, a^{10s+13}b\})$$

$$(7) \text{ برای } (n, l) = (25s + 40, 5s + 7), G_7 = Cay(D_{25s+40}, \{b, ab, a^{5s+8}b, a^{10s+17}b\})$$

$$(8) \text{ برای } (n, l) = (25s + 40, 15s + 23), G_8 = Cay(D_{25s+40}, \{b, ab, a^{-10s-16}b, a^{-5s-7}b\})$$

به علاوه، هر دو از این گراف‌ها که دارای تعداد رئوس مشترک باشند، یکرختند.

□

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

حالت ۲ در گراف کیلی G ، زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T_0 باشد.

لم ۱۳.۲.۲. فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}, a^{l^2+l+1}b\})$ یک گراف کیلی ۴-ظرفیت و از کمر ۶

باشد که در آن $l \geq 2$ ، $n \geq 10$ و $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$. همچنین

$$T = G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1) \cup N_4(1)]$$

زیرگراف القایی از G باشد. اگر T یکرخت با گراف T_0 باشد، که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است،

آنگاه G یک-منتظم است.

برهان. فرض کنید $\gamma \in Aut(G)_{(1,b)}$ دلخواه باشد. در این صورت γ یک یکرختی را از زیرگراف القایی

$$H := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1)) \cup (N_3(b) \cap N_4(1))]$$

از G به توی خودش می‌نگارد، که در شکل (۹.۲) نشان داده شده است.

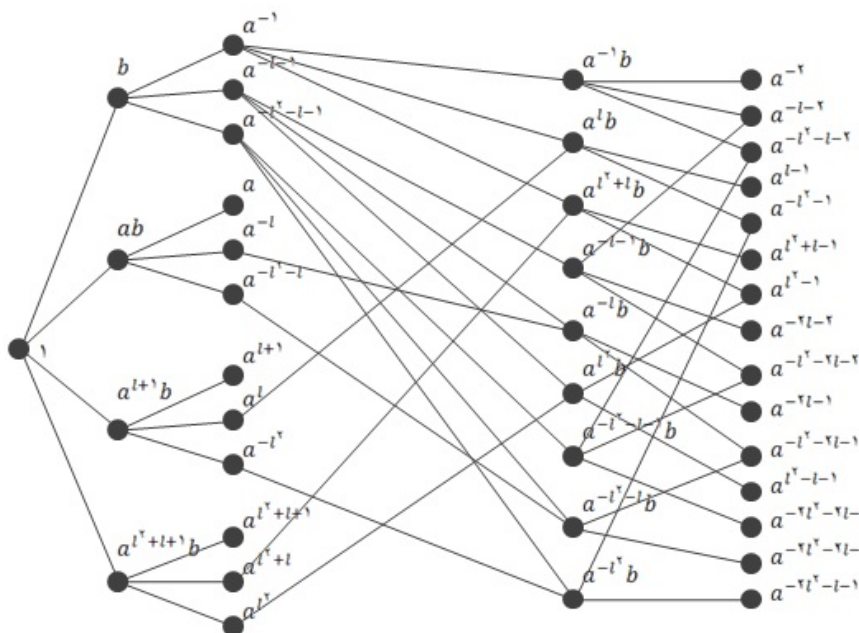
از آنجایی که $\gamma \in Aut(G)_{(1,b)}$ ، لذا یا γ حداقل یک رأس در $N_1(1) \setminus \{b\}$ را ثابت نگه می‌دارد یا

جایگشتی دوری روی مجموعه $N_1(1) \setminus \{b\}$ است. حال بحث را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت (۱): γ برای برخی از t هایی که $0 \leq t \leq 2$ ، رأس $a^{\sum_{j=0}^t l^j} b$ را ثابت نگه دارد. برای هر عدد صحیح

s ای که $0 \leq s \leq 2$ و $s \neq t$ ، مسیر $(a^{\sum_{j=0}^t l^j} b, 1, b, a^{-\sum_{j=0}^s l^j})$ مشمول در ۶-دور

$$(a^{\sum_{j=0}^t l^j} b, 1, b, a^{-\sum_{j=0}^s l^j}, a^{(\sum_{j=0}^t l^j - \sum_{j=0}^s l^j)} b, a^{(\sum_{j=0}^t l^j - \sum_{j=0}^s l^j)})$$



شکل ۹.۲: زیرگراف القایی H از $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l+1+l+1}b\})$

می‌باشد، در صورتی که مسیر $(a^{\sum_{j=0}^t l^j} b, 1, b, a^{-\sum_{j=0}^t l^j})$ مشمول در هیچ ۶-دور از H نمی‌باشد. بنابراین γ ، رأس $a^{-\sum_{j=0}^t l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد. قابل ذکر است مطالب گفته شده با جایگذاری مقادیر ممکن برای s, t و با استفاده از شکل (۹.۲) نتیجه می‌شود.

حال مجموعه‌ی $\{a^{(\sum_{j=0}^s l^j - \sum_{j=0}^t l^j)} b \mid 0 \leq s \leq 3, s \neq t\}$ را تشکیل می‌دهیم. با جایگذاری تمامی مقادیر ممکن برای s و t و با استفاده از شکل (۹.۲) می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عدد صحیح s ای که $0 \leq s \leq 3$ و $s \neq t$ ، رأس $a^{(\sum_{j=0}^s l^j - \sum_{j=0}^t l^j)} b$ مشمول در ۶-دور $(1, b, a^{-\sum_{j=0}^t l^j}, a^{(\sum_{j=0}^s l^j - \sum_{j=0}^t l^j)} b, a^{(\sum_{j=0}^s l^j - \sum_{j=0}^t l^j)} b, a^{(\sum_{j=0}^s l^j)} b)$ که شامل مسیر $(1, b, a^{-\sum_{j=0}^t l^j})$ است، می‌باشد، در صورتی که رأس $a^{-\sum_{j=0}^t l^j} b$ در هیچ ۶-دور که شامل مسیر $(1, b, a^{-\sum_{j=0}^t l^j})$ باشد، نیست. بنابراین γ ، رأس $a^{-\sum_{j=0}^t l^j} b$ را ثابت نگه می‌دارد. حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شد می‌توان نتیجه گرفت که اگر γ رئوس $a^{-\sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{-\sum_{j=0}^t l^j} b$ را ثابت نگه دارد γ رئوس $a^{-2\sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{-2\sum_{j=0}^t l^j} b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. با ادامه‌ی این روند می‌توان نتیجه گرفت که برای

هر عدد صحیح مثبت i ، γ رؤس $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد. از آنجایی که می‌دانیم $a^{(n-i) \sum_{j=0}^t l^j} b = a^{-i \sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{(n-i) \sum_{j=0}^t l^j} = a^{-i \sum_{j=0}^t l^j}$ ، لذا برای هر عدد صحیح منفی i ، γ رؤس $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد.

تا به اینجا نشان دادیم که γ برای هر عدد صحیح دلخواه i ، با ثابت نگه داشتن رأس $a^{\sum_{j=0}^t l^j} b$ رؤس $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j} b$ و $a^{-i \sum_{j=0}^t l^j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. حال اگر $t = 0$ ، آنگاه واضح است که γ همه رؤس G را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ خودریختی همانی است. حال اگر $t = 2$ ، قرار می‌دهیم

$r := \gcd(n, \sum_{j=0}^2 l^j)$. طبق فرض می‌دانیم که $\sum_{j=0}^3 l^j = 0 \pmod{n}$ ، بنابراین $r | 1 + l + l^2 + l^3$. از طرفی می‌دانیم $r | 1 + l + l^2$ ، در نتیجه $r = 1$. بنابراین $\langle a^{\sum_{j=0}^2 l^j} \rangle = \langle a \rangle$ ، لذا برای $t = 2$ ، γ همه رؤس G را ثابت نگه می‌دارد. حال اگر $t = 1$ ، آنگاه γ با ثابت نگه داشتن رأس $a^{l+1} b$ رؤس $a^{-i(l+1)}$ و $a^{-i(l+1)} b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. حال با انتخاب $i = -l$ می‌توان نتیجه گرفت که γ رؤس $a^{l(l+1)}$ و $a^{l(l+1)} b$ را ثابت نگه می‌دارد. از آنجایی که رأس a^{-1} تنها رأسی در $N_1(b) \cap N_2(1)$ است که مجاور رأس $a^{l(l+1)} b$ است، لذا γ رأس a^{-1} را ثابت نگه می‌دارد. هم‌چنین از آنجایی که رأس $a^{-1} b$ تنها رأسی در همسایگی $N_1(a^{-1}) \cap N_3(1)$ است که مجاور رأس a^{-1} در $N_1(b) \cap N_2(1)$ می‌باشد، لذا γ رأس $a^{-1} b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد.

حال مجموعه $\{a^{-(\sum_{j=0}^u l^j + 1)} \mid 0 \leq u \leq 2\}$ را تشکیل می‌دهیم. برای هر عدد صحیح u که $1 \leq u \leq 2$ ، رأس $a^{-(\sum_{j=0}^u l^j + 1)}$ مجاور رأس $a^{-\sum_{j=0}^u l^j} b$ در $N_2(b) \cap N_3(1)$ است، در صورتی که رأس a^{-2} مجاور هیچ رأسی در $N_2(b) \cap N_3(1)$ نیست، لذا γ رأس a^{-2} را ثابت نگه می‌دارد. حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شد می‌توان نتیجه گرفت که اگر γ رؤس a^{-1} ، $a^{-1} b$ و a^{-2} را ثابت نگه دارد لذا γ باید رؤس $a^{-2} b$ و a^{-3} را نیز ثابت نگه دارد. با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد که γ برای هر عدد صحیح i ، رؤس a^{-i} و $a^{-i} b$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ همه رؤس G را ثابت نگه می‌دارد، لذا γ خودریختی همانی است.

حالت (۲): γ جایگشتی است که مجموعه $\{ab, a^{l+1} b, a^{l^2+l+1} b\}$ را به صورت دوری جابه‌جا می‌کند. ادعا

می‌کنیم چنین حالتی اتفاق نمی‌افتد. می‌توان فرض کرد که γ روی مجموعه‌ی $N_1(1)$ به صورت جایگشت $\gamma = (b)(ab \ a^{l+1}b \ a^{l^2+l+1}b)$ است. به آسانی می‌توان خواص زیر را مستقیماً از شکل (۹.۲) به دست آورد.

(۱) دور $C_1 = (a^{-l}, ab, a^{-l^2-l}, a^{-l^2-l}b, a^{-l^2-2l-1}, a^{-l^2-l}b, a^{-l^2-l})$ ۶-دور یکتایی است که شامل مسیر H در (a^{-l}, ab, a^{-l^2-l}) است.

(۲) دور $C_2 = (a^l, a^{l+1}b, a^{-l^2}, a^{-l^2}b, a^{-l^2-1}, a^l b)$ ۶-دور یکتایی است که شامل مسیر H در $(a^l, a^{l+1}b, a^{-l^2})$ است.

(۳) دور $C_3 = (a^{l^2+l}, a^{l^2+l+1}b, a^{l^2}, a^{l^2}b, a^{l^2-1}, a^{l^2+l}b)$ ۶-دور یکتایی است که شامل مسیر H در $(a^{l^2+l}, a^{l^2+l+1}b, a^{l^2})$ است.

از آنجایی که $\gamma(ab) = a^{l+1}b$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma(\{a^{-l}, a^{-l^2-l}\}) = \{a^l, a^{-l^2}\}$ ، حال بحث را به دو مورد زیر تقسیم می‌کنیم:

مورد (۱): فرض کنید $a^l = \gamma(a^{-l})$ و $a^{-l^2} = \gamma(a^{-l^2-l})$. حال از آنجایی که $C_1 = \gamma(C_1)$ ، لذا می‌توان نوشت $\gamma(a^{-l^2-l-1}) = a^{-l^2-l-1}$ ، $\gamma(a^{-l-1}) = a^{-1}$ ، $\gamma(a^{-l^2-l}) = a^{-l^2}b$ و $\gamma(a^{-l}b) = a^l b$. هم‌چنین از آنجایی که $C_2 = \gamma(C_2)$ ، لذا داریم

$$\gamma(\{a^l b, a^{-l^2}b\}) = \{a^{l^2+l}b, a^{l^2}b\}.$$

از طرفی می‌دانیم که γ باید مجاورت بین رئوس را حفظ کند، رأس $a^{-l^2}b$ مجاور رأس a^{-l^2-l-1} می‌باشد، در صورتی که هیچ‌کدام از رئوس $a^{l^2+l}b$ و $a^{l^2}b$ مجاور رأس a^{-l^2-l-1} نمی‌باشند. پس γ نمی‌تواند چنین جابه‌جایی را انجام دهد. لذا γ نمی‌تواند رأس ab را به رأس $a^{l+1}b$ ببرد.

مورد (۲): حال فرض کنیم که $a^{-l^2} = \gamma(a^{-l})$ و $a^l = \gamma(a^{-l^2-l})$. با استفاده از روشی که در مورد (۱) گفته شد، می‌توان خودریختی γ را به صورت حاصل ضربی از جایگشت‌های دوری روی مجموعه‌ی رئوس

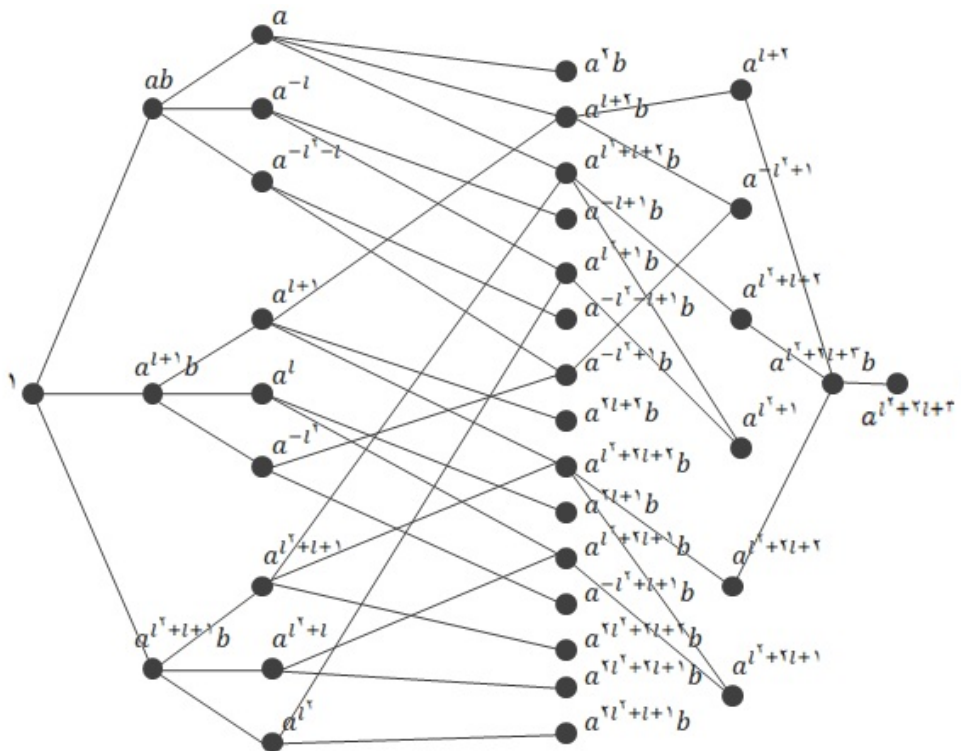
$V(H)$ که شامل $N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1)$ می‌باشند، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \gamma = & (1)(b)(ab \ a^{l+1}b \ a^{l^2+l+1}b)(a^{-1} \ a^{-l-1} \ a^{-l^2-l-1})(a \ a^{l+1} \ a^{l^2+l+1}) \\ & (a^{-l} \ a^{-l^2} \ a^{l^2+l})(a^{-l^2-l} \ a^l \ a^{l^2})(a^{-1} \ a^{l^2-l-1} \ a^{-2l^2-2l-1})\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

حال زیرگراف القایی

$$\begin{aligned} & [((N_1(1) \cup N_2(1)) \cup N_2(1) \setminus (N_1(b) \cup N_2(b))) \cup N_1(a^{l+2}) \cup N_1(a^{l^2+l+2}) \cup \\ & \{a^{l^2+2l+3}, a^{-l^2+1}, a^{l^2+1}, a^{l^2+2l+1}, 1\}] \end{aligned}$$

از G را که K می‌نامیم در شکل (۱۰.۲) نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $T_0[V(K) \setminus \{a^{l^2+2l+3}b\}]$ زیرگراف القایی از T_0 که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است، می‌باشد.



شکل ۱۰.۲: زیرگراف القایی K از $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$

حال با استفاده از معادله (۳.۲) در گراف K ، می‌توان خودریختی γ را به صورت حاصل ضربی از جایگشت

دوری روی مجموعه‌ی رئوس $V(H)$ به صورت زیر نوشت:

$$\gamma = (a^{l^2+2}b \ a^{l^2+2l+2}b \ a^{l^2+l+2})(a^{l^2+1}b \ a^{-l^2+1}b \ a^{l^2+2l+1}b) \\ (a^{-l^2+1} \ a^{l^2+2l+1} \ a^{l^2+1})(a^{l^2+2} \ a^{l^2+2l+2} \ a^{l^2+l+2}) \dots \quad (4.2)$$

از آنجایی که γ رئوس a^{l^2+2} ، a^{l^2+2l+2} و a^{l^2+l+2} را به صورت دوری جابه‌جا می‌کند و رأس $a^{l^2+2l+3}b$ تنها رأسی است که با هریک از این سه رأس مجاور است، لذا γ رأس $a^{l^2+2l+3}b$ را ثابت نگه می‌دارد. حال رأس a^{l^2+2l+3} باقی می‌ماند که مجاور رأس $a^{l^2+2l+3}b$ می‌باشد. چون γ رأس $a^{l^2+2l+3}b$ را ثابت نگه داشته، لذا γ رأس a^{l^2+2l+3} را نیز ثابت نگه می‌دارد. حال با تشکیل تصویر یکرخست از G توسط $L(a^{l^2+2l+3})$ ، می‌توان گفت که اگر $\gamma \in \text{Aut}(G)_{(a^{l^2+2l+3}, a^{l^2+2l+3}b)}$ ، جایگشتی باشد که مجموعه‌ی

$N_1(a^{l^2+2l+3}) \setminus \{a^{l^2+2l+3}b\}$ را به صورت دوری جابه‌جا کند، آنگاه γ رئوس $a^{2(l^2+2l+3)}b$ و $a^{2(l^2+2l+3)}$ را ثابت نگه می‌دارد. با ادامه‌ی این روند می‌توان دید که γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس $a^{t(l^2+2l+3)}b$ و $a^{t(l^2+2l+3)}$ را ثابت نگه می‌دارد. حال قرار می‌دهیم $r := \gcd(l^2 + 2l + 3, n)$. از آنجایی که طبق فرض $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، بنابراین $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از معادله‌ی

$$l^3 + l^2 + l + 1 = (l^2 + 2l + 3)(l - 1) + 4$$

می‌توان نتیجه گرفت که $r | 4$. حال از آنجایی که $r = \gcd(l^2 + 2l + 3, n)$ ، لذا اعداد صحیح p و s ای وجود دارند که $r = s(l^2 + 2l + 3) + np$. از آنجایی که γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس $a^{t(l^2+2l+3)}$ و $a^{t(l^2+2l+3)}b$ را ثابت نگه می‌دارد لذا γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس a^{4t} و $a^{4t}b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. از طرفی برای هر عدد صحیح i, l را می‌توان به صورت $4i+1, 4i+2, 4i+3$ یا $4i+3$ نوشت. اگر $l = 4i$ ، آنگاه γ رأس a^{-l} را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 4i+1$ ، آنگاه γ رأس a^{l-1} را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 4i+2$ ، آنگاه γ رأس $a^{l+2}b$ را ثابت نگه می‌دارد و اگر $l = 4i+3$ ، آنگاه γ رأس a^{l+1} را ثابت نگه می‌دارد. بنابر معادله‌ی (۳.۲) هیچ کدام از این‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشند، لذا حالت (۲) نیز نمی‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین خودریختی دلخواه $(1, b) \in \text{Aut}(G)$ ، خودریختی همانی می‌باشد، لذا G یک-منتظم است. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت و از کمر ۶ باشد. G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است اگر و تنها اگر G برای (n, l) ای که $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، $n \geq 10$ و $(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$ ، یکرخت با گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ باشد، که از کمر ۶ است.

برهان. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت و از کمر ۶ روی گروه دووجهی D_n باشد. $(\Leftarrow)$ اگر G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری باشد، آنگاه طبق لم (۲.۲.۲)، G با گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یکرخت است که در آن $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$. حال با استفاده از لم (۳.۲.۲) می‌توان نتیجه گرفت که در گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ ، $n \geq 10$. حال زیرگراف القایی

$$T := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1) \cup N_4(1)]$$

از گراف کیلی G را در نظر می‌گیریم. اگر T یکرخت با گراف T باشد، که در شکل (۶.۲) آورده شده، آنگاه طبق لم (۱۳.۲.۲)، گراف کیلی G به‌ازای هر (n, l) ای که در دو شرط $n \geq 10$ و $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ صدق کند، یک-منتظم است. حال فرض کنید زیرگراف القایی T یکرخت با T نباشد. (n, l) هایی که به ازای آنها T یکرخت با T نیست، (n, l) هایی می‌باشند که در لم‌های (۱۰.۲.۲)، (۱۱.۲.۲) و (۱۲.۲.۲) آورده شده است. با استفاده از لم‌های فوق گراف کیلی G در صورتی یک-منتظم است که $(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم G با گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ یکرخت باشد که در آن $l^3 + l^2 + l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، $n \geq 10$ و $(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$. اگر T یکرخت با گراف T باشد، آنگاه طبق لم (۱۳.۲.۲)، G یک-منتظم است. حال اگر T یکرخت با گراف T نباشد، آنگاه با استفاده از لم‌های (۱۰.۲.۲)، (۱۱.۲.۲) و (۱۲.۲.۲) و با توجه به اینکه طبق فرض $(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$ ، لذا گراف کیلی G یک-منتظم است. از یک-منتظمی گراف کیلی G می‌توان نتیجه گرفت که $Aut(G)$ روی مجموعه‌ی کمان‌ها به‌طور انتقالی عمل می‌کند، لذا $St(1)_{Aut(G)}$ نیز روی مجموعه‌ی $X = N_1(1)$ به‌طور

انتقالی عمل می‌کند. حال با استفاده از قضیه (مدار-پایدارساز) داریم:

$$|St(1)_{Aut(G)} : St(x_1)_{St(1)}| = |orb(x_1)|.$$

حال از آنجایی که پایدارساز هر کمان همانی است، لذا $St(x_1)_{St(1)}$ همانی است، بنابراین

$$|St(1)_{Aut(G)}| = |orb(x_1)|. \text{ حال از آنجایی که } |orb(x_1)| = 4, \text{ لذا } |St(1)_{Aut(G)}| = 4. \text{ از طرفی}$$

می‌دانیم $Aut(D_n, S) \leq St(1)_{Aut(G)}$ و همچنین طبق قضیه (۳.۱.۲)، $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه

دوری از مرتبه‌ی ۴ است که روی مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل می‌کند، بنابراین

$$Aut(D_n, S) = St(1)_{Aut(G)} \quad \square$$

قضیه ۱۵.۲.۲. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت روی گروه دووجهی D_n باشد. در این صورت G

یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است اگر و تنها اگر G یکرخت با گراف کیلی

$$Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\}) \text{ باشد که در آن } l^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{n}, l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

$$n \geq 10 \text{ و } (n, l) \neq (15, 2), (15, 8).$$

برهان. فرض کنید G یک گراف کیلی ۴-ظرفیت روی گروه دووجهی D_n باشد.

($\Leftarrow$) اگر G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری باشد آنگاه با استفاده از لم (۲.۲.۲)، G یکرخت

با گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ می‌باشد که در آن $l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. حال

طبق قضیه (۵.۱.۲) گراف کیلی G از کمر ۴ یا ۶ می‌باشد. اگر G از کمر ۴ باشد، طبق قضیه (۹.۲.۲)،

$n \geq 10$ و $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. حال اگر G از کمر ۶ باشد، طبق قضیه (۱۴.۲.۲)، $n \geq 10$ و

$(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$. از آنجایی که G یک-منتظم است، لذا بنابر لم (۶.۲.۲)، $l^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$.

($\Rightarrow$) اگر G یکرخت با گراف کیلی $Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b\})$ باشد که در آن $n \geq 10$

$l^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$ و $l^3 + l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $(n, l) \neq (15, 2), (15, 8)$ ، آنگاه بنابر قضیه

(۵.۱.۲)، گراف کیلی G از کمر ۴ یا ۶ می‌باشد. اگر G از کمر ۴ باشد، آنگاه طبق لم (۵.۲.۲)، $l^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

، بنابراین طبق قضیه (۹.۲.۲)، G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است. اگر G از کمر ۶ باشد،

□ G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است. (۱۴.۲.۲)

فصل ۳

گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۶-ظرفیت
روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس
دوری

۱.۳ گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۶-ظرفیت روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری

تذکر ۱.۱.۳. با استفاده از لم (۲.۲.۲) و قضیه (۵.۱.۲) می‌توان گفت که همه‌ی گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۶-ظرفیت روی گروه‌های دووجهی با پایدارساز رأس دوری، از کمر ۴ یا ۶ می‌باشند.

گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت از کمر ۴

لم ۲.۱.۳. فرض کنید $G = Cay(D_n, b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b)$ یک گراف کیلی ۶-ظرفیت باشد که در آن $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$. در این صورت G از کمر ۴ است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

$$(1) \quad l^3 - 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(2) \quad l^3 + 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(3) \quad l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(4) \quad (n, l) = (21, 19).$$

برهان. فرض کنید $G = Cay(D_n, S)$ یک گراف کیلی ۶-ظرفیت باشد که در آن $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$

و

$$S = \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b, a^{l^5+l^4+l^3+l^2+l+1}b\}.$$

($\Rightarrow$) اگر $l^3 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه $S = \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4}b\}$ از آنجایی که گراف

کیلی G ، ساده است لذا در G دوری به طول ۲ وجود ندارد. از طرفی طبق تذکر (۴.۱.۲)، G یک گراف

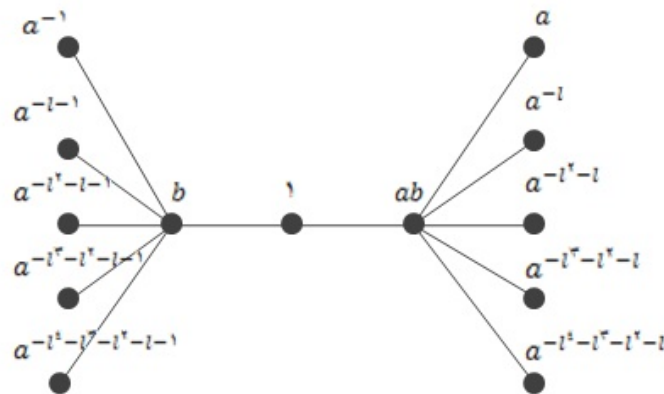
کیلی دوبخشی، با بخش‌های $\langle a \rangle$ و $\langle a \rangle b$ می‌باشد، لذا دوری به طول ۳ نیز در G وجود ندارد، از طرفی

می‌توان دید که $(1, b, a^{-l^2-l}, ab, 1)$ یک ۴-دور در G است، لذا G ، از کمر ۴ می‌باشد. به‌طور مشابه اگر

$(1, b, a^{-l^2-l-1}, ab, 1)$ یک ۴-دور در G است، لذا G از کمر

۴ است. به‌طور مشابه اگر $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان دید که $(1, b, a^{-l^2-l-1}, a^{l+1}b, 1)$ یک ۴-دور در گراف کیلی G است. حال اگر $(n, l) = (21, 19)$ ، از آنجایی که $(1, b, a, ab, 1)$ یک ۴-دور در G می‌باشد، بنابراین G از کمر ۴ می‌باشد.

($\Leftarrow$) فرض کنید G از کمر ۴ باشد. بنابر قضیه (۳.۱.۲)، گراف کیلی G کمان-انتقالی است، لذا ۴-دوری شامل کمان $(b, 1)$ وجود دارد، بنابراین ۴-دوری شامل یکی از ۲-مسیرهای $(b, 1, a^{l+1}b)$ ، $(b, 1, ab)$ ، $(b, 1, a^{l^2+l+1}b)$ ، $(b, 1, a^{l^3+l^2+l+1}b)$ و $(b, 1, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b)$ می‌باشد. به اختصار فرض می‌کنیم ۴-دوری شامل مسیر $(b, 1, ab)$ موجود باشد (دو حالت دیگر به طریق مشابه قابل بررسی است). در این حالت حداقل باید یکی از پنج رأس سمت راست شکل (۱.۳) بر یکی از پنج رأس در سمت چپ شکل منطبق شود. حال به بررسی حالات ممکن می‌پردازیم.



شکل ۱.۳: ۴-دور شامل مسیر $(b, 1, ab)$

(۱) رأس a^{-1} بر یکی از رئوس a یا a^{-l} یا a^{-l^2-l} یا $a^{-l^3-l^2-l}$ یا $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.

• اگر رأس a^{-1} بر رأس a منطبق شود، لذا رأس a باید از مرتبه‌ی ۲ باشد، که این با فرض از مرتبه‌ی n بودن a در گروه دووجهی D_n در تناقض است، لذا رأس a^{-1} نمی‌تواند بر رأس a منطبق شود.

• اگر رأس a^{-1} بر رأس a^{-l} منطبق شود، آنگاه $l = 1 \pmod{n}$. حال باتوجه به فرض

$\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، داریم $5 = 0 \pmod{n}$. از طرفی می‌دانیم که هر گراف k -منتظم و از

کمر ۴، حداقل دارای $2k$ رأس می‌باشد، لذا $5 = 0 \pmod{n}$ با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.

• اگر رأس a^{-1} بر رأس a^{-l^2-l} منطبق شود، آنگاه $l^2 = l - 1 \pmod{n}$. حال با توجه به فرض

$\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، داریم $4 = 0 \pmod{n}$ ، که این با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.

• اگر رأس a^{-1} بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l = 5 \pmod{n}$ و $14 = 0 \pmod{n}$ ، لذا

$$(n, l) = (7, 5), (14, 5).$$

• اگر رأس a^{-1} بر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $(n, l) = (7, 3)$.

(۲) رأس a^{-l-1} بر یکی از رئوس a یا a^{-l} یا a^{-l^2-l} یا $a^{-l^3-l^2-l}$ یا $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.

• اگر رأس a^{-l-1} بر رأس a منطبق شود، آنگاه $l = -2 \pmod{n}$ و $21 = 0 \pmod{n}$ ، لذا

$$(n, l) = (7, 5), (21, 19).$$

• اگر رأس a^{-l-1} بر رأس a^{-l} منطبق شود، آنگاه $-1 = 0 \pmod{n}$ ، که این با فرض $n \geq 12$ در

تناقض است، لذا رأس a^{-l-1} نمی‌تواند بر رأس a^{-l} منطبق شود.

• اگر رأس a^{-l-1} بر رأس a^{-l^2-l} منطبق شود، آنگاه $l^2 = 1 \pmod{n}$. حال با توجه به فرض

$\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $3l + 3 = 0 \pmod{n}$. بنابراین

$l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n}$ ، لذا رأس a^{-l-1} بر رأس a^{-l^2-l} منطبق می‌شود به شرطی که

$$l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n}.$$

• اگر رأس a^{-l-1} بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^3 + l^2 = 1 \pmod{n}$. حال با استفاده از

فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $7 = 0 \pmod{n}$. که این با فرض $n \geq 12$

در تناقض است، لذا رأس a^{-l-1} نمی‌تواند بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.

- اگر رأس a^{-l-1} بر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^4 + l^3 = 1 - l^2$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که شرط $l^3 + 1 = 0 \pmod{n}$ باید برقرار باشد.
- (۳) رأس a^{-l^2-l-1} بر یکی از رئوس a یا a^{-l} یا a^{-l^2-l} یا $a^{-l^3-l^2-l}$ یا $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.
- اگر رأس a^{-l^2-l-1} بر رأس a منطبق شود، آنگاه $l^2 + l = -2 \pmod{n}$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که شرط $l^3 + 1 = 0 \pmod{n}$ باید برقرار باشد.
- اگر رأس a^{-l^2-l-1} بر رأس a^{-l} منطبق شود، آنگاه $l^2 = -1 \pmod{n}$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که باید شرط $l^3 - 1 = 0 \pmod{n}$ برقرار باشد.
- اگر رأس a^{-l^2-l-1} بر رأس a^{-l^2-l} منطبق شود، آنگاه $-1 = 0 \pmod{n}$ ، که این با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس a^{-l^2-l-1} بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^3 - 1 = 0 \pmod{n}$.
- اگر رأس a^{-l^2-l-1} بر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^4 + l^3 = -1 \pmod{n}$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که $3 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- (۴) رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر یکی از رئوس a یا a^{-l} یا a^{-l^2-l} یا $a^{-l^3-l^2-l}$ یا $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.
- اگر رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a منطبق شود، آنگاه $l^3 = -l^2 - l - 2 \pmod{n}$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که $4 = 0 \pmod{n}$ که این با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a^{-l} منطبق شود، آنگاه $l^3 + l^2 = -1 \pmod{n}$ حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که $3 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.

- اگر رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a^{-l^2-l} منطبق شود، آنگاه $l^3 + 1 = 0 \pmod{n}$.
- اگر رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $-1 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس $a^{-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^4 - 1 = 0 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $5 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- (۵) رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر یکی از رؤس a یا a^{-l} یا a^{-l^2-l} یا $a^{-l^3-l^2-l}$ یا $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود.
- اگر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a منطبق شود، آنگاه $l^4 + l^3 + l^2 = -1 - 2 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $5 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a^{-l} منطبق شود، آنگاه $l^4 + l^3 + l^2 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $2 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس a^{-l^2-l} منطبق شود، آنگاه $l^4 + l^3 = -1 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $3 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.
- اگر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس $a^{-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $l^4 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، حال با استفاده از فرض $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $2 = 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.

• اگر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l-1}$ بر رأس $a^{-l^4-l^3-l^2-l}$ منطبق شود، آنگاه $-1 \equiv 0 \pmod{n}$ ، که با فرض $n \geq 12$ در تناقض است.

لذا با بررسی تمامی حالات ممکن به این نتیجه می‌رسیم که باید یکی از شروط $l^3 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ یا $l^3 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ یا $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ یا $(n, l) = (21, 19)$ برقرار باشد. □

لم ۳.۱.۳. فرض کنید $l^3 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و

$$G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b\})$$

یک گراف کیلی ۶-ظرفیت باشد. در این صورت G یک-منتظم نیست.

برهان. با استفاده از قضیه (۵.۱.۲)، حکم به آسانی نتیجه می‌شود. □

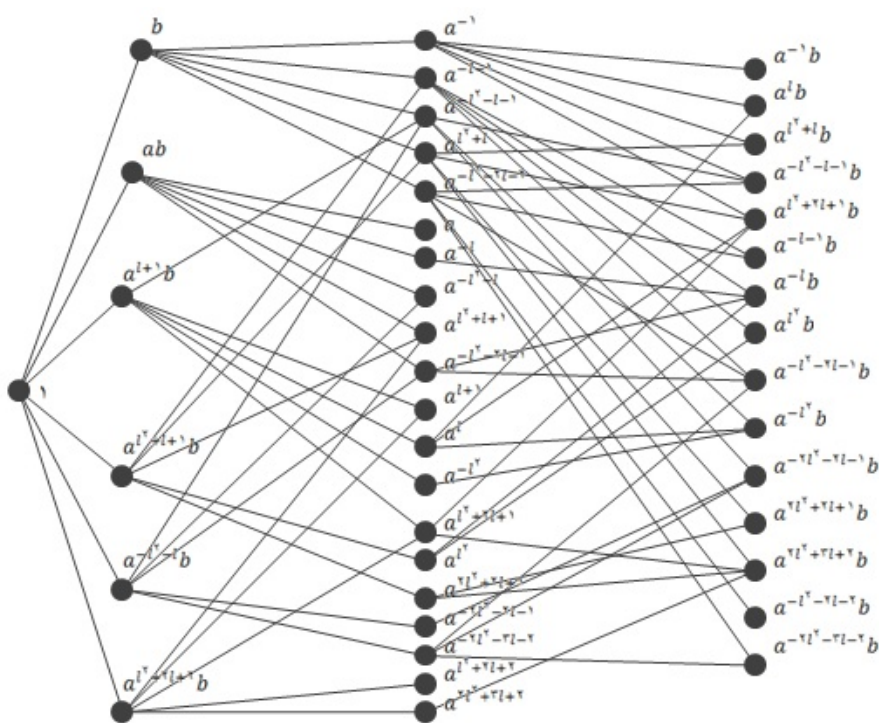
لم ۴.۱.۳. فرض کنید که $l^3 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l}b, a^{l^3}b\})$ یک گراف کیلی ۶-ظرفیت باشد. آنگاه G یک-منتظم است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح مثبت s ، (n, l) مساوی با هیچ‌یک از جفت‌های $(9s, 3s-1)$ ، $(7, 5)$ ، $(7, 3)$ و $(9s, 6s-1)$ نباشد.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۹] مراجعه شود. □

حال به حالت (۳) از لم (۲.۱.۳) می‌پردازیم. فرض کنید $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ و گراف کیلی $G = \text{Cay}(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{-l^2-l}b, a^{l^2+2l+2}b\})$ یک گراف ۶-ظرفیت و از کمر ۴ باشد. زیرگراف القایی $T := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))]$ از گراف G را تشکیل می‌دهیم. در حالت کلی تعداد رئوس زیرگراف القایی T مشخص نیست و به انتخاب (n, l) ای که در شرط $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ صدق کند، بستگی دارد. اگر $l \geq 5$ و $n = l^3 + 2l^2 + 2l + 1$ ، آنگاه تعداد رئوس زیرگراف القایی T از گراف کیلی

$$G' = \text{Cay}(D_{l^3+2l^2+2l+1}, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{-l^2-l}b, a^{l^2+2l+2}b\})$$

مشخص است و بزرگتر یا مساوی از هر زیرگراف القایی ممکن T می‌باشد که در شکل (۲.۳) رسم شده و با T_0 نشان داده می‌شود. حال با محاسبه‌ی $N_2(b) \cap N_3(1)$ و $N_2(1)$ در گراف T_0 می‌توان دید که

$$|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| = 35.$$


شکل ۲.۳: گراف کیلی $Cay(D_{l^3+2l^2+2l+1}, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{-l^2-l}b, a^{l^2+2l+2}b\})$

لم ۵.۱.۳. فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^2-l}b, a^{l^2+2l+2}b\})$ یک گراف کیلی ۶-ظرفیت باشد که در آن $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n}$. اگر $|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| \neq 35$ ، آنگاه برای عدد صحیح $1 \leq s$ ، یکی از جفت‌های (n, l) ، $(6, 1)$ ، $(9s-3, 3s-2)$ یا $(9s+3, 6s+1)$ می‌باشد. **برهان.** در صورتی $|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| \neq 35$ که حداقل دو رأس مشابه در $V(T_0)$ در مجموعه‌ی $N_2(b) \cap N_3(1)$ برهم منطبق شوند. بنابراین با بررسی همه‌ی رئوس که در $N_2(b) \cap N_3(1)$ قرار دارند می‌توان (n, l) هایی را که به ازای آنها این رئوس برهم منطبق می‌شوند را بدست آورد. به عنوان مثال در صورتی رأس $a^{-l^2-2l-2}b$ بر رأس $a^{-l}b$ منطبق می‌شود که $(n, l) = (6, 1)$. هم چنین در صورتی رأس $a^l b$ بر رأس $a^{-l^2-2l-2}b$

منطبق می‌شود که برای عدد صحیح $s \geq 1$ ، $(9s - 3, 3s - 2)$ یا $(9s + 3, 6s + 1)$ ، (n, l) با بررسی همه‌ی انطباق‌های ممکن می‌توان دید در صورتی $35 \neq |N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_2(1))|$ ، که برای عدد صحیح $s \geq 1$ ، (n, l) یکی از جفت‌های $(6, 1)$ ، $(9s - 3, 3s - 2)$ یا $(9s + 3, 6s + 1)$ باشد.

□

لم ۶.۱.۳. گراف‌های زیر یک-منتظم نیستند:

$$(1) \quad G_1 = Cay(D_6, \{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}) \quad \text{که } (n, l) = (6, 1)$$

$$(2) \quad G_2 = Cay(D_n, \{b, ab, a^{-3s-1}b, a^{-3s}b, a^{3s+1}b, a^{3s+2}b\}) \quad \text{که } (n, l) = (9s - 3, 3s - 2) \quad \text{و} \\ s \geq 1$$

$$(3) \quad G_3 = Cay(D_n, \{b, ab, a^{3s-1}b, a^{3s}b, a^{-3s+1}b, a^{-3s+2}b\}) \quad \text{که } (n, l) = (9s + 3, 6s + 1) \quad \text{و} \\ s \geq 1$$

برهان. (۱) با رسم شکل گراف G_1 می‌توان دید که G_1 ، گراف دوبخشی کامل با مجموعه بخش‌های $X = \{1, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}\}$ و $Y = \{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$ می‌باشد، که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است. حال $\gamma \in Aut(G_1)_{(1,b)}$ را یک خودریختی از G_1 در نظر می‌گیریم که دو رأس دلخواه در مجموعه‌ی X را باهم جابه‌جا کند و بقیه‌ی رئوس G_1 را ثابت نگه دارد، لذا G_1 یک-منتظم نیست.

(۲) در گراف G_2 داریم:

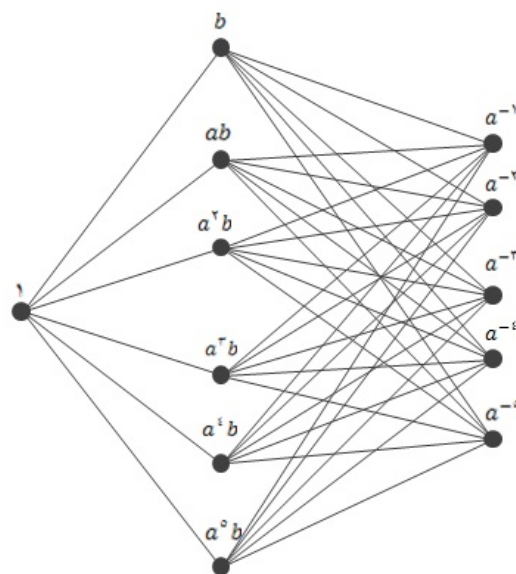
$$N_2(1) = \{N_1(b), N_1(ab), N_1(a^{3s-1}b), N_1(a^{3s}b), N_1(a^{-3s+1}b), N_1(a^{-3s+2}b)\}$$

$$N_1(b) = \{1, a^{-1}, a^{-3s+1}, a^{-3s}, a^{3s-1}, a^{3s-2}\}$$

$$N_1(ab) = \{a, 1, a^{-3s+2}, a^{-3s+1}, a^{3s}, a^{3s-1}\}$$

$$N_1(a^{3s-1}b) = \{a^{3s-1}, a^{3s-2}, 1, a^{-1}, a^{-3s+1}, a^{-3s}\}$$

$$N_1(a^{3s}b) = \{a^{3s}, a^{3s-1}, a, 1, a^{-3s+2}, a^{-3s+1}\}$$



شکل ۳.۳: گراف کیلی $G_1 = \text{Cay}(D_6, \{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\})$

$$N_1(a^{-3s+1}b) = \{a^{-3s+1}, a^{-3s}, a^{3s-1}, a^{3s-2}, 1, a^{-1}\}$$

$$N_1(a^{-3s+2}b) = \{a^{-3s+2}, a^{-3s+1}, a^{3s}, a^{3s-1}, a, 1\}$$

$$N_1(a^{-3s+1}) = N_1(a^{3s-1}) = \{a^{-3s+1}b, a^{-3s+2}b, b, ab, a^{3s-1}b, a^{3s}b\}$$

با محاسبه داریم $N_1(a^{-3s+1}) = N_1(a^{3s-1})$ و $a^{-3s+1}, a^{3s-1} \in N_1(b) \cap N_2(1)$ حال β را خودریختی نابدیهی از $\text{Aut}(G_2)_{(1,b)}$ طوری در نظر می‌گیریم که رئوس a^{-3s+1} و a^{3s-1} را با هم جابه‌جا کند و بقیه‌ی رئوس G_2 را ثابت نگه‌دارد، لذا G_2 یک-منتظم نیست.

(۳) در گراف G_3 داریم:

$$N_2(1) = \{N_1(b), N_1(ab), N_1(a^{-3s-1}b), N_1(a^{-3s}b), N_1(a^{3s+1}b), N_1(a^{3s+2}b)\}$$

$$N_1(b) = \{1, a^{-1}, a^{3s+1}, a^{3s}, a^{-3s-1}, a^{-3s-2}\}$$

$$N_1(ab) = \{a, 1, a^{3s+2}, a^{3s+1}, a^{-3s}, a^{-3s-1}\}$$

$$N_1(a^{-3s-1}b) = \{a^{-3s-1}, a^{-3s-2}, 1, a^{-1}, a^{3s+1}, a^{3s}\}$$

$$N_1(a^{-3s}b) = \{a^{-3s}, a^{-3s-1}, a, 1, a^{3s+2}, a^{3s+1}\}$$

$$N_1(a^{3s+1}b) = \{a^{3s+1}, a^{3s}, a^{-3s-1}, a^{-3s-2}, 1, a^{-1}\}$$

$$N_1(a^{3s+2}b) = \{a^{3s+2}, a^{3s+1}, a^{-3s}, a^{-3s-1}, a, 1\}$$

$$N_1(a^{3s+1}) = N_1(a^{-3s-1}) = \{a^{-3s-1}b, a^{-3s}b, a^{3s+1}b, a^{3s+2}b, b, ab\}$$

با محاسبه داریم $a^{3s+1}, a^{-3s-1} \in N_1(b) \cap N_2(1)$ و $N_1(a^{-3s-1}) = N_1(a^{3s+1})$. حال η را خودریختی نابدیهی از $Aut(G_3)_{(1,b)}$ طوری در نظر می‌گیریم که رؤس a^{3s+1} و a^{-3s-1} را با هم جابه‌جا کند و بقیه‌ی رؤس G_3 را ثابت نگه دارد، لذا G_3 یک-منتظم نیست. $\square$

لم ۷.۱.۳. گراف کیلی ۶-ظرفیت $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b\})$

که در آن $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ ، برای $(n, l) = (21, 19)$ ، یک گراف یک-منتظم است که در آن $|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| \neq 35$.

برهان. با یک محاسبه‌ی مستقیم می‌توان دید که $|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| \neq 35$. حال به بررسی یک-منتظم بودن G می‌پردازیم.

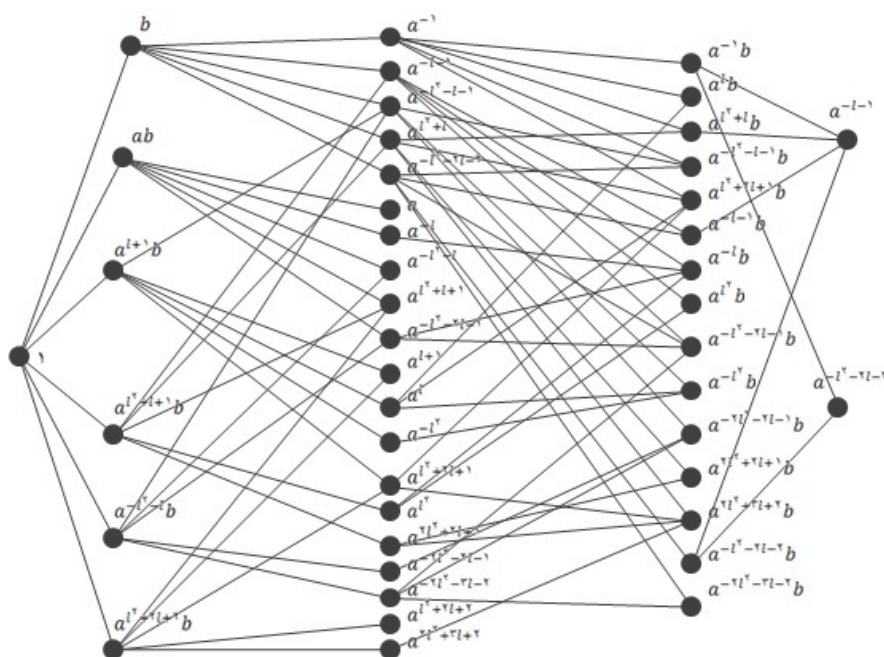
فرض کنید $\gamma \in Aut(G)_{(1,b)}$ یک خودریختی گرافی دلخواه باشد. چون γ رأس b را ثابت نگه می‌دارد، لذا همسایگی‌های b را نیز مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد، بنابراین γ یک خودریختی گرافی از زیرگراف القایی $[N_0(b) \cup N_1(b) \cup N_2(b) \cup N_3(b)] := H$ به توی خودش می‌باشد. از آنجایی که a^γ و $a^{-\gamma}$ تنها رؤسی هستند که در همسایگی $N_3(b)$ قرار دارند، بنابراین γ باید مجموعه‌ی $\{a^\gamma, a^{-\gamma}\}$ را مجموعه‌وار ثابت نگه دارد، لذا γ یا رؤس $a^{-\gamma}$ و a^γ را ثابت نگه می‌دارد یا این دو رأس را بایکدیگر جابه‌جا می‌کند، ادعا می‌کنیم که γ رؤس $a^{-\gamma}$ و a^γ را ثابت نگه می‌دارد. فرض کنیم این چنین نباشد و γ رؤس $a^{-\gamma}$ و a^γ را بایکدیگر جابه‌جا کند، لذا γ باید رؤسی که در مجاورت این دو رأس قرار دارند را نیز باهم جابه‌جا کند. با بررسی همسایگی‌های رؤس مجاور a^γ و $a^{-\gamma}$ و با توجه به اینکه γ باید مجاورت بین رؤس را نیز در گراف H حفظ کند، نتیجه می‌گیریم که این جابه‌جایی امکان‌پذیر نمی‌باشد. لذا γ رؤس $a^{-\gamma}$ و a^γ را ثابت نگه می‌دارد. حال ادعا می‌کنیم که γ رؤسی که در $N_1(a^\gamma)$ قرار دارند را نیز نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارد. چون γ ، رأس

a^7 را ثابت نگه‌می‌دارد، لذا γ مجموعه‌ی $\{a^2b, a^{1^0}b, a^{-3}b, a^8b, a^6b\}$ را مجموعه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. از آنجایی که γ با جابه‌جایی رؤس آورده شده در این مجموعه، قادر به حفظ مجاورت بین رؤس در گراف H نمی‌باشد، لذا γ این مجموعه را نقطه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. به‌طریق مشابه γ با ثابت نگه‌داشتن رأس a^{-7} مجموعه‌ی $\{a^{-6}b, a^4b, a^{-4}b, a^{-8}b, a^9b\}$ را نیز نقطه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. حال می‌خواهیم بدانیم γ چه رفتاری در مقابل سه رأس $\{a^{-2}b, a^5b, a^{-9}b\}$ نشان می‌دهد. قابل ذکر است که این سه رأس تنها رؤسی در همسایگی $N_2(b)$ می‌باشند که هیچ اشتراکی با رؤس a^{-7} و a^7 ندارند، لذا γ این سه رأس را مجموعه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. حال ادعا می‌کنیم γ این سه رأس را نقطه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. که به طریق مشابه، با توجه به آنچه که در قبل گفته شد می‌توان این ادعا را ثابت کرد. حال می‌خواهیم نشان دهیم γ ، $N_1(b)$ را نقطه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. چون γ رأس b را ثابت نگه‌می‌دارد در نتیجه مجموعه‌ی $\{a^{-1}, a, a^{-3}, a^5, a^{1^0}\}$ را مجموعه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد. حال رأس a^{-1} را در نظر می‌گیریم. این رأس در مجاورت $a^{-2}b$ از $N_2(b)$ قرار دارد که توسط γ ثابت نگه داشته شده است، که در بین رؤس این مجموعه تنها رأس a^{-3} این خاصیت را دارد. از طرفی رأس a^{-1} علاوه بر رأس b مجاور رأس دیگری در $N_1(1)$ می‌باشد در صورتی که رأس a^{-3} فاقد این خاصیت است، لذا γ رؤس a^{-3} و a^{-1} را ثابت نگه‌می‌دارد. رأس a در مجاورت رأس a^2b ، که توسط γ ثابت نگه‌داشته شده است، قرار دارد و چون هیچ کدام از رؤس a^{1^0} و a^5 در مجاورت رأس a^2b قرار ندارند، لذا رأس a نمی‌تواند با هیچ کدام از این دو رأس جابه‌جا شود، بنابراین γ رأس a را ثابت نگه‌می‌دارد. حال رأس a^5 در مجاورت رأس a^4b از $N_2(b)$ که توسط γ ثابت نگه داشته شده است، قرار گرفته است و چون رأس a^{1^0} فاقد این خاصیت است لذا γ ، a^5 را نیز ثابت نگه‌می‌دارد، بنابراین γ ، رأس a^{1^0} را نیز ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ ، $N_1(b)$ را ثابت نگه‌می‌دارد. حال به روش مشابه‌ای که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شده است، چون G دارای خواص کمان-انتقالی و همبندی است، لذا γ همه‌ی رؤس G را ثابت نگه‌می‌دارد. $\square$

لم ۸.۱.۳. فرض کنید $G = Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{-l^2-l}b, a^{l^2+2l+2}b\})$ یک گراف کیلی

۶-ظرفیت باشد که در آن $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n}$. اگر 35 ، $|N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))| =$

برهان. فرض کنید $\gamma \in \text{Aut}(G)_{(1,b)}$ و $H = G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))]$ زیرگراف القایی از G باشد، که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است. درحقیقت شکل (۴.۳) زیرگراف القایی $G[V(H) \cup \{a^{-l-2}, a^{-l^2-2l-3}\}]$ می باشد.



از آنجایی که γ یک خودریختی از G می باشد که کمان $(1, b)$ را ثابت نگه می دارد، لذا γ رئوسی که مجاور رأس ۱ هستند را نیز مجموعه وار ثابت نگه می دارد. به همین ترتیب رئوسی را که به فاصله ی ۲ و ۳ از رأس ۱ نیز قرار دارند را مجموعه وار ثابت نگه می دارد. لذا γ یک خودریختی گرافی از H می باشد. از آنجایی که رأس a^{-l^2-l-1} تنها رئسی در $N_1(b) \cap N_2(1)$ است که مجاور سه رأس در $N_1(1)$ می باشد، لذا γ رأس a^{-l^2-l-1} را ثابت نگه می دارد. از طرفی داریم $\{b, a^{l+1}b, a^{-l^2-l}b\} = N_1(a^{-l^2-l-1}) \cap N_1(1)$. از آنجایی که γ رئوس ۱ و a^{-l^2-l-1} را ثابت نگه می دارد، لذا γ باید مجموعه ی $\{b, a^{l+1}b, a^{-l^2-l}b\}$ را مجموعه وار ثابت نگه دارد. رأس b که توسط γ ثابت نگه داشته شده است، لذا دو حالت می تواند رخ دهد، یا رئوس

$a^{l+1}b$ و $a^{-l^2-l}b$ توسط γ ثابت نگه داشته شوند و یا این دو رأس توسط γ باهم جابه‌جا شوند. ادعا می‌کنیم که γ رئوس $a^{l+1}b$ و $a^{-l^2-l}b$ را ثابت نگه می‌دارد. برای اثبات این ادعا، فرض می‌کنیم این چنین نباشد، یعنی γ دو رأس $a^{l+1}b$ و $a^{-l^2-l}b$ را با هم جابه‌جا کند. می‌دانیم رأس a^{l+1} تنها رأسی در $N_1(a^{l+1}b) \cap N_2(1)$ است که مجاور دو رأس در $N_1(1)$ است ولی مجاور هیچ رأسی در $N_2(b) \cap N_3(1)$ نیست. رأس a^{-l^2-l} نیز تنها رأسی در $N_1(a^{-l^2-l}b) \cap N_2(1)$ است که مجاور دو رأس در $N_1(1)$ است و مجاور هیچ رأسی در $N_2(b) \cap N_3(1)$ نیست. بنابراین جابه‌جایی دو رأس $a^{l+1}b$ و $a^{-l^2-l}b$ سبب جابه‌جایی دو رأس a^{l+1} و a^{-l^2-l} می‌شود. حال باتوجه به جابه‌جایی‌هایی که رخ داد، خودریختی γ را می‌توان به صورت حاصل ضربی از جایگشت‌های دوری روی مجموعه رئوس H به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \gamma = & (a^{-l^2-l-1})(a^{l+1}b \ a^{-l^2-l}b)(a^{l+1} \ a^{-l^2-l})(ab \ a^{l^2+2l+2}b)(a^l \ a^{-2l^2-3l-2}) \\ & (a^{-l^2} \ a^{-2l^2-2l-1})(a^{-l^2-2l-1} \ a^{l^2+2l+1})(a^{-l} \ a^{2l^2+3l+2})(a^l b \ a^{-2l^2-3l-2}b) \\ & (a^{l^2+2l+1}b \ a^{-l^2-2l-1}b)(a^{-l^2}b \ a^{-2l^2-2l-1}b)(a^{-1} \ a^{-l^2-2l-2})(a^{l^2+l} \ a^{-l-1}) \\ & (a^{-1}b \ a^{-l^2-2l-2}b)(a^{l^2+l}b \ a^{-l-1}b) \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

از آنجایی که طبق معادله‌ی (۱.۳)، γ رئوس $a^{-1}b$ و $a^{-l^2-2l-2}b$ را با هم جابه‌جا می‌کند، لذا γ باید

$$N_1(a^{-1}b) \cap (N_3(b) \cap N_4(1)) \cap N_1(a^{-l^2-2l-2}b) = \{a^{-l-2}, a^{-l^2-2l-3}\}$$

را مجموعه وارثان نگه دارد. از طرفی رأس a^{-l-2} مجاور چهار رأس در $N_2(b) \cap N_3(1)$ است، در صورتی که رأس a^{-l^2-2l-3} تنها مجاور دو رأس در $N_2(b) \cap N_3(1)$ است. لذا γ دو رأس a^{-l-2} و a^{-l^2-2l-3} را ثابت نگه می‌دارد. حال از آنجایی که γ این دو رأس را ثابت نگه می‌دارد، لذا باید

$$N_1(a^{-l-2}) \cap N_1(a^{-l^2-2l-3}) = \{a^{-l-2}b, a^{-1}b, a^{-l^2-2l-2}b\}$$

را مجموعه وارثان ثابت نگه دارد. از طرفی γ رئوس $a^{-1}b$ و $a^{-l^2-2l-2}b$ را طبق معادله (۱.۳) باهم جابه‌جا می‌کند، لذا γ رأس $a^{-l-2}b$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ رئوس a^{-l-2} و $a^{-l^2-2l-2}b$ را ثابت نگه داشته و رئوس $a^{-1}b$ و $a^{-l^2-2l-2}b$ را باهم جابه‌جا می‌کند. حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲)

آورده شد می‌توان دید، اگر γ رئوس a^{-l-2} و $a^{-l-2}b$ را ثابت نگه دارد و رئوس $a^{-1}b$ و $a^{-l^2-2l-2}b$ را باهم جابه‌جا کند، آنگاه γ رئوس $a^{2(-l-2)}b$ و $a^{2(-l-2)}$ را ثابت نگه داشته و رئوس $a^{-l-3}b$ و $a^{-l^2-3l-4}b$ را باهم جابه‌جا می‌کند. با ادامه‌ی این روند می‌توان دید که برای هر عدد صحیح t ، γ رئوس $a^{t(-l-2)}$ و $a^{t(-l-2)}b$ را ثابت نگه می‌دارد. حال فرض کنیم $r := \gcd(l+2, n)$. بنابراین برای عدد صحیح i ، داریم $l+2 = ir$. از آنجایی که $l^3 + 2l^2 + 2l + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ، لذا $r | l^3 + 2l^2 + 2l + 1$. بنابراین

$$l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = i^2 r^3 - 4i^2 r^2 + 6ir - 3 = r(i^2 r^2 - 4i^2 r + 6i) - 3$$

در نتیجه $r | 3$. حال از آنجایی که $r = \gcd(l+2, n)$ ، لذا اعداد صحیح p و s ای وجود دارند که $r = s(l+2) + np$. از آنجایی که γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس $a^{t(l+2)}b$ و $a^{t(l+2)}$ را ثابت نگه می‌دارد لذا γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس $a^{rt}b$ و a^{rt} را نیز ثابت نگه می‌دارد. حال بحث را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت (۱): اگر $r = 1$ ، آنگاه γ همه‌ی رئوس G را ثابت نگه می‌دارد که این با معادله‌ی (۱.۳) در تناقض است.

حالت (۲): اگر $r = 3$ ، آنگاه γ برای هر عدد صحیح t ، رئوس $a^{3t}b$ و a^{3t} را ثابت نگه می‌دارد. حال با استفاده از این مطلب که $l+2 = 3i$ ، داریم:

$$l^2 - 2l = (3i - 2)^2 - 2(3i - 2) = -9i^2 + 6i = 3(-3i^2 + 2i)$$

لذا γ رأس $a^{-l^2-2l}b$ در $N_1(a^{-l}) \cap N_1(a^{-l^2-2l-1}) \cap N_3(1)$ را ثابت نگه می‌دارد. حال با استفاده از معادله‌ی (۱.۳)، می‌دانیم که γ رئوس a^{l^2+2l+1} و a^{-l^2-2l-1} را باهم جابه‌جا می‌کند، از طرفی می‌دانیم که $a^{-l^2-2l}b \notin N_1(a^{l^2+2l+1})$ ، لذا این جابه‌جایی امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این صورت به تناقض می‌رسیم. بنابراین γ رئوس $a^{l+1}b$ و $a^{-l^2-l}b$ را ثابت نگه می‌دارد. حال از آنجایی که γ رأس $a^{-l^2-l}b$ را ثابت نگه می‌دارد، لذا γ مجموعه‌ی زیر را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد.

$$N_1(a^{-l^2-l}b) \cap N_2(1) = \{a^{-l^2-l-1}, a^{-l^2-l}, a^{-l^2-2l-1}, a^{-2l^2-2l-1}, a^{-2l^2-3l-2}\}.$$

از طرفی هیچ کدام از رؤس آورده شده در مجموعه‌ی بالا دارای خواص مشترکی نیستند، به عنوان مثال در مجموعه‌ی بالا تنها رأسی که مجاور دو رأس در $N_2(b)$ و مجاور دو رأس در $N_1(1)$ است، رأس a^{-l^2-l-1} می‌باشد. در صورتی که هیچ رأس دیگری در این مجموعه دارای این خاصیت نمی‌باشد. با بررسی خواص همه‌ی رؤس گفته شده در مجموعه‌ی بالا می‌توان به این نتیجه رسید که γ همه‌ی رؤس آورده شده در مجموعه‌ی $\{a^{-l^2-l-1}, a^{-l^2-l}, a^{-l^2-2l-1}, a^{-2l^2-2l-1}, a^{-2l^2-3l-2}\}$ را ثابت نگه می‌دارد. از طرفی دو رأس a^{-l^2-l} و a^{-l^2-2l-1} که توسط γ ثابت نگه داشته شده‌اند، مجاور دو رأس ab و $a^{-l^2-l}b$ در $N_1(1)$ می‌باشند، از آنجایی که γ رأس $a^{-l^2-l}b$ را نیز ثابت نگه داشته است، لذا γ رأس ab را نیز ثابت نگه می‌دارد. از طرفی می‌دانیم γ ، رأس b را نیز ثابت نگه داشته است، لذا γ رؤسی که در مجاورت b نیز قرار دارند را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد. در این مجموعه تنها رؤسی که دارای خواص مشابه هستند، امکان جابه‌جایی با هم را دارند. لذا γ ، $\{a^{-l-1}, a^{l^2+l}\}$ را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد. این دو رأس فقط مجاور دو رأس b و $a^{l^2+l+1}b$ در $N_1(1)$ هستند. چون b توسط γ ثابت نگه داشته شده است، لذا γ رأس $a^{l^2+l+1}b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. تا اینجا ثابت کردیم γ بجز رأس $a^{l^2+2l+2}b$ در $N_1(1)$ ، بقیه‌ی رؤسی که در $N_1(1)$ قرار دارند را ثابت نگه داشته است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که γ رأس $a^{l^2+2l+2}b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد، لذا γ تمام رؤسی که به فاصله‌ی یک از رأس ۱ قرار دارند را ثابت نگه می‌دارد. حال با استفاده از روش مشابه‌ای که در اثبات لم (۱.۲.۲) آورده شد، چون G دارای خواص همبندی و کمان-انتقالی است، لذا γ همه رؤس G را ثابت نگه می‌دارد. $\square$

قضیه ۹.۱.۳. فرض کنید G یک گراف کیلی ۶-ظرفیت و از کمر ۴ روی گروه دووجهی D_n باشد. آنگاه،

G یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است اگر و تنها اگر G با گراف کیلی

$$Cay(D_n, \{b, ab, a^{l+1}b, a^{l^2+l+1}b, a^{l^3+l^2+l+1}b, a^{l^4+l^3+l^2+l+1}b\})$$

یکریخت باشد که (n, l) در شرایط زیر صدق کند:

$$(1) \quad l^3 + 1 = 0 \pmod{n}, \text{ و برای هر عدد صحیح } s \geq 1, (n, l) \text{ با هیچ یک از زوج‌های } (9s, 3s-1),$$

$$(۷, ۵), (۷, ۳) \text{ یا } (۹s, ۶s - ۱) \text{ مساوی نباشد.}$$

$$(۲) \quad l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n} \text{ و برای هر عدد صحیح } s, s \geq 1 \text{ با هیچ‌یک از زوج‌های}$$

$$(۶, ۱), (۹s - ۳, ۳s - ۲) \text{ یا } (۹s + ۳, ۶s + ۱) \text{ مساوی نباشد.}$$

$$(۳) \quad (n, l) = (۲۱, ۱۹).$$

برهان. فرض کنید G یک گراف کیلی ۶-ظرفیت و از کمر ۴ روی گروه دووجهی D_n باشد. از اینکه G

یک-منتظم نرمال با پایدارساز رأس دوری است، لذا طبق آنچه که در اثبات لم (۲.۲.۲) آورده شد، می‌توان

نتیجه گرفت که $Aut(D_n, S)$ یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی ۶ است که به‌طور انتقالی روی مجموعه‌ی

$S = N_1(۱)$ عمل می‌کند. حال با استفاده از قضیه (۳.۱.۲)، گراف کیلی G یک-منتظم نرمال با پایدارساز

رأس دوری است اگر و تنها اگر G ، یکرخت با گراف کیلی ۶-ظرفیت

$Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq ۵\})$ باشد که در آن $\sum_{j=0}^۵ l^j = 0 \pmod{n}$ و G از کمر ۴ است.

حال طبق قضیه (۲.۱.۳)، گراف کیلی ۶-ظرفیت $Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq ۵\})$ ، که در آن

$$\sum_{j=0}^۵ l^j = 0 \pmod{n}, \text{ از کمر ۴ است اگر و تنها اگر یکی از موارد زیر اتفاق بیفتد:}$$

$$(۱) \quad l^3 - 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(۲) \quad l^3 + 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(۳) \quad l^3 + 2l^2 + 2l + 1 = 0 \pmod{n},$$

$$(۴) \quad (n, l) = (۲۱, ۱۹).$$

اگر $l^3 - 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه بنابر قضیه (۳.۱.۳)، گراف G یک-منتظم نیست، لذا حالت (۱) رخ

نمی‌دهد.

حال اگر $l^3 + 1 = 0 \pmod{n}$ ، آنگاه بنابر لم (۴.۱.۳)، برای هر عدد صحیح مثبت s ، (n, l) با هیچ‌یک

از زوج‌های $(۷, ۵), (۷, ۳), (۹s, ۳s - ۱)$ یا $(۹s, ۶s - ۱)$ مساوی نیست.

حال اگر $(mod\ n) \ 1 + 2l + 2l^2 + l^3 = 0$ ، در این صورت اگر $35 \neq |N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))|$ ،
 آنگاه طبق لم (۵.۱.۳)، (n, l) برای هر عدد صحیح $1 \leq s$ ، یکی از جفت‌های $(1, 6)$ ، $(2, 3s - 3)$ ، $(3s + 1, 6s + 3)$ می‌باشد، که طبق لم (۶.۱.۳)، گراف کیلی G به‌ازای این (n, l) ها یک-منتظم نیست.
 حال اگر $35 = |N_2(1) \cup (N_2(b) \cap N_3(1))|$ ، آنگاه طبق لم (۸.۱.۳)، گراف کیلی G یک-منتظم است،
 لذا حالت (۳) زمانی رخ می‌دهد که برای هر عدد صحیح $1 \leq s$ ، (n, l) مساوی با هیچ‌یک از جفت‌های
 $(1, 6)$ ، $(2, 3s - 3)$ ، $(3s + 1, 6s + 3)$ یا $(9s - 3, 3s - 2)$ نباشد.

□ حال اگر $(n, l) = (21, 19)$ ، آنگاه بنابر لم (۷.۱.۳) گراف G یک-منتظم است.

گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت از کمر ۶

حال به گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت و از کمر ۶ $G = Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq 5\})$ که در آن
 $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ می‌پردازیم.

فرض کنید $T := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1)]$ زیرگراف القایی از G باشد. هم‌چنین فرض
 کنید برای $l \geq 3$ و $n = \sum_{j=0}^5 l^j$ ، $T_0 := G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1)]$ ، T_0 زیرگراف القایی از
 گراف کیلی $G = Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq 5\})$ باشد. بنابراین تعداد رئوس T_0 بزرگ‌تر یا مساوی از
 تعداد رئوس هر زیرگراف القایی ممکن دیگر T خواهد بود. در حالت (۱) از بخش (۲.۲)، ابتدا گراف‌های
 کیلی‌ای را که زیرگراف القایی T در آن‌ها یکرخت با زیرگراف القایی T_0 نباشد را تشکیل دادیم و سپس در
 حالت (۲) از بخش (۲.۲) گراف‌های کیلی‌ای را که در آن‌ها زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T_0 باشد
 را مشخص کردیم. در گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت که از کمر ۶ می‌باشند، ما تنها به حالتی می‌پردازیم که در
 آن زیرگراف القایی T یکرخت با گراف T_0 می‌باشد.

قضیه ۱۰.۱.۳. فرض کنید $\sum_{j=0}^5 l^j = 0 \pmod{n}$ و $G = Cay(D_n, \{a^{\sum_{j=0}^t l^j} b \mid 0 \leq t \leq 5\})$ یک
 گراف کیلی ۶-ظرفیت و از کمر ۶ باشد. هم‌چنین فرض کنید

$$T = G[N_0(1) \cup N_1(1) \cup N_2(1) \cup N_3(1)]$$

زیرگراف القایی از G باشد. اگر T یکرخت با T_0 باشد، آنگاه G یک-منتظم است.

برهان. برای هر عدد صحیح $5 \leq t \neq s \neq r \leq 5$ و $g \in D_n$ مسیر P

$$P := (g, ga^{\sum_{j=0}^r l^j} b, ga^{\sum_{j=0}^r l^j - \sum_{j=0}^s l^j}, ga^{\sum_{j=0}^r l^j - \sum_{j=0}^s l^j + \sum_{j=0}^t l^j} b)$$

رابا شروع از g و اتصال‌های پی‌درپی با مولدهای $a^{\sum_{j=0}^r l^j} b$ ، $a^{\sum_{j=0}^s l^j} b$ و $a^{\sum_{j=0}^t l^j} b$ تشکیل می‌دهیم آنگاه داریم:

(۱) P مشمول در هیچ ۶-دور نیست اگر و تنها اگر $r = t$.

(۲) اگر P مشمول در یک ۶-دور باشد آنگاه مشمول ۶-دور منحصربه‌فرد زیر است.

$$(g, ga^{\sum_{j=0}^r l^j} b, ga^{\sum_{j=0}^r l^j - \sum_{j=0}^s l^j}, ga^{\sum_{j=0}^r l^j - \sum_{j=0}^s l^j + \sum_{j=0}^t l^j} b, ga^{\sum_{j=0}^t l^j - \sum_{j=0}^s l^j}, ga^{\sum_{j=0}^t l^j} b).$$

برای اثبات قسمتهای (۱) و (۲) می‌توان از دو روش استفاده کرد: یکی رسم شکل گراف موردنظر و دیگری درنظر گرفتن همه‌ی حالات ممکن برای اعداد صحیح r, s, t که $5 \leq r, s, t \leq 5$ و $r \neq s$ و $r \neq t$. حال می‌خواهیم یک-منتظمی گراف G را نشان دهیم. فرض کنید $\gamma \in \text{Aut}(G)_{(1,b)}$ دلخواه باشد، آنگاه γ حداقل یکی از رئوس در $N_1(1) \setminus \{b\}$ را ثابت نگه می‌دارد یا جایگشتی دوری روی مجموعه‌ی $N_1(1) \setminus \{b\}$ می‌باشد. حال بحث را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت (۱): برای $0 \leq u \leq 4$ ، γ رأس $a^{\sum_{j=0}^u l^j} b$ را ثابت نگه دارد. با قرار دادن $g = a^{\sum_{j=0}^u l^j} b$ ، $r = u$ و $s = 5$ در مسیر P می‌توان دید که برای هر عدد صحیح v که $0 \leq v \leq 4$ و $v \neq u$ ، مسیر $(a^{\sum_{j=0}^u l^j} b, 1, b, a^{-\sum_{j=0}^v l^j})$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است، در صورتی که مسیر $(a^{\sum_{j=0}^u l^j} b, 1, b, a^{-\sum_{j=0}^u l^j})$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست. بنابراین γ ، رأس $a^{-\sum_{j=0}^u l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین اگر γ برای $0 \leq u \leq 4$ ، رأس $a^{\sum_{j=0}^u l^j} b$ را ثابت نگه دارد، آنگاه γ رأس $a^{-\sum_{j=0}^u l^j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد.

حال با قراردادن $g = 1$ ، $r = 5$ و $s = u$ در مسیر P می‌توان دید که برای هر عدد صحیح v که $0 \leq v \leq 4$

، مسیر $(1, b, a^{-\sum_{j=0}^u l^j}, a^{\sum_{j=0}^v l^j - \sum_{j=0}^u l^j} b)$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است، در صورتی که

مسیر $(1, b, a^{-\sum_{j=0}^u l^j}, a^{-\sum_{j=0}^u l^j})$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست. بنابراین γ رأس $a^{-\sum_{j=0}^u l^j} b$ را ثابت نگه می‌دارد. حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شد می‌توان گفت، اگر γ رئوس $a^{-\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-\sum_{j=0}^u l^j}$ را ثابت نگه دارد، آنگاه γ رئوس $a^{-2\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-2\sum_{j=0}^u l^j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. با ادامه‌ی این روند می‌توان دید که برای هر عدد صحیح مثبت i ، γ رئوس $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد. از آنجایی که $a^{(n-i)\sum_{j=0}^u l^j} b = a^{-i\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{(n-i)\sum_{j=0}^u l^j} = a^{-i\sum_{j=0}^u l^j}$ می‌توان نتیجه گرفت که γ برای هر عدد صحیح منفی i ، رئوس $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد.

تاکنون نشان دادیم برای $0 \leq u \leq 4$ ، γ با ثابت نگه‌داشتن رأس $a^{\sum_{j=0}^u l^j} b$ ، برای هر عدد صحیح i ، رئوس $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. حال اگر $u = 0$ ، آنگاه واضح است که γ همه‌ی رئوس G را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ خودریختی همانی است. حال اگر $u = 4$ ، قرار می‌دهیم $r := \gcd(n, \sum_{j=0}^4 l^j)$. همان‌طور که در فرض قضیه گفته شد $\sum_{j=0}^4 l^j \equiv 0 \pmod{n}$. بنابراین داریم $\gcd(n, \sum_{j=0}^4 l^j) = 1$ از آنجا که $r | (1 + l + l^2 + l^3 + l^4) + 1$ و $r | 1 + l + l^2 + l^3 + l^4$ ، لذا $r = 1$. حال از $\langle ab \rangle = \langle a^{\sum_{j=0}^4 l^j} b \rangle$ و $\langle a \rangle = \langle a^{\sum_{j=0}^4 l^j} \rangle$ می‌توان نتیجه گرفت که γ با ثابت نگه داشتن رأس $a^{\sum_{j=0}^4 l^j} b$ می‌تواند همه‌ی رئوس گراف G را ثابت نگه دارد، بنابراین γ خودریختی همانی است. حال فرض کنیم که $1 \leq u \leq 3$ ، می‌دانیم γ با ثابت نگه داشتن رأس $a^{\sum_{j=0}^u l^j} b$ ، برای هر عدد صحیح i ، رئوس $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{-i\sum_{j=0}^u l^j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. عدد صحیح دلخواه i را $-l$ در نظر می‌گیریم، لذا برای $1 \leq u \leq 3$ ، رئوس $a^{l\sum_{j=0}^u l^j} b$ و $a^{l\sum_{j=0}^u l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد. با محاسبه‌ی $N_1(b)$ و $N_2(1)$ می‌توان دید که رأس $a^{l\sum_{j=0}^u l^j} b$ تنها مجاور یک رأس a^{-1} در $N_1(b) \cap N_2(1)$ می‌باشد. لذا γ رأس a^{-1} در $N_1(b) \cap N_2(1)$ را ثابت نگه می‌دارد. حال با محاسبه‌ی $N_1(a^{-1})$ و $N_3(1)$ می‌توان دید که رأس $a^{-1}b$ تنها رأسی در $N_1(a^{-1}) \cap N_3(1)$ می‌باشد که فقط مجاور رأس a^{-1} در $N_1(b) \cap N_2(1)$ است، لذا γ رأس $a^{-1}b$ را نیز ثابت نگه می‌دارد. $\{a^{-(\sum_{j=0}^v l^j + 1)} \mid 0 \leq v \leq 4\}$ را تشکیل می‌دهیم. برای هر عدد صحیح v که $1 \leq v \leq 4$ ، رأس $a^{-(\sum_{j=0}^v l^j + 1)}$ مجاور رأس $a^{-\sum_{j=0}^v l^j} b$ در $(N_2(b) \cap N_3(1)) \setminus \{a^{-1}b\}$ می‌باشد، ولی رأس a^{-2} مجاور هیچ رأسی در $(N_2(b) \cap N_3(1)) \setminus \{a^{-1}b\}$ نیست. بنابراین γ رأس a^{-2} را

ثابت نگه می‌دارد. حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شد می‌توان گفت، از آنجایی که γ رئوس $a^{-1}b$ ، a^{-2} و a^{-3} را ثابت نگه می‌دارد، لذا γ رئوس $a^{-2}b$ و a^{-3} را نیز ثابت نگه دارد. با ادامه‌ی این روند برای هر عدد صحیح i ، γ می‌تواند رئوس a^{-i} و $a^{-i}b$ را نیز ثابت نگه دارد. بنابراین γ خودریختی همانی است.

حالت (۲): γ مجموعه‌ی $\{a^{\sum_{j=0}^u l^j} b \mid 0 \leq u \leq 4\}$ را به‌صورت دوری جابه‌جا کند. فرض کنید γ شامل دور $(a^{i_0}b, a^{i_1}b, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$ باشد که $\{a^{\sum_{j=0}^u l^j} b \mid 0 \leq u \leq 4\} = \{a^{i_j}b \mid 0 \leq j \leq 4\}$. برای هر عدد صحیح j که $0 \leq j \leq 4$ ، با قرار دادن $g = a^{i_j}b$ ، $\sum_{j=0}^r l^j = i_j$ و $s = 5$ در مسیر P می‌توان دید که برای هر $i_{j'} \neq i_j$ ، مسیر $(a^{i_j}b, 1, b, a^{-i_{j'}})$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است، در صورتی که مسیر $(a^{i_j}b, 1, b, a^{-i_j})$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست. بنابراین γ شامل دور $(a^{-i_0}, a^{-i_1}, a^{-i_2}, a^{-i_3}, a^{-i_4})$ می‌باشد.

برای هر عدد صحیح j که $0 \leq j \leq 4$ ، با قرار دادن $g = 1$ ، $r = 5$ و $\sum_{j=0}^s l^j = i_j$ در مسیر P ، می‌توان دید که برای هر $i_{j'} \neq i_j$ که $\sum_{j=0}^5 l^j = i_{j'}$ ، آنگاه مسیر $(1, b, a^{-i_j}, a^{(-i_j+i_{j'})}b)$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است، در صورتی که مسیر $(1, b, a^{-i_j}, a^{-i_j}b)$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست. بنابراین γ شامل دور $(a^{-i_0}b, a^{-i_1}b, a^{-i_2}b, a^{-i_3}b, a^{-i_4}b)$ می‌باشد.

برای هر j که $0 \leq j \leq 4$ ، $N_1(a^{i_j}) \cap N_1(a^{i_{j+1}}) = \{a^{i_j+i_{j+1}}b\}$. حال با استفاده از خودریختی از G القا شده توسط ضرب از چپ در b ، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$N_1(a^{-i_j}b) \cap N_1(a^{-i_{j+1}}b) = \{a^{-i_j-i_{j+1}}\}.$$

بنابراین γ شامل دور $(a^{-i_0-i_1}, a^{-i_1-i_2}, a^{-i_2-i_3}, a^{-i_3-i_4}, a^{-i_4-i_0})$ است.

برای هر j که $0 \leq j \leq 4$ ، داریم:

(۳) با قرار دادن $g = a^{-i_j}$ ، $r = 5$ و $\sum_{j=0}^s l^j = i_{j+1}$ در مسیر P ، می‌توان دید که برای هر

$i_{j'} \neq \sum_{j=0}^5 l^j$ ، مسیر $(a^{-i_j}, a^{-i_j}b, a^{-i_j-i_{j+1}}, a^{-i_j-i_{j+1}+i_{j'}}b)$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است،

در صورتی که مسیر $(a^{-i_j}, a^{-i_j}b, a^{-i_j-i_{j+1}}, a^{-i_j-i_{j+1}}b)$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست.

(۴) با قرار دادن $g = a^{-i_{j+1}}$, $r = 5$ و $l^j = i_{j+2}$ در مسیر P , می‌توان دید که برای هر $l^j \neq \sum_{j=0}^5 l^j$, مسیر $(a^{-i_{j+1}}, a^{-i_{j+1}}b, a^{-i_{j+1}-i_{j+2}}, a^{-i_{j+1}-i_{j+2}+i_{j+3}}b)$ مشمول در ۶-دور منحصربه‌فردی است، در صورتی که مسیر $(a^{-i_{j+1}}, a^{-i_{j+1}}b, a^{-i_{j+1}-i_{j+2}}, a^{-i_{j+1}-i_{j+2}}b)$ مشمول در هیچ ۶-دور نیست. از آنجایی که $\gamma(a^{-i_j}) = a^{-i_{j+1}}$, $\gamma(a^{-i_j}b) = a^{-i_{j+1}}b$ و $\gamma(a^{-i_j-i_{j+1}}) = a^{-i_{j+1}-i_{j+2}}$ با استفاده از (۴)-(۳)، γ شامل دور

$$(a^{-i_0-i_1}b \ a^{-i_1-i_2}b \ a^{-i_2-i_3}b \ a^{-i_3-i_4}b \ a^{-i_4-i_5}b)$$

می‌باشد. با تکرار این روند می‌توان دید که γ رئوس $a^{-\sum_{j=0}^4 i_j}b$ و $a^{-\sum_{j=0}^4 i_j}$ را ثابت نگه می‌دارد، و γ شامل دور $(a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b)$ می‌باشد. (در واقع $\sum_{j=0}^4 i_j = \sum_{j=0}^4 l^j$). حال با روندی شبیه آنچه که در اثبات لم (۱۱.۲.۲) آورده شد می‌توان گفت، از آنجایی که γ رئوس $a^{-\sum_{j=0}^4 i_j}b$ و $a^{-\sum_{j=0}^4 i_j}$ را ثابت نگه می‌دارد و شامل دور

$$(a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b)$$

می‌باشد، لذا γ رئوس $a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j}b$ و $a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j}$ را نیز ثابت نگه می‌دارد و شامل دور زیر می‌باشد.

$$(a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b \ a^{-2\sum_{j=0}^4 i_j-i_5}b).$$

با ادامه‌ی این روند می‌توان نتیجه گرفت که γ برای هر عدد صحیح t , رئوس $a^{-t\sum_{j=0}^4 i_j}b$ و $a^{-t\sum_{j=0}^4 i_j}$ را ثابت نگه می‌دارد. قرار می‌دهیم $r := \gcd(\sum_{j=0}^4 l^j, n)$. طبق فرض می‌دانیم که $\sum_{j=0}^4 l^j = 0 \pmod{n}$. لذا $\sum_{j=0}^4 l^j \mid r$. حال با استفاده از $\sum_{j=0}^4 i_j = \sum_{j=0}^4 l^j$ داریم $\sum_{j=0}^4 l^j - (l-1)\sum_{j=0}^4 l^j = 6$. روابط $\sum_{j=0}^4 l^j \mid r$, $\sum_{j=0}^4 l^j - (l-1)\sum_{j=0}^4 l^j = 6$ و $r \mid \sum_{j=0}^4 l^j$ می‌توان نتیجه گرفت که $6 \mid r$. حال از آنجایی که $r = \gcd(\sum_{j=0}^4 l^j, n)$, لذا اعداد صحیح p و s ای وجود دارند که $r = s(\sum_{j=0}^4 l^j) + np$. از آنجایی که γ برای هر عدد صحیح t , رئوس $a^{t\sum_{j=0}^4 l^j}b$ و $a^{t\sum_{j=0}^4 l^j}$ را ثابت نگه می‌دارد لذا γ برای هر عدد صحیح t , رئوس $a^{rt}b$ و a^{rt} را نیز ثابت نگه می‌دارد. بنابراین γ برای هر عدد صحیح t رئوس $a^{6t}b$ و a^{6t} را ثابت نگه می‌دارد. از طرفی برای عدد صحیح i, l را می‌توان به صورت $6i-1, 6i-2, 6i-3, 6i-4$

یا $6i - 5$ نوشت. اگر $l = 6i$ ، آنگاه γ رأس a^l را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 6i - 1$ ، آنگاه $6i = l + 1$ ، بنابراین γ رأس $a^{l+1}b$ را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 6i - 2$ ، آنگاه γ رأس $a^{l^2+l^3+l^4}$ را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 6i - 3$ ، آنگاه γ رأس a^{-l^2-l} را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 6i - 4$ ، آنگاه γ رأس a^{-l^2-l} را ثابت نگه می‌دارد. اگر $l = 6i - 5$ ، آنگاه γ رأس $a^{-l+1}b$ را ثابت نگه می‌دارد. اما از آنجایی که γ جایگشتی است که مجموعه‌ی $\{a^{\sum_{j=0}^u l^j} b \mid 0 \leq u \leq 4\}$ را به صورت دوری جابه‌جا می‌کند، لذا هیچ کدام از این حالات نمی‌تواند اتفاق بیفتد. پس حالت (۲) نیز امکان پذیر نمی‌باشد، لذا γ خودریختی همانی است و در نتیجه G' یک-منتظم است. $\square$

مراجع

- [۱] باندی، مورتی، (۱۳۷۸)، *نظریه‌ی گراف و کاربردهای آن*، د معظمی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- [۲] جمالی، (۱۳۸۰)، *مباحثی در نظریه‌ی گروه‌ها*، چاپ اول، انتشارات مبتکران، تهران.
- [3] B. Alspach, D. Marusic, L. Nowitz, *Constructing graphs which are 1/2-transitive*, J. Austral. Math. Soc. A, **56** (1994) 391-402.
- [4] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [5] Y. Cheng, J. Oxley, *On weakly symmetric graphs of order twice a prime*, J. Combin. Theory, Ser. B, **42** (1987) 196-211.
- [6] D.Z. Djokovic, G.L. Miller, *Regular groups of automorphisms of cubic graphs*, J. Combin. Theory, **29** (1980) 195-230.
- [7] R. Frucht, *A one-regular graph of degree three*, Canad. J. Math, **4** (1952) 240-247.
- [8] A. Gardiner, C.E. Praeger, *On 4-valent symmetric graphs*, Europ. J. Combin., **15** (1994) 375-381.
- [9] A. Gardiner, C.E. Praeger, *A characterization of certain families of 4-valent symmetric graphs*, Europ. J. Combin., **15** (1994) 383-397.
- [10] A. Gardiner, R. Nedela, J. Siran, M. Skoviera, *Characterisation of graphs which underlie regular maps on closed surfaces*, J. London Math. Soc. (2), **59** (1999) 100-108.
- [11] J.H. Kwak, J.M. Oh, *Infinitely many finite one-regular graphs of any even valency*, J. Combin. Theory, Ser. B, **90** (2004) 185-191.
- [12] J.H. Kwak, J.M. Oh, *One-regular Normal Cayley Graphs on Dihedral Groups of Valency 4 or 6 with Cyclic Vertex Stabilizer*, J. Acta Mathematica, **22** (2006) 1305-1320.
- [13] A. Malnic, D. Marusic, N. Seifter, *Constructing infinite one-regular graphs*, Europ. J. Combin., **20** (1999) 845-853.
- [14] D. Marusic, *A Family of one-regular graphs of valency 4*, Europ. J. Combin., **18** (1997) 59-64.
- [15] D. Marusic, M.Y. Xu, *A 1/2-transitive graph of valency 4 with a nonsolvable group of automorphisms*, J. Graph Theory, **25** (1997) 133-138.
- [16] D. Marusic, R. Nedela, *Maps and half-transitive graphs of valency 4*, Europ. J. Combin., **19** (1998) 345-354.
- [17] D. Marusic, T. Pisanski, *Symmetries of hexagonal graphs on the torus*, Croat. Chemica Acta, **73** (2000) 969-981.
- [18] R.C. Miller, *The trivalent symmetric graphs of girth at most six*, J. Combin. Theory, Ser. B, **10** (1971) 163-182.

-
- [19] J.M. Oh, K.W. Hwang, *Construction of one-regular graphs of valency 4 and 6*, Discrete Math., **278** (2004) 195-207.
 - [20] H. Wielandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, New York, 1964.
 - [21] C. Wang, M.Y. Xu, *Nonnormal one-regular and 4-valent Cayley graphs of dihedral groups D_{2n}* , preprint 2003.
 - [22] M.Y. Xu, *Automorphism groups and isomorphism of Cayley digraphs*, Discrete Math, **182** (1998) 309-319.
 - [23] M.Y. Xu, J. Xu, *Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on abelian groups*, Southeast Asian Bulletin of Math., **25** (2001) 355-363.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Translation	انتقال
Transitive	انتقالی
Stabilizer	پایدارساز
Link	پیوند
Permutation	جایگشت
Automorphism	خودریختی
Degree	درجه
Cycle	دور
Vertex	رأس
Subgraph	زیرگراف
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Subgroup	زیرگروه
Loop	طوقه
Valency	ظرفیت
Action	عمل
Distance	فاصله
Arc	کمان

Girth.....	کمر.....
Trail.....	گذر.....
Graph.....	گراف.....
Undirected Graph.....	گراف بی‌سو.....
Bipartite Graph.....	گراف دوبخشی.....
Complete Bipartite Graph.....	گراف دوبخشی کامل.....
Simple Graph.....	گراف ساده.....
Connected Graph.....	گراف همبند.....
Finite Graph.....	گراف متناهی.....
Walk.....	گشت.....
Group.....	گروه.....
Dihedral Group.....	گروه دووجهی.....
Semmytric Group.....	گروه متقارن.....
Adjacent.....	مجاور.....
Disjoint.....	مجزا.....
Orbit.....	مدار.....
Path.....	مسیر.....
Component.....	مؤلفه.....
Normal.....	نرمال.....
Normalizer.....	نرمال‌ساز.....
Mapping.....	نگاشت.....
Semi-regular.....	نیم-منتظم.....

Edge یال

Isomorphism یکریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Action	عمل
Arc	کمان
Adjacent	مجاور
Automorphism	خودریختی
Bipartite Graph	گراف دوبخشی
Complete Bipartite Graph	گراف دوبخشی کامل
Component	مؤلفه
Connected Graph	گراف همبند
Cycle	دور
Degree	درجه
Dihedral Group	گروه دووجهی
Disjoint	مجزا
Distance	فاصله
Edge	یال
Finite Graph	گراف متناهی
Girth	کمر
Graph	گراف

Group	گروه
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Isomorphism	یکریختی
Link	پیوند
Loop	طوقه
Mapping	نگاشت
Normal	نرمال
Normalizer	نرمال‌ساز
Orbit	مدار
Path	مسیر
Permutation	جایگشت
Semi-regular	نیم-منتظم
Semmytric Group	گروه متقارن
Simple Graph	گراف ساده
Stabilizer	پایدارساز
Subgraph	زیرگراف
Subgroup	عمل
Trail	گذر
Transitive	انتقالی
Translation	انتقال
Undirected Graph	گراف بی‌سو
Valency	ظرفیت

Vertex رأس

Walk مسیر

Surname: Abedinzadeh Pasikhani

Name: Zahra

Title: Cayley graphs on dihedral groups

Supervisor: Dr. S. H. Jafari

Advisor: Dr. N. Jafari Rad

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Algebra

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013

Number of pages: 78

Keywords: Dihedral group D_n , Cayley graph, one-regular graph

Abstract

In this dissertation, we study Cayley graphs on dihedral groups. First we present primary definitions and concepts of graph theory and group theory, and then will define Cayley graph, and classify the 4-valent one-regular normal Cayley graph G on a dihedral group whose vertex stabilizers in $\text{Aut}(G)$ are cyclic. A classification of the same kind of graphs of valency 6 is also discussed. This dissertation has been prepared based on [12].



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Cayley graphs on dihedral groups

Supervisor

Dr. S. H. Jafari

Advisor

Dr. N. Jafari Rad

by

Zahra Abedinzadeh Pasikhani

2013