



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

حلقه های IFP و حلقه های شبه-IFP

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر احمد زیره

پژوهشگر

فاطمه عسکری

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: عسکری

نام: فاطمه

عنوان: حلقه‌های IFP و حلقه‌های شبه-IFP

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور: دکتر احمد زیره

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: جبر

دانشگاه: صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱

تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: حلقه‌ی IFP، حلقه‌ی NI، حلقه‌ی شبه-IFP، حلقه‌ی تقلیل یافته، حلقه‌ی چندجمله‌ای، حلقه‌ی ماتریسی، ایده‌آل پوچتوان، حلقه‌ی (موضعا) ۲-اولیه، رادیکال لویتسکی، رادیکال اول، رادیکال پوچ

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بیان حلقه‌های IFP و ایده‌آل‌هایی که شامل ایده‌آل‌های پوچتوان ناصفراند می‌پردازیم. همچنین شرایطی را روی حلقه‌های فون نیومن منظم بررسی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که هر حلقه‌ی (موضعا) ۲-اولیه ناجابجایی مینیمال با حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی 2×2 روی $GF(2)$ یکرخت است. همچنین نشان می‌دهیم هر حلقه‌ی ۲-اولیه، موضعا ۲-اولیه و هر حلقه‌ی موضعا ۲-اولیه، NI است اما عکس این گزاره‌ها برقرار نیست. هر حلقه‌ی پوچ، لزوما ۲-اولیه نیست اما این گزاره برقرار است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R ، رادیکال لویتسکی باشد. در آخر ساختاری از حلقه‌های IFP و شبه-IFP را مشاهده می‌کنیم و همچنین کلاس‌هایی از آنها را گسترش می‌دهیم. نشان می‌دهیم ویژگی شبه-IFP و ویژگی NI متمایز از هم هستند و روابط میان آنها و شرایط مربوط به آنها قابل بررسی است.

تقدیم بہ مادر مہربانم

و پدر عزیزم

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

^۱ مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاسگزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر احمد زیره که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزتر از جانم و همچنین هم‌اتاقی‌های عزیزم خانم معصومه رستمی، خانم آسیه حسینی و خانم فائضه صفری و دوستان خوبم خانم سعیده فرامرزی و خانم هاجر رضایی و خانم زیبا توشمالانی و خانم سمیه کیان به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فاطمه عسکری

۱۳۹۱

فهرست مطالب

۲	۱ مفاهیم مقدماتی
۳	۱.۱ پیش نیازها و تعاریف
۷	۲ حلقه‌های شبه-IFP و حلقه‌های فون نیومن منظم
۸	۱.۲ حلقه‌های شبه-IFP
۲۰	۲.۲ حلقه‌های فون نیومن منظم
۳۵	۳ حلقه‌های ۲-اولیه و موضعا ۲-اولیه
۳۶	۱.۳ حلقه‌های ۲-اولیه
۵۲	۲.۳ ویژگی‌های حلقه‌های موضعا ۲-اولیه و برخی توسیع‌های آن
۶۳	۴ ساختار و مثال‌هایی از حلقه‌های شبه-IFP
۶۴	۱.۴ ساختار حلقه‌های شبه-IFP
۷۰	۲.۴ سیستم موریتا
۸۲	مراجع
۸۴	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۸۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

در این پایان نامه فصل دوم و چهارم از مقاله‌ای با عنوان حلقه‌های IFP و شبه- IFP است که کلیت اصلی این پایان نامه را در بر گرفته است.

فصل سوم آن نیز از مقاله‌ای با عنوان حلقه‌ای که عناصر آن از حلقه‌ی رادیکال لویتسکی است، گرفته شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیش نیازها و تعاریف

در این پایان نامه R نمایانگر حلقه‌ی شرکت پذیر و یکدار است مگر اینکه خلاف آن گفته شود. حلقه‌ی چندجمله‌ای و حلقه‌ی سری‌های توانی روی R را به ترتیب با $R[X]$ و $R[[X]]$ نمایش می‌دهیم که X مجموعه‌ی ناتهی از متغیرهای تعویض ناپذیر روی حلقه‌ی R است. اگر $X = \{x\}$ ، آنگاه $R[X]$ و $R[[X]]$ به ترتیب به صورت $R[\{x\}]$ و $R[[\{x\}]]$ خواهد بود. هر چندجمله‌ای در $R[X]$ به صورت $a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X^{I_j}$ نمایش داده می‌شود که X^{I_j} حاصل ضرب متناهی از عناصر X است. حلقه‌ی ماتریسی $n \times n$ روی حلقه‌ی R را با $Mat_n(R)$ نمایش می‌دهیم و E_{ij} بیانگر ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی (i, j) -ام آن یک و بقیه صفر هستند. حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R را به ترتیب با $UTM_n(R)$ و $LTM_n(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را **پوچتوان**^۱ می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند m وجود داشته باشد که $a^m = 0$.

تعریف ۲.۱.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را **پوچتوان** می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند n وجود داشته باشد که $S^n = 0$.

تعریف ۳.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را **پوچ**^۲ می‌نامیم هرگاه تمام عناصر I پوچتوان باشد.

تعریف ۴.۱.۱. حلقه‌ی R را **پوچ** می‌نامیم هرگاه تمام عناصر آن پوچتوان باشد.

رادیکال پوچ^۳ (مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ) و مجموعه‌ی تمام عناصر پوچتوان در حلقه‌ی R را به ترتیب با $N^*(R)$ و $N(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را **اول**^۴ می‌نامیم هرگاه $R \neq P$ و برای هر دو ایده‌آل AB ، اگر $AB \subseteq P$ ، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

^۱ Nilpotent

^۲ Nil

^۳ Nil radical

^۴ Prime

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را **رادیکال اول**^۵ R می‌نامیم و آن را با $N_*(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. ایده‌آل اول P از حلقه R را **مینیمال**^۶ می‌نامیم هرگاه یک عضو مینیمال مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R باشد.

تعریف ۸.۱.۱. حلقه‌ی R را **نیم اول**^۷ می‌نامیم هرگاه $N_*(R) = 0$.

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $S \subseteq R$ را **موضعا پوچتوان**^۸ می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq S$ عدد صحیح n چنان موجود باشد که حاصلضرب هر n عنصر از مجموعه‌ی $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ صفر باشد. به عبارت دیگر S موضعا پوچتوان است اگر هر زیرحلقه فاقد عنصر همانی تولید شده توسط تعداد متناهی از عناصر S پوچتوان باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموع همه ایده‌آل‌های موضعا پوچتوان حلقه‌ی R را **رادیکال لویتسکی**^۹ می‌نامیم و آن را با $L - rad(R)$ نمایش می‌دهیم.

همواره داریم:

$$N_*(R) \subseteq L - rad(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R)$$

پوچساز راست و پوچساز چپ در حلقه‌ی R را به ترتیب با $r_R(-)$ و $l_R(-)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. $a \in R$ را **منظم**^{۱۰} راست (چپ) می‌نامیم هرگاه $r_R(a) = 0$ ($l_R(a) = 0$).

^۵ Prime radical

^۶ Minimal

^۷ Semiprime

^۸ Nilpotent locally

^۹ Levitzki radical

^{۱۰} Regular

$a \in R$ را منظم می‌نامیم هرگاه هم منظم راست و هم منظم چپ باشد. مجموعه‌ی همه عناصر منظم در حلقه R را با $C(0)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. $a \in R$ را مقسوم علیه صفر^{۱۱} چپ (راست) می‌نامیم هرگاه $0 \neq r_R(a) \neq 0$ ($l_R(a) \neq 0$).

$a \in R$ را مقسوم علیه صفر می‌نامیم هرگاه نه منظم چپ و نه منظم راست باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه‌ی R را دامنه^{۱۲} می‌نامیم هرگاه عناصر ناصفر آن منظم باشند.

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته^{۱۳} می‌نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچتوان ناصفری نداشته باشد یا به عبارت دیگر $0 = N(R)$.

به عنوان مثال حاصلضرب مستقیم هر تعداد دامنه، یک حلقه تقلیل یافته است.

تعریف ۱۵.۱.۱. حلقه R را ۲-اولیه^{۱۴} می‌نامیم هرگاه $N_*(R) = N(R)$.

به عنوان مثال هر حلقه‌ی تقلیل یافته، ۲-اولیه است.

تعریف ۱۶.۱.۱. حلقه R را موضعا ۲-اولیه^{۱۵} می‌نامیم هرگاه هر زیر حلقه با تولید متناهی از R ، ۲-اولیه باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه‌ی R را NI می‌نامیم هرگاه $N^*(R) = N(R)$.

واضح است که هر حلقه‌ی تقلیل یافته، NI است.

گزاره ۱۸.۱.۱. حلقه‌ی R ، NI است اگر و تنها اگر $R/N^*(R)$ تقلیل یافته باشد.

برهان. فرض کنیم $N^*(R) = N(R)$. چون $N(R)$ مجموعه تمام عناصر پوچتوان است لذا $R/N(R)$

تقلیل یافته است. لذا $R/N^*(R)$ نیز تقلیل یافته است.

^{۱۱} Zero-divisor

^{۱۲} Domain

^{۱۳} Reduced

^{۱۴} 2-primal

^{۱۵} Locally 2-prime

بعکس، فرض کنیم $R/N^*(R)$ تقلیل یافته باشد لذا تمام عناصر پوچتوان R در $N^*(R)$ است. پس $N(R) \subseteq N^*(R)$ و حلقه NI, R است.

□

تعریف ۱۹.۱.۱. ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R را **کاملاً اول**^{۱۶} می‌نامیم هرگاه R/P یک دامنه باشد.

اشتراک همه ایده‌آل‌های کاملاً اول در R را با $\beta_2(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. زیر مجموعه S از حلقه R را **منوئید ضربی**^{۱۷} می‌نامیم هرگاه:

$$1. \quad 1_R \in S$$

$$2. \quad \text{برای هر } x, y \in S, xy \in S$$

$$3. \quad \text{برای هر } x, y, z \in S, (xy)z = x(yz)$$

^{۱۶} Completely prime

^{۱۷} Multiplicative monoid

فصل ۲

حلقه‌های شبه-IFP و حلقه‌های فون نیومن منظم

در این فصل به بیان حلقه‌های IFP و ایده‌آل‌هایی که شامل ایده‌آل‌های پوچتوان ناصفراند می‌پردازیم. همچنین شرایطی را روی حلقه‌های فون نیومن منظم^۱ بررسی می‌کنیم.

۱.۲ حلقه‌های شبه- IFP

تعریف ۱.۱.۲. ایده‌آل راست (چپ) I از حلقه‌ی R ، خاصیت IFP دارد هرگاه برای هر $ab \in I, a, b \in R$ نتیجه دهد که $aRb \subseteq I$.

تعریف ۲.۱.۲. حلقه‌ی R را IFP می‌نامیم هرگاه ایده‌آل صفر حلقه‌ی R ، IFP باشد.

گزاره ۳.۱.۲. اگر حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد، آنگاه IFP است.

برهان. فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = 0$ ، پس $b(ab)a = 0$ در نتیجه $(ba)^2 = 0$. چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است لذا $ba = 0$. حال برای هر $r \in R$ داریم:

$$(arb)^2 = (arb)(arb) = ar(ba)rb = ar(0)rb = 0.$$

پس برای هر $r \in R$ ، $arb = 0$ در نتیجه $aRb = 0$ ، بنابراین حلقه‌ی R ، IFP است. $\square$

تعریف ۴.۱.۲. حلقه‌ی R را آبدلی می‌نامیم هرگاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد.

گزاره ۵.۱.۲. اگر حلقه‌ی R ، IFP باشد، آنگاه آبدلی است.

برهان. فرض کنیم e عنصر خودتوانی در R باشد، در نتیجه $e(1-e) = 0 = (1-e)e$. چون حلقه‌ی R ، IFP است پس $eR(1-e) = 0 = (1-e)Re$.

و لذا برای هر $r \in R$ ، $er(1-e) = 0 = (1-e)re$ ، در نتیجه $re = ere = er$ که نشان می‌دهد e مرکزی است. بنابراین حلقه‌ی R آبدلی است. $\square$

^۱Von Neumann regular

لم ۶.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

۱. حلقه‌ی R ، IFP است اگر و تنها اگر برای هر $S \subseteq R$ ، ایده‌آلی از R باشد اگر و تنها اگر برای هر $l_R(S)$ ، $S \subseteq R$ ایده‌آلی از R باشد.

۲. اگر حلقه‌ی R ، IFP باشد، آنگاه NI است.

۳. اگر حلقه‌ی R ، NI باشد و $\sum_{j=1}^n a_j X^{I_j} \in N(R[X])$ ، آنگاه $a_0 + \sum_{j=1}^n R a_j R$ پوچ است.

۴. فرض کنیم که حلقه‌ی R ، IFP باشد. در این صورت $\sum_{j=0}^n R a_j R$ پوچتوان است و

$$\sum_{j=1}^n a_j X^{I_j} \in N(R[X]).$$

برهان. ۱. نشان می‌دهیم $r_R(S)$ ایده‌آلی از R است.

اگر $a, b \in r_R(S)$ ، آنگاه $a + b = 0 + 0 = 0$ در نتیجه $S(a+b) = Sa + Sb = 0 + 0 = 0$ حال فرض می‌کنیم $r \in R$ و $a \in r_R(S)$ چون $Sa = 0$ پس $Sa.r = 0.r = 0$ لذا $ar \in r_R(S)$ و همچنین برای هر $s \in S$ ، $sa = 0$ چون IFP ، R است لذا $sRa = 0$ پس برای هر $r \in R$ ، $ra \in r_R(S)$ بنابراین $r_R(S)$ ایده‌آلی از R است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد $l_R(S)$ نیز ایده‌آلی از حلقه‌ی R است.

بعکس، فرض کنیم $S = \{a\}$. فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = 0$ در نتیجه $b \in r_R(a)$ چون $r_R(a)$ یک ایده‌آل است پس برای هر $r \in R$ ، $rb \in r_R(a)$ لذا برای هر $r \in R$ ، $arb = 0$ پس $aRb = 0$ بنابراین حلقه‌ی R ، IFP است.

۲. برای هر حلقه‌ی R همواره داریم: $N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R)$.

کافیست نشان دهیم $N(R) \subseteq N_*(R)$. به برهان خلف فرض کنیم $a \in N(R)$ ، $a \neq 0$ لذا عدد صحیح مثبتی مانند n هست که $a^n = 0$ و $a \notin N_*(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ پس ایده‌آل اولی مانند

P وجود دارد که $a \notin P$ لذا $aRa \notin P$. در نتیجه $x_1 \in R$ وجود دارد که $ax_1a \notin P$. از $a \notin P$ و $ax_1a \notin P$ نتیجه می‌شود که $(ax_1a)Ra \notin P$ ، پس $x_2 \in R$ وجود دارد که $(ax_1a)x_2a \notin P$. از $a \notin P$ و $(ax_1a)x_2a \notin P$ نتیجه می‌شود که $(ax_1ax_2a)Ra \notin P$ ، پس $x_3 \in R$ وجود دارد که $(ax_1ax_2a)x_3a \notin P$. با ادامه‌ی این روند می‌توان عناصری مانند x_i ها را در R پیدا کرد به طوری که $b = ax_1ax_2ax_3a \dots x_{n-1}a \notin P$. چون حلقه‌ی R ، IFP است و $a^n = 0$ پس $aRa \dots aRa = 0$. در نتیجه $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1} \in R$ وجود دارد که $ax_1ax_2ax_3a \dots x_{n-1}a = 0$ بنابراین $b \in P$ که یک تناقض است. پس $N(R) \subseteq N_*(R)$ و در نتیجه $N_*(R) = N^*(R) = N(R)$ که نشان می‌دهد حلقه‌ی R ، NI است.

۳. فرض کنیم $N^*(R) = N(R)$ و $a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X^{I_j} \in N(R[X])$ در این صورت $R/N^*(R)$ تقلیل یافته است. از یکریختی $\frac{R[X]}{N^*(R)[X]} \cong \frac{R}{N^*(R)}[X]$ نتیجه می‌گیریم: $N(R[X]) \subseteq N^*(R)[X]$.

پس برای هر j ، $a_j \in N^*(R)$. چون $N^*(R)$ یک ایده‌آل پوچ است پس $\sum_{j=0}^n Ra_jR$ نیز پوچ است.

۴. فرض کنیم حلقه‌ی R ، IFP باشد و $a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X^{I_j} \in N(R[X])$ در این صورت بنا به قسمت ۲ و ۳ همه‌ی a_j ها در $N(R)$ هستند. پس عدد صحیح مثبتی مانند k_j هست که $a_j^{k_j} = 0$. چون

$$R(a_jRa_j \dots a_jRa_j)R = 0 \text{ در نتیجه } a_jRa_j \dots a_jRa_j = 0.$$

$$\text{لذا } (Ra_jR)^{k_j} = 0 \text{ پس } (Ra_jR)(Ra_jR) \dots (Ra_jR) = 0.$$

$$\text{هر عنصر از } (Ra_0R + Ra_1R)^{k_0+k_1} \text{ به فرم } \sum_{i=1}^{k_0+k_1} b_{i_1}b_{i_2} \dots b_{k_0+k_1} \text{ است که}$$

$$b_{i_j} \in \left\{ \sum_{t=0}^m r_t a_0 s_t, \sum_{t=0}^m r'_t a_1 s'_t \mid r_t, s_t, r'_t, s'_t \in R, m > 0 \right\}.$$

فرض کنیم $(b_{i_1}b_{i_2} \dots b_{k_0+k_1})$ یک جمله‌ی نوعی از $\sum_{i=1}^{k_0+k_1} b_{i_1}b_{i_2} \dots b_{k_0+k_1}$ باشد. تعداد دفعاتی که a_0 در این جمله‌ی نوعی ظاهر شده است کمتر از k_0 نیست یا تعداد دفعاتی که a_1 در این جمله‌ی

نوعی ظاهر شده است کمتر از k_1 نیست. در هر دو حالت از $a_1^{k_1} = 0$ و $a_2^{k_2} = 0$ نتیجه می‌گیریم

که جمله‌ی نوعی انتخاب شده صفر است. پس با در نظر گرفتن $k = \sum_{j=0}^n k_j$ داریم:

$$\left(\sum_{j=0}^m Ra_jR \right)^k = 0 \text{ پس } \sum_{j=0}^m Ra_jR \text{ ایده‌آلی پوچتوان است.}$$

□

با توجه به قسمت ۴ از لم ۶.۱.۲ شرط ضعیف‌تری را در زیر ملاحظه می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۲. حلقه‌ی R را شبه-IFP^۲ می‌نامیم هرگاه چندجمله‌ای ناصفر $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ روی حلقه‌ی R

پوچتوان باشد و $\sum_{i=0}^m Ra_iR$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر باشد.

تعریف فوق بنا به قسمت ۴ از لم ۶.۱.۲ نزدیک به ویژگی IFP می‌شود. همانطور که در زیر می‌بینیم

ویژگی شبه-IFP متمایز از ویژگی NI است. بنا به قسمت ۴ از لم ۶.۱.۲ هر حلقه‌ی IFP، شبه-IFP است.

قضیه ۸.۱.۲. برای حلقه‌ی R گزاره‌های زیر معادلند:

۱. حلقه‌ی R ، شبه-IFP است.

۲. برای هر $a \in N(R)$ ، $a \neq 0$ ، RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از R است.

۳. اگر $\sum_{j=0}^n a_j X^{I_j} \in R[X]$ ، $\sum_{j=0}^n a_j X^{I_j} \neq 0$ پوچتوان باشد، آنگاه $\sum_{j=0}^n Ra_jR$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از R است.

برهان. کافیت (۲ $\leftarrow$ ۳) را اثبات کنیم. فرض کنیم $X = \{x_\alpha; \alpha \in A\}$ که A یک مجموعه‌ی خوش

ترتیب است. N را مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم و برای هر زیرمجموعه متناهی و ناتهی

$I = \{(\alpha_1, m_1), (\alpha_2, m_2), \dots, (\alpha_r, m_r)\}$ از $A \times N$ ، تک جمله‌ای X^I را به صورت

^۲Near-IFP

$X^I = x_{\alpha_1}^{m_1} x_{\alpha_2}^{m_2} \dots x_{\alpha_r}^{m_r}$ تعریف می‌کنیم که $(\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r)$ و $X^\emptyset = 1_R$ درجه‌ی X^I را با $\deg(I)$ و تعداد عناصر I را با $|I|$ نمایش می‌دهیم که $\deg(I) = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ و $|I| = r$.
 برای دو زیرمجموعه‌ی متناهی و ناتهی $I = \{(\alpha_1, m_1), (\alpha_2, m_2), \dots, (\alpha_r, m_r)\}$ و $J = \{(\beta_1, n_1), (\beta_2, n_2), \dots, (\beta_s, n_s)\}$ اگر یکی از چهار شرط زیر برقرار باشد می‌گوییم $I < J$.

$$1. \deg(I) < \deg(J).$$

$$2. |I| < |J| \text{ و } \deg(I) = \deg(J).$$

$$3. \deg(I) = \deg(J) \text{ و } |I| = |J| \text{ و عدد صحیح مثبتی مانند } k \text{ وجود دارد به طوری که برای هر } i \leq k, \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} \text{ و } m_i = n_i, \alpha_i = \beta_i$$

$$4. \deg(I) = \deg(J) \text{ و } |I| = |J| \text{ و عدد صحیح مثبتی مانند } k \text{ وجود دارد به طوری که برای هر } i \leq k, \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} \text{ و } m_i = n_i, \alpha_i = \beta_i$$

برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی I و J از $A \times N$ مجموعه‌ی $I + J$ زیرمجموعه‌ی متناهی است که $X^{I+J} = X^I X^J$ واضح است که برای زیرمجموعه‌ی متناهی و ناتهی I, J و K از $A \times N$ داشته باشیم:

$$1. \text{ اگر } I < J \text{ و } J < K, \text{ آنگاه } I < K.$$

$$2. \text{ اگر } I < J, \text{ آنگاه } I + K < J + K \text{ و در حالت خاص } 2I = I + I < I + J.$$

فرض کنیم $f(x) = a_0 + \sum_{j=0}^n a_j X^{I_j} \in N(R[X])$ که برای هر $j \geq 1, I_j < I_{j+1}$. بدون اینکه از کلیت قضیه کاسته شود وقتی که $a_0 = 0$ قرار می‌دهیم $a_1 \neq 0$. در این صورت با توجه به روابطی که در بالا به آن اشاره شد $a_0 \neq 0$ و وقتی $a_0 = 0$ ، پس بنا به قسمت ۲ ایده‌آل پوچتوان ناصفری مانند $\sum_{k=0}^1 Ra_k R$ از R مشمول در $\sum_{k=0}^n Ra_k R$ وجود دارد و اثبات کامل است.

□

مثال ۹.۱.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد و $R = UTM_7(S)$.

واضح است که $N^*(R) = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N(R)$. بنابراین NI, R است و $N^*(R)^2 = 0$ چون $N(R) \neq 0$ ، پس $a \neq 0$ را در نظر می‌گیریم اما $(RaR)^2 = 0$. بنابراین R شبه-IFP است. از طرفی چون R آبدی نیست پس IFP نیست.

تعریف ۱۰.۱.۲. مجموعه I را مستقیم می‌نامیم هرگاه I یک مجموعه جزئاً مرتبی با رابطه $\leq$ و هر زوج از عناصر آن دارای یک کران بالا باشد.

(A_i, φ_i^j) را یک سیستم مستقیم می‌نامیم هرگاه مجموعه اشیا $\{A_i : i \in I\}$ در کتگوری ℓ همراه با نگاشت $\varphi_i^j : A_i \rightarrow A_j$ که $i \leq j$ دارای دو شرط زیر باشد.

$$1. \text{ وقتی که } i \leq j \leq k, \varphi_i^j \circ \varphi_j^k = \varphi_i^k.$$

$$2. \text{ برای هر } i, \varphi_i^i = 1_{A_i}.$$

$\varinjlim A_i$ را حد مستقیم، سیستم مستقیم (A_i, φ_i^j) می‌نامیم هرگاه هم‌ریختی $\mu_i : A_i \rightarrow \varinjlim A_i$ برای هر $i \leq j$ در $\mu_i = \mu_j \circ \varphi_i^j$ صدق کند. همچنین هر خانواده از هم‌ریختی‌های $g_i : A_i \rightarrow A$ برای هر $i \leq j$ در $g_i = g_j \circ \varphi_i^j$ صدق کند. در این صورت نگاشت منحصر بفرد $g : \varinjlim A_i \rightarrow A$ وجود دارد به طوری که برای هر i ، $g \circ \mu_i = g_i$.

لم ۱۱.۱.۲. حد مستقیم سیستم مستقیم حلقه‌های NI, NI است.

برهان. فرض کنیم $R = \bigcup R_i$ حد مستقیم سیستم مستقیم (R_i, σ_{ij}) باشد به طوری که $\sigma_{ij} = \sigma_i^j$ و برای هر i ، R_i ها حلقه‌هایی NI هستند. نشان می‌دهیم $N(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است. فرض کنیم برای هر $x, y \in N(R)$ ، i یی وجود دارد که $x, y \in R_i$ یا i, j یی وجود دارد که $x \in R_i$ و $y \in R_j$. چون برای هر $x, y \in R_i$ ، $j \leq i$ لذا $R_j \subseteq R_i$ پس در هر دو حالت R_i یی وجود دارد که هم شامل x و هم شامل y باشد. بنابراین $x + y \in N(R_i) \subseteq N(R)$ در نتیجه $x + y \in N(R)$ برای هر $a \in R$ و برای هر i ، $x \in N(R)$.

بی وجود دارد که $a \in R_i$ و $x \in N(R_i)$ ، چون R_i ، NI است لذا $ax, xa \in N(R_i) \subseteq N(R)$ در نتیجه $ax, xa \in N(R)$ بنابراین حلقه‌ی R ، NI است.

□

تعریف ۱۲.۱.۲. a را عنصر پوچتوان قوی در حلقه R می‌نامیم هرگاه برای هر دنباله

$a_0 = a, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{i+1} \in a_i R a_i$ و عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $a_n = 0$.

گزاره ۱۳.۱.۲. $N_*(R)$ با مجموعه‌ی عناصر پوچتوان قوی حلقه‌ی R برابر است.

برهان. فرض کنیم $N_*(R) = \bigcap P$ در نتیجه ایده‌آل اولی مانند P وجود دارد که $a_0 = a \notin P$ لذا $a_0 R a_0 \notin P$ پس $a_1 \in a_0 R a_0$ وجود دارد که $a_1 \notin P$ با ادامه‌ی این روند $a_{n+1} \in a_n R a_n \neq 0$ وجود دارد به طوری که $a_{n+1} \notin P$ لذا برای هر عدد طبیعی مانند n ، $a_n \notin P$ و بنابراین $a_n \neq 0$ لذا a پوچتوان قوی نیست.

بعکس، فرض کنیم a پوچتوان قوی نباشد، در این صورت دنباله‌ی نامتناهی ناصفر $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ وجود دارد به طوری که $a_{n+1} \in a_n R a_n$. مجموعه‌ی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \{ q \leq R ; q \cap S = \emptyset \}$$

0_R ایده‌آلی از حلقه‌ی R است و $0_R \cap S = \emptyset$ در نتیجه $0_R \in X$ و $X \neq \emptyset$. فرض کنیم زنجیری از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R در X به صورت $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ باشد. قرار می‌دهیم $J = \bigcup I_i$. نشان می‌دهیم J یک کران بالا برای زنجیر انتخاب شده است. اگر $J \cap S \neq \emptyset$ ، آنگاه $a \in J \cap S$ وجود دارد پس $a \in S$ و $a \in J = \bigcup I_i$ لذا $a \in I_i$ وجود دارد که در نتیجه $I_i \cap S \neq \emptyset$ که تناقض با $I_i \in X$ دارد. پس $J \cap S = \emptyset$ و $J \in X$ یک کران بالا برای زنجیر انتخاب شده است. بنا به لم زورن X حداقل دارای یک عضو ماکزیمال مانند P است.

حال نشان می‌دهیم P ایده‌آلی اول است. فرض کنیم A و B ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که $A \not\subseteq P$ و $B \not\subseteq P$. با توجه به ماکزیمال بودن P در X ، $(A+P) \cap S \neq \emptyset$ و $(B+P) \cap S \neq \emptyset$.

بنابراین i, j وجود دارد به طوری که $a_i \in (A+P) \cap S$ و $a_j \in (B+P) \cap S$ در نتیجه $a_i \in A+P$ ، $a_j \in S$ و $a_i \in B+P$ اگر $k = \max\{i, j\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه

$$a_{k+1} \in a_k R a_k \subset (A+P)(B+P) \subset AB+P$$

اما $a_{k+1} \notin P$ بنابراین $AB \not\subseteq P$ پس P ایده‌آلی اول است که $a = a_0 \notin P$ و $r_k \in R$ وجود دارد به طوری که

$a_{k+1} = a_k r_k a_k \notin P$ لذا $(a_0 r_1 a_1 r_2 a_2 \dots r_{k-1} a_{k-1} a_k) \notin P$ پس $a = a_0 \notin P$ در نتیجه $a \notin \bigcap P = N_*(R)$ بنابراین $a \notin N_*(R)$.

□

لم ۱۴.۱.۲. فرض کنیم T حلقه‌ای تقلیل یافته باشد. حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $2^n \times 2^n$ روی حلقه‌ی T را با R_n نمایش می‌دهیم که n یک عدد صحیح مثبت است. نگاشت $\sigma: R_n \rightarrow R_{n+1}$ را با ضابطه‌ی $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. R_n را می‌توان به عنوان زیرحلقه‌ای از R_{n+1} در نظر گرفت (به عبارت دیگر برای $A \in R_n$ ، $A = \sigma(A)$)، همچنین $R = \cup R_i$ حد مستقیم، سیستم مستقیم (R_n, σ_{ij}) است به طوری که $\sigma_{ij} = \sigma_i^j$. در این صورت حلقه‌ی R نیم اول است.

برهان. فرض کنیم $A = (a_{st}) \in R_n$ ، $0 \neq A$ پوچتوان باشد. چون T تقلیل یافته است، لذا قطر A صفر است. توجه داریم که $i < j$ و درایه‌ی $(i + 2^k, j + 2^k)$ از A در R_{k+1} برای $k = n, n+1, n+2, \dots$ برابر a است. e_{uv} برابر ماتریسی است که درایه‌ی (u, v) ام آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر است. فرض کنیم $A_0 = A$ و $A_1 = A_0 B_0 A_0 \in A_0 R A_0$ که $B_0 = e_{j(i+2^n)} \in R_{n+1}$. اگر $A_1 = (b_{st})$ ، آنگاه i و $j + 2^n$ کوچکترین سطر و ستون از A_1 است به طوری که سطر i ام شامل یک درایه‌ی ناصفر است و $b_{i(j+2^n)} \neq 0$. در واقع در سطر i ام $b_{i(j+2^n)} = a^2$. بنابراین درایه‌ی $(i + 2^{n+1}, j + 2^n + 2^{n+1})$ ام

از A_1 در R_{n+2} نیز a^2 است.

فرض کنیم $A_2 = A_1 B_1 A_1 \in A_1 R A_1$ که $B_1 = e_{(j+2^n)(i+2^{n+1})} \in R_{n+2}$ اگر $A_2 = (c_{st})$ ، آنگاه i و $j + 2^n + 2^{n+1}$ کوچکترین سطر و ستون از A_2 است به طوری که سطر i ام یک درایه‌ی ناصفر دارد و $b_{i(j+2^n+2^{n+1})} \neq 0$. در واقع در سطر i ام $b_{i(j+2^n+2^{n+1})} = a^{2 \cdot 2}$ است. بنابراین درایه‌ی $(i + 2^{n+2}, j + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2})$ در R_{n+3} نیز $a^{2 \cdot 2}$ است. بنا به استقرا می‌توانیم نشان دهیم که درایه‌ی $(i, j + 2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{n+(k-1)})$ ام از A_k برای هر k ، a^{2^k} است؛ اما T تقلیل یافته است و همچنین $a^{2^k} \neq 0$ ، در نتیجه $A_k \neq 0$. بنابراین به استقرا می‌توانیم دنباله‌ی $(A_k)_{k=0}^\infty$ که هر جمله آن ناصفر است با را به دست آوریم که $A_{k+1} \in A_k R A_k$. به این ترتیب A پوچتوان قوی نیست، لذا $N_*(R) = 0$ که نشان می‌دهد حلقه‌ی R نیم اول است.

□

مثال ۱۵.۱.۲. فرض کنیم T و R همان حلقه‌های لم ۱۴.۱.۲ باشند در این صورت بنا به لم ۱۱.۱.۲ حلقه‌ی NI ، R است. توجه داریم که $N(R)$ یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از R است اما چون R نیم اول است لذا برای هر $a \in N(R)$ ، $a \neq 0$ ، RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است. بنابراین R شبه-IFP است.

مثال ۱۶.۱.۲. حلقه‌ای شبه-IFP وجود دارد که NI نیست. فرض کنیم $S = \mathbb{Z}_4$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۴ باشد و برای $n \geq 2$ ، $R = Mat_n(S)$ ، توجه داریم که $(Mat_n(2\mathbb{Z}_4))^2 = 0$. فرض کنیم $a \neq 0$ ، $A \in N(R)$ ، چون $Mat_n(2\mathbb{Z}_4)$ تنها ایده‌آل سره ناصفر از حلقه‌ی R است. پس اگر $A \in Mat_n(2\mathbb{Z}_4)$ ، آنگاه $RAR = Mat_n(2\mathbb{Z}_4)$. اگر $A \in R \setminus Mat_n(2\mathbb{Z}_4)$ ، آنگاه $RAR = R$. بنابراین RAR باید شامل $Mat_n(2\mathbb{Z}_4)$ باشد و در نتیجه R شبه-IFP است.

حال نشان می‌دهیم حلقه‌ی R ، NI است. برای این منظور کافیت نشان دهیم $N(R)$ یک ایده‌آل است.

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ را در } N(R) \text{ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم:}$$

$$E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ چون } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ و } B \text{ پوچتوان نیست لذا } N(R)$$

ایده‌آل نیست. بنابراین حلقه‌ی R ، NI نیست.

در قضیه‌ی زیر می‌بینیم که هر حلقه‌ی شبه- IFP که نیم اول باشد، تقلیل یافته است.

قضیه ۱۷.۱.۲. فرض کنیم حلقه‌ی R ، نیم اول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. حلقه‌ی R ، شبه- IFP است.

۲. حلقه‌ی R ، IFP است.

۳. حلقه‌ی R تقلیل یافته است.

برهان. کافیت (۱ $\leftarrow$ ۳) را نشان دهیم. فرض کنیم R شبه- IFP باشد و برای $a \in N(R)$ ، $a^n = 0$.

اگر $a \neq 0$ ، آنگاه چون R شبه- IFP است پس RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از R مانند I است

اما R نیم اول است، لذا ایده‌آل پوچتوان ناصفر ندارد پس $I = 0$ که یک تناقض است.

□

بنابراین حلقه‌ی R تقلیل یافته است.

تعریف ۱۸.۱.۲. فرض کنیم x یک عنصر پوچتوان در حلقه R باشد گوئیم x دارای اندیس پوچتوانی^۳ n

است هرگاه n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $x^n = 0$.

اندیس پوچتوانی زیرمجموعه‌ی پوچتوان I از حلقه R برابر با سوپریمم اندیس‌های پوچتوانی همه عناصر

پوچتوان در I است. اگر چنین سوپریممی متناهی باشد، آنگاه I را از اندیس پوچتوانی متناهی می‌نامیم.

گوئیم حلقه‌ی R اندیس پوچتوانی متناهی دارد هرگاه $N(R)$ اندیس پوچتوانی متناهی داشته باشد.

لم ۱۹.۱.۲. اگر R حلقه‌ای پوچ و اندیس پوچتوانی آن کمتر از n باشد، آنگاه برای هر $x, y \in R$ ،

$$x^{n-1}yx^{n-1} = 0.$$

برهان. فرض کنیم $x, y \in R$. چون R از اندیس پوچتوانی متناهی است لذا n یی هست که $x^n = 0$. از

$$(x^{n-1}y + x)^n = 0 \text{ داریم:}$$

^۳Index of nilpotency

$$x^{n-1}yx^{n-1} + (x^{n-1}y)^2x^{n-2} + \dots + (x^{n-1}y)^{n-2}x^2 + (x^{n-1}y)^{n-1}x = 0.$$

در نتیجه

$$x^{n-1}yx^{n-1} \left(1 + yx^{n-2} + yx^{n-1}yx^{n-3} + \dots + yx^{n-1}yx^{n-1}y \dots yx^2 + yx^{n-1}yx^{n-1}y \dots yx \right) = 0.$$

پس $x^{n-1}yx^{n-1}(1+z) = 0$ که $z \in R$ چون R حلقه‌ای پوچ است لذا $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$z^n = 0.$$

اگر n فرد باشد داریم:

$$1 + z^n = (1+z)(1-z+z^2-z^3+\dots+z^{n-1}) = 1.$$

و اگر n زوج باشد داریم:

$$1 + z^{n+1} = (1+z)(1-z+z^2-z^3+\dots+z^n) = 1.$$

بنابراین در هر دو حالت $1+z$ دارای وارون است که نشان می‌دهد: $x^{n-1}yx^{n-1} = 0$. $\square$

گزاره ۲.۱۰.۲. فرض کنیم حلقه‌ی R نیم‌اول و از اندیس پوچتوانی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. حلقه‌ی R ، شبه-IFP است.

۲. حلقه‌ی R ، IFP است.

۳. حلقه‌ی R ، تقلیل یافته است.

۴. حلقه‌ی R ، NI است.

برهان. واضح است که هر حلقه‌ی تقلیل یافته، NI است. کفایت $4 \leftarrow 3$ را اثبات کنیم. فرض کنیم R ، NI باشد. (برهان خلف) فرض کنیم $N(R) = N^*(R)$ ، $0 \neq a \in N(R)$ یک ایده‌آل پوچ RaR

ناصفر از R است. بنا به فرض R از اندیس پوچتوانی متناهی است پس RaR نیز از اندیس پوچتوانی متناهی است. با توجه به لم ۱۹.۱.۲ برای هر $x, y \in RaR$ ، $x^{n-1}yx^{n-1} = 0$ در نتیجه $x^{n-1}(RaR)x^{n-1} = 0$.
 $a \in N(R)$ را در نظر می‌گیریم، لذا $n \in \mathbb{N}$ که $a^n = 0$.
 اگر $a^{n-1} \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} [(RaR)a^{n-1}(RaR)]^2 &= (RaR)a^{n-1}(RaR)(RaR)a^{n-1}(RaR) \\ &\subseteq (RaR)a^{n-1}(RaR)a^{n-1}(RaR) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه $[(RaR)a^{n-1}(RaR)]^2 = 0$ که $(RaR)a^{n-1}(RaR) \subseteq RaR$ بنابراین RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است.

اگر $a^{n-1} = 0$ ، آنگاه $a^{n-2} = 0$ یا $a^{n-2} \neq 0$.

اگر $a^{n-2} \neq 0$ ، آنگاه بنا به روابط فوق RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است.

اگر $a^{n-2} = 0$ ، آنگاه $a^{n-3} = 0$ یا $a^{n-3} \neq 0$.

اگر $a^{n-3} \neq 0$ ، آنگاه باز هم بنا به روابط فوق RaR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است.

اگر $a^{n-3} = 0$ ، آنگاه $a^{n-4} = 0$ یا $a^{n-4} \neq 0$. با ادامه‌ی این روند و کاهش مرتبه، ایده‌آل RaR حتماً شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر مانند J است. اما حلقه‌ی R نیم اول است و لذا ایده‌آل پوچتوان ناصفیری ندارد، بنابراین $J = 0$ که یک تناقض است. در نتیجه $N(R) = 0$ که نشان می‌دهد حلقه‌ی R تقلیل یافته است. $\square$

با توجه به مثال ۱۵.۱.۲ شرط اندیس پوچتوانی متناهی در گزاره‌ی ۲۰.۱.۲ الزامی است (این حلقه نیم اول است اما از اندیس پوچتوانی متناهی نیست). همچنین با توجه به مثال ۱۶.۱.۲ شرط نیم اول در همین گزاره الزامی است (این حلقه از اندیس پوچتوانی متناهی است اما نیم اول نیست).

۲.۲ حلقه‌های فون نیومن منظم

تعریف ۱.۲.۲. حلقه‌ی R را فون نیومن منظم می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ ، عنصر $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a = axa$.

تعریف ۲.۲.۲. حلقه‌ی R را زوج^۴ راست (چپ) می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل راست (چپ) R ایده‌آلی دو طرفه باشد.

بنا به لم ۶.۱.۲ هر حلقه‌ی زوج راست (زوج چپ) IFP است.

لم ۳.۲.۲. فرض کنیم $e_1, e_2, \dots, e_n$ خودتوان‌هایی متعامد در حلقه‌ی R باشند که $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$. در این صورت R فون نیومن منظم است اگر و تنها اگر برای هر $x \in e_i R e_j$ عنصر $y \in e_j R e_i$ وجود داشته باشد که $xyx = x$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم حلقه‌ی R فون نیومن منظم باشد. $x \in e_i R e_j$ در نظر می‌گیریم در این صورت $y \in R$ وجود دارد که

$$xyx = (e_i r e_j) y (e_i r e_j) = (e_i r e_j) (e_j y e_i) (e_i r e_j) = x (e_j y e_i) x = x.$$

بعکس؛ فرض کنیم برای هر $x \in e_i R e_j$ عنصر $y \in e_j R e_i$ وجود داشته باشد به طوری که $xyx = x$. به استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ بدیهی است، فرض کنیم $n = 2$. عنصر $x \in R$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $e_1 x e_2 = 0$. عناصر $y \in e_1 R e_1$ و $z \in e_2 R e_2$ وجود دارند به طوری که

$$(e_2 x e_2) z (e_2 x e_2) = e_2 x e_2 \quad \text{و} \quad (e_1 x e_1) y (e_1 x e_1) = e_1 x e_1$$

در این صورت

$$x = (e_1 + e_2) x (e_1 + e_2) = e_1 x e_1 + e_2 x e_1 + e_2 x e_2$$

^۴Duo

و

$$\begin{aligned}
x(y+z)x &= (e_1xe_1 + e_2xe_1 + e_2xe_2)(y+z)(e_1xe_1 + e_2xe_1 + e_2xe_2) \\
&= e_1xe_1ye_1xe_1 + e_2xe_1ye_1xe_1 + e_2xe_2ze_2xe_1 + e_2xe_2ze_2xe_2 \\
&= e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_2x(y+z)xe_1.
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
x' &= x - x(y+z)x \\
&= e_1xe_1 + e_2xe_1 + e_2xe_2 - e_1xe_1 - e_2xe_2 - e_2x(y+z)xe_1 \\
&= e_2xe_1 - e_2x(y+z)xe_1 \in e_2Re_1.
\end{aligned}$$

در این صورت $w \in e_1Re_2$ وجود دارد به طوری که $x'wx' = x'$.بنابراین $x'wx' = x' = x - x(y+z)x$ لذا

$$x = x(y+z)x + x'wx' = x(y+z)x + (x - x(y+z)x)w(x - x(y+z)x).$$

در نتیجه $x = x[(y+z) + (1 - (y+z)x)w(1 - x(y+z))]$ که

$$.xvx = x \text{ پس } v = (y+z) + (1 - (y+z)x)w(1 - x(y+z)) \in R$$

عنصر دلخواه $x \in R$ را در نظر می‌گیریم و عنصر $y \in e_2Re_1$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$(e_1xe_2)y(e_1xe_2) = e_1xe_2. \text{ چون } y \in e_2Re_1 \text{ مشاهده می‌کنیم که } e_1xyxe_2 = e_1xe_2. \text{ بنابراین}$$

$$e_1(x - xyx)e_2 = 0. \text{ بنا به توضیحات بالا عنصر } z \in R \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$(x - xyx)z(x - xyx) = x - xyx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
x &= xzx - xzxxy - xyxzx + xyxzxxy + xyx \\
&= x(z - zxy - yxz + yxzy + y)x
\end{aligned}$$

که $x = xwx$ و $w = z - zxy - yxz + yxzy + y$ در نتیجه R فون نیومن منظم است.

حال فرض می‌کنیم $n > 2$ و قضیه برای هر $n - 1$ خودتوان متعامد برقرار باشد.

عناصر $f = e_2 + e_3 + \dots + e_n$ و $g = e_1 + e_3 + \dots + e_n$ را در نظر می‌گیریم. چون حکم برای $n - 1$

برقرار است لذا fRf و gRg فون نیومن منظم هستند.

برای هر $x \in e_1 R f$ وجود دارد $y \in e_2 R e_1$ که $(xe_2)y(xe_2) = xe_2$ ، بنابراین $(xe_2yx - x)e_2 = 0$.

چون $y \in e_2 R e_1$ پس $r \in R$ وجود دارد که $y = e_2 r e_1$ لذا

$$xe_2yx = xe_2(e_2 r e_1)x = x(e_2 r e_1)x = xyx.$$

در نتیجه $(xyx - x)e_2 = 0$ ، و لذا $xyx - x \in gRg$.

همچنین $e_1(xyx - x)e_2 = 0$ و چون gRg فون نیومن منظم است لذا $z \in gRg$ وجود دارد که

$$(x - xyx)z(x - xyx) = x - xyx.$$

در نتیجه

$$x = (x - xyx)z(x - xyx) + xyx = x[(1 - yx)z(1 - xy) + y]x$$

که $w = (1 - yx)z(1 - xy) + y \in R$. بنابراین $fwe_1 \in fRe_1$ به طوری که $x(fwe_1)x = x$.

به طور مشابه برای هر $x \in fRe_1$ وجود دارد $t \in e_1 R f$ به طوری که $xtx = x$. با به کار بردن $n = 2$

برای خودتوان‌های متعامد e_1 و f نتیجه می‌شود که R فون نیومن منظم است.

□

گزاره ۴.۲.۲. اگر R حلقه‌ی فون نیومن منظم باشد، آنگاه $Mat_n(R)$ نیز فون نیومن منظم است.

برهان. همواره داریم:

$$E_{ij}Mat_n(R)E_{jj} = RE_{ij}$$

بنا به لم ۳.۲.۲ کفایت نشان دهیم برای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، اگر $A \in RE_{ij}$ ، آنگاه $B \in RE_{ji}$ وجود دارد که $A = ABA$. فرض کنیم $A = xE_{ij}$. چون R فون نیومن منظم است پس وجود دارد $y \in R$ که $x = xyx$ در نتیجه

$$(xE_{ij})(yE_{ji})(xE_{ij}) = (xyE_{ii})(xE_{ij}) = (xyxE_{ij}) = xE_{ij}.$$

□

گزاره ۵.۲.۲. فرض کنیم حلقه‌ی R فون نیومن منظم باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. حلقه‌ی R ، زوج راست (چپ) است.

۲. حلقه‌ی R ، تقلیل یافته است.

۳. حلقه‌ی R ، آبدی است.

۴. حلقه‌ی R ، IFP است.

۵. حلقه‌ی R ، شبه-IFP است.

۶. حلقه‌ی R ، NI است.

برهان. چون هر حلقه‌ی فون نیومن منظم، نیم اول است لذا بنا به قضیه‌ی ۱۵.۱.۲، گزاره‌های ۴، ۲ و ۵ معادلند.

(۲ ← ۶) واضح است که هر حلقه‌ی تقلیل یافته، NI است.

(۶ ← ۲) (برهان خلف) فرض کنیم $a \in N(R)$ ، $a \neq 0$. چون حلقه‌ی R فون نیومن منظم است لذا

$b \in R$ وجود دارد به طوری که $a = aba$. در نتیجه $a = aba = (aba)ba = (aba)b(aba) = \dots$

اما $N(R)$ ایده‌آلی از R است. بنابراین $ab \in N(R)$. در نتیجه عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد که

$(ab)^n = 0$ پس $0 \neq a = aba = \dots = (ab)^n a = 0$ که تناقض با انتخاب a دارد، پس فرض خلف باطل است و حلقه‌ی R ، تقلیل یافته است.

(۲ ← ۳) فرض کنیم عنصر e خودتوان باشد. ایده‌آل $(1 - e)Re$ از R را در نظر می‌گیریم در نتیجه برای هر $r \in R$ داریم:

$$((1 - e)re)^2 = (re - ere)^2 = (re - ere)(re - ere) = rere - re^2re - erere + ere^2re = 0.$$

چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است پس $(1 - e)re = 0$. در نتیجه $(1 - e)Re = 0$. پس eR یک ایده‌آل چپ از R است، در این صورت $eR(1 - e)$ نیز یک ایده‌آل چپ از R است به طوری که

$(eR(1 - e))^2 = 0$. بنا به فرض حلقه‌ی R ، فون نیومن منظم است لذا نیم اول است، پس هیچ ایده‌آل پوچتوان ناصفری ندارد. در نتیجه $eR(1 - e) = 0$ پس $eR = eRe$. بنابراین برای هر $r \in R$ ، $er = ere$. در نتیجه برای هر $r \in R$ ، $er = re$ لذا e عنصری مرکزی است که نشان می‌دهد R آبله است.

(۳ ← ۲) حلقه‌ی R فون نیومن منظم است، پس برای هر $a \in R$ وجود دارد $b \in R$ به طوری که $a = aba$ لذا $a = (ab)^2$ بنابراین $ab = (aba)b = (ab)^2$ خودتوان آن مرکزی است. $a \in N(R)$ در نظر می‌گیریم به طوری که $a^2 = 0$. حال داریم:

$$a = aba = a(ab) = a^2b = 0 \cdot b = 0$$

در نتیجه $a = 0$. بنابراین حلقه‌ی R تقلیل یافته است.

(۳ ← ۱) فرض کنیم حلقه‌ی R زوج راست باشد پس ایده‌آل راست eR ایده‌آلی چپ است که $e \in R$ خودتوان است، پس $Re \subseteq eR$. ایده‌آل $(1 - e)Re$ را در نظر می‌گیریم در نتیجه:

$$\begin{aligned} ((1 - e)Re)^2 &= (Re - eRe)^2 \\ &= (Re - eRe)(Re - eRe) \\ &= ReRe - eReRe - Re^2Re + eRe^2Re = 0. \end{aligned}$$

چون هر حلقه‌ی فون نیومن منظم، نیم اول است. لذا هیچ ایده‌آل پوچتوان ناصفری ندارد پس $(1 - e)Re = 0$ در نتیجه برای هر $r \in R$ ، $(1 - e)re = 0$ ، بنابراین $re = ere$. حال ایده‌آل $eR(1 - e)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}(eR(1 - e))^2 &= (eR - eRe)(eR - eRe) \\ &= eReR - eReRe - eRe^2R + eRe^2Re = 0.\end{aligned}$$

چون هر حلقه‌ی فون نیومن منظم، نیم اول است. لذا هیچ ایده‌آل پوچتوان ناصفری ندارد پس $eR(1 - e) = 0$ در نتیجه برای هر $r \in R$ ، $er(1 - e) = 0$ ، لذا $er = ere$. بنابراین برای هر $r \in R$ ، $er = re$ پس e عنصری مرکزی است که نشان می‌دهد حلقه‌ی R آبلی است. (۳ ← ۱) فرض کنیم هر ایده‌آل راست اصلی مانند eR از R توسط عنصر خودتوان مرکزی e تولید شود. نشان می‌دهیم eR ایده‌آلی چپ است، لذا برای هر $er, es \in eR$ داریم:

$$er + es = e(r + s) \in eR.$$

چون حلقه‌ی R آبلی است لذا برای هر $s \in R$ و $er \in eR$ داریم:

$$s(er) = (se)r = (es)r = e(sr) \in eR.$$

□

تعریف ۶.۲.۲. حلقه‌ی R را **منظم قوی**^۵ می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ عنصر $x \in R$ وجود داشته باشد که $a = a^2x$.

گزاره ۷.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R منظم قوی است اگر و تنها اگر R آبلی و فون نیومن منظم باشد.

^۵Strongly regular

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آبلی و فون نیومن منظم باشد. پس برای هر $x \in R$ عنصر $y \in R$ وجود دارد به طوری که $x = xyx$. لذا $xy = (xy)^2$ ، در نتیجه برای هر $r \in R$ داریم: $(xy)r = r(xy)$. بنابراین $x = (xy)x = x(xy) = x^2y$ در نتیجه حلقه‌ی R منظم قوی است.

بعکس، فرض کنیم حلقه‌ی R منظم قوی باشد. فرض کنیم $x \in R$ و $x^2 = 0$. چون حلقه‌ی R منظم قوی است لذا $a \in R$ وجود دارد به طوری که $x = x^2 \cdot a = 0 \cdot a = 0$. در نتیجه $x = 0$. بنابراین حلقه‌ی R تقلیل یافته است و لذا نیم اول است. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول در R باشد. حال حلقه‌ی $\bar{R} = R/P$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\bar{x} \neq \bar{0} \neq \bar{y} \in \bar{R}$ ، آنگاه چون $\bar{R}$ حلقه‌ی اول است پس $\bar{x}\bar{R}\bar{y} \neq \bar{0}$. لذا $\bar{r} \in \bar{R}$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}\bar{r}\bar{y} \neq \bar{0}$. چون $\bar{R}$ منظم قوی است لذا برای هر $\bar{x}\bar{r}\bar{y} \in \bar{R}$ وجود دارد $\bar{s} \in \bar{R}$ به طوری که $\bar{0} \neq \bar{s} = (\bar{x}\bar{r}\bar{y})^2 = (\bar{x}\bar{r}\bar{y}) \cdot \bar{s}$. در نتیجه $\bar{0} \neq (\bar{x}\bar{r}\bar{y})^2$ و لذا $\bar{y}\bar{x} \neq \bar{0}$. بنابراین حلقه‌ی R/P یک دامنه است. عنصر دلخواه $\bar{s} \in R/P$ را در نظر می‌گیریم. $\bar{t} \in R/P$ وجود دارد به طوری که $\bar{s}^2\bar{t} = \bar{s}$. در نتیجه $\bar{s}(\bar{s}\bar{t} - \bar{1}) = \bar{0}$. چون R/P دامنه است و $\bar{s} \neq \bar{0}$ پس $\bar{s}\bar{t} - \bar{1} = \bar{0}$ یا $\bar{s}\bar{t} = \bar{1}$. بنابراین R/P یک حلقه‌ی تقسیم است. حال فرض کنیم $x \in R$. عنصر $y \in R$ وجود دارد به طوری که $x^2y = x$. چون حلقه‌ی R/P منظم قوی است، پس برای $x + P \in R/P$ عنصر $y + P \in R/P$ وجود دارد به طوری که $(x + P)^2(y + P) = (x + P)$ ، در نتیجه $\bar{x}^2\bar{y} = \bar{x}$ از طرفی R/P حلقه‌ی تقسیم است، پس هر عنصر آن وارون پذیر است لذا از $\bar{x}^2\bar{y} = \bar{x}$ داریم: $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$. پس $\bar{y}\bar{x} = \bar{x}$ یا $xyx - x \in P$ و لذا $(xyx) + P = x + P$ ، در نتیجه $(x + P)(y + P)(x + P) = x + P$ پس $xyx - x \in \bigcap P = N_*(R)$. چون حلقه‌ی R نیم اول است لذا $N_*(R) = 0$ و $xyx = x$ که نشان می‌دهد حلقه‌ی R فون نیومن منظم است. چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است، پس بنا به قضیه‌ی قبل حلقه‌ی R آبلی است.

□

نتیجه ۸.۲.۲. حلقه‌ی R منظم قوی است اگر و تنها اگر شبه-IFP و فون نیومن منظم باشد.

برهان. از گزاره‌ی ۷.۲.۲ و گزاره‌ی ۵.۲.۲ نتیجه می‌شود.

□

تعریف ۹.۲.۲. مدول A را دد-کیند متناهی می‌نامیم هرگاه $B = 0$ تنها مدولی باشد که $A \cong A \oplus B$.

گزاره ۱۰.۲.۲. A یک R -مدول دد-کیند متناهی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \text{End}_R(A)$ $xy = 1$ نتیجه دهد $yx = 1$.

برهان. اگر A دد-کیند متناهی نباشد، آنگاه $A = B \oplus C$ که $A \cong B$ و $C \neq 0$. یکریختی $y : A \rightarrow B$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x \in \text{End}_R(A)$ به طوری که $xC = 0$. x را به $y^{-1} : B \rightarrow A$ محدود می‌کنیم. در این صورت $xy = 1$ اما $yx \neq 1$.

بعکس، فرض کنیم $x, y \in \text{End}_R(A)$ و $xy = 1$ اما $yx \neq 1$. چون yx خودتوان است و $xyx = y$ ، لذا $A = yA \oplus (1 - yx)A$. مشاهده می‌کنیم $yA \cong A$ و $(1 - yx)A \neq 0$ که نشان می‌دهد A دد-کیند متناهی نیست.

□

تعریف ۱۱.۲.۲. حلقه‌ی R را دد-کیند متناهی می‌نامیم هرگاه $a, b \in R$ و $ab = 1$ ، آنگاه $ba = 1$. برای مثال هر حلقه‌ی جابجایی، دد-کیند متناهی است.

بنا به گزاره‌ی ۱۰.۲.۲ حلقه‌ی R دد-کیند متناهی است اگر و تنها اگر R_R یک مدول دد-کیند متناهی باشد.

گزاره ۱۲.۲.۲. اگر A یک مدول دد-کیند متناهی نباشد، آنگاه $\text{End}_R(A)$ شامل یک مجموعه‌ی نامتناهی از ماتریس‌های یک‌به‌یک e_{ij} (برای $i, j = 1, 2, 3, \dots$) است که برای هر i, j, n $e_{ij}e_{jn} = e_{in}$ و برای $j \neq n$ $e_{ij}e_{kn} = 0$. در نتیجه $\text{End}_R(A)$ شامل یک دنباله‌ی نامتناهی از $\{e_{11}, e_{22}, \dots\}$ است که دو به دو خودتوان‌های متعامد ناصفراند.

برهان. فرض کنیم $x, y \in \text{End}_R(A)$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $i, j = 1, 2, 3, \dots$ $xy = 1$ و $yx \neq 1$ قرار می‌دهیم:

$$e_{ij} = y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j.$$

هرگاه $j \leq k$ داریم:

$$\begin{aligned} e_{ij}y^k &= y^{i-1}x^{j-1}y^k - y^i x^j y^k = y^{i-1}x^{j-1}y^{j-1}y^{k-j+1} - y^i x^j y^j y^{k-j} \\ &= y^{i-1}y^{k-j+1} - y^i y^{k-j} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین هرگاه $j \leq k - 1$ داریم:

$$e_{ij}e_{kn} = e_{ij}y^{k-1}x^{n-1} - e_{ij}y^k x^n = 0.$$

چون

$$\begin{aligned} e_{ij}y^{k-1}x^{n-1} &= (y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j)y^{k-1}x^{n-1} = y^{i-1}x^{j-1}y^{j-1}y^{k-j}x^{n-1} - y^i x^j y^j y^{k-j-1}x^{n-1} \\ &= y^{k-j+i-1}x^{n-1} - y^{k-j+i-1}x^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

همچنین از

$$\begin{aligned} e_{ij}(y^j x^n) &= (y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j)(y^j x^n) = y^{i-1}x^{j-1}y^j x^n - y^i x^j y^j x^n = y^i x^n - y^i x^n = 0 \\ &= y^{i-1}x^{n-1} - y^i x^n \end{aligned}$$

و

$$e_{ij}(y^j x^n) = (y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j)(y^j x^n) = y^{i-1}x^{j-1}y^j x^n - y^i x^j y^j x^n = y^i x^n - y^i x^n = 0$$

خواهیم داشت:

$$e_{ij}e_{jn} = e_{ij}y^{j-1}x^{n-1} - e_{ij}y^j x^n = y^{j-1}x^{n-1} - y^i x^n = e_{in}.$$

چون

$$x^k e_{kn} = x^k y^{k-1} x^{n-1} - x^k y^k x^n = x x^{k-1} y^{k-1} x^{n-1} - x^n = x^n - x^n = 0.$$

لذا برای هر $j \geq k$ داریم: $x^j e_{kn} = 0$. بنابراین اگر $j \geq k+1$ ، آنگاه $e_{ij} e_{kn} = y^{i-1} x^{j-1} e_{kn} -$ بدین ترتیب $y^i x^j e_{kn} = 0$ ماتریس یکه است.

□

لم ۱۳.۲.۲. هر حلقه‌ی NI دد-کیند متناهی است.

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R ، NI باشد. (برهان خلف) فرض کنیم حلقه‌ی R دد-کیند متناهی نباشد، در این صورت بنا به گزاره‌ی ۱۲.۲.۲، R شامل یک مجموعه‌ی نامتناهی از ماتریس‌های یکه به صورت $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{21}, e_{22}, \dots\}$ است.

چون $N(R)$ یک ایده‌آل در حلقه‌ی R است، پس برای $e_{12}, e_{21} \in N(R)$ ، $e_{11} = e_{12} e_{21} \in N(R)$. اما e_{11} عنصری پوچتوان نیست. لذا فرض خلف باطل و حلقه‌ی R ، دد-کیند متناهی است.

□

لم ۱۴.۲.۲. هر حلقه‌ی آبله‌ی، دد-کیند متناهی است.

برهان. فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = 1$. در نتیجه $(ba)^2 = ba$. پس ba عنصری خودتوان است لذا برای هر $r \in R$ ، $(ba)r = r(ba)$. بنابراین $ba = ba \cdot 1 = ba(ab) = (ba)r = r(ba)$. چون حلقه‌ی R آبله‌ی است لذا $ba = 1$. پس $ba = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = 1 \cdot 1 = 1$. که نشان می‌دهد حلقه‌ی R دد-کیند متناهی است.

□

از لم‌های ۱۳.۲.۲ و ۱۴.۲.۲ و گزاره‌ی ۵.۲.۲ آیا می‌توان گفت که هر حلقه‌ی شبه- IFP دد-کیند متناهی است؟ با توجه به مثال زیر جواب منفی است.

مثال ۱۵.۲.۲. فرض کنیم که F یک میدان و V یک فضای برداری روی F باشد و $\dim_F(V) = \aleph_0$. قرار می‌دهیم $S = \text{Hom}_F(V, V)$. عناصر $a \in \sum_{i=1}^{\infty} E_{i(i+1)}$ و $b \in \sum_{j=1}^{\infty} E_{(j+1)j}$ را در S در نظر می‌گیریم. در این صورت $ab = 1$ اما $ba \neq 1$. حال فرض کنیم $n \geq 2$ و $R = UTM_n(S)$. در این صورت حلقه‌ی R بنا به قضیه‌ی ۲۰.۲.۲ قسمت ۱، شبه-IFP است اما $(aE)(bE) = E$ و $(bE)(aE) \neq E$ در R است که E ماتریس همانی در R است. بنابراین R دد-کیند متناهی نیست.

گزاره ۱۶.۲.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی آبلی باشد و $n \geq 2$. تعریف می‌کنیم:

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in S \right\}$$

در این صورت هر خودتوان در R_n به فرم $\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}$ است که $f^2 = f \in S$ و همچنین R_n آبلی است.

برهان. به استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $n = 2$.

فرض کنیم $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R_2$ یک خودتوان باشد لذا $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$. در نتیجه $c^2 = c$ و $cd + dc = d$. در نتیجه $c(cd) + c(dc) = cd$. چون c خودتوان است پس $cd + cdc = cd$ لذا $cdc = 0$ اما $c, d \in S$ است. چون S حلقه‌ای آبلی است پس c مرکزی است. حال از

$$0 = cdc = c(dc) = (dc)c = dc^2 = dc$$

و

$$0 = cdc = (cd)c = c(cd) = c^2d = cd$$

و همچنین از $cd + dc = d$ داریم: $d = 0$. بنابراین هر خودتوان در R_2 به فرم $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R_2$ است که $f^2 = f \in S$. فرض کنیم حکم برای ماتریس‌های $(n-1) \times (n-1)$ برقرار باشد. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \circ & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \circ & \circ & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & a \end{pmatrix}$$

خودتوانی در R_n باشد. نشان می‌دهیم برای هر i, j ، $a_{ij} = \circ$. فرض کنیم دو ماتریس

$$\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \circ & a & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \circ & \circ & a & \dots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & a \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} a & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \circ & a & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \circ & \circ & a & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & a \end{pmatrix}$$

در R_{n-1} خودتوان باشند.

$$A = \begin{pmatrix} a & \circ & \circ & \dots & \circ & a_{1n} \\ \circ & a & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & a & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & a \end{pmatrix} \text{ و } a^2 = a \text{ بنا براین } a_{ij} \text{ در آنها صفر هستند و با توجه به فرض استقرا } a^2 = a$$

است که $aa_{1n} + a_{1n}a = a_{1n}$. چون a خودتوان است پس $aa_{1n} = aa_{1n}a$ لذا $aa_{1n}a = \circ$ اما

$a, a_{1n} \in S$. چون S حلقه‌ای آبلی است پس a مرکزی است. حال از

$$\circ = aa_{1n}a = (aa_{1n})a = a(aa_{1n}) = a^2a_{1n} = aa_{1n}$$

و

$$\circ = aa_{1n}a = a(a_{1n}a) = (a_{1n}a)a = a_{1n}a^2 = a_{1n}a$$

و همچنین از $aa_{1n} + a_{1n}a = a_{1n}$ داریم: $a_{1n} = \circ$.

$$\text{بنابراین هر خودتوان در } R_n \text{ به فرم } \begin{pmatrix} a & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & a & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & a & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & a \end{pmatrix} \text{ است که } a^2 = a \in S \text{ همچنین چون}$$

حلقه‌ی S آبلی است پس حلقه‌ی R_n نیز آبلی است.

□

تعریف ۱۷.۲.۲. حلقه‌ی R را π -منظم می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ عدد صحیح مثبتی مانند n و $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a^n = a^n b a^n$.

واضح است که هر حلقه‌ی فون نیومن منظم، π -منظم است. از گزاره‌ی ۵.۲.۲ این طور استنباط می‌شود که اگر حلقه‌ی R ، π -منظم و آبلی و نیم اول باشد، آنگاه شبه-IFP است. در صورتی که بنا به مثال زیر این طور نیست.

مثال ۱۸.۲.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقسیم باشد. قرار می‌دهیم:

$$D_n = \{M \in UTM_n(S) \mid M \text{ برابر باشد}\}$$

نگاشت $\sigma : D_n \rightarrow D_{n+1}$ را با ضابطه‌ی $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت D_n را می‌توان به عنوان زیرحلقه‌ای از D_{n+1} در نظر گرفت (یعنی برای $A \in D_n$ ، $A = \sigma(A)$) مجموعه‌ی $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ حد مستقیم، سیستم مستقیم (D_n, σ_{ij}) است به طوری که $\sigma_{ij} = \sigma^{j-i}$. بنا به لم ۱۴.۱.۲ حلقه‌ی R نیم اول است و بنا به گزاره‌ی ۱۶.۲.۲ D_n آبلی است به طوری که هر خودتوان در D_n به فرم $\begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}$ است و $f^2 = f \in S$. بنابراین R آبلی است. فرض کنیم A ماتریسی دلخواه در D_n باشد. اگر A پوچتوان باشد، آنگاه عنصر $B \in D_n$ وجود دارد که $0 = A^n = A^n B A^n$ و اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه $A = A A^{-1} A$. لذا D_n ، π -منظم است. بنابراین R نیز π -منظم است اما چون R تقلیل یافته نیست، بنا به قضیه‌ی ۱۷.۱.۲ حلقه‌ی R شبه-IFP نیست.

گزاره ۱۹.۲.۲. ۱. فرض کنیم S یک حلقه باشد. در این صورت برای هر $n \geq 2$ ، حلقه‌های $UTM_n(S)$

و $LTM_n(S)$ شبه-IFP هستند.

۲. فرض کنیم S حلقه‌ای نیم اول باشد. در این صورت برای هر $n \geq 2$ ، حلقه‌ی $Mat_n(S)$ شبه-IFP نیست.

۳. فرض کنیم حلقه‌ی S شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر مانند I باشد به طوری که هر عنصر در $S \setminus I$

وارون پذیر است در این صورت برای هر n ، $Mat_n(S)$ شبه- IFP است.

برهان. ۱. فرض کنیم برای $n \geq 2$ ، $R = UTM_n(S)$ و $A = (a_{ij}) \in R$ که $a_{ij} \neq 0$ در

این صورت $RE_{1s}AE_{tn}R = Sa_{st}SE_{1n}$ ایده‌آل پوچتوان ناصفری از R است که مشمول در RAR

است و E_{tn} ماتریسی است که سطر t ام و ستون n ام آن یک و بقیه‌ی درایه‌های آن صفر هستند.

بنابراین R شبه- IFP است.

به طور مشابه اثبات می‌شود که برای هر $n \geq 2$ ، حلقه‌ی $LTM_n(S)$ نیز شبه- IFP است.

۲. حلقه‌ی $R = Mat_n(S)$ را در نظر می‌گیریم. چون برای $n \geq 2$ ، $N(R) \neq 0$ ، لذا حلقه‌ی R تقلیل

یافته نیست و با توجه به این که حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی S نیم اول است، لذا بنا به قضیه‌ی

۱۶.۱.۲ حلقه‌ی R شبه- IFP نیست.

۳. فرض کنیم $R = Mat_n(S)$ و $A = (a_{ij}) \in N(R)$ که $a_{ij} \neq 0$ اگر هر a_{ij} در I باشد، آنگاه چون I

پوچتوان است پس RAR نیز پوچتوان است. بنابراین R ، شبه- IFP است. در غیر این صورت اگر

یکی از a_{ij} ها در I نباشد، آنگاه چون هر عنصر در $S \setminus I$ وارون پذیر است و با در نظر گرفتن ماتریس A

که فقط درایه‌ی $a_{11} \in S \setminus I$ و بقیه‌ی درایه‌های آن وارون پذیر نیستند و همچنین $E_{12}, E_{21}, E_{11} \in R$

خواهیم داشت:

$$E_{11}Aa_{11}^{-1}E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} a_{11}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$E_{21}Aa_{11}^{-1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} a_{11}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه:

$$E_{11}Aa_{11}^{-1}E_{11} + E_{21}Aa_{11}^{-1}E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in RAR$$

بنابراین $R = RAR$. لذا RAR شامل ایده‌آل پوچتوان ناصفري مانند $RMat_n(I)R$ است که نشان می‌دهد R ، شبه-IFP است.

□

می‌توانیم در مثال ۱۶.۱.۲، گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۳، را به کار ببریم. در این صورت $\mathbb{Z}_4$ شامل ایده‌آل پوچتوان ناصفر $2\mathbb{Z}_4$ است به طوری که $\mathbb{Z}_4 \setminus 2\mathbb{Z}_4$ زیرمجموعه‌ی عناصر وارون پذیر در $\mathbb{Z}_4$ است. بنابراین $Mat_n(\mathbb{Z}_4)$ بنا به گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۳، شبه-IFP است.

فصل ۳

حلقه‌های ۲-اولیه و موضعا ۲-اولیه

در این فصل نشان می‌دهیم هر حلقه ۲-اولیه، موضعا ۲-اولیه و هر حلقه موضعا ۲-اولیه، NI است اما عکس این گزاره‌ها برقرار نیست. یکریختی هر حلقه موضعا ۲-اولیه ناجابجایی مینیمال با حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی 2×2 روی میدان گالوا از مرتبه ۲ را بیان می‌کنیم. همچنین چند ویژگی حلقه‌های موضعا ۲-اولیه را با توجه به چند مثال بیان می‌کنیم. در آخر با فرض ۲-اولیه بودن حلقه روابط بین منوئیدهای ضربی و m -سیستم را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ حلقه‌های ۲-اولیه

قرارداد ۱.۱.۳. فرض کنیم P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی R باشد. قرار می‌دهیم:

$$O(P) = \{a \in R \mid aRb = 0, \exists b \in R \setminus P\}$$

$$O_p = \{a \in R \mid ab = 0, \exists b \in R \setminus P\}$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$N(P) = \{a \in R \mid aRb \subseteq N_*(R), \exists b \in R \setminus P\}$$

$$N_p = \{a \in R \mid ab \in N_*(R), \exists b \in R \setminus P\}$$

واضح است که $O(P)$ و $N(P)$ ایده‌آل‌هایی از R به ترتیب مشمول در O_p و N_p هستند و

$$O(P) = O_p \quad N(P) \cup O(P) \subseteq P \quad \text{همچنین اگر حلقه‌ی } R \text{ تقلیل یافته باشد آنگاه:}$$

تعریف ۲.۱.۳. زیرمجموعه S از حلقه‌ی R را m -سیستم می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b \in S$ عنصر $r \in R$

وجود داشته باشد به طوری که $arb \in S$.

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته و P ایده‌آل اولی از R باشد. در این صورت:

$$O(P) = \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid O(P) \subseteq Q\} = \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid Q \subseteq P\}$$

برهان. اگر $Q \subseteq P$ ، آنگاه $O(Q) \subseteq O(P) \subseteq Q$ ، پس

$$O(P) \subseteq \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid O(P) \subseteq Q\} \subseteq \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid Q \subseteq P\}$$

بعکس، فرض کنیم $a \notin O(P)$ ایده‌آل اول Q مشمول P را چنان می‌یابیم که $a \notin Q$ مجموعه‌ی $S = \{1, a, a^2, \dots\}$ بسته ضربی است و $0 \notin S$ همچنین $L = R \setminus P$ یک m -سیستم است. فرض کنیم T مجموعه‌ی تمام عناصر ناصفر حلقه‌ی R به فرم $a^{t_0} x_1 a^{t_1} \dots x_n a^{t_n}$ باشد که $x_i \in L$ و تمام t_i ها اعداد صحیح مثبت هستند. واضح است که $L \subseteq T$. قرار می‌دهیم: $M = S \cup T$.

نشان می‌دهیم اگر $x, y \in M$ آنگاه $xy \in M$.

اگر $x, y \in S$ آنگاه $xy \in S$.

اگر $x \in S$ و $y \in T$ آنگاه $x = a^s$ و $y = a^{t_0} x_1 a^{t_1} \dots x_n a^{t_n}$.

اگر $0 \neq xy \in T$ آنگاه $xy \in T$ از این که $x_i \in L$ نتیجه می‌گیریم:

برای برخی $z_i \in R$ ، $x_n \in L$ ، $w = x_1 z_1 \dots x_{n-1} z_{n-1} x_n \in L$. قرار می‌دهیم: $m = 1 + s + t_0 + \dots + t_n$ چون R تقبیل یافته است پس اگر $xy = 0$ آنگاه $(aw)^m = 0$ و لذا $aw = 0$. در نتیجه $a \in O_P = O(P)$ که یک تناقض است.

اگر $x, y \in T$ آنگاه با چنین استدلالی می‌توان نشان داد: $xy \neq 0$ و $xy \in T$. بنابراین M یک m -سیستم است که $0 \notin M$. پس ایده‌آل اول Q مجزا از M وجود دارد. در نتیجه $a \notin Q$ و $Q \subseteq P$.

□

نتیجه ۴.۱.۳. فرض کنیم P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی R باشد و $N_*(R) = N(R)$ در این صورت

$$N(P) = \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid N(P) \subseteq Q\} = \bigcap \{Q \in \text{Spec}(R) \mid Q \subseteq P\}.$$

□

برهان. بدیهی است.

نتیجه ۵.۱.۳. فرض کنیم P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی ۲-اولیه R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. P ، اول مینیمال است.

$$. N(P) = P . ۲$$

۳. هرگاه $a \in P$ ، آنگاه $b \in R \setminus P$ وجود دارد که ab پوچتوان است.

برهان. (۱ $\leftrightarrow$ ۲) از نتیجه‌ی قبل به دست می‌آید.

(۲ $\leftarrow$ ۳) اگر $a \in P = N(P)$ ، آنگاه $b \in R \setminus P$ وجود دارد که $abab \in aRb \subseteq N_*(R)$ بنابراین ab ،

پوچتوان است.

(۳ $\leftarrow$ ۲) فرض کنیم $a \in P$. عنصر $b \in R \setminus P$ وجود دارد به طوری که $ab \in N_*(R)$ و چون

$R/N_*(R)$ تقلیل یافته است، از این رو $aRb \subseteq N_*(R)$. بنابراین $a \in N(P)$ و $N(P) = P$. $\square$

تعریف ۶.۱.۳. حلقه R را حاصلضرب زیرمستقیم خانواده‌ای از حلقه‌های $\{R_i : i \in I\}$ می‌نامیم هرگاه

۱. همومورفیسم $\varphi : R \longrightarrow \prod R_i$ وجود داشته باشد.

۲. برای هر $i \in I$ ، $\pi_i \circ \varphi : R \longrightarrow R_i$ پوشا باشد که $\pi_j : \prod R_i \longrightarrow R_j$ ، نگاشت تصویر کانونی

است.

لم ۷.۱.۳. گزاره‌های زیر روی حلقه R معادلند:

۱. R ، ۲-اولیه است.

۲. هر ایده‌آل اول مینیمال R ، کاملاً اول است.

۳. هر زیرحلقه (ممکن است بدون همانی باشد) از R ، ۲-اولیه است.

۴. $N(R) = N^*(R)$ و هر زیرحلقه سره (ممکن است بدون همانی باشد) از R ، ۲-اولیه است.

۵. $N(R) = N^*(R)$ و هر ایده‌آل سره (بعنوان زیر حلقه ای بدون همانی) از R ، ۲-اولیه است.

۶. $R/N_*(R)$ ، حاصلضرب زیرمستقیمی از دامنه هاست.

۷. $R/N_*(R)$ ، تقلیل یافته است.

برهان. (۲ ← ۱) بدیهی است.

(۲ ← ۱) فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال از حلقه‌ی R باشد و $ab \in P$ بنابر نتیجه‌ی قبل عنصر

$c \in R \setminus P$ وجود دارد که $abc \in N_*(R)$. اگر $b \notin P$ ، آنگاه $z \in R$ وجود دارد که $bzc \notin P$ و چون

$R/N_*(R)$ تقلیل یافته است، از این رو $aRbzc \subseteq N_*(R)$ بنابراین $a \in N(P) = P$.

(۵ ← ۱) فرض کنیم که هر ایده‌آل سره از حلقه R ، ۲-اولیه باشد و $N(R) = N^*(R)$. (برهان خلف)

فرض کنیم $a \in N(R)$ وجود داشته باشد که $a \notin N_*(R)$. در این صورت a پوچتوان قوی نیست لذا دنباله‌ی

ناایستای

$$a_0 = a, a_1 = a_0 r_0 a_0, a_2 = a_1 r_1 a_1, \dots, a_{i+1} = a_i r_i a_i, \dots,$$

وجود دارد که $r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ در R هستند. فرض کنیم I ایده‌آلی تولید شده توسط

$$a_0, a_1, r_0 a_0 r_1 a_0 r_0, r_2 a_2 r_3 a_2 r_2, \dots, r_{2j} a_{2j} r_{2j+1} a_{2j} r_{2j}, \dots$$

باشد. از روابط

$$a_2 = a_1 r_1 a_1 = a_0 (r_0 a_0 r_1 a_0 r_0) a_0,$$

$$a_4 = a_3 r_3 a_3 = a_2 (r_2 a_2 r_3 a_2 r_2) a_2,$$

⋮

$$a_{2j} = a_{2j-1} r_{2j-1} a_{2j-1} = a_{2j-2} (r_{2j-2} a_{2j-2} r_{2j-1} a_{2j-2} r_{2j-2}) a_{2j-2},$$

⋮

نتیجه می‌گیریم که عناصر $a_0, a_1, a_2, a_4, \dots, a_{2j}, \dots$ مشمول در I هستند.

با توجه به شرط $N(R) = N^*(R)$ داریم: $I \subseteq N(R)$.

با توجه به اینکه هر ایده‌آل سره از حلقه R ، ۲-اولیه است لذا I ، ۲-اولیه است. دنباله‌ی

$$b_0 = a, b_1 = b_0(r_0 a_0 r_1 a_0 r_0) b_0 = a_2, b_2 = b_1(r_2 a_2 r_3 a_2 r_2) b_1 = a_4, \dots, \\ b_{j+1} = b_j(r_{2j} a_{2j} r_{2j+1} a_{2j} r_{2j}) b_j = a_{2(j+1)}, \dots$$

را در نظرمی‌گیریم. چون دنباله‌ی فوق در I نایبستا است لذا I ۲-اولیه نیست که یک تناقض است.

$$\text{بنابراین } N_*(R) = N(R)$$

(۱ ← ۷) واضح است.

$$(۱ ← ۳) \text{ فرض کنیم } S \text{ زیرحلقه‌ی } R \text{ باشد. کافیت نشان دهیم } N(S) \subseteq N_*(S).$$

فرض کنیم که $a \notin N_*(S)$ پس a پوچتوان قوی در S نیست. لذا a پوچتوان قوی در R نیز نیست و

$$N(S) \subseteq N_*(S) \text{ در نتیجه } a \notin N(S), \text{ بنابراین } a \notin N(R), \text{ لذا } a \notin N_*(R) = N(R)$$

$$(۳ ← ۴) \text{ بنابه قضیه ۱۲.۱.۳ رابطه برقرار است.}$$

$$(۲ ← ۶) \text{ فرض کنیم هر ایده‌آل اول مینیمال در } R, \text{ کاملاً اول باشد. نگاشت } \varphi: R \longrightarrow \prod R/P_i \text{ با}$$

ضابطه $r \longmapsto \{r + P_i\}_{i \in I}$ را در نظر می‌گیریم که برای هر i, P_i یک ایده‌آل اول مینیمال است، پس نگاشت

$$\bar{\varphi}: R/N_*(R) \longrightarrow \prod R/P_i \text{ با ضابطه‌ی } r + N_*(R) \longmapsto \{r + P_i\}_{i \in I} \text{ یک همومورفیسم یک‌به‌یک است}$$

که برای هر $i \in I$ نگاشت تصویر کانونی است. به طوری که برای هر $i \in I$ نگاشت

$$\pi_i \circ \bar{\varphi}: R/N_*(R) \longrightarrow R/P_i \text{ با ضابطه‌ی } r + N_*(R) \longmapsto r + P_i \text{ پوشا است.}$$

$$(۶ ← ۷) \text{ فرض کنیم نگاشت } \varphi: R \longrightarrow \prod R/P_i \text{ یک همومورفیسم با ضابطه‌ی } r \longmapsto \{r + P_i\}_{i \in I}$$

باشد به طوری که برای هر $i \in I$ یک ایده‌آل اول مینیمال در R و R/P_i یک دامنه است و

$$ker \varphi = \bigcap P_i = N_*(R). \text{ بنا به قضیه اول یکریختی } R/N_*(R) \cong Im \varphi. \text{ از طرفی حاصلضرب}$$

مستقیم هر تعداد دامنه، حلقه‌ای تقلیل یافته است. بنابراین $R/N_*(R)$ حلقه‌ای تقلیل یافته است.

□

لم ۸.۱.۳. گزاره‌های زیر معادلند:

۱. حلقه R ، ۲-اولیه است.

$$۲. N_*(R) = \beta_2(R).$$

۳. هر ایده‌آل اول مینیمال از R ، کاملاً اول است.

برهان. بنا به لم ۷.۱.۳ برقرار است.

□

لم ۹.۱.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R ، ۲-اولیه باشد. در این صورت حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R نیز ۲-اولیه است.

برهان. حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R را با T نمایش می‌دهیم. برخی از ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی T را به فرم

$$(A_{kp}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \circ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \mid \exists k, a_{kk} \in P \in \text{Spec}(R), \forall k, p, a_{kp} \in R \right\}$$

در نظر می‌گیریم. از فرم این ایده‌آل‌ها می‌بینیم که $N_*(T)$ به فرم (B_{ij}) است که برای $i \neq j$ ، $B_{ij} = R$ و برای $i = j$ ، آنگاه $B_{ii} = N_*(R)$. چون R ، ۲-اولیه است لذا بنا به لم ۸.۱.۳، $N_*(R) = \beta_2(R)$ بنابراین $N_*(T) = \beta_2(T)$ و حلقه T ، ۲-اولیه است.

□

واضح است که هر حلقه ۲-اولیه، موضعا ۲-اولیه است. بنا به لم ۷.۱.۳، هر زیرحلقه از حلقه‌ی ۲-اولیه، ۲-اولیه است اما عکس این گزاره بنا به مثال زیر برقرار نیست.

مثال ۱۰.۱.۳. فرض کنیم T ، حلقه‌ای ۲-اولیه باشد. حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $2^n \times 2^n$ روی حلقه‌ی T را با R_n نمایش می‌دهیم که n یک عدد صحیح مثبت است.

نگاشت $\sigma : R_n \rightarrow R_{n+1}$ را با ضابطه‌ی $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. R_n را می‌توان به عنوان زیرحلقه‌ای از R_{n+1} در نظر گرفت (یعنی برای $A \in R_n$ ، $A = \sigma(A)$) فرض کنیم R حد مستقیم سیستم مستقیم (R_n, σ_{ij}) باشد که $\sigma_{ij} = \sigma^{j-i}$ ، در این صورت R موضعا ۲-اولیه است اما ۲-اولیه نیست. **برهان.** قرار می‌دهیم $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. زیر حلقه متناهی S از R را در نظر می‌گیریم که برای برخی $m \geq 1$ ، $S \subseteq R_m$ است. بنا به لم ۹.۱.۳، R_m ، ۲-اولیه است. بنا به لم ۷.۱.۳ زیر حلقه تولید شده توسط S ، ۲-اولیه است. در نتیجه R موضعا ۲-اولیه است اما بنا به لم ۱۴.۱.۲، R ، ۲-اولیه نیست.

□

همواره، به کمک مثال فوق می‌توانیم یک حلقه موضعا ۲-اولیه که ۲-اولیه نیست را بسازیم. واضح است که هر حلقه‌ی نیم اول و ۲-اولیه، تقلیل یافته است. اما حلقه‌های موضعا ۲-اولیه و نیم اولی وجود دارند که تقلیل یافته نیستند.

نتیجه ۱۱.۱.۳. فرض کنیم حلقه‌های T و R همان حلقه‌های مثال ۱۰.۱.۳ باشند. اگر T تقلیل یافته باشد، آنگاه R نیم اول و موضعا ۲-اولیه است اما ۲-اولیه نیست.

برهان. چون هر حلقه‌ی تقلیل یافته، ۲-اولیه است. پس بنا به مثال فوق R موضعا ۲-اولیه است اما ۲-اولیه نیست و بنا به لم ۱۴.۱.۲ حلقه‌ی R نیم اول است.

□

قضیه ۱۲.۱.۳. هر حلقه‌ی موضعا ۲-اولیه، NI است.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ای موضعا ۲-اولیه باشد. عناصر $r, s \in R$ و $a, b \in N(R)$ را در نظر می‌گیریم. زیرحلقه‌ای از R که توسط a, b, r, s تولید می‌شود را S می‌نامیم. چون R موضعا ۲-اولیه است لذا S ، ۲-اولیه است. بنابراین $a - b, ras \in N(S)$ ؛ همچنین $a - b, ras \in N(R)$. در نتیجه R ، حلقه‌ای NI است.

□

تعریف ۱۳.۱.۳. فرض کنیم σ یک خودریختی روی حلقه‌ی A و $R = A[x; \sigma]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی A باشد. (عناصر این حلقه چندجمله‌ای‌هایی با ضرایبی از A هستند. جمع و ضرب به طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که برای هر $a \in A$ ، $xa = \sigma(a)x$)

عنصر $r \in R$ را σ -پوچتوان می‌نامیم هرگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود داشته باشد به طوری که

$$r\sigma^m(r)\sigma^{2m}(r)\dots\sigma^{m(n-1)}(r) = 0.$$

عنصر $r \in R$ را σ -پوچتوان از اندیس متناهی می‌نامیم هرگاه کوچکترین مضرب مشترک تمام اعداد طبیعی m که در شرط فوق صدق می‌کنند وجود داشته باشد.

قضیه ۱۴.۱.۳. ([۲۳] قضیه‌ی ۳-۱) فرض کنیم A یک حلقه جابجایی و σ یک خودریختی از A است. اگر $r \in R$ یک عنصر σ -پوچتوان ناصفر از اندیس متناهی باشد و $x \in R$ ، آنگاه xxR یک ایده‌آل راست موضعا پوچتوان از R است.

عکس قضیه ۱۲.۱.۳ بنا به مثال زیر برقرار نیست.

مثال ۱۵.۱.۳. فرض کنیم k یک میدان و $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح باشد. فرض کنیم $\{t_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ متغیرهای جابجایی روی k باشد. قرار می‌دهیم:

$$A = k \frac{[\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}]}{I}$$

که $\{0 \neq n_3 - n_2 = n_2 - n_1 > 0 \mid t_{n_1}, t_{n_2}, t_{n_3}\} \subset I$ ، حلقه چندجمله‌ای‌های اریب و σ ، $-k$ خودریختی از A است که برای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، $\sigma(t_i) = t_{i+1}$ ، ابتدا نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R ، NI است.

فرض کنیم عنصر $s \in A$ ، σ -پوچتوان از اندیس متناهی باشد. فرض کنیم $n \geq 3$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$

$$s\sigma^m(s)\sigma^{2m}(s)\dots\sigma^{(n-1)m}(s) = 0.$$

چون A جابجایی و σ یک خودریختی است پس بنابه قضیه ۱۴.۱.۳ ایده‌آل راست اصلی sxR موضعا پوچتوان است. برای هر $i \in \mathbb{Z}$ چون $t_{i+2} - t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ پس $t_{i+2} - t_{i+1} = 0$ پس $t_i \sigma(t_i) \sigma^2(t_i) = t_i t_{i+1} t_{i+2} = 0$ لذا عنصر t_i پوچتوان از اندیس متناهی است. ایده‌آل $m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i A \subset A$ در نظر می‌گیریم. نگاشت $\psi : A/m \rightarrow k$ را با ضابطه‌ی $(f + I) + m \mapsto a_i$ در نظر می‌گیریم که ψ و $f = \sum_{i=1}^n a_i t_i$ یک یکرختی است.

قرار می‌دهیم $B = mx.R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i xR$.

به وضوح $B \subset R$ موضعا پوچتوان است. بنابراین مشمول در رادیکال لویسکی است. اگر از یکرختی

$$R/B \cong A \oplus kx \oplus kx^2 \oplus kx^3 \oplus \dots \quad (۱.۳)$$

استفاده کنیم، آنگاه می‌توان ضرب در سمت راست رابطه‌ی (۱.۳) را به صورت

$$\begin{aligned} & (s, c_1 x, c_2 x^2, \dots) (s', d_1 x, d_2 x^2, \dots) \\ &= (ss', [\psi(s)d_1 + c_1 \psi(s')] x, [\psi(s)d_2 + c_1 d_1 + c_2 \psi(s')] x^2, \dots) \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

برای هر $s, s' \in A$ و $c_i, d_i \in K$ در نظر گرفت.

در سمت چپ رابطه‌ی (۱.۳) ضرب به صورت

$$\begin{aligned} & (s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots + B) (s'_0 + s'_1 x + s'_2 x^2 + \dots + B) \\ &= s_0 s'_0 + [s_0 s'_1 + s_1 \sigma(s'_1)] x + [s_0 s'_2 + s_1 \sigma(s'_1) + s_2 \sigma^2(s'_0)] x^2 + \dots + B \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

است که $s_i, s'_i \in A$.

جمله‌ی $s_0 s'_1 \in A$ به صورت

$$s_0 s'_1 = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + I. \quad (۴.۳)$$

است که جملات ثابت آن عضو k هستند. بنابراین در رابطه (۴.۳) می‌توان بجای s, s' از جمله $\psi(s)d_1$ که این نیز عضوی از k است استفاده نمود.

واضح است که k تقلیل یافته است، همچنین می‌توان نشان داد که A نیز تقلیل یافته است. از رابطه‌ی (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می‌شود که R/B تقلیل یافته است.

بنابراین هر عنصر پوچتوان حلقه‌ی R مشمول در ایده‌آل B است لذا

$$N_*(R) = (\circ) \subsetneq B = L - \text{rad}(R) = N^*(R) = N(R)$$

بنابراین حلقه‌ی R ، NI است و ۲-اولیه نیست. حال نشان می‌دهیم R موضعا ۲-اولیه نیست.

زیرحلقه S از R که توسط x و $t_1 t_2 x$ تولید می‌شود را در نظر می‌گیریم. چون

$$(t_1 t_2 x)(t_1 t_2 x) = t_1 t_2 t_2 t_3 x^2 = t_1 t_2 t_3 t_2 x^2 = \circ$$

بنابراین $t_1 t_2 x \in N(S)$. بنا به تعریف σ محاسبات زیر را داریم:

$$f_1 = (t_1 t_2 x) x^{1+1} (t_1 t_2 x) = t_1 t_2 t_4 t_5 x^4 \quad (a_1 = 4)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(t_1 t_2 t_4 t_5 x^4 \right) x^{4+1} \left(t_1 t_2 t_4 t_5 x^4 \right) \\ &= t_1 t_2 t_4 t_5 t_1 \circ t_{11} t_{13} t_{14} x^{13} \quad (a_2 = 13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= (t_1 t_2 t_4 t_5 t_1 \circ t_{11} t_{13} t_{14} x^{13}) x^{13+1} (t_1 t_2 t_4 t_5 t_1 \circ t_{11} t_{13} t_{14} x^{13}) \\ &= t_1 t_2 t_4 t_5 t_1 \circ t_{11} t_{13} t_{14} t_{28} t_{29} t_{31} t_{32} t_{37} t_{38} t_{40} t_{41} x^{40} \quad (a_3 = 40) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} f_n &= (t_1 t_2 \dots t_{a_{n-1}} t_{a_{n-1}+1} x^{a_{n-1}}) x^{a_{n-1}+1} (t_1 t_2 \dots t_{a_{n-1}} t_{a_{n-1}+1} x^{a_{n-1}}) \\ &= (t_1 t_2 \dots t_{a_n} t_{a_n+1} x^{a_n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= (t_1 t_2 \dots t_{a_n} t_{a_n+1} x^{a_n}) x^{a_n+1} (t_1 t_2 \dots t_{a_n} t_{a_n+1} x^{a_n}) \\ &= t_1 t_2 \dots t_{a_{n+1}} t_{a_{n+1}+1} x^{a_{n+1}}, \end{aligned}$$

که $a_0 = 1$ و برای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

ضریب هر چندجمله‌ای f_k حاصلضرب 2^{k-1} ، دسته چهارتایی از t_i هاست و هر دسته به فرم $t_j t_{j+1} t_{j+2} t_{j+3}$ است. (بنابراین ناصفر است) لذا f_1 ناصفر است. اگر f_2 صفر باشد، آنگاه ضرایب آن شامل $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}$ است با شرط $i_3 - i_2 = i_2 - i_1$.

بنابراین دو حالت داریم:

$$1. t_{i_1}, t_{i_2} \in \{t_1, t_2, t_4, t_5\}, t_{i_3} \in \{t_{10}, t_{11}, t_{13}, t_{14}\}.$$

$$2. t_{i_1} \in \{t_1, t_2, t_4, t_5\}, t_{i_2}, t_{i_3} \in \{t_{10}, t_{11}, t_{13}, t_{14}\}.$$

از حالت ۱ نتیجه می‌گیریم که: $i_2 - i_1 \leq 4, i_3 - i_2 \geq 5$

و از حالت ۲ نتیجه می‌گیریم که: $i_2 - i_1 \geq 5, i_3 - i_2 \leq 4$ لذا f_2 ناصفر است.

چون که ضریب f_k بصورت حاصلضرب 2^{k-1} ، دسته چهارتایی t_i هاست.

به عنوان نمونه برای $(i_m = a_k + 1)$ $t_{i_1} \dots t_{i_m} x^{a_k}$

$$f_{k+1} = (t_{i_1} \dots t_{i_m} x^{a_k}) x^{a_k+1} (t_{i_1} \dots t_{i_m} x^{a_k}) = (t_{i_1} \dots t_{i_m}) (t_{j_1} \dots t_{j_m}) x^{a_k+1}$$

که $j_1 = 2i_m$ و $j_m = a_{k+1} + 1$.

اگر f_{k+1} صفر باشد، آنگاه ضریب آن شامل $t_\alpha t_\beta t_\gamma$ است که $\gamma - \beta = \beta - \alpha$.

بنابراین دو حالت داریم:

$$1. t_\alpha, t_\beta \in \{t_{i_1} \dots t_{i_m}\}, t_\gamma \in \{t_{j_1} \dots t_{j_m}\}.$$

$$2. t_\alpha \in \{t_{i_1} \dots t_{i_m}\}, t_\beta t_\gamma \in \{t_{j_1} \dots t_{j_m}\}.$$

از حالت ۱ نتیجه می‌گیریم که: $\beta - \alpha \leq i_m - 1, \gamma - \beta \geq i_m$

و از حالت ۲ نتیجه می‌گیریم که: $\beta - \alpha \geq i_m, \gamma - \beta \leq i_m - 1$ لذا f_{k+1} ناصفر است.

در نتیجه دنباله $(f_k)_{k=0}^\infty$ هر جمله آن ناصفر است و $f_{k+1} \in f_k S f_k$.

بنابراین $t_1 t_2 x$ در S پوچتوان قوی نیست؛ لذا $t_1 t_2 x \notin N_*(S)$ که نشان می‌دهد S ، ۲-اولیه نیست.
در نتیجه R ، موضعا ۲-اولیه نیست.

گزاره ۱۶.۱.۳. ۱. فرض کنیم حلقه‌ی R از اندیس پوچتوانی متناهی باشد. در این صورت حلقه‌ی R ،

NI است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R ، موضعا ۲-اولیه باشد اگر و تنها اگر حلقه‌ی R ، ۲-اولیه باشد.

۲. فرض کنیم هر ایده‌آل سره (بعنوان زیرحلقه‌ای بدون همانی) از حلقه‌ی R ، ۲-اولیه باشد. در این

صورت R ، NI است اگر و تنها اگر R موضعا ۲-اولیه باشد اگر و تنها اگر R ، ۲-اولیه باشد.

برهان. ۱. کافیت نشان دهیم هر حلقه‌ی NI ، ۲-اولیه است. فرض کنیم حلقه‌ی R ، NI باشد و

$a \in N^*(R) = N(R)$. لذا عدد صحیح مثبتی مانند k هست که $a^k = 0$. چون $R/N(R)$ حلقه‌ای

تقلیل یافته است پس $aR \subseteq N(R) = N^*(R)$. با توجه به اینکه R از اندیس پوچتوانی متناهی است

بنابراین $aR = 0$ یا aR شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول باشد.

اگر $aR = 0$ ، آنگاه

$$aR = 0 \in P \Rightarrow aR \subseteq P$$

$$\Rightarrow aR \subseteq \bigcap P = N_*(R) \Rightarrow a \in N_*(R).$$

اگر $aR \subseteq P$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر باشد، آنگاه

$$((aR) x^{n-1} (aR))^2 = 0 \in P.$$

چون P ایده‌آلی اول است لذا

$$(aR) x^{n-1} (aR) \subseteq P \Rightarrow aR \subseteq P \text{ یا } x^{n-1} (aR) \subseteq P$$

اگر $aR \subseteq P$ ، آنگاه $aR \subseteq N_*(R)$ و $a \in N_*(R)$.

اگر $(aR) \subseteq P$ ، x^{n-1} ، آنگاه چون $x \in aR$ دلخواه است. کافیت به جای x^{n-1} ، $(aR)^{n-1}$ را قرار

دهیم که در این صورت

$$(aR)^{n-1} (aR) = (aR)^n \subseteq P.$$

چون P ایده‌آل اول دلخواهی است پس

$$(aR) \subseteq P \Rightarrow aR \subseteq \bigcap P = N_*(R) \Rightarrow a \in N_*(R).$$

در هر دو حالت $a \in N_*(R)$ است و $N(R) \subseteq N_*(R)$. در نتیجه $N(R) = N_*(R)$ و حلقه‌ی R ،

۲-اولیه است.

۲. کافیت نشان دهیم هر حلقه‌ی NI ، ۲-اولیه است. فرض کنیم حلقه‌ی R ، NI باشد، همچنین در

حلقه R هر ایده‌آل سره (به عنوان زیر حلقه‌ای بدون همانی) ۲-اولیه است لذا بنا به لم ۷.۱.۳، حلقه

R ، ۲-اولیه است.

□

گزاره ۱۷.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی متناهی با مرتبه‌ی p^n باشد که p یک عدد اول است. اگر $n < ۳$ ،

آنگاه R جابجایی است.

برهان. برای $n = ۱$ بدیهی است. فرض کنیم $n = ۲$ پس دو حالت زیر را داریم:

حالت اول، فرض کنیم مشخصه‌ی R ، $p^۲$ باشد. در این صورت گروه جمعی R دوری است بنابراین R ،

جابجایی است.

حالت دوم، فرض کنیم مشخصه‌ی R ، p باشد. در این صورت گروه جمعی R توسط دو عنصر تولید

می‌شود. e را به عنوان یکی از مولدهای گروه جمعی انتخاب می‌کنیم لذا $R = (e) \oplus H$ که (e) و H هر دو

از مرتبه‌ی p هستند. پس هر دو جابجایی هستند. بنابراین حلقه‌ی R نیز جابجایی است.

□

لم ۱۸.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی متناهی از مرتبه m با عنصر خنثی e باشد. اگر m فارغ از مکعب باشد، آنگاه R یک حلقه جابجایی است.

برهان. فرض کنیم $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$. بنا به [۱۸] می‌دانیم $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_k$ که هر ایده‌آل R_i از مرتبه‌ی $p_i^{n_i}$ است و یک عنصر خنثی دارد، پس بنا به گزاره ۱۷.۱.۳ هر یک از R_i ها جابجایی است. از مجموع ایده‌آل‌ها نتیجه می‌شود که R یک حلقه‌ی جابجایی است.

□

تعریف ۱۹.۱.۳. $F = GF(q)$ بیانگر میدان گالوا از مرتبه‌ی $q = p^r$ است که در آن p یک عدد اول است. $F_0 = \{0, 1, \dots, p-1\}$ زیرمیدانی از F است که یکرخت با اعداد صحیح به پیمانه‌ی p است. اگر $f(x)$ تحویل ناپذیر از درجه r روی F_0 باشد و a یک ریشه از $f(x)$ در F باشد، آنگاه $\{1, a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$ پایه‌ای برای میدان F روی F_0 تشکیل می‌دهد.

۱. گروه جمعی:

گروه جمعی $GF(q)$ یک p -گروه آبلی مقدماتی است. $x + \dots + x = (1 + \dots + 1)x = 0x = 0$. که جمله در این مجموع وجود دارد. بنابراین $GF(q)$ مجموع مستقیم r گروه دوری از مرتبه p است.

۲. گروه ضربی:

گروه ضربی $GF(q) - \{0\}$ دوری و از مرتبه‌ی $q-1$ است. ریشه‌ای مانند g وجود دارد به طوری که هر عنصر ناصفر F را می‌توان به صورت منحصر بفرد g^i نوشت که $0 \leq i \leq q-2$ بنابراین داریم:

$$g^{q-1} = g^0 = 1$$

لم ۲۰.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی ناجابجایی متناهی با عنصر خنثی باشد. اگر مرتبه‌ی R ، p^3 باشد که p یک عدد اول است، آنگاه R با حلقه‌ی ماتریس‌های 2×2 مثالی روی میدان $GF(p)$ یکرخت است.

برهان. فرض کنیم e عنصر خنثی عمل ضرب در R باشد. بنابراین مشخصه‌ی R باید ۱ یا p یا p^2 یا p^3 باشد. اگر مشخصه‌ی R ، p^3 باشد، آنگاه R گروهی دوری از مرتبه‌ی p^3 است که با $\mathbb{Z}_{p^3}$ یکرخت است لذا حلقه‌ی R جابجایی است و با فرض قضیه در تناقض است. بنابراین مشخصه‌ی R ، p یا p^2 است. فرض کنیم مشخصه‌ی R ، p^2 باشد. در این صورت گروه جمعی R ساختار (p^2, p) دارد که e یکی از دو مولد گروه جمعی است، لذا $R = (e) \oplus H$ که (e) و H به ترتیب از مرتبه‌ی p^2 و p هستند. پس هر دو جابجایی هستند، بنابراین حلقه‌ی R نیز جابجایی است و یک تناقض است. در نتیجه مشخصه‌ی R باید p و گروه جمعی آن ساختار (p, p, p) دارد و لذا R یک $GF(p)$ -جبر ۳ بعدی است. توجه کنیم که R یک رادیکال ناصفری مانند J از مرتبه‌ی p دارد. چون اگر $J = (0)$ ، آنگاه بنا به قضیه‌ی ودربرن-آرتین [۸]، حلقه‌ی R با مجموع مستقیم حلقه‌های ماتریسی $n \times n$ یکرخت است و تنها حلقه‌های ماتریسی $n \times n$ از مرتبه‌ی p^n که $n \leq 3$ میدان‌های متناهی هستند. بنابراین R باید جابجایی باشد که متناقض با فرض است.

اگر J از مرتبه‌ی p^2 باشد، آنگاه چون J یک $GF(p)$ -جبر ۲-بعدی پوچتوان است، پس J جابجایی است و لذا $R/J \cong GF(p)$. بنابراین هر عنصر R متعلق به هم دسته $ke + J$ است که $k \in GF(p)$. چون e در R مرکزی است و عناصر J با هم جابجا می‌شوند در نتیجه R جابجایی است که یک تناقض است. بنابراین مرتبه‌ی J ، p است، داریم:

$$J = \{ku \mid k \in GF(p)\}$$

مشاهده می‌کنیم که $J^2 = (0)$ ، حال R/J را بررسی می‌کنیم. چون R/J از مرتبه‌ی p^2 است و یک عنصر خنثی دارد، پس R/J یا میدانی از مرتبه‌ی p^2 است یا حاصلجمع مستقیم دو میدان از مرتبه‌ی p است. فرض کنیم R/J میدانی از مرتبه‌ی p^2 باشد. در این صورت J یک ایده‌آل ماکزیمال در R است. همومورفیسم طبیعی $\theta: R \rightarrow R/J$ هر عنصر یکه را به یک عنصر یکه و هر عنصر غیریکه را به غیریکه تصویر می‌کند. فرض کنیم g یک عنصر یکه در R باشد لذا $\theta(g)$ نیز در R/J یکه است. حال برای $u \in J$ و $k \in GF(p)$ که $ku \neq 0$ وجود دارد $gu = ku$ مرتبه‌ی میدان متناهی $GF(p)$ ، p است،

همچنین می‌دانیم عناصر ناصفر هر میدان متناهی با عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند لذا در $GF(p)$ ، $g^{p-1}u = u$ و $k^{p-1} = 1$ چون J ماکزیمال است، پس $g^{p-1} - e \in J$ اما $g^{p-1} = \theta(e)$ که تناقض با انتخاب g دارد. بنابراین $R/J \cong GF(p) \oplus GF(p)$. عنصر خودتوان $f \in R$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $R = fR + (e - f)R$ می‌دانیم که بعد R روی $GF(p)$ برابر ۳ است، لذا $\dim fR = 2$ و $\dim(e - f)R = 1$ یا $\dim(e - f)R = 2$ و $\dim fR = 1$.

فرض کنیم $\dim fR = 2$ در این صورت:

$$(e - f)R = \{k(e - f) \mid k \in GF(p)\}$$

چون $\dim(e - f)R = 1$ پوچتوان نیست لذا $J \subset fR$. از اینکه حلقه‌ی R ناجابجایی است نتیجه می‌شود که برای هر $u \in J$ ، $uf = 0$ و $fu = u$ بنابراین برای هر $r \in R$ و برای هر $u \in J$ داریم: $f^2 = f$ ، $uf = 0$ ، $u^2 = 0$ و $er = re = r$ حال اگر تناظرات $e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $f \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $u \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ را بسازیم، آنگاه یکرختی بین R و حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلی 2×2 با درایه‌هایی از $GF(p)$ را مشاهده می‌کنیم.

□

قضیه ۲۱.۱.۳. اگر R یک حلقه موضعا ۲-اولیه ناجابجایی مینیمال باشد، آنگاه R با حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلی 2×2 روی $GF(2)$ یکرخت است.

برهان. فرض کنیم R حلقه ناجابجایی متناهی از مرتبه m باشد. اگر m فارغ از مکعب باشد، آنگاه بنا به لم ۱۸.۱.۳، R یک حلقه‌ی جابجایی است. بنابراین تجزیه‌ی مرتبه‌ی آن باید شامل یک مکعب باشد اما اگر مرتبه‌ی R ، p^3 باشد که p عددی اول است، آنگاه بنا به گزاره‌ی ۲۰.۱.۳، R با حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلی 2×2 روی $GF(p)$ یکرخت است. بنابراین اگر R یک حلقه‌ی ناجابجایی مینیمال باشد، آنگاه R با حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلی 2×2 روی $GF(2)$ یکرخت است اما این حلقه بنا به لم ۹.۱.۳ (موضعا) ۲-اولیه است.

□

۲.۳ ویژگی‌های حلقه‌های موضعا ۲-اولیه و برخی توسیع‌های آن

واضح است که هر حلقه‌ی پوچ، NI است، حال این سوال پیش می‌آید که آیا هر حلقه‌ی پوچ، موضعا ۲-اولیه است؟ با توجه به مثال زیر جواب منفی است.

قضیه ۱.۲.۳. برای هر میدان شمارا مانند K جبر پوچی مانند R روی K وجود دارد به طوری که چندجمله‌ای جبری $R[X, Y]$ روی R با دو متغیر جابجایی پوچ نیست.

برهان. رجوع شود به [۲۵]. □

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا باشد. فرض کنیم $\bar{A} = \mathbb{Q}[x, y, z]$ ، $\mathbb{Q}$ - جبر تولید شده توسط متغیرهای ناجابجایی x, y, z باشد که جمله ثابت شان صفر است. به وضوح $\bar{A}$ شماراست و لذا $\bar{A} = \{f_1, f_2, \dots\}$

با توجه به برهان قضیه فوق اعداد طبیعی $m_1, m_2, \dots$ وجود دارد به طوری که:

$$1. \text{ برای هر } i, m_{i+1} > m_i^{2^{i+1}}, m_1 > 10^8.$$

$$2. \text{ برای هر } i, m_i \mid m_{i+1}.$$

$$3. \text{ برای هر } i, m_i > 3^{2 \deg(f_i)} (\deg(f_i))^{2402}, i \geq 1.$$

اگر I ایده‌آلی از $\bar{A}$ باشد که توسط $\{f_i^{1 \circ m_{i+1}} \mid i = 1, 2, \dots\}$ تولید می‌شود و $R = \frac{\bar{A}}{I}$ ، آنگاه R پوچ است. هر عنصر از R مانند $f + I$ را با علامت $\bar{f}$ نمایش می‌دهیم.

اگر S زیرحلقه‌ای از R باشد که توسط $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ تولید می‌شود، آنگاه $S = \frac{T+I}{I}$.

$$\text{به عنوان نمونه برای } s < t, j_s < j_t, S = \{0, \bar{f}_{j_1}, \bar{f}_{j_2}, \dots\}$$

دنباله‌ی $\dots, a_n = a_{n-1} \bar{f}_{j_{n+2}} a_{n-1}, \dots, a_1 = a_0 \bar{f}_{j_3} a_0, a_0 = \bar{f}_{j_1} \bar{f}_{j_2} \bar{f}_{j_1}$ را در نظر می‌گیریم.

محاسبات زیر را برای $n = 0, 1, 2, \dots$ با توجه به ویژگی‌های ۱ و ۳ روی m_i ها داریم:

$$\deg(a_0) = 2\deg(\overline{f_{j_1}}) + \deg(\overline{f_{j_2}}) < m_{j_1} + \deg(\overline{f_{j_2}})$$

$$< m_{j_1} + m_{j_2} < 2m_{j_2} < m_{j_3}$$

لذا $a_0 \neq 0$

$$\deg(a_1) = 2\deg(a_0) + \deg(\overline{f_{j_3}})$$

$$< 2m_{j_3} + \deg(\overline{f_{j_3}}) < 3m_{j_3} < m_{j_4}$$

لذا $a_1 \neq 0$

.....

$$\deg(a_n) = 2\deg(a_{n-1}) + \deg(\overline{f_{j_{n+2}}})$$

$$< 2m_{j_{n+2}} + \deg(\overline{f_{j_{n+2}}}) < 3m_{j_{n+2}} < m_{j_{n+3}}$$

لذا $a_n \neq 0$.

بنابراین (a_n) نایستاست و S ، ۲-اولیه نیست که نشان می‌دهد R ، موضعا ۲-اولیه نیست.

تعریف ۳.۲.۳. حلقه‌ی R را رادیکال لویتسکی می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل آن موضعا پوچتوان باشد.

گزاره ۴.۲.۳. فرض کنیم R ، حلقه‌ای پوچ باشد. در این صورت R ، موضعا ۲-اولیه است اگر و تنها اگر R ، رادیکال لویتسکی باشد.

برهان. فرض کنیم R ، موضعا ۲-اولیه باشد. برای هر زیرحلقه‌ی متناهی تولید شده مانند S از R داریم:

$$N_*(S) = N(S)$$

چون R حلقه‌ای پوچ است لذا S نیز حلقه‌ای پوچ است پس $S = N(S)$ ، بنابراین $N_*(S) = N(S) = S$.
از طرفی همواره داریم:

$$N_*(S) \subseteq L - \text{rad}(S) \subseteq N^*(S) \subseteq N(S)$$

بنابراین $L - \text{rad}(S) = N(S) = S$. از اینرو چون S متناهی تولید شده است پس S پوچتوان است.

$$R = L - \text{rad}(R)$$

بعکس؛ فرض کنیم R رادیکال لویتسکی باشد. در این صورت هر زیرحلقه متناهی تولید شده مانند S ، پوچتوان است. پس $S \subseteq N_*(S)$ ، چون R حلقه‌ای پوچ است لذا S نیز حلقه‌ای پوچ است پس $S = N(S)$.
بنابراین $N(S) \subseteq N_*(S)$. در نتیجه $N(S) = N_*(S)$ لذا S ، ۲-اولیه است. بنابراین حلقه R ، موضعا ۲-اولیه است.

□

تعریف ۵.۲.۳. حلقه R را نیم اول پوچ می‌نامیم هرگاه هیچ ایده‌آل پوچ ناصفر نداشته باشد.

واضح است که هر حلقه نیم اول پوچ، نیم اول است.

تعریف ۶.۲.۳. ایده‌آل P از حلقه R را قویا اول می‌نامیم هرگاه P ایده‌آلی اول و R/P نیم اول پوچ باشد.

برای مثال، در حلقه‌ی جابجایی هر ایده‌آل ماکزیمال، قویا اول است.

گزاره ۷.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

$$N^*(R) = \bigcap \{ P \mid P \text{ ایده‌آل قویا اول مینیمال است.} \}$$

$$= \bigcap \{ P \mid P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \}$$

برهان. فرض کنیم P ایده‌آلی قویا اول باشد. چون $N^*(R/P) = 0$ ، پس $N^*(R) \subseteq P$ و لذا

$$N^*(R) \subseteq \bigcap \{ P \mid P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \}$$

بعکس، کافیت نشان دهیم $\{P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \mid P \}$ پوچ است.

فرض کنیم $\{P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \mid P \}$ پوچتوان نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. مجموعه‌ی $S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ یک m -سیستم است و بنا به لم زورن مجموعه‌ی $X = \{A \mid A \cap S = \emptyset, A \triangleleft R\}$ نسبت به رابطه‌ی شمول عضوی ماکسیمال مانند P دارد که می‌توان نشان داد اول است. ادعا می‌کنیم P قویا اول است. اگر B/P یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از حلقه‌ی R/P باشد، آنگاه $B \cap S \neq \emptyset$ و لذا عدد صحیح مثبت n وجود دارد که $a^n \in B$. چون B/P پوچ است عدد صحیح مثبت k وجود دارد که $a^{nk} \in P$ که یک تناقض است. بنابراین $\{P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \mid P \}$ پوچ است و لذا

$$N^*(R) = \bigcap \{P \text{ ایده‌آل قویا اول است.} \mid P \}$$

چون هر ایده‌آل قویا اول شامل یک ایده‌آل قویا اول مینیمال است، از این رو

$$N^*(R) = \bigcap \{P \text{ ایده‌آل قویا اول مینیمال است.} \mid P \}$$

□

لم ۸.۲.۳. ۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت اگر R/I و I هر دو

۲-اولیه باشند، آنگاه R نیز ۲-اولیه است.

۲. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت اگر R/I و I هر دو NI باشند، آنگاه R نیز NI است.

۳. کلاس حلقه‌های موضعا ۲-اولیه تحت زیرحلقه‌ها و مجموع‌های مستقیم بسته است.

برهان. ۱. (برهان خلف) فرض کنیم R ، ۲-اولیه نباشد. در این صورت $x \in N(R)$ وجود دارد که

$x \notin N_*(R)$. پس ایده‌آل اولی مانند P وجود دارد که $x \notin P$. چون R/I ، ۲-اولیه است لذا

$N_*(R/I) = N(R/I)$. پس برای هر $x+I \in N(R/I)$ ، k یی هست که $(x+I)^k = I$ یا $x^k \in I$

در نتیجه $x \in I$. از طرفی $x \notin P$ پس $I \not\subseteq P$. فرض کنیم $x^n = 0$. در این صورت برای هر $b \in I$,

$$(bx^{n-1})^2 \in N(I) \text{ همچنین } x^{n-1}bx^{n-1} \in N(I) \text{ لذا } (x^{n-1}bx^{n-1})^2 = 0.$$

بنابراین $bx^{n-1} \in N(I)$. با ادامه این روند $bx \in N(I)$ پس

$$N(I) = N_*(I) \subseteq N_*(R) \subseteq P \text{ و } Ix \subset N(I)$$

در نتیجه $I(x) \subseteq P$ پس $I \subseteq P$ یا $(x) \subseteq P$ که یک تناقض است لذا فرض خلف باطل و R ,

۲-اولیه است.

۲. کافیت نشان دهیم که $N(R) \subseteq N^*(R)$. چون I ، NI است پس $N(I) = N^*(I)$.

فرض کنیم $x \in N(R)$. پس عدد صحیح مثبتی مانند k هست که $x^k = 0$. فرض کنیم m کوچکترین عدد نایبتر از k باشد که $Ix^m \subseteq N(I)$. اگر $m > 1$ ، آنگاه $x^{m-1}Ix^{m-1} \subseteq N(I)$. در نتیجه $(Ix^{m-1})^2 \subseteq N(I)$ و لذا $Ix^{m-1} \subseteq N(I)$ که تناقض با انتخاب m دارد. بنابراین $m = 1$ و برای هر ایده‌آل قویا اول مینیمال مانند Q در R داریم:

$$Ix \subseteq N(I) = N^*(I) \subseteq N^*(R) \subseteq Q$$

اما Q ایده‌آل اول است پس $x \in Q$ یا $I \subseteq Q$. اگر $x \notin Q$ ، آنگاه $I \subseteq Q$ و چون R/I حلقه‌ای NI

است پس $N(R/I) = N^*(R/I) \subseteq Q/I$. بنابراین $x + I \in N(R/I) \subseteq Q/I$ و لذا $x \in Q$ که

یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و باید $x \in Q$. چون Q ایده‌آل قویا اول مینیمال

دلخواه از R بود پس $x \in N^*(R)$. بنابراین $N(R) \subseteq N^*(R)$.

۳. فرض کنیم $\{R_j\}_{j \in J}$ خانواده‌ای ناتهی از حلقه‌های موضعا ۲-اولیه باشد. R را مجموع مستقیمی از

R_i ها در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $x_i = (a_{ij}) \in R$ به طوری که برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $a_{ij} \in R_j$. در این صورت برای هر

j ، هر زیرمجموعه $A_j = \{a_{ij} \mid i = 1, 2, \dots\}$ از R_j متناهی است. چون R_j موضعا ۲-اولیه است

پس زیرحلقه S_j از R_j که توسط A_j تولید می‌شود، ۲-اولیه است. S را مجموع مستقیم S_j ها در نظر می‌گیریم. اگر $b \in N(S) = N(\bigoplus S_j)$ ، آنگاه $n \in N$ وجود دارد به طوری که $b^n = 0$. در نتیجه برای هر $j \in J$ ، $(b_j)^n = 0$ ، b_j -امین مؤلفه از b است. چون $N(S_j) = N_*(S_j)$ پس $b_j \in N_*(S_j)$ و از طرفی تنها تعداد متناهی از b_j ها ناصفر هستند. مجموع آنها را b در نظر می‌گیریم که در $\bigoplus (S_j)_{j \in J}$ واقع است. چون $N_*(\bigoplus S_j) = \bigoplus N_*(S_j)$ داریم:

$$b = \bigoplus b_j \in \bigoplus N_*(S_j) = N_*(\bigoplus S_j) = N_*(S) \Rightarrow b \in N_*(S)$$

بنابراین $N(S) \subseteq \bigoplus N_*(S)$ که نشان می‌دهد S ، ۲-اولیه است. در نتیجه R ، موضعا ۲-اولیه است.

□

حال این سوال مطرح می‌شود که آیا شرایط لم فوق (۱ و ۲) برای حلقه‌های موضعا ۲-اولیه نیز برقرار است؟ با توجه به مثال زیر جواب منفی است.

مثال ۹.۲.۳. فرض کنیم R همان حلقه مثال ۱۴.۱.۳ باشد. در این صورت حلقه‌ی R ، NI است و $\sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i x R = L - \text{rad}(R) = N^*(R)$. مجموعه $I = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i x R$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت یکرختی $R/I \cong A \oplus kx \oplus kx^2 \oplus \dots$ برقرار است به طوری که R/I حلقه‌ای تقلیل یافته و همچنین (موضعا) ۲-اولیه است. اما همانطور که در مثال ۱۴.۱.۳ توضیح دادیم، ایجاب می‌کند که I موضعا پوچتوان باشد، همچنین I موضعا ۲-اولیه است. با این وجود بنا به مثال ۱۴.۱.۳، حلقه‌ی R موضعا ۲-اولیه نیست.

اما جواب تحت شرط قویتری برای I می‌تواند مثبت باشد.

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت اگر R/I موضعا ۲-اولیه و I ، ۲-اولیه باشد، آنگاه R موضعا ۲-اولیه است.

برهان. فرض کنیم $r \in R$ و $\bar{r} = r + I$. (برهان خلف) فرض کنیم زیرمجموعه متناهی

۳. حلقه‌های ۲-اولیه و موضعا ۲-اولیه $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از R وجود داشته باشد به طوری که زیرحلقه S ، تولید شده توسط X ، ۲-اولیه

نباشد. بنابراین $a \in N(S) \setminus N_*(S)$ هست به طوری که

$$a_0 = a, a_1 = a_0 r_0 a_0, a_2 = a_1 r_1 a_1, \dots, a_{i+1} = a_i r_i a_i$$

دنباله‌ای ناپایاست و $r_0, r_1, \dots, r_i, \dots$ مشمول در S هستند. چون R/I موضعا ۲-اولیه است، لذا زیرحلقه‌ی

تولید شده توسط $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ ، ۲-اولیه است. بنابراین j یی هست که $\overline{a_j} = 0$. حال آنکه R با توجه

به لم ۸.۲.۳ قسمت ۲، NI است. همچنین هر a_i پوچتوان است که برای هر $k \geq j$ موجب می‌شود که

$$a_k \in N(I) \text{ برای } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_0 = a_j$$

$$b_1 = a_{j+2} = a_{j+1} r_{j+1} a_{j+1}$$

$$= a_j (r_j a_j r_{j+1} a_j r_j) a_j = b_0 (r_j a_j r_{j+1} a_j r_j) b_0$$

$$b_2 = a_{j+4} = a_{j+3} r_{j+3} a_{j+3}$$

$$= a_{j+2} (r_{j+2} a_{j+2} r_{j+3} a_{j+2} r_{j+2}) a_{j+2}$$

$$= b_1 (r_{j+2} a_{j+2} r_{j+3} a_{j+2} r_{j+2}) b_1$$

.....

$$b_n = a_{j+2n} = a_{j+2n-1} r_{j+2n-1} a_{j+2n-1}$$

$$= a_{j+2(n-1)} (r_{j+2(n-1)} a_{j+2(n-1)} r_{j+2n-1} a_{j+2(n-1)} r_{j+2(n-1)}) a_{j+2(n-1)}$$

$$= b_{n-1} (r_{j+2(n-1)} a_{j+2(n-1)} r_{j+2n-1} a_{j+2(n-1)} r_{j+2(n-1)}) b_{n-1}$$

را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که برای $k \geq j$ ، $r_k a_k r_{k+1} a_k r_k \in I$ چون I حلقه‌ای ۲-اولیه است لذا

دنباله (b_n) ایستاست. پس $m \in N$ وجود دارد که $b_m = 0$ و لذا $a_{j+2m} = 0$ که یک تناقض است.

بنابراین R ، موضعا ۲-اولیه است.

□

نتیجه ۱۱.۲.۳. حلقه R موضعا ۲-اولیه است اگر و تنها اگر حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه R ، موضعا ۲-اولیه باشد.

برهان. فرض کنیم U ، حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R باشد. فرض کنیم:

$$I = \{(a_{ij}) \in U \mid a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

چون I پوچتوان است لذا I حلقه‌ای ۲-اولیه و بدون همانی است. همچنین

$$U/I \cong \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} \cong R \oplus R \oplus \dots \oplus R$$

لذا U/I مجموع مستقیم n کپی از R است و چون R موضعا ۲-اولیه است بنا به لم ۸.۲.۳ قسمت ۲، حلقه U/I نیز موضعا ۲-اولیه است. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۲.۳، U نیز موضعا ۲-اولیه است.

□

لم ۱۲.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه و P ایده‌آلی سره‌ای از R باشد. در این صورت:

۱. P یک ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $R \setminus P$ در $R \setminus 0$ ، یک m -سیستم باشد.

۲. P یک ایده‌آل اول مینیمال است اگر و تنها اگر $R \setminus P$ در $R \setminus 0$ ، یک m -سیستم ماکزیمال باشد.

۳. اگر X در $R \setminus 0$ یک m -سیستم باشد و $P = R \setminus X$ ، آنگاه P یک ایده‌آل اول مینیمال از R است اگر و تنها اگر X در $R \setminus 0$ ، یک m -سیستم ماکزیمال باشد.

برهان. ۱. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول باشد. (برهان خلف) فرض کنیم $R \setminus P$ ، m -سیستم نباشد

یعنی عناصر $a, b \in R \setminus P$ وجود دارند که برای هر $r \in R$ ، $arb \notin R \setminus P$. بنابراین برای هر $r \in R$

$arb \in P$. چون P ایده‌آل اول است، لذا $a \in P$ یا $b \in P$ که یک تناقض است.

۲. قرار می‌دهیم: $X = R \setminus P$. فرض کنیم P ایده‌آل اول مینیمال در R باشد، بنا به قسمت ۱، X یک m -سیستم است. فرض کنیم $Y \subseteq R \setminus 0$ یک m -سیستم شامل X باشد. Q را ایده‌آل ماکزیمالی با ویژگی $Q \cap Y = \emptyset$ در نظر می‌گیریم در نتیجه Q ایده‌آل اولی در R با شرط $Q \subseteq P$ است. اما P مینیمال است و سبب می‌شود که $P = Q$ و لذا $X = Y$. بنابراین X یک m -سیستم ماکزیمال است.

بعکس، فرض کنیم X یک m -سیستم ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد. در نتیجه بنا به قسمت ۱، P ایده‌آل اولی در R است. (برهان خلف) فرض کنیم P مینیمال نباشد لذا ایده‌آل اول P' در R وجود دارد که $P' \subsetneq P$. بنا به قسمت ۱، $U = R \setminus P'$ یک m -سیستم است. از طرفی $X \subsetneq U$ که تناقض با ماکزیمال بودن X دارد. بنابراین P یک ایده‌آل اول مینیمال در R است.

۳. ابتدا فرض کنیم X ، m -سیستم ماکزیمالی در $R \setminus 0$ و Q ایده‌آل ماکزیمالی در R باشد، با شرط $Q \cap X = \emptyset$. در نتیجه Q یک ایده‌آل اول در R است. فرض کنیم Q' ایده‌آل اول مینیمالی در R باشد که $Q' \subseteq Q$.

قرار می‌دهیم $Y = R \setminus Q'$. بنا به قسمت ۲، Y یک m -سیستم ماکزیمال شامل X است. اما X یک m -سیستم ماکزیمال است در نتیجه $X = Y$ و لذا $Q' = Q = P$. عکس رابطه نیز از قسمت ۲ نتیجه می‌شود.

□

قضیه ۱۳.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای ۲-اولیه باشد.

۱. فرض کنیم P ایده‌آل سره‌ای در R باشد و $X = R \setminus P$. در این صورت P یک ایده‌آل اول مینیمال در R است اگر و تنها اگر X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد اگر و تنها اگر X یک m -سیستم ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد.

۲. فرض کنیم X یک m -سیستم در $R \setminus 0$ باشد و $P = R \setminus X$. در این صورت P یک ایده‌آل اول

مینیمال در R است اگر و تنها اگر X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد اگر و تنها اگر X یک m -سیستم ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد.

۳. فرض کنیم S زیرحلقه‌ای از R باشد. در این صورت هر ایده‌آل اول مینیمال از S نتیجه تحدید یک ایده‌آل اول مینیمال از R است.

برهان. ۱. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال در R باشد. چون R ، ۲-اولیه است بنا به لم ۶.۱.۳، R/P ، دامنه است. بنابراین

$$x, y \in X \Rightarrow x, y \notin P \Rightarrow x + P \neq P \text{ و } y + P \neq P$$

$$\Rightarrow xy + P \neq P \Rightarrow xy \in X$$

لذا X یک منوئید ضربی در $R \setminus 0$ است. اما بنا به لم ۱۲.۲.۳ قسمت ۲، X یک m -سیستم ماکزیمال در $R \setminus 0$ است لذا X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ است.

بعکس، فرض کنیم X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد. چون $P \cap X = \emptyset$ لذا P یک ایده‌آل اول در R است. (برهان خلف) فرض کنیم P مینیمال نباشد لذا P شامل یک ایده‌آل اول مینیمال مانند P' است. بنا به استدلال فوق، $W = R \setminus P'$ یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ است. اما $X \subsetneq W$ که تناقض با ماکزیمال بودن X دارد. بنابراین P یک ایده‌آل اول مینیمال در R است.

۲. فرض کنیم X یک m -سیستم ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد. بنا به لم ۱۲.۲.۳ قسمت ۲، P یک ایده‌آل اول مینیمال در R است و همچنین بنا به لم ۱۲.۲.۳ قسمت ۳، X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ است.

بعکس، فرض کنیم X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد. فرض کنیم Q یک ایده‌آل ماکزیمال در R با شرط $Q \cap X = \emptyset$ باشد، به وضوح Q یک ایده‌آل اول در R است. حال Q' را ایده‌آل قویا

اول مینیمال در R با شرط $Q' \subseteq Q$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $Y = R \setminus Q'$. در این صورت $X \subseteq Y$. چون R ، ۲-اولیه است، بنا به لم ۶.۱.۳، Q' کاملاً اول است. بنابراین Y یک منوئید ضربی در $R \setminus 0$ است اما X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ است، پس $X = Y$ و $Q' = Q = P$.

۳. فرض کنیم S زیرحلقه‌ای از R باشد. چون R ، ۲-اولیه است بنا به لم ۶.۱.۳، S نیز ۲-اولیه است. فرض کنیم Q یک ایده‌آل اول مینیمال در S باشد. قرار می‌دهیم: $Y = S \setminus Q$. بنا به لم ۶.۱.۳، S/Q یک دامنه است. بنابراین Y یک منوئید ضربی در $S \setminus 0$ است. فرض کنیم X یک منوئید ضربی ماکزیمال در $R \setminus 0$ باشد که $Y \subseteq X$. در این صورت با توجه به قسمت ۲، $P = R \setminus X$ یک ایده‌آل اول مینیمال در R است به طوری که $P \cap S \subseteq Q$. برای $a, b \in S$ ، $aSb \subseteq P \cap S$ در نظر می‌گیریم که $a \notin P \cap S$. چون P ایده‌آل اول مینیمال در R است، پس بنا به لم ۶.۱.۳، R/P یک دامنه است. بنابراین $ab \in P \cap S$ و چون $a \notin P$ پس $b \in P$. بنابراین $b \in P \cap S$. نشان دادیم که $P \cap S$ یک ایده‌آل اول در S است اما ایده‌آل اول Q در S مینیمال بود لذا $P \cap S = Q$.

□

فصل ۴

ساختار و مثال‌هایی از حلقه‌های شبه-IFP

در این فصل ساختاری از حلقه‌های IFP و شبه- IFP را مشاهده می‌کنیم و همچنین کلاس‌هایی از آنها را گسترش می‌دهیم. نشان می‌دهیم ویژگی شبه- IFP و ویژگی NI متمایز از هم هستند و روابط بین آنها و شرایط مربوط به آنها قابل بررسی است.

۱.۴ ساختار حلقه‌های شبه- IFP

فرض کنیم R یک حلقه‌ی IFP باشد. آیا حلقه‌ی $R[X]$ نیز IFP است؟ با توجه به مثال زیر جواب منفی است.

مثال ۱.۱.۴. فرض کنیم Z_2 میدان اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۲ باشد و $A = Z_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ جبر آزاد تولید شده توسط متغیرهای تعویض ناپذیر $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ است و جمله‌ی ثابت A صفر است. توجه داریم که A یکدار نیست. ایده‌آلی از حلقه‌ی $Z_2 + A$ که توسط عناصر

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2,$$

$$(a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2), r_1r_2r_3r_4$$

$r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$ تولید می‌شود را با I نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $R = \frac{Z_2+A}{I}$. ملاحظه می‌کنیم که

$$R[x] = \frac{(Z_2+A)[x]}{I[x]} \text{ و توجه داریم که } (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x] \text{ اما}$$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) \notin I[x]. \text{ بنابراین } R[X], IFP \text{ نیست.}$$

نشان می‌دهیم R, IFP است.

فرض کنیم H_n مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی تک جمله‌ای‌ها از درجه‌ی n روی Z_2 باشد. توجه

داریم که برای هر n ، H_n متناهی است و ایده‌آل I همگن است.

ادعای ۱: اگر $f_1g_1 \in I$ و $f_1, g_1 \in H_1$ ، آنگاه برای هر $r_1 \in Z_2 + A$ ، $f_1r_1g_1 \in I$.

حل: با توجه به تعریف I تنها حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

$$(f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2), (f_1 = a_2, g_1 = b_2), (f_1 = a_0, g_1 = b_0)$$

که در هر کدام از حالات به سادگی نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

ادعای ۲: اگر $f, g \in A$ و $fg \in I$ ، آنگاه برای هر $r \in A$ ، $frg \in I$.

حل: فرض کنیم $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ و $g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ ، $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ که $r_i, g_i, f_i \in H_i$ ، $r_1, g_1, f_1 \in H_1$ ، $r_2, g_2, f_2 \in H_2$ ، $r_3, g_3, f_3 \in H_3$ و همچنین $r_4, g_4, f_4 \in I$ چون برای هر $i \geq 4$ ، $H_i \subseteq I$. در این صورت $frg = f_1 r_1 g_1 + h$ چون I همگن است از $fg \in I$ نتیجه می‌گیریم که $f_1 g_1 \in I$. با توجه به ادعای ۱ واضح است که $f_1 r_1 g_1 \in I$ در نتیجه $frg \in I$.

حال نشان می‌دهیم اگر $yz \in I$ و $y, z \in Z_2 + A$ ، آنگاه برای هر $r \in Z_2 + A$ ، $yrz \in I$.

فرض کنیم برای برخی عناصر $\alpha, \beta \in Z_2$ و $y', z' \in A$ که $y = \alpha + y'$ و $z = \beta + z'$ پس $yz = \alpha\beta + \alpha z' + y'\beta + y'z' \in I$ در نتیجه $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$.

فرض کنیم $\alpha = 0$ در این صورت $y'\beta + y'z' \in I$.

اگر $\beta \neq 0$ ، آنگاه چون I همگن است و $\beta \in Z_2$ پس $y' \in I$ و $y'z' \in I$. با توجه به ادعای ۲ برای هر $r \in Z_2 + A$ ، $yrz = y'r\beta + y'rz' \in I$.

اگر $\beta = 0$ ، آنگاه $y'z' \in I$. با توجه به ادعای ۲ برای هر $r \in Z_2 + A$ ، $yrz = y'rz' \in I$.

در حالت $\beta = 0$ نیز به طور مشابه $\alpha z' + y'z' \in I$ را بدست می‌آوریم. بنابراین حلقه‌ی R ، IFP است.

لم ۲.۱.۴. اگر حلقه‌ی R ، ۲-اولیه باشد، آنگاه حلقه‌ی $R[X]$ نیز ۲-اولیه است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر P ایده‌آل کاملاً اول در R باشد، آنگاه $P[X]$ نیز ایده‌آلی کاملاً اول در $R[X]$ است. (برهان خلف) فرض کنیم $P[X]$ کاملاً اول نباشد در نتیجه

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \in R[X]$$

وجود دارد به طوری که $(f(x))^2 \in P[X]$ اما $f(x) \notin P[X]$. فرض کنیم m کوچکترین اندیسی باشد که $a_m \notin P$ و $a_0, \dots, a_{m-1} \in P$. اگر برای $j > k$ ، $a_j = 0$ ، آنگاه هر جمله‌ی $a_{2m-j} a_j$ برای $j = 0, 1, \dots, 2m$ در P است و $\sum a_{2m-j} a_j$ نیز در P است. بنابراین $a_m^2 \in P$ و همچنین $a_m \in P$ که

یک تناقض است، پس فرض خلف باطل و $P[X]$ یک ایده‌آل کاملاً اول در $R[X]$ است. قرار می‌دهیم:

$$\beta_2(R)[X] = \bigcap \{P(x) \mid P \text{ یک ایده‌آل کاملاً اول در } R \text{ است}\}$$

واضح است که $\beta_2(R[X]) \subseteq \beta_2(R)[X]$

چون R ، ۲-اولیه است پس $\beta_2(R)[X] = N_*(R)[X]$ و $N_*(R[X]) = N_*(R[X])$

در نتیجه $\beta_2(R[X]) \subseteq N_*(R[X])$. بنابراین $\beta_2(R[X]) = N_*(R[X])$ که نشان می‌دهد حلقه‌ی $R[X]$ ، ۲-اولیه است.

□

در مثال ۱.۱.۴ نشان دادیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای روی حلقه‌ی IFP لزوماً IFP نیست اما حلقه‌ی چندجمله‌ای روی حلقه‌ی IFP می‌تواند شبه-IFP باشد.

گزاره ۳.۱.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R ، IFP باشد. در این صورت اگر $\sum_{i=0}^n f_i y^i \in R[X][y]$ پوچتوان باشد، آنگاه $\sum_{i=0}^n R[X] f_i R[X]$ نیز پوچتوان است که $f_i \in R[X]$. همچنین $R[X]$ ، شبه-IFP است.

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R ، IFP باشد. $g(y) = \sum_{i=0}^n f_i y^i \neq 0$ را عنصری پوچتوان در $R[X][y]$ در نظر می‌گیریم به طوری که برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $f_i = a(i)_0 + \sum_{j=1}^{m_i} a(i)_j X(i)^{I_j} \in R[X]$ ، توجه داریم که زیرمجموعه‌ی متناهی $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از X وجود دارد به طوری که برای هر i ، $f_i \in R[X_0]$. در این صورت $g(y) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ در $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ پوچتوان است. چون R ، IFP است پس داریم:

$$N_*(R) = N^*(R) = N(R) \quad (1.4)$$

با توجه به لم ۲.۱.۴، $R[X]$ ، ۲-اولیه است و همچنین با توجه به رابطه‌ی (۱.۴) داریم:

$$N_*(R[x]) = N(R[x]) = N^*(R[x])$$

برای هر حلقه‌ی A همواره داریم: $N_*(A[x]) = N_*(A)[x]$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$N(R)[X] = N_*(R)[X] = N_*(R[X]) = N^*(R[X]) = N(R[X]) \quad (۲.۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲.۴) و همچنین $g(x_1, \dots, x_n, y) \in N(R[x_1, \dots, x_n, y])$ نتیجه می‌گیریم که هر ضریب f_i در $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ پوچتوان است. در نتیجه بنا به لم ۵.۱.۲ قسمت ۴ ایده‌آل $Ra(i)_j R$ در $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m_i}$ پوچتوان است. بنابراین

$$\sum_{i=0}^n R[X] f_i R[X] \subseteq \sum_{i=0}^n R[X] \left(k(i)_0 + \sum_{j=0}^{m_i} k(i)_j X(i)^{I_j} \right) R[X]$$

که $k(i)_j = Ra(i)_j R$ اما

$$\sum_{i=0}^n R[X] \left(k(i)_0 + \sum_{j=0}^{m_i} k(i)_j X(i)^{I_j} \right) R[X]$$

پوچتوان است در نتیجه ایده‌آل $\sum_{i=0}^n R[X] f_i R[X]$ نیز پوچتوان است که نشان می‌دهد $R[X]$ شبه-IFP است.

□

گزاره ۴.۱.۴. ۱. هر حلقه‌ی شبه-IFP ناجابجایی مینیمال (کوچکترین کاردینال) با $UTM_2(GF(2))$ یکرخت است.

۲. کلاس حلقه‌های شبه-IFP تحت مجموع مستقیم و حاصلضرب مستقیم بسته است.

برهان. ۱. بنا به لم ۱۹.۱.۳ اگر حلقه‌ی ناجابجایی متناهی R از مرتبه‌ی p^3 باشد (p عددی اول است)

آنگاه با $UTM_2(GF(p))$ یکرخت است. حال بنا به لم ۱۷.۱.۳ حلقه‌ی متناهی R از مرتبه‌ی

m جابجایی است وقتی که m فارغ از مکعب باشد. بنابراین هر حلقه‌ی ناجابجایی مینیمال با

$UTM_2(GF(2))$ یکرخت است اما بنا به گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۱، $UTM_2(GF(2))$ شبه-

IFP است. در نتیجه هر حلقه‌ی شبه-IFP ناجابجایی مینیمال با $UTM_2(GF(2))$ یکرخت

است.

۲. فرض کنیم برای $i \in I$ حلقه‌ی R_i شبه-IFP باشد و قرار می‌دهیم $R = \bigoplus_{i \in I} R_i$.

عنصر $(a_i) \in N(R)$ را در نظر می‌گیریم. $j = 1, 2, \dots, n$ وجود دارد به طوری که $a_{i_j} \neq 0$. چون هر R_i شبه-IFP است، پس $R_{i_j} a_{i_j} R_{i_j}$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر مانند N_{i_j} در R_{i_j} است. قرار می‌دهیم $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ به طوری که برای $i \neq i_j$ ، $N_i = 0$. واضح است که N یک ایده‌آل پوچتوان از R و مشمول در $R(a_i)R$ است.

حال فرض کنیم $R = \prod_{i \in I} R_i$ و $(a_i) \in N(R)$ و $a_i \neq 0$. می‌توانیم تعداد متناهی از a_i ها را در نظر بگیریم به طوری که برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $a_{i_j} \neq 0$. چون هر R_i شبه-IFP است، پس $R_{i_j} a_{i_j} R_{i_j}$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر مانند N_{i_j} در R_{i_j} است. قرار می‌دهیم $N = \prod_{i \in I} N_i$ به طوری که برای $i \neq i_j$ ، $N_i = 0$. در این صورت واضح است که N یک ایده‌آل پوچتوان از R و مشمول در $R(a_i)R$ است.

□

با توجه به گزاره‌ی ۴.۱.۴ قسمت ۲ و روابط بین مجموع‌های مستقیم و حاصلضرب‌های مستقیم آیا می‌توان گفت کلاس حلقه‌های شبه-IFP تحت زیرحلقه‌ها بسته است؟ با توجه به مثال زیر جواب منفی است.

مثال ۵.۱.۴. فرض کنیم که S یک حلقه‌ی نیم اول باشد و $n \geq 2$ و $T = Mat_n(S)$. در این صورت بنا به گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۲، T شبه-IFP نیست. حال فرض کنیم $n \geq 2$ و $R = UTM_n(T)$. در این صورت بنا به گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۱، R شبه-IFP است اما زیرحلقه‌ی T از R ، شبه-IFP نیست.

گزاره ۶.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد. ایده‌آلی مانند I از R وجود دارد به طوری که R/I حلقه‌ای شبه-IFP است. اگر I ایده‌آلی پوچتوان باشد، آنگاه R شبه-IFP است.

برهان. فرض کنیم $a \in N(R)$ و $a \neq 0$. اگر $a \in I$ ، آنگاه چون I پوچتوان است لذا RaR نیز پوچتوان است. فرض کنیم $a \notin I$ قرار می‌دهیم $\bar{R} = R/I$. چون $\bar{R}$ شبه-IFP است لذا $\bar{R}a\bar{R}$ شامل یک ایده‌آل

پوچتوان ناصفر مانند J/I در $\bar{R}$ است. پس عدد صحیح مثبتی مانند k هست به طوری که $(J/I)^k = 0_{R/I}$. بنابراین $J^k \subseteq I$ اما چون I پوچتوان است، لذا عدد صحیح مثبتی مانند n هست به طوری که $I^n = 0$. پس $J^{kn} = 0$ که نشان می‌دهد J ایده‌آلی پوچتوان در حلقه‌ی R است. عنصر $b \in J$ $0 \neq b$ را در نظر می‌گیریم. عنصر $c \in RaR$ $0 \neq c$ وجود دارد که $c - b \in I$. بنابراین $c \in J$ چون J پوچتوان است، پس RcR نیز یک ایده‌آل پوچتوان است که مشمول در RaR است. بنابراین R شبه-IFP است.

□

در گزاره‌ی ۶.۱.۴ اگر به جای شرط پوچتوانی I شرط ضعیف تر پوچی I را در نظر بگیریم، آنگاه ویژگی شبه-IFP برای حلقه‌ی R با توجه به مثال زیر برقرار نخواهد بود.

مثال ۷.۱.۴. حلقه‌ی R را همان حلقه‌ی مثال ۱۵.۱.۲ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم:

$$I = \{M \in R \mid \text{درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس } M \text{ صفر هستند}\}$$

در این صورت I ایده‌آل پوچی از R است به طوری که R/I تقلیل یافته است و بنا به قضیه‌ی ۱۷.۱.۲ حلقه‌ی R/I شبه-IFP است اما حلقه‌ی R شبه-IFP نیست.

۲.۴ سیستم موریتا

تعریف ۱.۲.۴. حلقه‌های A و B را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که ${}^B V_A$ و ${}_A U_B$ دومدول باشند و همومورفیسم‌های دومدولی (دوخطی) $\theta : U \otimes_B V \rightarrow A$ و $\psi : V \otimes_A U \rightarrow B$ به ترتیب با ضابطه $u \otimes_B v \mapsto uv$ و $v \otimes_A u \mapsto vu$ باشند و در شرایط زیر صدق کنند:

$$۱. \text{ برای هر } u, u' \in U \text{ و } v \in V \text{ داریم } \theta(u + u' \otimes_B v) = \theta(u \otimes_B v) + \theta(u' \otimes_B v)$$

$$\psi(v \otimes_A u + u') = \psi(v \otimes_A u) + \psi(v \otimes_A u')$$

$$۲. \text{ برای هر } u \in U \text{ و } v, v' \in V \text{ داریم } \theta(u \otimes_B v + v') = \theta(u \otimes_B v) + \theta(u \otimes_B v')$$

$$\psi(v + v' \otimes_A u) = \psi(v \otimes_A u) + \psi(v' \otimes_A u)$$

$$۳. \text{ برای هر } u \in U \text{ و } v \in V \text{ و برای هر } b \in B \text{ و } a \in A \text{ داریم } \theta(ub \otimes_B v) = \theta(u \otimes_B bv)$$

$$\psi(va \otimes_A u) = \psi(v \otimes_A au)$$

حلقه‌ی ماتریسی $T = \begin{pmatrix} A & U \\ V & B \end{pmatrix}$ را با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها در نظر می‌گیریم که θ و ψ در تعریف ضرب معمولی ماتریس‌ها صدق می‌کنند. اگر θ و ψ شرط شرکت پذیری را در T ایجاد کنند، آنگاه $(A, B, \theta, \psi, U, V)$ را یک سیستم موریتا و T را حلقه‌ی سیستم موریتا می‌نامیم.

θ و ψ را دوخطی‌های صفر می‌نامیم هرگاه θ و ψ صفر باشند.

گزاره ۲.۲.۴. T را حلقه‌ی سیستم موریتای $(A, B, U, V, \theta, \psi)$ با دوخطی‌های صفر در نظر می‌گیریم.

۱. اگر A و B شبه-IFP باشند، آنگاه T نیز شبه-IFP است.

۲. NI, T است اگر و تنها اگر NI, B و NI, A باشند.

برهان. ۱. فرض کنیم $I = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{pmatrix}$.

در این صورت I ایده‌آل پوچتوانی از T با دوخطی‌های صفر است. چون

$$T/I \cong \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix} \cong A \oplus B$$

پس بنا به گزاره‌ی ۶.۱.۴ و ۴.۱.۴ قسمت ۲، حلقه‌ی T شبه- IFP است.

۲. بنا به فرض چون θ و ψ دوخطی‌های صفر هستند و $\begin{pmatrix} \circ & U \\ V & \circ \end{pmatrix}$ یک ایده‌آل پوچتوان از T است،

پس

$$N(T) = \begin{pmatrix} N(A) & U \\ V & N(B) \end{pmatrix}$$

توجه داریم: $N(T)$ ایده‌آلی از T است اگر و تنها اگر $N(A)$ و $N(B)$ به ترتیب ایده‌آل‌هایی از A و B باشند.

□

در گزاره‌ی ۲.۲.۴ قسمت ۲ یکریختی زیر را داریم:

$$T/N(T) \cong \begin{pmatrix} A/N(A) & \circ \\ \circ & B/N(B) \end{pmatrix} \cong A/N(A) \oplus B/N(B)$$

می‌توانیم گزاره‌ی ۲.۲.۴ قسمت ۱ را در اثبات گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۱ وقتی که $n = 2$ و $U = S$ و $V = \circ$ به کار ببریم. اما عکس قضیه‌ی ۲.۲.۴ قسمت ۱ برقرار نیست. برای این منظور مثال زیر را داریم:

مثال ۳.۲.۴. فرض کنیم $A = B = \text{mat}_2(\mathbb{Z}_6)$ که $\mathbb{Z}_6$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۶ است و $U = \text{mat}_2(2\mathbb{Z}_6)$ و $V = \text{mat}_2(3\mathbb{Z}_6)$. تعریف می‌کنیم: $\theta(U \otimes_B V) = UV$ و $\psi(V \otimes_A U) = VU$. در این صورت θ و ψ دوخطی‌های صفر هستند. فرض کنیم که T حلقه‌ی سیستم موریتای $(A, B, U, V, \theta, \psi)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\circ \neq a = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix} \in N(T)$$

در این صورت $x, y \in N(A)$. اگر $x = \circ = y$ آنگاه $\alpha \neq \circ$ یا $\beta \neq \circ$ و همچنین TaT یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از T است. $\circ \neq x$ را در نظر می‌گیریم.

اگر $x \in A \setminus V$ ، آنگاه TaT شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است و

$$Ta \begin{pmatrix} \circ & \begin{pmatrix} ۲ & \circ \\ \circ & ۲ \end{pmatrix} \\ \circ & \circ \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \circ & A(۲x)B \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & U \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

اگر $x \in A \setminus U$ ، آنگاه TaT شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است و

$$T \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \begin{pmatrix} ۳ & \circ \\ \circ & ۳ \end{pmatrix} & \circ \end{pmatrix} aT = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ B(۳x)A & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ V & \circ \end{pmatrix}$$

به طور مشابه برای $y \neq \circ$ نیز TaT شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر است. اما چون $\mathbb{Z}_6$ نیم اول است لذا

بنا به گزاره‌ی ۱۹.۲.۲ قسمت ۲، A و B هر دو شبه-IFP هستند.

لم ۴.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد. در این صورت

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

حلقه‌ای IFP است.

برهان. برای S $\begin{pmatrix} a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ \circ & a_۲ & d_۲ \\ \circ & \circ & a_۲ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ \circ & a_۱ & d_۱ \\ \circ & \circ & a_۱ \end{pmatrix}$ جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱) + (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = (a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲, c_۱ + c_۲, d_۱ + d_۲)$$

و

$$(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱)(a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = (a_۱a_۲, a_۱b_۲ + b_۱a_۲, a_۱c_۲ + b_۱d_۲ + c_۱a_۲, a_۱d_۲ + d_۱a_۲).$$

فرض کنیم $(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱)(a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = \circ$ در این صورت روابط زیر را داریم:

$$۱. \quad a_۱a_۲ = \circ$$

$$۲. \quad a_۱b_۲ + b_۱a_۲ = \circ$$

$$۳. \quad a_۱c_۲ + b_۱d_۲ + c_۱a_۲ = \circ$$

$$a_1 d_2 + d_1 a_2 = 0. \quad ۴$$

چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است و هر حلقه‌ی تقلیل یافته، IFP است لذا در رابطه‌ی ۱ داریم: $a_1 R a_2 = 0$. اگر عنصر a_2 را از سمت راست در رابطه‌ی ۲ ضرب کنیم، آنگاه $0 = a_1 b_2 a_2 + b_1 a_2 a_2 = 0 + b_1 a_2 a_2$ پس $b_1 a_2 a_2 = 0$ لذا $(b_1 a_2) R a_2 = 0$ در نتیجه $(b_1 a_2) b_1 a_2 = 0$ یا $(b_1 a_2)^2 = 0$. چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است پس $b_1 a_2 = 0$. بنابراین $b_1 R a_2 = 0$ و از رابطه‌ی ۲ داریم: $a_1 b_2 = 0$ پس $a_1 R b_2 = 0$. به طور مشابه از رابطه‌ی ۴ نتیجه می‌گیریم: $d_1 R a_2 = 0$ و $a_1 R d_2 = 0$.

اگر عنصر a_2 را از سمت راست در رابطه‌ی ۳ ضرب کنیم، آنگاه $0 = a_1 c_2 a_2 + b_1 d_2 a_2 + c_1 a_2 a_2 = 0$ پس $c_1 a_2 a_2 = 0$ لذا $(c_1 a_2) R a_2 = 0$ در نتیجه $(c_1 a_2) c_1 a_2 = 0$ یا $(c_1 a_2)^2 = 0$ چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است پس $c_1 a_2 = 0$. بنابراین $c_1 R a_2 = 0$ ، همچنین $0 = a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 = a_1 c_2 + b_1 d_2 + 0$ در نتیجه

$$a_1 c_2 + b_1 d_2 = 0. \quad (۳.۴)$$

اگر عنصر a_1 را از سمت راست در رابطه‌ی (۳.۴) ضرب کنیم، آنگاه $(a_1 c_2) a_1 + (b_1 d_2) a_1 = 0$ پس $a_1 c_2 a_1 = 0$ چون $a_1 d_2 = 0$ لذا $d_2 (a_1 d_2) a_1 = 0$ یا $(d_2 a_1)^2 = 0$. چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است پس $d_2 a_1 = 0$ همچنین $(a_1 c_2 a_1) c_2 = 0$ یا $(a_1 c_2)^2 = 0$ لذا $a_1 c_2 = 0$ بنابراین $a_1 R c_2 = 0$. حال با استفاده از رابطه‌ی ۳ داریم:

$$0 = a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 = 0 + b_1 d_2 + 0$$

و لذا $b_1 d_2 = 0$ پس $b_1 R d_2 = 0$. با توجه به نتایج فوق برای هر $r, s, t, u \in R$ داریم:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(r, s, t, u)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 r a_2, a_1 r b_2 + a_1 s a_2 + b_1 r a_2,$$

$$a_1 r c_2 + a_1 s d_2 + b_1 r d_2 + a_1 t a_2 + b_1 u a_2 + c_1 r a_2, a_1 r d_2 + a_1 u a_2 + d_1 r a_2)$$

بنابراین برای هر $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in S$ ، داریم:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \circ & a_1 & d_1 \\ \circ & \circ & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ \circ & r & u \\ \circ & \circ & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \circ & a_2 & d_2 \\ \circ & \circ & a_2 \end{pmatrix} = \circ$$

در نتیجه حلقه‌ی S ، IFP است.

□

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد. I و J را ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R در نظر می‌گیریم که

$$IJ = \circ = JI$$

اگر حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد، آنگاه $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & a & d \\ f & g & a \end{pmatrix} \mid a \in R, b, c, d \in I, e, f, g \in J \right\}$ یک حلقه‌ی IFP است.

برهان. قرار می‌دهیم: $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & a & d \\ f & g & a \end{pmatrix} \mid a \in R, b, c, d \in I, e, f, g \in J \right\}$ برای

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ e_1 & a_1 & d_1 \\ f_1 & g_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ e_2 & a_2 & d_2 \\ f_2 & g_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

در S جمع و ضرب را به صورت زیر داریم:

$$(a_1; b_1, c_1, d_1; e_1, f_1, g_1) + (a_2; b_2, c_2, d_2; e_2, f_2, g_2) =$$

$$(a_1 + a_2; b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; e_1 + e_2, f_1 + f_2, g_1 + g_2)$$

و

$$(a_1; b_1, c_1, d_1; e_1, f_1, g_1)(a_2; b_2, c_2, d_2; e_2, f_2, g_2) = (a_1 a_2; a_1 b_2 + b_1 a_2,$$

$$a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2, a_1 d_2 + d_1 a_2; e_1 a_2 + a_1 e_2, f_1 a_2 + g_1 e_2 + a_1 f_2, g_1 a_2 + a_1 g_2)$$

فرض کنیم $AB = \circ$ در نتیجه:

$$(a_1; b_1, c_1, d_1; e_1, f_1, g_1)(a_2; b_2, c_2, d_2; e_2, f_2, g_2) = \circ$$

و همچنین روابط زیر را داریم:

$$a_1 a_2 = \circ$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0, a_1d_2 + d_1a_2 = 0$$

$$e_1a_2 + a_1e_2 = 0, f_1a_2 + g_1e_2 + a_1f_2 = 0, g_1a_2 + a_1g_2 = 0$$

می‌دانیم که هر حلقه‌ی تقلیل یافته، IFP است. بنابراین $a_1a_2 = 0$ پس $a_1Ra_2 = 0$ ، همچنین بنا به لم

۴.۲.۴ داریم:

$$a_1b_2 = b_1a_2 = a_1c_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = a_1d_2 = d_1a_2 = 0$$

لذا

$$a_1Rb_2 = b_1Ra_2 = a_1Rc_2 = b_1Rd_2 = c_1Ra_2 = a_1Rd_2 = d_1Ra_2 = 0$$

به طور مشابه برای عناصر بالای قطر اصلی نیز داریم:

$$e_1a_2 = a_1e_2 = f_1a_2 = g_1e_2 = a_1f_2 = g_1a_2 = a_1g_2 = 0$$

لذا

$$e_1Ra_2 = a_1Re_2 = f_1Ra_2 = g_1Re_2 = a_1Rf_2 = g_1Ra_2 = a_1Rg_2 = 0$$

پس به طور مستقیم نتیجه می‌شود که برای هر $(r; s, t, u; x, y, z) \in S$ ،

$$(a_1; b_1, c_1, d_1; e_1, f_1, g_1)(r; s, t, u; x, y, z)(a_2; b_2, c_2, d_2; e_2, f_2, g_2) = (a_1ra_2; a_1rb_2 + a_1sa_2 +$$

$$b_1ra_2, a_1rc_2 + a_1sd_2 + b_1rd_2 + a_1ta_2 + b_1ua_2 + c_1ra_2, a_1rd_2 + a_1ua_2 + d_1a_2) = 0$$

بنابراین برای هر $(r; s, t, u; x, y, z) \in S$ ، داریم:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ e_1 & a_1 & d_1 \\ f_1 & g_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ x & r & u \\ y & z & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ e_2 & a_2 & d_2 \\ f_2 & g_2 & a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

در نتیجه حلقه‌ی S ، IFP است.

□

فرض کنیم برای هر i ، D_i یک دامنه باشد. قرار می‌دهیم $R = D_1 \oplus D_2$ ، $I = D_1 \oplus 0$ و $J = 0 \oplus D_2$.

در این صورت $IJ = 0 = JI$.

بنابراین با توجه به قضیه ۵.۲.۴ حلقه‌ی $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & a & d \\ f & g & a \end{pmatrix} \mid a \in R, b, c, d \in I, e, f, g \in J \right\}$ IFP است.

تعریف می‌کنیم:

$$D_n(R) = \{M \in UTM_n(R) \mid M \text{ با هم برابراند}\}$$

لم ۶.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد و S حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی 3×3 روی حلقه‌ی R باشد.

در این صورت اگر S ، IFP باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی تقلیل یافته است.

برهان. (برهان خلف) فرض کنیم R تقلیل یافته نباشد لذا $a \in R$ و $a \neq 0$ وجود دارد که $a^2 = 0$. عناصر

$$A = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

را در S در نظر می‌گیریم. در این صورت $AB = 0$ اما

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

که تناقض با IFP بودن S دارد. بنابراین R تقلیل یافته است.

□

مثال ۷.۲.۴. فرض کنیم S یک دامنه‌ی جابجایی باشد. قرار می‌دهیم $R = D_2(S) \oplus S \oplus S$. ایده‌آل‌های

$I = 0 \oplus S \oplus 0$ و $J = 0 \oplus 0 \oplus S$ را از R در نظر می‌گیریم. واضح است که $IJ = 0 = JI$ قرار می‌دهیم:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & a & d \\ f & g & a \end{pmatrix} \mid a \in R, b, c, d \in I, e, f, g \in J \right\}$$

فرض کنیم

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ e_2 & a_2 & d_2 \\ f_2 & g_2 & a_2 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ e_1 & a_1 & d_1 \\ f_1 & g_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

و $AB = 0$. چون R جابجایی است پس IFP, R است و لذا $a_1 R a_2 = 0$. بنابراین همان نتایج به دست آمده در اثبات قضیه ۵.۲.۴ را خواهیم داشت، پس $ATB = 0$. در نتیجه IFP, T است. در صورتی که حلقه‌ی R تقلیل یافته نیست.

مثال ۸.۲.۴. فرض کنیم S یک حلقه باشد و

$$D_4(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in S \right\}$$

توجه کنیم که

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

اما داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

بنابراین $IFP, D_4(S)$ نیست و به طور مشابه برای $n \geq 5$ ، $IFP, D_n(S)$ نیست.

بنا به لم ۴.۲.۴ اگر حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد، آنگاه حلقه‌ی $IFP, D_3(R)$ است. اما برای $n \geq 4$

بنا به مثال فوق $IFP, D_n(R)$ نیست. برای حالت شبه- IFP وضعیت متفاوتی را در زیر می‌بینیم.

قضیه ۹.۲.۴. فرض کنیم S یک حلقه باشد در این صورت برای $n \geq 2$ ، $D_n(S)$ حلقه‌ای شبه- IFP است.

برهان. فرض کنیم برای $n \geq 2$ ، $R = D_n(S)$ و $A = (a_{ij}) \in R$ که $0 \neq a_{st} \neq 0$ وقتی عناصر روی

قطر اصلی ماتریس A ناصفر باشند، ایده‌آل پوچتوان ناصفر $(RAE_1)_n R = Sa_1 SE_1 (\subseteq RAR)$ را در R

داریم. حال عناصر روی قطر اصلی ماتریس A را صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت RAR یک ایده‌آل

پوچتوان ناصفری از R است. بنابراین R شبه- IFP است.

□

تعریف ۱۰.۲.۴. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای بسته ضربی از حلقه‌ی R باشد. گوییم X در شرط اور راست صدق می‌کند، هرگاه برای هر $x \in X, r \in R$ عناصر $y \in X, s \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ry = xs$. مجموعه‌ی بسته ضربی‌ای که در شرط اور راست صدق می‌کند را مجموعه‌ی اور راست می‌نامیم. شرط اور چپ و مجموعه‌ی اور چپ به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۴. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد، گوییم Q حلقه‌ی کسرهای راست R نسبت به مجموعه‌ی X است هرگاه:

$$1. R \subseteq Q$$

۲. هر عنصر از X در Q وارون پذیر باشد،

۳. هر عنصر از Q را بتوان به فرم ax^{-1} نوشت به طوری که $a \in R, x \in X$

متناظرا حلقه‌ی کسرهای چپ R نسبت به مجموعه‌ی X تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ی R جابجایی باشد، آنگاه از نوشتن پسوندهای چپ و راست خودداری می‌کنیم.

برای مثال، فرض کنیم α یک خودریختی از حلقه‌ی K باشد و $R = K[x; \alpha]$. در این صورت حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران $K[x, x^{-1}; \alpha]$ همان حلقه‌ی کسرهای راست و حلقه‌ی کسرهای چپ R نسبت به مجموعه‌ی بسته ضربی $\{1, x, x^2, \dots\}$ است.

تعریف ۱۲.۲.۴. حلقه‌ی کسرهای راست حلقه‌ی R نسبت به مجموعه‌ی تمام عناصر منظم R را حلقه‌ی کسرهای راست کلاسیک R می‌نامیم و با علامت $Q(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه‌ی کسرهای چپ کلاسیک متناظرا تعریف می‌شود. بنابراین حلقه‌ی کسرهای چپ (راست) کلاسیک حلقه‌ی R وجود دارد اگر و تنها اگر مجموعه‌ی تمام عناصر منظم حلقه‌ی R یک مجموعه‌ی اور چپ (راست) باشد.

اگر حلقه‌ی کسرهای چپ کلاسیک و حلقه‌ی کسرهای راست کلاسیک حلقه‌ی R وجود داشته باشد، آنگاه برابراند.

برای مثال، حلقه‌ی کسره‌های کلاسیک هر حلقه‌ی جابجایی وجود دارد و میدان کسره‌های دامنه‌ی صحیح همان حلقه‌ی کسره‌های کلاسیک آن است.

فرض کنیم F میدان و $R = F \langle x, y \rangle$ نمایانگر F -جبر آزاد تولید شده با متغیرهای تعویض ناپذیر x, y باشد. چون برای x, y عناصر $a, b \in R$ وجود ندارد به طوری که $xy^{-1} = b^{-1}a$ یا $y^{-1}x = ab^{-1}$ ، از این رو حلقه‌ی کسره‌های راست کلاسیک R وجود ندارد.

تعریف ۱۳.۲.۴. حلقه‌ی R را گلدی راست می‌نامیم هرگاه R_R بعد متناهی داشته باشد و در شرط $A.C.C$ روی پوچسازهای راست صدق کند. حلقه‌ی گلدی چپ متناظرا تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ای هم گلدی راست و هم گلدی چپ باشد آن را گلدی می‌نامیم.

گزاره ۱۴.۲.۴. هر حلقه‌ی گلدی راست و نیم اول، اور راست است.

تعریف ۱۵.۲.۴. می‌گوییم مدول A غیر قابل تجزیه است، هرگاه زیرمدول‌های ناصفر B و C از A وجود نداشته باشند که

$$B \oplus C = A.$$

تعریف ۱۶.۲.۴. می‌گوییم مدول A بعد متناهی دارد، هرگاه زیرمدول‌های غیر قابل تجزیه E_i از $E(A)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$E(A) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$

تعریف ۱۷.۲.۴. مدول ناصفر A را یکنواخت می‌نامیم، هرگاه اشتراک هر دو زیرمدول ناصفر آن نابدهی باشد. یعنی؛ هر زیرمدول ناصفر از A اساسی است.

تعریف ۱۸.۲.۴. دامنه‌ی R را اور راست می‌نامیم هرگاه مجموعه‌ی عناصر ناصفر آن اور راست باشد یعنی؛ برای هر دو عنصر ناصفر $x, y \in R$ عناصر $r, s \in R$ وجود داشته باشند که $xr = ys \neq 0$. دامنه‌ی اور چپ متناظرا تعریف می‌شود.

برای مثال، حلقه‌ی اعداد صحیح هم دامنه اور راست و هم اور چپ است.

لم ۱۹.۲.۴. فرض کنیم R یک دامنه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R ، اور راست است.

۲. R_R ، یکنواخت است.

۳. R_R ، بعد متناهی دارد.

برهان. (۱ $\leftrightarrow$ ۲) دامنه R اور راست است اگر و تنها اگر هر دو ایده‌آل راست اصلی ناصفر از R اشتراک نابدی‌ی داشته باشد.

(۲ $\leftarrow$ ۳) بدیهی است.

(۳ $\leftarrow$ ۲) فرض کنیم R_R یکنواخت نباشد، ایده‌آل‌های راست ناصفر I_1, J_1 از R وجود دارند که $I_1 \cap J_1 = 0$. فرض کنیم $x_1 \in J_1, x_1 \neq 0$ چون دامنه است پس $x_1 R \cong R$ و لذا دو ایده‌آل راست ناصفر I_2, J_2 از $x_1 R$ وجود دارند که $I_2 \cap J_2 = 0$. با ادامه این روند ایده‌آل‌های راست $I_1, J_1, I_2, J_2, \dots$ از R به قسمی به دست می‌آیند که برای هر n ، $I_n \cap J_n = 0$ ، $I_{n+1} + J_{n+1} \leq J_n$. در نتیجه خانواده‌ی $I_1, I_2, I_3, \dots$ مستقل است که با ۳ در تناقض است. بنابراین R_R یکنواخت است.

□

نتیجه ۲۰.۲.۴. هر دامنه نوتری راست، اور راست است.

قضیه ۲۱.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی اور راست و Q حلقه‌ی کسره‌ای راست کلاسیک R باشد.

۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی IFP باشد. اگر $a_1 b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} \dots a_n b_n^{-1} = 0$ ، آنگاه $a_1 a_2 \dots a_n = 0$.

۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی IFP باشد. اگر $ab^{-1} \in N(Q)$ ، آنگاه $Qab^{-1}Q$ شامل یک ایده‌آل پوچتوان ناصفر از R است.

برهان. ۱. فرض کنیم $a_1 b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} \dots a_i b_i^{-1} = 0$. چون حلقه‌ی R ، اور راست است، لذا محاسبات

زیر را داریم:

$a_2 d_1 = b_1 c_1$ که وجود دارد که $d_1 \in C(0)$ و $c_1 \in R$

$a_3 d_2 = (b_2 d_1) c_2$ که وجود دارد که $d_2 \in C(0)$ و $c_2 \in R$

به صورت استقرایی $c_{n-1} \in R$ و $d_{n-1} \in C(0)$ وجود دارد که $a_n d_{n-1} = (b_{n-1} d_{n-2}) c_{n-1}$

در نتیجه

$$0 = a_1 b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} \dots a_n b_n^{-1} = a_1 c_1 c_2 \dots c_{n-1} d_{n-1}^{-1} b_n^{-1}.$$

بنابراین $a_1 c_1 c_2 \dots c_{n-1} = 0$ اما حلقه‌ی IFP, R است، پس

$$0 = a_1 c_1 c_2 \dots c_{n-1} = a_1 (b_1 c_1) c_2 \dots c_{n-1}$$

$$= a_1 (a_2 d_1) c_2 \dots c_{n-1} = a_1 a_2 (b_2 d_1) c_2 \dots c_{n-1}$$

$$= a_1 a_2 (a_3 d_2) c_3 \dots c_{n-1} = \dots$$

$$= a_1 a_2 \dots a_{n-1} (b_{n-1} d_{n-2}) c_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n d_{n-1}.$$

چون d_{n-1} منظم است لذا $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 0$

۲. فرض کنیم $ab^{-1} \in N(Q)$ ، $0 \neq ab^{-1}$ ، لذا n یی هست که $(ab^{-1})^n = 0$. در این صورت بنا به قسمت

۱، $a^n = 0$. چون IFP, R است، بنا به لم ۵.۱.۲ قسمت ۴، RaR پوچتوان است به طوری که

$$RaR \subseteq QaQ = Qab^{-1}bQ \subseteq Qab^{-1}Q.$$

□

مراجع

- [1] H. E. Bell, *Near-rings in which each element is a power of itself*, Bull. Austral. Math. Soc. 2 (1970), 363-368.
- [2] G.F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, and E. K. Lee, *Completely prime ideals and associated radicals*, Ring theory (Granville, OH, 1992), 102-129, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [3] D. B. Erickson, *Orders for finite noncommutative rings with unity*. Amer. Math. Monthly 73 (1966), 376-377.
- [4] K. P. Goodearl, *von Neumann Regular Rings*, Monographs and Studies in Mathematics 4. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass-London, 1979.
- [5] K. Y. Ham, Y. C. Jeon, J. Kang, N. K. Kim, W. Lee, Y. Lee, S. J. Ryu, and H. Yang, *IFP rings and near-IFP rings*, J. Korean Math. Soc. Vol. 45 (2008), No. 3, 727-740
- [6] K. Y. Ham, C. Huh, Y. C. Hwang, Y. C. Jeon, H. K. Kim, S. M. Lee, Y. Lee, S. R. O, and J. S. Yoon, *On weak Armendariz rings*, submitted.
- [7] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, The University of Chicago Press, Chicago-London 1965.
- [8] C. Y. Hong, H. K. Kim, N. K. Kim, T. K. Kwak, Y. Lee, and K. S. Park, *Ring whose nilpotent elements form a Levitzki radical ring*, Comm. Algebra 35 (2007), no. 4, 1379-1390.
- [9] C. Y. Hong and T. K. Kwak, *On minimal strongly prime ideals*, Comm. Algebra 28 (2000), no. 10, 4867-4878.
- [10] C. Huh, H. K. Kim, and Y. Lee, *p.p. rings and generalized p.p. rings*, J. Pure Appl. Algebra 167 (2002), no. 1, 37-52.
- [11] C. Huh, H. K. Kim, and Y. Lee, *Question on 2-primal rings*, Comm. Algebra 26 (1998) 595-600 28 (1978) 53-78.
- [12] C. Huh, H. K. Kim, D. S. Lee, and Y. Lee, *Prime radicals of formal power series rings*, Bull. Korean Math. Soc. 38 (2001), no. 4, 623-633.
- [13] C. Huh, C. O. Kim, E. J. Kim, H. K. Kim, Y. Lee, and Y. Lee, *Nilradicals of power series rings and nil power series rings*, J. Korean Math. Soc. 42 (2005) 1003-1015.
- [14] C. Huh, Y. Lee, and A. Smoktunowicz *Armendariz rings and semicommutative rings*, Comm. Algebra 30 (2002), no. 2, 751-761.
- [15] S. U. Hwang, Y. C. Jeon, and Y. Lee *Structure and topological conditions of NI rings*, J. Algebra 302 (2006), no. 1 186-199.
- [16] N. K. Kim and Y. Lee, *Extension of reversible rings*, J. Pure Appl. Algebra 185 (2003), no. 3, 207-223

- [17] A. A. Klein *Rings of bounded index*, Comm. Algebra 12 (1984), no. 1-2, 9-21
- [18] T. Y. Lam *A First Course in Noncommutative Rings*, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong- Barcelona-Budapest, Springer-Verlag (1991) Notes in Theoretical Computer Science, Vol. 87, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 2004.
- [19] J. Lambek, *Lecture on Rings and Modules*, Waltham-Massachusetts-Toronto-London, Blaisdell Publishing Company (1966).
- [20] C. Lanski *Nil subrings of Goldie rings are nilpotent*. Canad. J. Math. 21 (1969) 904–907.
- [21] G. Marks *On 2-primal Ore extension*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 5, 2113-2123.
- [22] E. R. Puczyłowski, *On radicals of polynomial rings, power series rings and tensor products*, Comm. Algebra 8 (1980), 1699-1709.
- [23] J. Ram *On the semisimplicity of skew polynomial rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 347-351.
- [24] G. Shin *Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1973), 43-60
- [25] A. Smoktunowics *Polynomial rings over nil rings need not be nil*, J. Algebra 233 (2000) , 427-436.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

index of nilpotency	اندیس پوچتوانی
bounded index of nilpotency	اندیس پوچتوانی متناهی
prime ideal	ایده‌آل اول
minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
nilpotent ideal	ایده‌آل پوچتوان
strongly prime ideal	ایده‌آل قویا اول
minimal strongly prime ideal	ایده‌آل قویا اول مینیمال
completely prime ideal	ایده‌آل کاملاً اول
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
abelian ring	حلقه‌ی آبدی
ring Ore	حلقه‌ی اور
reduced ring	حلقه‌ی تقلیل یافته
polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای
factor ring	حلقه‌ی خارج قسمتی
Morita context ring	حلقه‌ی سیستم موریتا
near-IFP ring	حلقه‌ی شبه-IFP
von Neumann regular ring	حلقه‌ی فون نیومن منظم

classic quotient ring	حلقه‌ی کسرهای کلاسیک
Goldie ring	حلقه‌ی گلدی
matrix ring	حلقه‌ی ماتریسی
locally 2-primal ring	حلقه‌ی موضعا ۲-اولیه
semiprime ring	حلقه‌ی نیم اول
IPF ring	حلقه‌ی IPF
NI ring	حلقه‌ی NI
2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه
domain	دامنه
prime radical	رادیکال اول
nil radical	رادیکال پوچ
Levitzki radical	رادیکال لویتسکی
Morita context	سیستم موریتا
upper triangular ring	ماتریس بالا مثلثی
direct sum	مجموع مستقیم
directly finite	مستقیما متناهی
strongly regular	منظم قوی
π -regular	π -منظم

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abelian ring	حلقه‌ی آبلی
bounded index of nilpotency	اندیس پوچتوانی متناهی
classic quotient ring	حلقه‌ی کسرهای کلاسیک
completely prime ideal	ایده‌آل کاملاً اول
direct sum	مجموع مستقیم
directly finite	مستقیماً متناهی
domain	دامنه
factor ring	حلقه‌ی خارج قسمتی
Goldie ring	حلقه‌ی گلدی
IPF ring	حلقه‌ی IFP
index of nilpotency	اندیس پوچتوانی
Levitzki radical	رادیکال لویتسکی
locally 2-primal ring	حلقه‌ی موضعی ۲-اولیه
matrix ring	حلقه‌ی ماتریسی
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
minimal strongly prime ideal	ایده‌آل قویاً اول مینیمال

near-IFP ring	حلقه‌ی شبه-IFP
NI ring	حلقه‌ی NI
nilpotent ideal	ایده‌آل پوچتوان
nil radical	رادیکال پوچ
polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای
prime idea	ایده‌آل اول
prime radical	رادیکال اول
reduced ring	حلقه‌ی تقلیل یافته
Morita context ring	حلقه‌ی سیستم موریتا
ring Ore	حلقه‌ی اور
semiprime ring	حلقه‌ی نیم اول
strongly prime ideal	ایده‌آل قویا اول
strongly regular	منظم قوی
upper triangular ring	ماتریس بالا مثلثی
von Neumann regular ring	حلقه‌ی فون نیومن منظم
π -regular	π -منظم
2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه

Surname: Askari

Name: Fatemeh

Title: IFP Ring and Near-IFP Ring

Supervisor: Dr.Ebrahim Hashemi

Advisor: Dr.Ahmad Zire

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Algebra

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2012

Number of pages: [89](#)

Keywords: IFP ring , near-IFP ring , reduced ring , NI ring , polynomial ring , matrix ring , nilpotent ideal , Levitzki radical , (Locally) 2-primal ring , Prime radical , Upper nilradical

Abstract

This thesis first we examinining the expression of the *IFP*-rings and contains a nonzero nilpotent ideals. Also on Von Neumann regular rings are examine the conditions.

So we show that 2-primal rings are locally 2-primal and locally 2-primal rings are *NI* rings but we show that there are *NI* rings which are not locally 2-primal. So we prove that every minimal noncommutative (locally) 2-primal ring is isomorphic to the 2 by 2 upper traingular matrix ring over $\text{GF}(2)$. A nil ring R need not be locally 2-primal, but we show that it is the case if and only if R is a Levitzki radical ring.

Fainally, the present note the structures of *IFP* rings and near-*IFP* rings are observed,extending the classes of them. We show that the near-*IFP*ness and the *NI*ness are distinct each other and the relations among them and related conditions are examined.



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

IFP Ring and Near-IFP Ring

Supervisor

Dr.Ebrahim Hashemi

Advisor

Dr.Ahmad Zire

by

Fatemeh Askari

2012