مکانیابی شرطی روی شبکه‌ها

سمیه زیانلو

۲۲ بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و همواره، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه زیانلو

آذر ۱۳۹۱

نام خانوادگی: زیانلو نام: سمیه

عنوان پایان‌نامه: مکانیابی شرطی روی شبکه‌ها

استاد راهنما: دکتر جعفر فتحعلی
استاد مشاور: آقای سیدرضا موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۹۲

کلیدواژه‌ها: مکانیابی، p−میانه‌ی شرطی، p−مرکز شرطی، p−ماکسین شرطی، میانه‌ی مطلق شرطی، مرکز مطلق شرطی، میانه‌ی کلی شرطی، مرکز کلی شرطی، میانه‌ی مطلق کلی شرطی، مرکز مطلق کلی شرطی

چکیده

مسائل مکانیابی جزء مهمترین مسائل در تحقیق در عملیات است و کاربردهای زیادی در دنیای امروز دارند. از مهمترین کاربردهای آن‌ها می‌توان به مکانیابی ایستگاه‌های آتش‌نشانی و پلیس، مراکز اورژانس، بیمارستان‌ها، مراکز توزیع کالا، ایستگاه‌های اتوبوس و مترو، مراکز اداری، شبکه‌های کامپیوتری، مراکز پستی، مراکز دفع زباله، نیروگاه‌های هسته‌ای و ... اشاره کرد.

دو نمونه از مسأله‌های مهم در تئوری مکانیابی، مسأله‌های p−میانه و p−مرکز هستند. در مسائل مکانیابی شرطی، تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل در شبکه وجود دارند و هدف ما تعیین مکان تعدادی از سرویس‌دهنده‌های جدید در شبکه است. در این پایان‌نامه به توصیف و تشریح این مسائل و روش‌های حل آن‌ها پرداخته و برای مسأله‌ی p−ماکسین شرطی روی شبکه‌ها دو روش حل ارائه می‌دهیم.

فهرست مطالب

لیست جداول

پیش‌گفتار

در مسائل مکانیابی، هدف تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه است که این کار با ارائه‌ی الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل صورت می‌گیرد. در میان الگوریتم‌های مطرح شده، الگوریتمی سودمند است که در زمان کمتر و با هزینه‌ی کمتری قابل اجرا باشد. دو مسأله‌ی مهم مکانیابی، مسائل میانه و مرکز هستند. روش‌های ابتکاری و الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل ارائه شده است. از جمله روش‌های ابتکاری که برای مسأله‌ی $p-$ میانه به کار رفته است روش‌های الگوریتم ژنتیک و جستجوی تابو است.

در فصل اول این پایان‌نامه، به معرفی مسائل میانه و مرکز روی شبکه و تاریخچه‌ای بر مکانیابی و کارهایی که در این زمینه انجام شده است؛ می‌پردازیم.

در فصل دوم، مسائل مکانیابی را با توجه به نحوه‌ی قرار گرفتن نقاط تقاضا و سرویس‌دهنده‌ها روی رئوس یا یال‌های شبکه به هشت گروه تقسیم می‌کنیم و انواع مسائل شرطی متناظر با آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم، به تعیین مکان p سرویس‌دهنده روی شبکه می‌پردازیم به گونه‌ای که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی شبکه قرار دارند. با توجه به نحوه‌ی قرار گرفتن سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه، مسأله را در دو نوع میانه‌ی شرطی و مرکز شرطی مورد بررسی قرار می‌دهیم و دو الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] را برای حل آن‌ها توضیح می‌دهیم و به مقایسه‌ی دو الگوریتم می‌پردازیم.

در فصل چهارم، حالتی را بررسی می‌کنیم که ایجاد سرویس‌دهنده‌ی جدید روی شبکه، برای مشتری‌ها ناخوشایند است و دور بودن سرویس‌دهنده از بعضی نقاط مورد نظر است. در این حالت مسأله‌ی ماکسین شرطی روی شبکه مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه الگوریتم‌های برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] را تعمیم داده‌ایم و به مقایسه‌ی دو الگوریتم می‌پردازیم. از کاربردهای این مسأله می‌توان به تعیین مکان نیروگاه‌های هسته‌ای، انبارهای نظامی و انبارهای زباله و ... اشاره کرد.

در فصل پنجم، به تعیین مکان بهینه‌ی تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها روی صفحه می‌پردازیم؛ به

گونه‌ای که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی صفحه قرار دارند. همچنین به حل مسأله‌ی ۲-میانه و (۱, ۱)-میانه روی صفحه می‌پردازیم.

فصل ۱

مکانیابی

در این فصل ابتدا چارچوب و زمینه‌ی تاریخی مسائل مکانیابی و کاربردهای آن را معرفی کرده و سپس به معرفی دو مسأله‌ی مهم مکانیابی (مسأله‌ی میانه و مسأله‌ی مرکز) می‌پردازیم.

۱.۱ مقدمه

مسأله‌ی مکانیابی از جمله مسائل مهمی است که امروزه کاربرد زیادی در رشته‌ها و علوم مختلف دارد، و در دهه‌های اخیر مقالات فراوانی در این زمینه به چاپ رسیده است. پیدایش مسأله‌ی مکانیابی را به قرن هفدهم میلادی نسبت می‌دهند، زمانی که فرما[۱] مسأله‌ی زیر را مطرح کرد: فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه‌ی چهارم را به گونه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌ها تا سه نقطه‌ی داده شده مینیمم شود. این مسأله در سال ۱۶۴۰ در ایتالیا توسط توریچلی[۲] حل شد، به همین دلیل این نقطه را نقطه‌ی توریچلی می‌نامند.

مطالعات در علم مکانیابی مدرن در سال ۱۹۰۹ توسط وبر[۳] پایه‌ریزی شد [۷۸]. او مسأله‌ی پیدا کردن مکان یک سرویس‌دهنده را که مجموع فاصله‌ی آن تا چند مشتری کمترین مقدار ممکن باشد را معرفی نموده و مورد بررسی قرار داد. تحقیقات جدی بر روی مسائل مکانیابی در سال ۱۹۶۴ توسط حکیمی [۴۰] شروع شد، و از آن زمان به بعد مطالعه روی این مسائل وارد مرحله‌ی جدیدی شد. حکیمی مسأله‌ی مکانیابی بر روی شبکه را به منظور یافتن مکان بهینه‌ی گشت‌های پلیس در بزرگراهها و مناطق شهری مورد استفاده قرار داد. او برای رسیدن به هدف، مسأله‌ی

[۱] Fermat

[۲] Torricelli

[۳] Weber

مکانیابی را در حالت کلی‌تر مطرح کرد، او فرض کرد که اگر تعداد سرویس‌دهنده‌ها بیشتر از یکی باشد آنگاه مشتری‌ها از بین سرویس‌دهنده‌ها کسی را انتخاب می‌کنند که کمترین فاصله را با او داشته باشند.

بعضی از افراد مدل‌های مختلف مسائل مکانیابی را طبقه‌بندی کرده‌اند، اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر[۴] و میرچندانی[۵] [۴۵] ارائه شد. همچنین طبقه‌بندی‌های دیگری در این زمینه توسط کراروپ[۶] و پروزن[۷] [۵۱]، هانس[۸] و همکاران [۴۶]، میرچندانی و فرانسیس[۹] [۶۲]، فرانسیس و همکاران [۳۴]، أون[۱۰] و دسکین[۱۱] [۶۶]، اسکاپارا[۱۲] و اسکاتلا[۱۳] [۷۱] و درزنر[۱۴] و هاماخر[۱۵] [۲۸] انجام شده است. هال[۱۶] [۴۳] لیستی از مقاله‌های مختلف در مورد مسائل مکانیابی را در یک سایت اینترنتی جمع‌آوری کرده است.

مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها، به چگونگی انتخاب یک مجموعه از نقاط برای تعیین مکان‌های مشخصی در شبکه می‌پردازند. در حقیقت، ما در این مسائل با تخمین زدن معیارهای مختلف و با استفاده از مجموعه‌ی مشخصی از قیدها، نیاز مشتری‌ها را بطور بهینه برآورده می‌کنیم. بنابراین در مسائل مکانیابی که روی شبکه یا گراف مدل می‌شوند، رأس‌های شبکه نشان‌دهنده‌ی نقاطی هستند که استفاده‌کنندگان آن متقاضی سرویسی هستند، که به این رأس‌ها نقاط تقاضا می‌گوییم. یال‌ها نشان‌دهنده‌ی وجود ارتباط بین رأس‌ها هستند (برای مثال جاده‌هائی که شهرها را به هم وصل می‌کنند).

در مسائل مکانیابی با دو حالت می‌توانیم، مواجه شویم. حالت اول، وقتی که تعدادی نقاط تقاضا در شبکه وجود دارد (رئوس) و هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل در شبکه وجود نداشته باشد؛ و هدف تعیین مکان تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها در شبکه، به منظور خدمت‌رسانی به نقاط تقاضا است. مثلا فرض کنیم یک منطقه شامل خانه‌های مسکونی، بدون مراکز آتش‌نشانی است؛ و هدف ما تعیین مکان تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها (مراکز آتش‌نشانی) در سطح شهر است، به

[۴] Handler
[۵] Mirchandani
[۶] Krarup
[۷] Pruzan
[۸] Hansen
[۹] Francis
[۱۰] Owen
[۱۱] Daskin
[۱۲] Scaparra
[۱۳] Scutella
[۱۴] Drezner
[۱۵] Hamacher
[۱۶] Hale

طوری که این مراکز در مکان‌هایی باشند که بتوانند بهترین خدمت‌رسانی را به تمام نقاط تقاضا (مناطق مسکونی) داشته باشند. در این حالت، مفهوم مسأله‌ی مکانیابی غیرشرطی نمود می‌یابد؛ و منظور ما این است که هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل در شبکه وجود ندارد و هدف ما، تعیین مکان بهینه‌ی تعدادی از سرویس‌دهنده‌های جدید در شبکه است. در حالت دوم، تعدادی از نقاط تقاضا در شبکه وجود دارند (رئوس) و همچنین تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل در شبکه موجودند. (از این به بعد در این پایان‌نامه، سرویس‌دهنده‌هایی را که از قبل در شبکه وجود دارند، سرویس‌دهنده‌های موجود می‌نامیم؛ و سرویس‌دهنده‌هایی را که قرار است در شبکه تعیین مکان شوند، سرویس‌دهنده‌های جدید می‌نامیم). در این حالت هدف ما، تعیین مکان تعدادی از سرویس‌دهنده‌های جدید در شبکه است به طوری که این سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های بهینه‌ای واقع شوند که خدمت‌رسانی به تقاضاها را تسهیل بخشند. در این حالت هر نقطه‌ی تقاضا، می‌تواند خدماتش را از نزدیکترین سرویس‌دهنده‌ای که در شبکه تعیین مکان شده است (چه سرویس‌دهنده‌ی جدید و چه سرویس‌دهنده‌ی موجود) دریافت کند. در حالت دوم، مسأله‌ی مکانیابی را مسأله‌ی مکانیابی شرطی می‌نامیم. مثلا فرض کنیم که در سطح شهر تعدادی بیمارستان وجود دارد، و هدف ما این است که تعدادی بیمارستان جدید برای خدمت‌رسانی به بیماران در سطح شهر دایر کنیم. باید مکان بهینه‌ی بیمارستان‌های جدید در سطح شهر طوری باشد که امکان خدمت‌رسانی به تمام نقاط تقاضا (مناطق مسکونی) تسهیل شود. بنابراین در هر مسأله‌ی مکانیابی، اگر تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل در شبکه تعیین مکان شده باشند، و هدف ما تعیین مکان بهینه‌ی تعدادی از سرویس‌دهنده‌های جدید باشد (با توجه به معیارهای بهینگی)، با مفهوم مسأله‌ی مکانیابی شرطی سر و کار خواهیم داشت. در بخش‌های آینده مفاهیم مهم مسائل مکانیابی و مدل‌های مهم مکانیابی شرطی روی شبکه را شرح می‌دهیم.

۲.۱ مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها

دو نمونه از مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها، مسأله‌های میانه و مرکز هستند. در هر دو مسأله هدف پیدا کردن نقاطی از شبکه‌ی N است، به طوریکه فاصله‌ی وزنی این نقاط (سرویس‌دهنده‌ها) تا نقاط تقاضا (مشتری‌ها) بهینه شود.

۱.۲.۱ مسأله‌ی $\mathbf{p}-$میانه

مسأله‌ی $p-$میانه یکی از مهمترین مسائل در تئوری مکانیابی است و کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف دارد، که از آن جمله می‌توان به مکانیابی مراکز شبکه‌های ارتباطی کامپیوتری، مراکز توزیع کالا، مراکز اداری، مراکز نظامی، ایستگاه‌های اتوبوس و مراکز پستی اشاره کرد.

میانه، نقطه‌ای از شبکه است که مجموع فواصل وزندار سایر نقاط تقاضا تا این نقطه، کمترین مقدار باشد. در مسأله‌ی p−میانه، میانه‌ها می‌توانند هر نقطه‌ای از شبکه باشند که در این حالت مسأله را مسأله‌ی p−میانه‌ی مطلق گویند. اما اگر هدف، پیدا کردن نقاط میانه، تنها روی رأس‌ها باشد، مسأله را مسأله‌ی p−میانه‌ی رأسی می‌نامند.

در مسأله‌ی p−میانه روی شبکه‌ها هدف پیدا کردن مجموعه‌ی $X = \{x_۱, x_۲, ..., x_p\}$ شامل مکان p سرویس‌دهنده روی شبکه‌ی $N = (V, E)$ است، به طوری‌که اگر هر رأس v_i دارای وزن w_i باشد، مجموع فاصله‌های وزنی این مجموعه تا تمام رئوس روی شبکه N مینیمم شود. به عبارتی در این حالت هدف کمینه کردن مجموع وزنی فاصله‌ها خواهد بود، یعنی

$$min f(x) = \sum_{v_i \in N} w_i d(X, v_i)$$

فاصله‌ی هر رأس $v \in V$ از مجموعه‌ی X به صورت فاصله‌ی v تا نزدیکترین سرویس‌دهنده در X تعریف می‌شود، یعنی

$$d(X, v) = min_{x_i \in X} d(x_i, v)$$

و $d(v_i, v_j)$ فاصله‌ی کوتاهترین مسیر بین دو رأس v_i و v_j روی شبکه می‌باشد.

هر چند مقاله‌های اندکی در زمینه‌ی مکانیابی روی شبکه‌ها در دهه ۱۹۵۰ منتشر شد، ولی از اواسط دهه‌ی ۱۹۶۰ به‌بعد به این مسائل به طور جدی پرداخته شد. حکیمی[۱۷] [۴۰،۴۱] در سال‌های ۶۵ − ۱۹۶۴ نتایج مقدماتی درباره‌ی مینیمم فاصله‌ی وزنی موقعیت p وسیله روی شبکه‌ای شامل n نقطه‌ی تقاضا بدست آورد، اگرچه او نتوانست راه حلی برای این مسائل ارائه دهد ولی ثابت کرد که حداقل یک مجموعه متشکل از p رأس از n رأس وجود دارد که یک جواب بهینه برای مسأله‌ی p−میانه است. این نتیجه به «قضیه‌ی حکیمی» یا «خاصیت بهینگی رأسی» معروف است. کمکی که قضیه‌ی حکیمی در حل مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها انجام داد، شبیه کار دانتزیگ[۱۸] در مسائل برنامه‌ریزی خطی است به عبارتی به کمک این قضیه مجموعه جواب‌های بهینه، از یک مجموعه نامتناهی به یک مجموعه متناهی کاهش پیدا می‌کند.

گلدمن[۱۹] [۳۹] در سال ۱۹۷۱ نشان داد که مسأله‌ی ۱−میانه روی شبکه‌ها با استفاده از روش شمارشی دارای پیچیدگی زمانی $o(n^۳)$ می‌باشد. همچنین او نشان داد هنگامی‌که وزن یکی از رأس‌های تقاضا از نصف وزن کل سیستم بیشتر باشد، جواب بهینه ۱−میانه همان رأس است.

[۱۷] Hakimi

[۱۸] Dantzig

[۱۹] Goldman

با استفاده از این قضیه (خاصیت اکثریت وزنی) مسألهی ۱-میانه روی درخت دارای پیچیدگی زمانی $o(n)$ است. این نتیجه مشابه شرایط بهینگی برای میانه در فضای دو بعدی با نرم L_1 است.

قضیه ۱.۲.۱. [۳۹]. *اگر T یک درخت باشد و زیردرخت T_1 خاصیت زیر را دارا باشد، آنگاه یک جواب بهینه برای مسأله در T_1 وجود دارد.*

$$W(T_1) \geq \frac{1}{2} W(T)$$

که $W(T)$ و $W(T_1)$ به صورت زیر تعریف میشوند:

$$W(T) = \sum_{\{i:v_i \in T\}} w_i \qquad , \qquad W(T_1) = \sum_{\{i:v_i \in T_1\}} w_i$$

با استفاده از قضیهی فوق، الگوریتمی برای مسألهی ۱-میانه روی درختها به صورت زیر ارائه شده است.

الگوریتم اکثریت وزنی:

۱) اگر T شامل تنها یك رأس است توقف کنید، همان رأس جواب بهینه است.

۲) به ازای هر رأس انتهائی مانند v اگر $W(v) \geq \frac{W(T)}{2}$ آنگاه v جواب مسأله است. در غیراین صورت به گام ۳ بروید.

۳) فرض کنید u رأس مجاور v باشد؛ وزن v را به u اضافه کرده و رأس v و کمان (u, v) را حذف کنید و به گام ۱ بروید.

کریو[۲۰] و حکیمی [۵۰] در سال ۱۹۷۹ ثابت کردند که p-میانه در حالت کلی NP- سخت است. با این حال با توجه به قضیهی حکیمی، برای به دست آوردن جواب بهینه کافی است روی مجموعه رأسهای شبکه تحقیق کنیم. با استفاده از این نتیجه ریول و اسوین[۲۱] [۶۹] در سال ۱۹۷۰ اولین فرمولبندی مسألهی p-میانه را با برنامهریزی خطی صفر و یک ارائه دادند.

[۲۰] Kariv

[۲۱] Revelle & Swain

یک مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک برای مسأله‌ی p−میانه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & minz = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} w_i.d_{ij}.x_{ij} \\ & s.t. \\ & \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱,...,n & \text{(a)} \\ & x_{ij} \leq y_j \qquad i = ۱,...,n \qquad j = ۱,...,n & \text{(b)} \\ & \sum_{j=۱}^{n} y_j = p & \text{(c)} \\ & x_{ij} = ۰ \vee ۱ \qquad i = ۱,...,n \qquad j = ۱,...,n & \text{(d)} \\ & y_j = ۰ \vee ۱ \qquad j = ۱,...,n & \text{(e)} \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

در فرمول فوق متغیرهای x_{ij} و y_j به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر رأس } i \text{ به سرویس‌دهنده } j \text{ اختصاص داده شود} \\ ۰ & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر رأس j بعنوان مکان سرویس‌دهنده انتخاب شود} \\ ۰ & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

در مدل (۱.۱) مجموعه قیدهای (a) بیانگر این مسأله هستند که هر رأس باید تنها به یک سرویس‌دهنده اختصاص یابد. مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که رأس‌ها را تنها می‌توان به رئوسی اختصاص داد که به‌عنوان مکان یک سرویس‌دهنده در نظر گرفته شده باشد، یعنی به ازای آن رأس $y_j = ۱$ باشد. مجموعه قیدهای (b) را می‌توان با قیدهای $\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} \leq My_j$ جایگزین کرد که M یک عدد بزرگتر از $n - p + ۱$ است. محدودیت (c) نشان‌دهنده‌ی این مطلب است که p سرویس‌دهنده مورد نیاز است. از جمله الگوریتم‌های دقیق اعمال شده برروی مسأله‌ی p−میانه می‌توان به روش گالوا[۲۲] [۳۵] با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ در سال ۱۹۹۳ و

[۲۲] Galvao

برنامه‌ریزی خطی ریول و اسوین اشاره کرد. همچنین ارلنکاتر[۲۳] [۳۲] در سال ۱۹۷۸ با استفاده از تکنیک کاهشی دوگان، الگوریتمی برای مسأله‌ی p−میانه ارائه داد. برای درک بهتر موضوع به دسکین در [۱۶] مراجعه کنید. روش‌های ابتکاری که برای مسأله‌ی p−میانه به کار گرفته می‌شود، روش‌هائی بر پایه‌ی آزمون و خطا هستند. این روش‌ها تضمین نمی‌کنند که جواب به دست آمده، یک جواب بهینه باشد و زمانی به کار می‌روند که یک جواب نزدیک به جواب بهینه در اختیار داشته باشیم. این روش‌ها به دو گروه روش‌های ابتکاری کلاسیک و روش‌های فراابتکاری تقسیم می‌شود. گروه اول به سه گروه برنامه‌ریزی ریاضی، جستجوی محلی و روش‌های ابتکاری سازنده تقسیم می‌شود. اولین روش‌های ابتکاری برای مسأله‌ی p−میانه را کوهن و هامبورگر [۲۴] [۵۲] در الگوریتمی مبتنی بر روش‌های آزمند و بهبودبخشنده ارائه دادند. از دیگر روش‌های اولیه می‌توان جستجوی همسایگی مارانزانا[۲۵] [۵۷] در سال ۱۹۶۴ و روش جانشینی رأس‌ها توسط تیتز و بارت[۲۶] [۷۶] در سال ۱۹۶۸ اشاره کرد. روش‌های دیگری مبتنی بر تئوری گراف برای حل مسأله‌ی p−میانه روی درخت ارائه شده است که می‌توان به الگوریتم دقیق با پیچیدگی زمانی $O(p^۲n^۲)$ برای p−میانه روی درخت توسط کریو و حکیمی [۵۰] اشاره کرد؛ که تمیر[۲۷] [۷۴] آن‌را به الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(pn^۲)$ بهبود بخشید.

۲.۲.۱ مسأله‌ی p−مرکز

مسأله‌ی p−مرکز به تعیین مکان p سرویس‌دهنده (مرکزها) روی شبکه می‌پردازد، به طوری‌که ماکزیمم فاصله‌ی هر مشتری (نقاط تقاضا) تا نزدیکترین سرویس‌دهنده مینیمم شود (کریو و حکیمی [۵۰]، هندلر و میرچندانی [۴۵]، دسکین [۱۶]). فرض کنید $X_p = \{x_۱, x_۲, ..., x_p\}$ یک مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده از شبکه G (روی رأس‌ها یا یال‌ها) باشد. فاصله‌ی بین هر رأس شبکه و مجموعه‌ی X_p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(v, X_p) = min_{۱\leq i\leq p}\{d(v, x_i)\} \quad (۲.۱)$$

که $d(v, x_i)$ فاصله‌ی کوتاهترین مسیر بین دو نقطه‌ی v و x_i روی شبکه می‌باشد. فرض کنید

$$F(X_p) = max_{v\in V}\{w(v)\cdot d(v, X_p)\} \quad (۳.۱)$$

[۲۳] Erlenkotter

[۲۴] Kuhen & Hamburger

[۲۵] Maranzana

[۲۶] Teitz & Bart

[۲۷] Tamir

حال فرض کنید $X_p^* \in G$ به گونه‌ای باشد که

$$F(X_p^*) = min_{X_p \in G}\{F(X_p)\} \tag{۴.۱}$$

بنابراین با توجه به (۴.۱) X_p^* یک p−مرکز مطلق برای G و $F(X_p^*)$ یک p−شعاع مطلق برای G نامیده می‌شود، و معمولا با $r_p(G)$ نشان داده می‌شود. اگر مجموعه‌ی X_p در (۲.۱) فقط شامل رأس‌های G باشد، آنگاه X_p^* یک p−مرکز رأسی برای G و $F(X_p^*)$ یک p−شعاع رأسی برای G نامیده می‌شود.

اگر همه‌ی رأس‌های شبکه دارای وزن c باشد، بدون از دست دادن کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $c = ۱$ و در این صورت شبکه را بدون وزن در نظر می‌گیریم. همچنین باید فرض کرد که $p < n$، زیرا درغیراین صورت اگر $p = n$ ، آنگاه $X_p^* = V$ و $r_p(G) = ۰$ ؛ و اگر $p > n$، مسأله بی‌معنی است و مفهوم ریاضی ندارد [۵۰]. مسأله‌ی p−مرکز کاربردهای فراوانی دارد که برای مثال می‌توان به تعیین محل تأسیسات صنعتی، انبارها، ایستگاه‌های آتش‌نشانی و پلیس، بیمارستان‌ها، مدارس و مراکز فروش اشاره کرد.

تعریف ۲.۲.۱. در مسأله‌ی مکانیابی روی شبکه اگر هدف به دست آوردن موقعیت سرویس‌دهنده‌ها روی رأس‌های شبکه باشد، مسأله را میانه‌ی رأسی می‌نامند؛ و اگر هدف به دست آوردن موقعیت سرویس‌دهنده‌ها در امتداد یال‌ها و رأس‌ها باشد مسأله را میانه‌ی مطلق می‌نامند (منیکا[۲۸] [۵۸]).

مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک مسأله‌ی p−مرکز در حالت رأسی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
min \quad & (max_{i,j} w_i.d_{ij}.x_{ij}) \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱, ..., n && \text{(a)} \\
& \sum_{i=۱}^{n} x_{ij} \leq n.y_j \qquad j = ۱, ..., n && \text{(b)} \\
& \sum_{j=۱}^{n} y_j = p && \text{(c)} \\
& x_{ij}, y_j \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۱, ..., n \qquad j = ۱, ..., n && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{۵.۱}$$

در مدل (۵.۱) مجموعه قیدهای (a) نشان می‌دهند که هر رأس باید تنها به یک سرویس‌دهنده اختصاص یابد. مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که هر رأس را تنها می‌توان به رأسی به اختصاص

[۲۸] Minieka

داد که به عنوان مکان یک سرویس‌دهنده در نظر گرفته شده باشد. محدودیت (c) نشان می‌دهد، که p سرویس‌دهنده مورد نیاز است. الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسأله‌ی p−مرکز ارائه شده است، ولی در حالت کلی گری و جانسن[۲۹] [۳۶] نشان دادند که این مسأله برای گراف‌ها در حالت کلی NP−سخت است. کریو و حکیمی [۵۰] نیز در سال ۱۹۷۹ ثابت کردند، که مسأله‌ی p−مرکز (مطلق و رأسی) برای هر $۱ < p < n$، NP−سخت است؛ و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O([n^{۲p-۱}m^p/(p-۱)!]\log n)$ برای گراف‌های وزن‌دار و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^{۲p-۱}m^p/(p-۱)!)$ برای گراف‌هائی با رأس‌های بدون وزن ارائه دادند. آن‌ها همچنین برای پیدا کردن ۱−مرکز روی شبکه‌های وزن‌دار و بدون وزن به ترتیب الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی $O(mn\log n)$ و $O(mn+n^۲\log n)$ برای گراف‌های کلی، و الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی $O(n\log n)$ و $O(n)$ به ترتیب برای درخت‌های وزن‌دار و بدون وزن ارائه دادند [۵۰]. همچنین الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^۲\log n)$ برای پیدا کردن p−مرکز روی درخت ارائه دادند [۵۰]. آن‌ها در همان سال موفق شدند نتایج خود را توسعه دهند و برای پیدا کردن p−مرکز مطلق برای هر $۲ < p < n$ الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n\log^{p-۲} n)$، و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n\log^{p-۲} n)$ برای پیدا کردن p−مرکز رأسی برای هر $۱ < p < n$ ارائه دهند [۵۰]. تمیر [۷۳] با ارائه‌ی الگوریتمی توانست، X_p^* را برای گراف‌های وزن‌دار و بدون وزن به ترتیب در زمان‌های $O(n^pm^p\log^۲ n)$ و $O(n^{p-۱}m^p\log^۳ n)$ به دست آورد. روش‌های ابتکاری زیادی برای حل مسأله‌ی p−مرکز پیشنهاد شده که می‌توان به روش‌های پیشنهاد شده توسط پلگرین[۳۰] [۶۷]، درزنر [۲۲]، چندرساکرن[۳۱] و تمیر [۱۱] اشاره کرد.

[۲۹] Garey and Johnson

[۳۰] Pelegrin

[۳۱] Chandrasekaran

فصل ۲

مسائل مکانیابی شرطی روی شبکه

۱.۲ مقدمه

مسائل مکانیابی را از جهات مختلف می‌توان، طبقه‌بندی کرد. در این بخش، مسائل مکانیابی با توجه به نحوه‌ی قرار گرفتن سرویس‌دهنده‌ها و مشتریان (نقاط تقاضا) روی یال‌ها یا رئوس به هشت گروه تقسیم می‌شوند. اگر در یک گراف، نقاط تقاضا بر روی رئوس واقع شوند و فقط نقاط روی رأس‌ها بتوانند به عنوان مکان سرویس‌دهنده‌ها انتخاب شوند؛ مسأله‌ی مکانیابی متناظر با مسائل مرکز و میانه است و اگر در یک گراف، نقاط تقاضا بر روی رئوس واقع شوند و نقاط روی یال‌ها هم مانند رئوس بتوانند به عنوان مکان سرویس‌دهنده‌ها انتخاب شوند؛ مسأله‌ی مکانیابی متناظر با مرکز مطلق و میانه‌ی مطلق است. بنابراین چهار نوع از مسائل مکانیابی را به صورت مرکز، میانه، مرکز مطلق و میانه‌ی مطلق تعریف می‌کنیم.

در چهار نوع از مسائل مکانیابی بالا، نقاط تقاضا فقط بر روی رئوس می‌توانند؛ واقع شوند. اگر نقاط تقاضا علاوه بر رئوس روی یال‌ها هم بتوانند واقع شوند؛ متناظراً چهار نوع از مکانیابی‌ها، مکانیابی‌های کلی نامیده می‌شوند. بنابراین اگر در یک گراف، فقط نقاط روی رأس‌ها بتوانند به عنوان مکان سرویس‌دهنده‌ها انتخاب شوند و نقاط تقاضا علاوه بر رئوس روی یال‌ها هم بتوانند واقع شوند؛ مسأله‌ی مکانیابی متناظر با مرکز کلی و میانه‌ی کلی است و اگر در یک گراف، نقاط روی یال‌ها هم مانند رئوس بتوانند به عنوان مکان سرویس‌دهنده‌ها انتخاب شوند و مشتریان (نقاط تقاضا) علاوه بر رئوس روی یال‌ها هم بتوانند واقع شوند؛ مسأله‌ی مکانیابی متناظر با مرکز مطلق کلی و میانه‌ی مطلق کلی است. هنگامی‌که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی گراف قرار داشته باشند (با توجه به نحوه‌ی قرار گرفتن نقاط تقاضا و سرویس‌دهنده‌ها روی رأس‌ها یا یال‌ها) مسائل مکانیابی را متناظر با مسائل مکانیابی بالا شرطی می‌نامیم.

لذا در این فصل، هشت نوع مسأله‌ی مکانیابی و مسائل مکانیابی شرطی متناظر با آن‌ها را توضیح می‌دهیم.

۲.۲ نمادگذاری

در این پایان‌نامه از نشانه‌ها و علامت‌های زیر، برای توصیف مسائل استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم که G گراف مورد بحث باشد. رأس‌های گراف G را با $x_۱, ..., x_n$ و یال‌های گراف را با $y_۱, ..., y_p$ نشان می‌دهیم. d_i نشان‌دهنده‌ی طول یال y_i می‌باشد و یال y_i متصل به رئوس x_j و x_k است، به طوری‌که $j < k$. یك نقطه روی یال y_i با ضرب کردن عدد f $(۰ \leq f \leq ۱)$ در d_i مشخص می‌شود. d_{jk} نشان‌دهنده‌ی طول کوتاهترین مسیر از رأس x_j به رأس x_k در گراف G می‌باشد. D نشان‌دهنده‌ی ماتریس $n \times n$ است که (j,k) امین عنصر آن d_{jk} می‌باشد و ماتریس فاصله‌ی گراف G نامیده می‌شود. روش‌هایی برای محاسبه‌ی d_{jk} در [۱۴], [۶۰], [۶۸] ارائه شده است. فرض کنیم که q سرویس‌دهنده‌ی موجود $z_۱, z_۲, ..., z_q$ از قبل در گراف در هر یک از نقاط یا رئوس، برای هر $q = ۱, ۲, ...$ تعیین مکان شده باشند.

فرض کنیم که d^c_{mt} نشان‌دهنده‌ی طول کوتاهترین مسیر از سرویس‌دهنده‌ی موجود z_m به رأس x_t باشد. اگر z_m یک رأس از گراف G باشد؛ آنگاه این فاصله می‌تواند مستقیماً از ماتریس D محاسبه شود. در غیراین صورت z_m ، یک نقطه روی یال $y_i = (x_j, x_k)$ است. بنابراین عنصر d^c_{mt} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$d^c_{mt} = \min(fd_i + d_{jt}, (۱ - f)d_i + d_{kt}) \qquad (۱.۲)$$

و d^c_t اندازه‌ی کوتاهترین فاصله از مجموعه‌ی سرویس‌دهنده‌ها به رأس x_t می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$d^c_t = \min(d^c_{۱t}, d^c_{۲t}, ..., d^c_{qt}) \qquad (۲.۲)$$

و d^*_{st} کمترین مقدار بین اندازه‌ی کوتاهترین فاصله از مجموعه‌ی سرویس‌دهنده‌ها تا رأس x_t و اندازه‌ی کوتاهترین فاصله از رأس x_s به رأس x_t باشد، یعنی:

$$d^*_{st} = \min(d_{st}, d^c_t) \qquad (۳.۲)$$

فرض کنیم که D^* یك ماتریس $n \times n$ است که (s,t) امین عنصر آن d^*_{st} باشد. فاصله‌ی d^*_{st} ، فاصله‌ی شرطی از x_s به x_t نامیده می‌شود؛ و D^* ماتریس فاصله‌ی شرطی نام دارد. با توجه به تعریف دو عنصر d_{st} و d^*_{st} ، بوضوح داریم: $d_{st} \geq d^*_{st}$. همچنین فرض کنید d'_{si} اندازه‌ی

ماکسیمم فاصله از رأس x_s به یال $y_i = (x_j, x_k)$ باشد که ماکسیمم روی نقاطی از یال y_i اتفاق می‌افتد. بنابراین داریم:

$$d'_{si} = \frac{۱}{۲}(d_{sj} + d_i + d_{sk}) \tag{۴.۲}$$

و d'_{si} فاصله‌ی رأس-یال نامیده می‌شود. D' یک ماتریس $n \times p$ است که (s,i) امین عنصر آن d'_{si} است، و ماتریس فاصله‌ی رأس-یال نامیده می‌شود.

فرض کنیم که d'^c_{ti} اندازه‌ی ماکسیمم فاصله از سرویس‌دهنده‌ی z_t به یال $y_i = (x_j, x_k)$ باشد که z_t نقطه‌ای روی یال $y_l = (x_m, x_n)$ است؛ و d'^c_{ti} فاصله‌ی نقطه-یال نامیده می‌شود. فاصله‌ی نقطه-یال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d'^c_{ti} = \min \begin{cases} fd_l + d'_{mi}, (۱-f)d_l + d'_{ni} \\ \frac{۱}{۲}(d_i + d_l + d_{mj} + d_{nk}) \\ \frac{۱}{۲}(d_i + d_l + d_{mk} + d_{nj}) \end{cases}$$

(۵.۲)

فاصله‌ی d'^*_{si} یک فاصله‌ی رأس-یال شرطی نامیده می‌شود و عبارت است از ماکسیمم فاصله از هر سرویس‌دهنده یا از رأس x_s به یال y_i؛ که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d'^*_{si} = \min(d'_{si}, d'^c_{۱i}, d'^c_{۲i}, ..., d'^c_{qi}) \tag{۶.۲}$$

و D'^* نشان‌دهنده‌ی ماتریس $n \times p$ از فواصل رأس-یال شرطی است؛ که (s,i) امین عنصر آن d'^*_{si} است.

بوضوح داریم:

$$d'_{si} \geq d'^*_{si}$$

۳.۲ مسائل مکانیابی شرطی روی شبکه

در این بخش، انواع مسائل مکانیابی را توصیف کرده؛ و الگوریتم‌هایی را برای یافتن مکان آن‌ها روی شبکه ارائه می‌دهیم.

۱.۳.۲ مرکز شرطی

در مسأله‌ی مرکز، هدف پیدا کردن نقطه‌ای از شبکه‌ی N است؛ به طوری‌که ماکسیمم فاصله‌ی وزنی این نقطه (سرویس‌دهنده) تا نقاط تقاضا کمترین مقدار ممکن باشد. تابع هدف مسأله‌ی مرکز در فصل ۱ نشان داده شد. در مسائل مرکز و مرکز شرطی سرویس‌دهنده‌ها و نقاط تقاضا روی رئوس شبکه واقع می‌شوند. در مسأله‌ی مرکز شرطی، تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی رئوس شبکه واقع هستند و هدف، تعیین مکان سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه است؛ به گونه‌ای که ماکسیمم فاصله‌ی وزنی این نقاط (سرویس‌دهنده‌های جدید و موجود) تا نقاط تقاضا مینیمم شود.

فرض کنید $Z_q = \{z_۱, z_۲, ..., z_q\}$ یك مجموعه شامل مکان q سرویس‌دهنده‌ای باشد که از قبل روی رئوس شبکه تعیین مکان شده‌اند و $X_p = \{x_۱, ..., x_p\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده از شبکه N (روی رأس‌ها) باشد. فاصله‌ی $d(v, X_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(v, X_p) = min_{۱\leq i\leq p}\{d(v, x_i)\} \qquad (۷.۲)$$

تابع هدف مسأله‌ی p−مرکز شرطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_۱(X_p) = max_{v\in V}\{min\{w(v).d(v, X_p), w(v).d(v, Z_q)\}\} \qquad (۸.۲)$$

بنابراین اگر به ازای $X_p^* \in N$ داشته باشیم:

$$G_۱(X_p^*) = min_{X_p\in N}\{G_۱(X_p)\} \qquad (۹.۲)$$

آنگاه X_p^* یك p−مرکز شرطی برای N نامیده می‌شود.
در حالت غیرشرطی، مرکز یک گراف رأسی است که ماکسیمم فاصله از آن به رئوس دیگر، کوچکترین مقدار ممکن باشد. حکیمی در [۴۰] نشان می‌دهد که مرکز گراف متناظر با سطری در ماتریس D است که ماکسیمم عنصر آن سطر، کوچکترین مقدار ممکن باشد. به طور مشابه مرکز شرطی متناظر با سطری در ماتریس D^* است که ماکسیمم عنصر آن، کوچکترین مقدار باشد.

مرکز شرطی یک گراف با استفاده از همان روشی که یک مرکز غیرشرطی پیدا می‌شود، یافت می‌شود؛ با این تفاوت که ماتریس D^* جایگزین ماتریس D می‌شود.

۲.۳.۲ میانه‌ی شرطی

در مسأله‌ی میانه و میانه‌ی شرطی، سرویس‌دهنده‌ها و نقاط تقاضا روی رئوس شبکه واقع می‌شوند. در مسأله‌ی میانه هدف، پیدا کردن نقطه‌ای از شبکه‌ی N است؛ به طوری‌که مجموع فاصله‌های

وزنی این نقطه (سرویس‌دهنده) تا نقاط تقاضا کمترین مقدار ممکن باشد. تابع هدف مسأله‌ی میانه در فصل ۱ نشان داده شد.

در مسأله‌ی میانه‌ی شرطی، تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی رئوس شبکه واقع هستند؛ و هدف، تعیین مکان سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه است به گونه‌ای که مجموع فاصله‌های وزنی نقاط تقاضا تا نزدیکترین سرویس‌دهنده (سرویس‌دهنده‌ی جدید یا سرویس‌دهنده‌ی موجود) مینیمم شود. با توجه به فرمول (۷.۲)، تابع هدف مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{1}(X_p) = \sum_{v \in V} w(v). \min\{d(v, X_p), d(v, Z_q)\} \qquad (۱۰.۲)$$

بنابراین اگر به ازای $X_p^* \in N$ داشته باشیم:

$$F_{1}(X_p^*) = min_{X_p \in N}\{F_{1}(X_p)\} \qquad (۱۱.۲)$$

آنگاه X_p^* یك p–میانه‌ی شرطی برای N نامیده می‌شود.

میانه‌ی گراف، رأسی است که فاصله‌ی کلی از این رأس به رئوس دیگر، کمترین مقدار باشد. بنابراین میانه رأسی است، متناظر با سطری از ماتریس D که کمترین مجموع را دارد. به طور مشابه میانه‌ی شرطی، رأسی است متناظر با سطری در ماتریس D^* که کمترین مجموع را دارد.

بنابراین میانه‌ی شرطی می‌تواند با استفاده از همان روشی که میانه‌ی غیرشرطی پیدا می‌شود، یافت شود؛ با این تفاوت که ماتریس D^* باید جایگزین ماتریس D شود.

۳.۳.۲ مرکز کلی و مرکز کلی شرطی

در مسأله‌ی مرکز کلی و مرکز کلی شرطی، سرویس‌دهنده‌ها روی رئوس واقع هستند و نقاط تقاضا می‌توانند روی هر نقطه‌ای از یال واقع باشند. در مسأله‌ی مرکز کلی هدف پیدا کردن رأسی از شبکه‌ی N است به گونه‌ای که ماکسیمم فاصله‌ی این رأس (سرویس‌دهنده) تا هر نقطه در شبکه، کمترین مقدار باشد. مسأله‌ی p–مرکز کلی به تعیین مکان p سرویس‌دهنده روی رئوس شبکه می‌پردازد؛ به گونه‌ای که ماکسیمم فاصله‌ی نزدیکترین سرویس‌دهنده تا هر نقطه‌ای در شبکه کمترین مقدار شود.

فرض کنید $X_p = \{x_{1}, x_{2}, ..., x_p\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده از شبکه‌ی N (روی رأس‌ها) باشد. فاصله‌ی بین هر یال شبکه (y_i) و مجموعه‌ی X_p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall i = 1, ..., q \qquad d(y_i, X_p) = min_{1 \leq s \leq p}\{d'_{si}\} \qquad (۱۲.۲)$$

که d'_{si} در بخش ۲.۲ تعریف شده است. حال فرض کنید:

$$G(X_p) = max_{1 \leq i \leq q}\{d(y_i, X_p)\} \qquad (۱۳.۲)$$

اگر به ازای $X^*_p \in N$ داشته باشیم:

$$G(X^*_p) = min_{X_p \in N}\{G(X_p)\} \qquad (۱۴.۲)$$

آنگاه X^*_p یك p− مرکز کلی برای N نامیده می‌شود.

در مسأله‌ی مرکز کلی شرطی، فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده از قبل روی رئوس شبکه واقع هستند و هدف، تعیین مکان سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه است؛ به گونه‌ای که ماکسیمم فاصله‌ی نزدیکترین سرویس‌دهنده (جدید یا موجود) به هر نقطه در شبکه، کمترین مقدار شود. فرض کنید $Z_m = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ یك مجموعه شامل مکان m سرویس‌دهنده‌ای باشد که از قبل روی رئوس شبکه تعیین مکان شده‌اند و $X_p = \{x_1, ..., x_p\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده از شبکه‌ی N (روی رأس‌ها) باشد؛ هدف از حل مسأله‌ی p−مرکز کلی شرطی، تعیین مکان بهینه‌ی نقاط $x_1, x_2, ..., x_p$ روی رئوس شبکه است به گونه‌ای که تابع هدف مسأله، مقدار بهینه‌اش را به دست آورد. دو فاصله‌ی $d_1(y_i, X_p)$ و $d_2(y_i, Z_m)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall i = 1, ..., q \qquad d_1(y_i, X_p) = min_{1 \leq s \leq p}\{d'_{si}\} \qquad (۱۵.۲)$$

$$\forall i = 1, ..., q \qquad d_2(y_i, Z_m) = min_{1 \leq s \leq m}\{d'_{si}\} \qquad (۱۶.۲)$$

تابع $G_2(X_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_2(X_p) = max_{1 \leq i \leq q}\{min\{d_1(y_i, X_p), d_2(y_i, Z_m)\}\} \qquad (۱۷.۲)$$

بنابراین اگر به ازای $X^*_p \in N$ داشته باشیم:

$$G_2(X^*_p) = min_{X_p \in N}\{G_2(X_p)\} \qquad (۱۸.۲)$$

آنگاه، X^*_p یك p−مرکز کلی شرطی برای N نامیده می‌شود.

مرکز کلی یک گراف متناظر با رأسی از ماتریس D' است که ماکسیمم عنصر آن، کمترین مقدار باشد. منیکا در [۶۰] نشان داده است که مرکز کلی با به کار بردن همان تکنیک‌هایی که مرکز را پیدا می‌کنند، یافت می‌شود؛ با این تفاوت که در این‌جا ماتریس رأس-یال D' جایگزین ماتریس D می‌شود.

مرکز کلی شرطی، متناظر با سطری در ماتریس D'^* است که ماکسیمم عنصر آن، کمترین مقدار باشد. لذا مرکز کلی شرطی با به کار بردن همان روش‌های قبلی به دست می‌آید؛ با این تفاوت که در این‌جا از ماتریس D'^* استفاده می‌شود. یعنی روش حل تغییر نمی‌کند؛ و فقط ماتریس به کار رفته، تغییر می‌کند.

۴.۳.۲ میانه‌ی کلی و میانه‌ی کلی شرطی

در مسأله‌ی میانه‌ی کلی و میانه‌ی کلی شرطی، سرویس‌دهنده‌ها روی رئوس شبکه واقع می‌شوند و نقاط تقاضا می‌توانند روی هر نقطه از یال واقع شوند. هدف در مسأله‌ی میانه‌ی کلی، پیدا کردن رأسی از شبکه‌ی N است به گونه‌ای که مجموع کلی، ماکسیمم فاصله‌ی این رأس (سرویس‌دهنده) تا هر نقطه‌ای واقع بر هر یال در شبکه کمترین مقدار شود. مسأله‌ی p−میانه‌ی کلی به تعیین مکان p سرویس‌دهنده روی رئوس شبکه می‌پردازد؛ به گونه‌ای که مجموع کلی ماکسیمم فاصله‌ی نزدیکترین سرویس‌دهنده تا هر نقطه واقع بر هر یال در شبکه، کمترین مقدار شود. با توجه به فرمول (۱۲.۲)، تابع $F(X_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(X_p) = \sum_{i=1}^{q} d(y_i, X_p) \qquad (۱۹.۲)$$

اگر به ازای $X_p^* \in N$ داشته باشیم:

$$F(X_p^*) = min_{X_p \in N}\{F(X_p)\} \qquad (۲۰.۲)$$

آنگاه مجموعه‌ی X_p^* یك p−میانه‌ی کلی نامیده می‌شود.

در مسأله‌ی میانه‌ی کلی شرطی، فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده، از قبل روی رئوس شبکه واقع هستند و هدف، تعیین مکان سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه است؛ به گونه‌ای که مجموع کلی ماکسیمم فاصله‌ی نزدیکترین سرویس‌دهنده (جدید یا موجود) تا هر نقطه واقع بر هر یال در شبکه، کمترین مقدار شود. با توجه به تعریف فاصله در (۱۵.۲) و (۱۶.۲) تابع $F_2(X_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_2(X_p) = \sum_{i=1}^{q} \{min\{d_1(y_i, X_p), d_2(y_i, Z_m)\}\} \qquad (۲۱.۲)$$

اگر به ازای $X_p^* \in N$ داشته باشیم:

$$F_2(X_p^*) = min_{X_p \in N}\{F_2(X_p)\} \qquad (۲۲.۲)$$

آنگاه مجموعه‌ی X_p^* یك p−میانه‌ی کلی شرطی نامیده می‌شود.

منیکا در [۶۰] نشان داده است که میانه‌ی کلی یك گراف، رأسی است متناظر با سطری از ماتریس D' که کمترین مجموع را دارد. بنابراین میانه‌ی کلی با استفاده از روش‌هایی که میانه را پیدا می‌کند، یافت می‌شود؛ با این تفاوت که در این‌جا ماتریس رأس-یال D' جایگزین ماتریس D می‌شود.

میانه‌ی کلی شرطی، متناظر با سطری در ماتریس D'^* است که کمترین مجموع را دارد. لذا میانه‌ی کلی شرطی با به کار بردن همان روش‌های قبلی بدست می‌آید؛ با این تفاوت که در این‌جا از ماتریس D'^* استفاده می‌شود. یعنی راه حل تغییر نمی‌کند؛ فقط ماتریس به کار رفته، تغییر می‌کند.

۵.۳.۲ مرکز مطلق و مرکز مطلق شرطی

در مسأله‌ی مرکز مطلق و مرکز مطلق شرطی، سرویس‌دهنده‌ها می‌توانند روی هر نقطه‌ای از یال قرار بگیرند و نقاط تقاضا روی رئوس شبکه واقع می‌شوند. فرض کنید که v_i یك رأس شبکه باشد و w_i وزن این نقطه‌ی تقاضا باشد. شبکه‌ای با n رأس را درنظر می‌گیریم؛ و x نقطه‌ای دلخواه روی شبکه باشد. فاصله‌ی $d(v_i, x)$ را به صورت کوتاهترین فاصله بین v_i و x تعریف می‌کنیم. نقطه‌ی x^* روی شبکه یك مرکز مطلق نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \qquad max_{1\leq i\leq n}\{w_i.d(x^*, v_i)\} \leq max_{1\leq i\leq n}\{w_i.d(x, v_i)\} \tag{۲۳.۲}$$

بنابراین مرکز مطلق عبارت است از هر نقطه‌ای روی شبکه که فاصله به دورترین رأس از آن نقطه، کمترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده، روی هر نقطه‌ای از شبکه‌ی N باشد. فاصله‌ی $d(v_i, X_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall i = 1, ..., n \qquad d(v_i, X_p) = min\{d(v_i, x_1), d(v_i, x_2), ..., d(v_i, x_p)\} \tag{۲۴.۲}$$

اگر برای هر X_p روی شبکه داشته باشیم:

$$max_{1\leq i\leq n}\{w_i.d(v_i, X_p^*)\} \leq max_{1\leq i\leq n}\{w_i.d(v_i, X_p)\} \tag{۲۵.۲}$$

آنگاه مجموعه‌ی X_p^* یك p−مرکز مطلق نامیده می‌شود.

فرض کنید که $Z_m = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ یك مجموعه شامل مکان m سرویس‌دهنده‌ی موجود در شبکه باشد که از قبل روی هر نقطه‌ای از شبکه واقع شده‌اند و $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ مجموعه‌ای از سرویس‌دهنده‌های جدید باشد. با توجه به فرمول (۲۴.۲)، مسأله‌ی زیر را داریم:

اگر برای هر X_p روی شبکه داشته باشیم:

$$G_{۳}(X_p^*) = max_{۱\leq i\leq n}\{w_i.min\{d(v_i, X_p^*), d(v_i, Z_m)\}\}$$
$$\leq max_{۱\leq i\leq n}\{w_i.min\{d(v_i, X_p), d(v_i, Z_m)\}\}$$

(۲۶.۲)

آنگاه X_p^* یك p−مرکز مطلق شرطی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۲. نقطه‌ی x_l روی یال (p, q) ، یک مرکز محلی است اگر برای هر $x \in (p, q)$ (یال (p, q) شامل رأس‌های p و q می‌باشد) داشته باشیم:

$$max_{۱\leq i\leq n}\{d(x_l, v_i)\} \leq max_{۱\leq i\leq n}\{d(x, v_i)\}$$

الگوریتمی برای یافتن مرکز مطلق

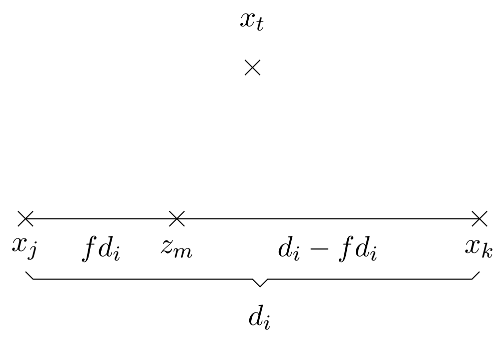
در این الگوریتم، ابتدا برای هر یال، مرکز محلی را پیدا می‌کنیم و سپس از میان این مراکز محلی، مرکز مطلق را می‌یابیم. بنابراین الگوریتم موردنظر برای یافتن مرکز مطلق یک گراف غیرجهت‌دار G به صورت زیر توصیف می‌شود:

گام (۱): برای هر یال l از گراف G ، مرکز محلی x_l از l را پیدا کنید.

گام (۲): در میان همه‌ی مراکز محلی x_l ، کمترین مقدار $max_{۱\leq i\leq n}\{d(x_l, v_i)\}$ را انتخاب کنید. این مرکز محلی در واقع مرکز مطلق x^* از گراف G است.

یافتن مرکز مطلق و مرکز مطلق شرطی با توجه به رسم نمودار

یال $y_i = (x_j, x_k)$ با طول d_i را در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی نقاط روی یال y_i به یک رأس مشخص، مثلاً x_t ، به فرم یک تابع قطعه به قطعه خطی از f است که دارای شیب (ضریب زاویه) $\pm d_i$ است. فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ی z_m روی یال y_i قرار داشته باشد.

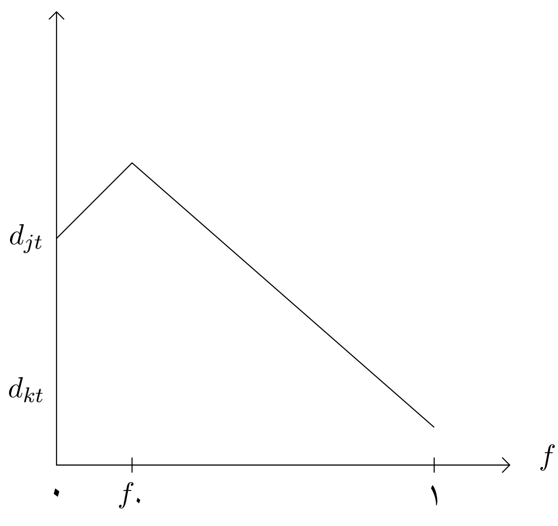


شکل (۱)

اندازه‌ی کوتاهترین مسیر از سرویس‌دهنده‌ی z_m به رأس x_t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

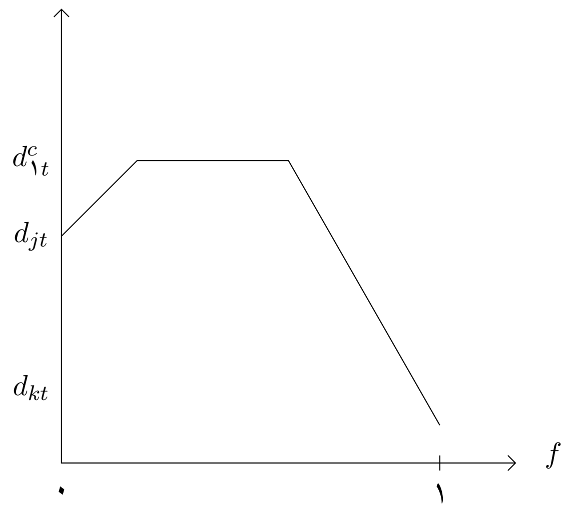
$$d_{mt}^{c} = \min(fd_i + d_{jt}, (۱ - f)d_i + d_{kt})$$

این تابع را به صورت تابعی از f در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که این تابع قطعه به قطعه خطی (نقطه-رأس) برای هر رأس رسم شده باشد. مقدار f^* روی محور افقی، در پوش بالایی از این مجموعه از توابع که مقدارش مینیمم است بهترین کاندیدا روی یال y_i برای مرکز مطلق است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، می‌توانید به [۳۷] و [۴۰] و [۴۱] مراجعه کنید.



شکل (۲)

هنگامی که بعضی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل در گراف تعیین مکان شده باشند؛ تابع فاصله که در شکل (۲) نشان داده شده است باید اصلاح شود. در این‌جا کمترین فاصله به رأس x_t از نقاط یال y_i و همچنین از سرویس‌دهنده‌های $z_1, ..., z_q$ در نظر گرفته می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ی z_1 نزدیکترین سرویس‌دهنده به رأس x_t باشد. بنابراین تابع فاصله‌ی نقطه-رأس در شکل (۲)، هرگز نمی‌تواند یک مقدار بزرگتر از d^c_{1t} باشد چون همیشه یک نقطه‌ی تقاضا (در این‌جا رأس x_t) خدماتش را از نزدیکترین سرویس‌دهنده‌ای که به آن قرار دارد؛ به دست می‌آورد. لذا شکل به صورت نشان داده شده در زیر به دست می‌آید:



شکل (۳)

دو نقطه‌ی A و B را روی یال y_i در نظر می‌گیریم. با توجه به تابع فاصله‌ی نقطه-رأس شرطی و شکل بالا داریم:

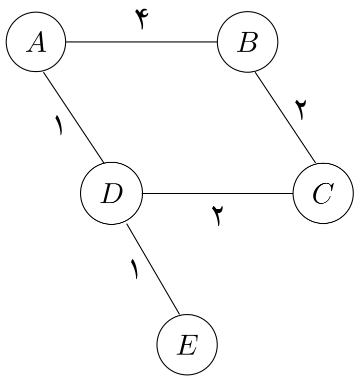
$$d(x_t, z_1) > d(x_t, x_j)$$

$$d(x_t, A) \geq d(x_t, z_1)$$

$$d(x_t, B) \geq d(x_t, z_1)$$

$$d(x_t, z_1) > d(x_t, x_k)$$

مثال ۲.۳.۲. در شبکه‌ی رسم شده در شکل (۴)، مکان مراکز محلی و مرکز مطلق را تعیین می‌کنیم:



شکل (۴)

توابع فاصله‌ی هر نقطه روی یال (A, B) تا رئوس شبکه را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$d(x, A) = x$$

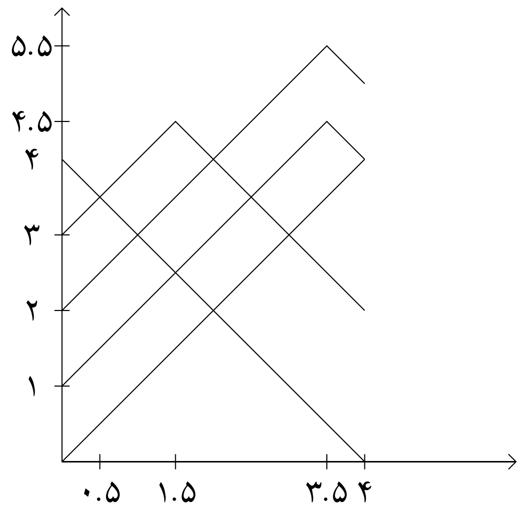
$$d(x, B) = ۴ - x$$

$$d(x, D) = \begin{cases} ۱ + x & ۰ \leq x \leq ۳/۵ \\ ۸ - x & ۳/۵ \leq x \leq ۴ \end{cases}$$

$$d(x, C) = \begin{cases} ۳ + x & ۰ \leq x \leq ۱/۵ \\ ۶ - x & ۱/۵ \leq x \leq ۴ \end{cases}$$

$$d(x, E) = \begin{cases} ۲ + x & ۰ \leq x \leq ۳/۵ \\ ۹ - x & ۳/۵ \leq x \leq ۴ \end{cases}$$

نمودار توابع بالا را روی بازه‌ی $[۰, ۴]$ رسم می‌کنیم (شکل (۵)). در توابع فوق $x \in [۰, ۴]$.



شکل (۵)

در نمودار بالا، محور افقی نشان‌دهنده‌ی طول یال (A, B) است و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی هر نقطه روی یال (A, B) تا رئوس شبکه است.

مرکز محلی، محل تلاقی دو تابع $d(x, B)$ و $d(x, C)$ است.

$$۴ - x = ۳ + x \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین مرکز محلی روی یال (A, B) و به فاصله‌ی $\frac{۱}{۲}$ از رأس A قرار می‌گیرد؛ این مرکز محلی را با نماد $x_{(A,B)}$ نشان می‌دهیم.

توابع فاصله‌ی هر نقطه روی یال (A, D) تا رئوس شبکه را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$d(x, A) = x$$

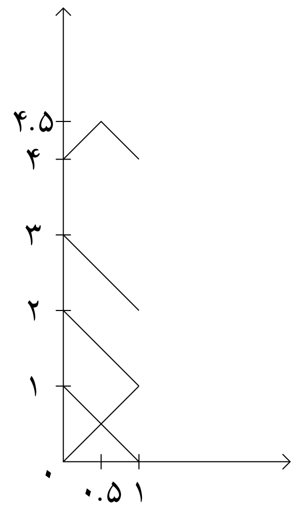
$$d(x, D) = ۱ - x$$

$$d(x, E) = ۲ - x$$

$$d(x, B) = \begin{cases} ۴ + x & ۰ \leq x \leq ۰/۵ \\ ۵ - x & ۰/۵ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

$$d(x, C) = ۳ - x$$

نمودار توابع بالا را روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ رسم می‌کنیم (شکل (۶)). در توابع فوق $x \in [۰, ۱]$.



شکل (۶)

در نمودار بالا، محور افقی نشان‌دهنده‌ی طول یال (A, D) است و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی هر نقطه روی یال (A, D) تا رئوس شبکه است.

بنابراین مرکز محلی در یال (A, D) ، روی رئوس A و D واقع می‌شود.

توابع فاصله‌ی هر نقطه روی یال (B, C) تا رئوس شبکه را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$d(x, B) = x$$

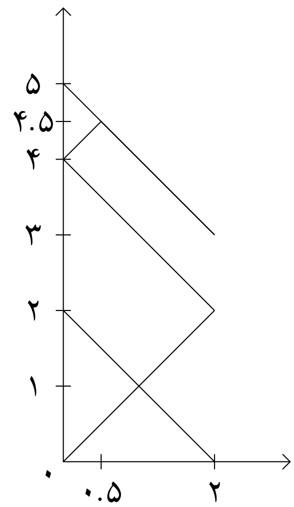
$$d(x, C) = ۲ - x$$

$$d(x, A) = \begin{cases} ۴ + x & ۰ \leq x \leq ۰/۵ \\ ۵ - x & ۰/۵ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

$$d(x, D) = ۴ - x$$

$$d(x, E) = ۵ - x$$

نمودار توابع بالا را روی بازه‌ی $[۰, ۲]$ رسم می‌کنیم (شکل (۷)). در توابع فوق $x \in [۰, ۲]$.



شکل (۷)

در نمودار بالا، محور افقی نشان‌دهنده‌ی طول یال (B,C) است و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی هر نقطه روی یال (B,C) تا رئوس شبکه است.

بنابراین مرکز محلی در یال (B,C) روی رأس C واقع می‌شود.

توابع فاصله‌ی هر نقطه روی یال (D,C) تا رئوس شبکه را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$d(x,D) = x$$

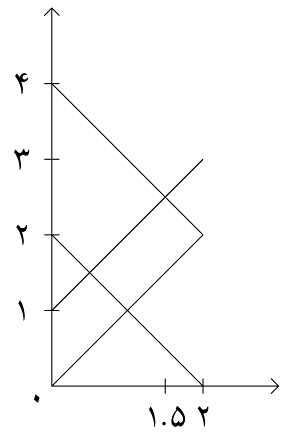
$$d(x,C) = ۲ - x$$

$$d(x,A) = ۱ + x$$

$$d(x,E) = ۱ + x$$

$$d(x,B) = ۴ - x$$

نمودار توابع بالا را روی بازه‌ی $[۰,۲]$ رسم می‌کنیم (شکل (۸)). در توابع فوق $x \in [۰,۲]$.



شکل (۸)

در نمودار بالا، محور افقی نشان‌دهنده‌ی طول یال (D,C) است و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی هر نقطه روی یال (D,C) تا رئوس شبکه است.

مرکز محلی، محل تلاقی دو تابع $d(x,A)$ یا ($d(x,E)$) و $d(x,B)$ است.

$$۱ + x = ۴ - x \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین مرکز محلی روی یال (D,C) و به فاصله‌ی $\frac{۳}{۲}$ از رأس D واقع می‌شود؛ این مرکز محلی را با نماد $x_{(D,C)}$ نشان می‌دهیم.

توابع فاصله‌ی هر نقطه روی یال (D,E) تا رئوس شبکه را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$d(x,D) = x$$

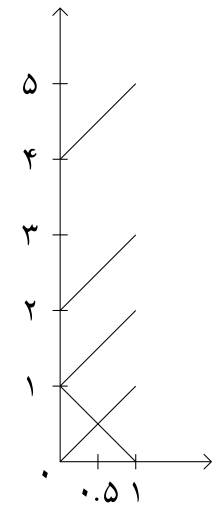
$$d(x,E) = ۱ - x$$

$$d(x,C) = ۲ + x$$

$$d(x,A) = ۱ + x$$

$$d(x,B) = ۴ + x$$

نمودار توابع بالا را روی بازه‌ی $[۰,۱]$ رسم می‌کنیم (شکل (۹)). در توابع فوق $x \in [۰,۱]$.



شکل (۹)

در نمودار بالا، محور افقی نشان‌دهنده‌ی طول یال (D,E) است و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی هر نقطه روی یال (D,E) تا رئوس شبکه است.

بنابراین مرکز محلی روی یال (D,E) در رأس D واقع می‌شود.

براي به دست آوردن مرکز مطلق، فاصله‌ی هر مرکز محلی تا رئوس شبکه را به دست می‌آوریم؛ و برای هر مرکز محلی، فاصله تا دورترین رأس را محاسبه می‌کنیم سپس از بین این مقادیر، مرکزی که کمترین مقدار را داراست مرکز مطلق خواهد بود.

فاصله‌ی $x_l^1 = A$ تا رئوس شبکه:

$$d(x_l^1, A) = 0$$

$$d(x_l^1, B) = 4$$

$$d(x_l^1, D) = 1$$

$$d(x_l^1, C) = 3$$

$$d(x_l^1, E) = 2$$

پس

$$max_i(d(x_l^1, v_i)) = 4$$

فاصله‌ی $x_l^2 = D$ تا رئوس شبکه:

$$d(x_l^2, A) = 1$$

$$d(x_l^۲, D) = ۰$$
$$d(x_l^۲, C) = ۲$$
$$d(x_l^۲, B) = ۴$$
$$d(x_l^۲, E) = ۱$$

پس

$$max_i(d(x_l^۲, v_i)) = ۴$$

فاصله‌ی $x_l^۳ = C$ تا رئوس شبکه:

$$d(x_l^۳, E) = ۳$$
$$d(x_l^۳, C) = ۰$$
$$d(x_l^۳, B) = ۲$$
$$d(x_l^۳, A) = ۳$$
$$d(x_l^۳, D) = ۲$$

پس

$$max_i(d(x_l^۳, v_i)) = ۳$$

فاصله‌ی $x_l^۴ = x_{(A,B)}$ تا رئوس شبکه:

$$d(x_l^۴, A) = \frac{۱}{۲}$$
$$d(x_l^۴, B) = \frac{۷}{۲}$$
$$d(x_l^۴, D) = \frac{۳}{۲}$$
$$d(x_l^۴, C) = \frac{۷}{۲}$$
$$d(x_l^۴, E) = \frac{۵}{۲}$$

پس

$$max_i(d(x_l^۴, v_i)) = \frac{۷}{۲}$$

فاصله‌ی $x_l^۵ = x_{(D,C)}$ تا رئوس شبکه:

$$d(x_l^۵, B) = \frac{۵}{۲}$$

$$d(x_l^5, D) = \frac{3}{2}$$
$$d(x_l^5, C) = \frac{1}{2}$$
$$d(x_l^5, E) = \frac{5}{2}$$
$$d(x_l^5, A) = \frac{5}{2}$$

پس

$$max_i(d(x_l^5, v_i)) = \frac{5}{2}$$

بنابراین مرکز مطلق در شبکه‌ی فوق در نقطه‌ی $x^* = x_l^5$ (روی یال (D, C) و به فاصله‌ی $\frac{3}{2}$ از رأس D) با مقدار تابع هدف $min_i max_j d(x_l^j, v_i) = \frac{5}{2}$ قرار دارد.

۶.۳.۲ میانه‌ی مطلق و میانه‌ی مطلق شرطی

در مسأله‌ی میانه‌ی مطلق و میانه‌ی مطلق شرطی، سرویس‌دهنده‌ها می‌توانند روی هر نقطه‌ای از یال قرار بگیرند و نقاط تقاضا روی رئوس شبکه واقع می‌شوند. فرض کنید که v_i یك رأس، w_i وزن این نقطه‌ی تقاضا و x نقطه‌ای روی شبکه باشد. فاصله‌ی $d(v_i, x)$ را به صورت کوتاهترین فاصله بین x و v_i تعریف می‌کنیم. نقطه‌ی x^* روی شبکه یك میانه‌ی مطلق نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in N \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i.d(x^*, v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i.d(x, v_i) \tag{۲۷.۲}$$

فرض کنید $X_p = \{x_1, ..., x_p\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید از شبکه‌ی N باشد؛ به طوری که $x_1, ..., x_p$ می‌توانند روی هر نقطه‌ای از شبکه واقع شوند. با توجه به تعریف فاصله در فرمول (۲۴.۲)، مسأله‌ی p−میانه‌ی مطلق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall X_p \in N \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i.d(v_i, X_p^*) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i.d(v_i, X_p) \tag{۲۸.۲}$$

مجموعه‌ی X_p^* یك p−میانه‌ی مطلق نامیده می‌شود. بنابراین میانه‌ی مطلق عبارت است از نقطه‌ای از شبکه که فاصله‌ی کلی آن تا همه‌ی رئوس شبکه، کمترین مقدار باشد. حکیمی در [۴۱] نشان داده است که در یک گراف، همیشه یک رأس که میانه‌ی مطلق است؛ وجود دارد.

فرض کنید $Z_m = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ یك مجموعه شامل مکان m سرویس‌دهنده‌ی موجود در شبکه باشد؛ که از قبل در شبکه تعیین مکان شده‌اند. با توجه به تعریف فاصله در فرمول (۲۴.۲)، مسأله‌ی p-میانه‌ی مطلق شرطی به صورت زیر بیان می‌شود.
اگر برای هر X_p روی شبکه داشته باشیم:

$$F_3(X_p^*) = \sum_{i=1}^{n} w_i.min\{d(v_i, X_p^*), d(v_i, Z_m)\}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} w_i.min\{d(v_i, X_p), d(v_i, Z_m)\}$$

(۲۹.۲)

آنگاه مجموعه‌ی X_p^* یك p-میانه‌ی مطلق شرطی نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۳.۲. [۶۱]. *فرض کنیم که $z_1, z_2, ..., z_q$ مجموعه‌ای از سرویس‌دهنده‌ها باشند که در گراف تعیین مکان شده‌اند. همیشه رأسی که یک میانه‌ی مطلق شرطی است؛ وجود دارد.*

برهان. میانه‌ی مطلق شرطی، نقطه‌ای روی گراف است که مجموع فواصل کلی هر نقطه‌ی تقاضا تا نزدیکترین سرویس‌دهنده‌ی جدید یا موجود کمترین مقدار باشد. برای هر نقطه از یال y_i ، توابع فاصله‌ی نقطه-رأس از نوع نشان داده شده در شکل (۳) است که برحسب f محاسبه شده است. هر یک از این توابع، یک تابع مقعر از f است. مجموع توابع مقعر از f یک تابع مقعر از f است. بنابراین مجموع فاصله‌ی کلی، یک تابع مقعر از f است. واضح است که یک تابع مقعر، مقدار مینیمم‌اش را در یک نقطه‌ی رأسی (نقطه‌ی اکسترمم، نقطه‌ی انتهایی) به دست می‌آورد. بنابراین بهترین کاندیدا برای میانه‌ی مطلق شرطی روی یال y_i، به ازای یکی از مقادیر $f = 0$ یا $f = 1$ یعنی در یک رأس اتفاق می‌افتد. این موارد برای هر یال برقرار است. بنابراین فقط رئوس بعنوان کاندیداهایی برای میانه‌ی مطلق شرطی در نظر گرفته می‌شوند. □

۷.۳.۲ مرکز مطلق کلی و مرکز مطلق کلی شرطی

در مسأله‌ی مرکز مطلق کلی و مرکز مطلق کلی شرطی، سرویس‌دهنده‌ها و نقاط تقاضا می‌توانند روی هر نقطه‌ای از یال قرار بگیرند. نقطه‌ای روی شبکه که دورترین نقطه از آن، کمترین مقدار را داشته باشد؛ مرکز مطلق کلی نامیده می‌شود. شبکه‌ای با q یال را درنظر می‌گیریم. فرض کنید x_t نقطه‌ای روی شبکه‌ی N باشد. فاصله‌ی $d'^c(x_t, y_i)$ به صورت ماکسیمم فاصله‌ی نقطه‌ی x_t تا نقاط روی یال y_i تعریف می‌شود. نقطه‌ی x_t^* روی شبکه، یك مرکز مطلق کلی نامیده می‌شود

هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x_t \in N \qquad max_{1\leq i\leq q}\{d'^c(x_t^*, y_i)\} \leq max_{1\leq i\leq q}\{d'^c(x_t, y_i)\} \qquad (۳۰.۲)$$

در نامعادله‌ی بالا، مقدار $d'^c(x_t, y_i)$ با استفاده از فرمول (۵.۲) محاسبه می‌شود. هنگامی که معادله‌ی (۵.۲) به عنوان یك تابع از f رسم شود؛ همان فرم تابعی در شکل (۳) به دست می‌آید. بنابراین مسأله‌ی تعیین مکان بهترین کاندیدا برای مرکز مطلق کلی روی یال y_i، مشابه با تعیین مکان یك مرکز مطلق شرطی است؛ یعنی مسأله‌ی یافتن یك نقطه‌ی مینیمم از پوش بالایی از یك مجموعه از توابع، که در شکل (۳) نشان داده شده است. با این تفاوت که اکنون مجموعه تشکیل شده از یك تابع برای هر یال، ولی در مورد قبلی (مرکز مطلق شرطی) یك تابع برای هر رأس وجود داشت. وقتی که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی شبکه وجود داشته باشند؛ مسأله‌ی تعیین مکان یك مرکز مطلق کلی شرطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تعیین مکان یك مرکز مطلق کلی شرطی، مشابه تعیین مکان یك مرکز مطلق کلی هست و باید یك نقطه‌ی مینیمم از پوش بالایی یك مجموعه از توابع از نوع نشان داده شده، در شکل (۳) را به دست آوریم؛ با این تفاوت که فاصله‌ها با استفاده از معادله‌ی (۶.۲) محاسبه می‌شوند.

فرض کنید $Z_{tm} = \{z_{t1}, ..., z_{tm}\}$ یك مجموعه شامل مکان m سرویس‌دهنده‌ی موجود در شبکه‌ی N باشد. به طوری که $z_{t1}, z_{t2}, ..., z_{tm}$ می‌توانند روی هر نقطه‌ای از شبکه واقع شده باشند، و $X_{tp} = \{x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tp}\}$ یك مجموعه شامل مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید در شبکه باشد که $x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tp}$ می‌توانند روی هر نقطه‌ای از شبکه واقع شوند. تعریف می‌کنیم:

$$\forall i = 1, ..., q \qquad d'^c(X_{tp}, y_i) = min\{d'^c(x_{t1}, y_i), d'^c(x_{t2}, y_i), ..., d'^c(x_{tp}, y_i)\} \qquad (۳۱.۲)$$

مجموعه‌ی X_{tp}^* یك p−مرکز مطلق کلی نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

$$\forall X_{tp} \in N \qquad max_{1\leq i\leq q}\{d'^c(X_{tp}^*, y_i)\} \leq max_{1\leq i\leq q}\{d'^c(X_{tp}, y_i)\} \qquad (۳۲.۲)$$

مسأله‌ی p−مرکز مطلق کلی شرطی به صورت زیر بیان می‌شود.

اگر برای هر X_{tp} روی شبکه داشته باشیم:

$$\begin{aligned} G_4(X_p^*) &= max_{1\leq i\leq q}\{min\{d'^c(X_{tp}^*, y_i), d'^c(Z_{tm}, y_i)\}\} \\ &\leq max_{1\leq i\leq q}\{min\{d'^c(X_{tp}, y_i), d'^c(Z_{tm}, y_i)\}\} \end{aligned} \qquad (۳۳.۲)$$

آنگاه مجموعه‌ی X_{tp}^* یك p−مرکز مطلق کلی شرطی نامیده می‌شود.

۸.۳.۲ میانه‌ی مطلق کلی و میانه‌ی مطلق کلی شرطی

میانه‌ی مطلق کلی، نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌های این نقطه تا هر یال، کمترین مقدار را داشته باشد. بنابراین نقطه‌ی x_t^* یك میانه‌ی مطلق کلی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x_t \in N$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=۱}^{q} d'^c(x_t^*, y_i) \leq \sum_{i=۱}^{q} d'^c(x_t, y_i) \qquad (۳۴.۲)$$

مجموعه‌ی X_{tp}^* یك p−میانه‌ی مطلق کلی نامیده می‌شود اگر برای هر X_{tp} روی شبکه داشته باشیم:

$$\sum_{i=۱}^{q} d'^c(X_{tp}^*, y_i) \leq \sum_{i=۱}^{q} d'^c(X_{tp}, y_i) \qquad (۳۵.۲)$$

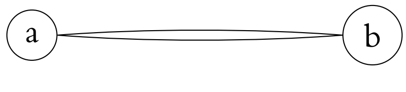
وقتی که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل روی شبکه تعیین مکان شده باشند؛ مسأله‌ی میانه‌ی مطلق کلی شرطی مطرح می‌شود. لذا مجموعه‌ی X_{tp}^* یك p−میانه‌ی مطلق کلی شرطی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $X_{tp} \in N$ داشته باشیم:

$$F_۴(X_p^*) = \sum_{i=۱}^{q} min\{d'^c(X_{tp}^*, y_i), d'^c(Z_{tm}, y_i)\} \leq \sum_{i=۱}^{q} min\{d'^c(X_{tp}, y_i), d'^c(Z_{tm}, y_i)\} \qquad (۳۶.۲)$$

برای پیدا کردن میانه‌ی مطلق کلی، علاوه بر رئوس باید نقاط داخلی یال‌ها هم در نظر گرفته شود؛ به دلیل اینکه فاصله f− نقطه روی یال y_i تا دورترین نقطه روی یال y_l یك تابع مقعر است به جز هنگامی که $i = l$. وقتی که این تابع فاصله‌ی نقطه-یال مقعر نباشد هیچ تضمینی وجود ندارد که مجموع توابع فاصله‌ی نقطه-یال مقعر باشد. بنابراین نمی‌توان فرض کرد که مقدار مینیمم‌اش هنگامی به دست بیاید که f صفر یا یك است (یعنی رئوس شبکه).

برای پیدا کردن میانه‌ی مطلق کلی شرطی، نیز علاوه بر رئوس باید نقاط داخلی یال‌ها هم در نظر گرفته شوند.

مثال ۴.۳.۲. گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱۰)

که هر دو یال‌ها طول ۱ واحد دارند. یال بالائی را با $y_۱$ و یال پائینی را با $y_۲$ نشان می‌دهیم. یك سرویس‌دهنده‌ی موجود که آن را با $z_۱$ نشان می‌دهیم؛ در نقطه‌ی $f = \frac{۱}{۲}$ (یعنی نقطه‌ی وسط) از یال پائینی تعیین مکان شده است. میانه‌ی مطلق کلی شرطی را که با $x_۱$ نشان می‌دهیم روی گراف تعیین مکان می‌کنیم.

اگر رأس a به عنوان یك میانه‌ی مطلق کلی شرطی انتخاب شود؛ فاصله‌ی کلی به دو یال، $\frac{۵}{۴}$ واحد خواهد بود. ماکسیمم فاصله‌ی رأس a تا یال $y_۱$ برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

$$min\{d'^c(a,y_۱),d'^c(z_۱,y_۱)\}+min\{d'^c(a,y_۲),d'^c(z_۱,y_۲)\}$$

$$=min\{\frac{۳}{۴},۱\}+min\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\}=\frac{۵}{۴}$$

اگر رأس b به عنوان یك میانه‌ی مطلق کلی شرطی انتخاب شود؛ فاصله‌ی کلی به دو یال، $\frac{۵}{۴}$ واحد خواهد بود. ماکسیمم فاصله از رأس b به یال $y_۲$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

$$min\{d'^c(b,y_۱),d'^c(z_۱,y_۱)\}+min\{d'^c(b,y_۲),d'^c(z_۱,y_۲)\}$$

$$=min\{\frac{۳}{۴},۱\}+min\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\}=\frac{۵}{۴}$$

اگر نقطه‌ی $x_۱ = \frac{۱}{۲}$ در یال بالائی به عنوان میانه‌ی مطلق کلی شرطی در نظر گرفته شود. داریم:

$$min\{d'^c(x_۱,y_۱),d'^c(z_۱,y_۱)\}+min\{d'^c(x_۱,y_۲),d'^c(z_۱,y_۲)\}$$

$$=min\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\}+min\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\}=۱$$

بنابراین چون به ازای هر $x \in N$ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{۲} min\{d'^c(x_۱,y_i),d'^c(z_۱,y_i)\} \leq \sum_{i=۱}^{۲} min\{d'^c(x,y_i),d'^c(z_۱,y_i)\}$$

لذا نقطه‌ی $x_۱ = \frac{۱}{۲}$ روی یال بالائی به عنوان میانه‌ی مطلق کلی شرطی انتخاب می‌شود.

فصل ۳

مکانیابی p−سرویس‌دهنده‌ی شرطی

۱.۳ مسأله‌ی مکانیابی p−میانه‌ی شرطی روی شبکه‌ها

در این بخش، مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی را روی شبکه‌ها بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک شبکه مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن نامنفی w_i است. در مسأله‌ی p−میانه هدف پیدا کردن یک مجموعه شامل p رأس شبکه به عنوان سرویس‌دهنده است به گونه‌ای که مجموع مینیمم فاصله‌ی وزندار سایر نقاط تا این مجموعه، کمترین مقدار شود. در مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده از قبل موجود است و باید p تای دیگر به آنها اضافه شود. برمن[۱] و همکاران [۵] مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی را بررسی کرده‌اند.

در این بخش، الگوریتم‌های ارائه شده توسط برمن و سیمچی[۲] [۵] و برمن و درزنر [۳]برای حل مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی مورد بررسی قرار می‌گیرند، و نتایج آنها (از جمله زمان حل دو روش در پیدا کردن نقاط بهینه) با هم مقایسه می‌گردد. همچنین به مقایسه‌ی دو الگوریتم در پیدا کردن نقاط بهینه روی شبکه می‌پردازیم. برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه یک راه حل با زمان کمتر ارائه می‌شود. بسلی[۳] [۲]، زمان حل دو الگوریتم ارائه شده توسط برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] را با هم مقایسه کرد؛ برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، به [۲] مراجعه کنید. از جمله کاربردهای مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی، تعیین محل p انبار در یک منطقه است به گونه‌ای که تعدادی از انبارها، از قبل در منطقه وجود داشته باشند.

[۱] Berman

[۲] Simchi-Levi

[۳] Beasley

۱.۱.۳ تعریف مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز

فرض کنید یک شبکه مانند $G=(V,E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن نامنفی w_i است. V مجموعه‌ی نقاط تقاضا (رئوس) است که $|V|=n$ و E مجموعه‌ی یال‌ها است. d_{xy} کوتاهترین فاصله‌ی بین هر $x,y \in G$ و مجموعه‌ی Q که $|Q|=q$ شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند. سرویس‌دهنده‌های جدید، روی رئوس شبکه واقع می‌شوند.

در مسأله‌ی p$-$میانه‌ی شرطی، هدف مینیمم کردن تابع زیر است:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} w_i \min\{d(v_i,x_j)_{1\le j\le p}, d(v_i,y_j)_{1\le j\le q}\} \qquad (۱.۳)$$

که x_j مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید j ام است که در آن $j=1,...,p$ می‌باشد؛ و y_j مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود j ام است که در آن $j=1,...,q$ می‌باشد. در فرمول (۱.۳)، نماد $d(v_i,x_j)_{1\le j\le p}$ کوتاهترین فاصله‌ی رأس i ام تا p سرویس‌دهنده‌ی جدید است و نماد $d(v_i,y_j)_{1\le j\le q}$ ، کوتاهترین فاصله‌ی رأس i ام تا q سرویس‌دهنده‌ی موجود است.

در دو الگوریتمی که برای حل مسأله‌ی p$-$میانه‌ی شرطی توسط برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] ارائه شده است؛ فرض بر این است که مکان سرویس‌دهنده‌های جدید و موجود روی رئوس شبکه قرار می‌گیرند.

۲.۱.۳ الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی

در ابتدا الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵] را برای حل مسأله‌ی p$-$میانه‌ی شرطی روی شبکه، توضیح می‌دهیم. در این الگوریتم، از ماتریس فاصله برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه استفاده شده است. فرض کنیم که D یک ماتریس فاصله باشد که سطرهای ماتریس D متناظر با نقاط تقاضا (رئوس) است و ستون‌های ماتریس D متناظر با رئوسی است که سرویس‌دهنده‌های جدید به عنوان مکان‌های بالقوه می‌توانند در آنها واقع شوند (مکان‌های بالقوه شامل رئوسی از شبکه است که هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل روی آنها وجود نداشته باشد). برای مسأله‌ی مکانیابی p$-$میانه‌ی غیرشرطی، ستون‌های ماتریس D متناظر با مجموعه‌ی نقاط تقاضا (رئوس) است.

ایده‌ی الگوریتم برمن و سیمچی [۵]، ایجاد یک ستون جدید در ماتریس D است. که این ستون، معرف همه‌ی سرویس‌دهنده‌های موجود است (سرویس‌دهنده‌هایی که از قبل در شبکه وجود دارند). ستون جدید را با $a_\circ$ نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه هر نقطه‌ی تقاضا، به وسیله‌ی نزدیکترین سرویس‌دهنده به آن سرویس‌دهی می‌شود؛ لذا فاصله‌ی بین هر نقطه‌ی تقاضا و ستون جدید، مینیمم فاصله‌ی آن نقطه‌ی تقاضا به سرویس‌دهنده‌های موجود است. بنابراین با افزودن

ستون جدید به ماتریس D ، نیاز داریم سطری جدید که معرف یک نقطه‌ی تقاضای فرضی است به ماتریس D اضافه کنیم. نقطه‌ی تقاضای فرضی $v_{\cdot}$ با وزن مثبت دلخواه است. ماتریس حاصل را که با اضافه کردن سطر و ستون جدید به ماتریس D به دست می‌آید با $\hat{D}$ نشان می‌دهیم.

درایه‌های ماتریس $\hat{D}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

برای هر نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام و ستون $a_{\cdot}$ داریم:

$$d(i, a_{\cdot}) = \min_{k \in Q}\{d_{ik}\} \qquad (۲.۳)$$

که $i = ۱, ..., n$.

و برای سطر $v_{\cdot}$ و ستون $a_{\cdot}$ قرار می‌دهیم:

$$d(v_{\cdot}, a_{\cdot}) = ۰$$

و برای هر مکان بالقوه (ستون) j ام و سطر $v_{\cdot}$ قرار می‌دهیم:

$$d(v_{\cdot}, j) = M \qquad (۳.۳)$$

که M یک عدد بزرگ است.

در ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{D}$، یکی از ستون‌ها مربوط به $a_{\cdot}$ است؛ چون $a_{\cdot}$ مکان سرویس‌دهنده‌هایی است، که از قبل روی شبکه وجود داشتند.

در این الگوریتم، حل مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)–میانه‌ی غیرشرطی می‌شود.

لذا برای یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید، باید مسأله‌ی (p+۱)–میانه‌ی غیرشرطی حل شود. یعنی قصد داریم مکان (p+۱) سرویس‌دهنده را روی رئوس شبکه به گونه‌ای پیدا کنیم که تابع هدف (p+۱)–میانه‌ی غیرشرطی مینیمم شود.

لذا ماتریس کوتاهترین فاصله را برای حل مسأله‌ی (p+۱)–میانه‌ی غیرشرطی تشکیل می‌دهیم. سطرهای ماتریس، متناظر با نقاط تقاضای (رئوس) شبکه‌اند و هر ستون ماتریس متناظر با (p+۱)، مکان بالقوه‌ای است که سرویس‌دهنده‌های جدید می‌توانند، در آنها واقع شوند (یکی از مکان‌ها در هر ستون، $a_{\cdot}$ است). فرض کنیم که مجموعه‌ی مکان‌های بالقوه در ستون j ام را با k_j نشان دهیم. بنابراین مجموعه‌ی k_j در ستون j ام، شامل رئوسی از شبکه است که هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل روی آنها واقع نشده باشند. درایه‌های ماتریس فوق را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\min\{d(v_i, k_j), d(v_i, a_{\cdot})\} \qquad (۴.۳)$$

که در آن $d(v_i, a_{\cdot})$ کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام تا سرویس‌دهنده‌های موجود در شبکه است و $d(v_i, k_j)$ کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام تا مکان‌های بالقوه‌ی ستون j ام است.

بنابراین درایه‌هایی از ماتریس که سطرهای آن متناظر با رئوسی هستند که سرویس‌دهنده‌های موجود روی آن واقع‌اند صفر می‌شود. لذا برای کاهش عملیات محاسباتی و بهینه‌سازی در زمان حل مسأله، می‌توان ماتریس $\hat{D}$ را بهبود بخشید. به این صورت‌که سطرهای متناظر با رئوسی را که سرویس‌دهنده‌های موجود در آن واقع‌اند و همچنین ستون‌های متناظر با رئوسی را که شامل سرویس‌دهنده‌های موجود است، حذف می‌کنیم.

۳.۱.۳ الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر

در این بخش الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر [۳] را برای حل مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی روی شبکه، توضیح می‌دهیم. در این الگوریتم نیز از ماتریس فاصله برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه استفاده شده است.

فرض کنیم D یک ماتریس فاصله باشد. سطرهای ماتریس D متناظر با نقاط تقاضا (رئوس) است و ستون‌های ماتریس D متناظر با رئوسی است که سرویس‌دهنده‌های جدید به عنوان مکان‌های بالقوه می‌توانند در آنها واقع شوند.

ایده‌ی الگوریتم برمن و درزنر، حذف سطرها و ستون‌هایی از ماتریس D است؛ به این مفهوم که ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی اصلاح شده به صورت زیر به دست می‌آید:

در ایده‌ی پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر [۳]، نقاط تقاضایی (رئوسی) که سرویس‌دهنده‌های موجود در آن‌ها واقع‌اند و ستونی که معرف همه‌ی سرویس‌دهنده‌های موجود است، حذف می‌شوند. در واقع ایده‌ی ارائه شده توسط برمن و درزنر آسانتر از ایده‌ی ارائه شده توسط برمن و سیمچی [۵] است. در این الگوریتم به جای ایجاد یک ستون جدید برای یک سرویس‌دهنده‌ی فرضی، فقط ماتریس فاصله‌ی D را اصلاح می‌کنیم. ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی اصلاح شده را در این الگوریتم با $\hat{\hat{D}}$ نشان می‌دهیم. درایه‌های ماتریس $\hat{\hat{D}}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\hat{D}}_{ij} = \min\{d_{ij}, \min_{k\in Q}\{d_{ik}\}\} \qquad (۵.۳)$$

$$\forall i \in V, j \in V$$

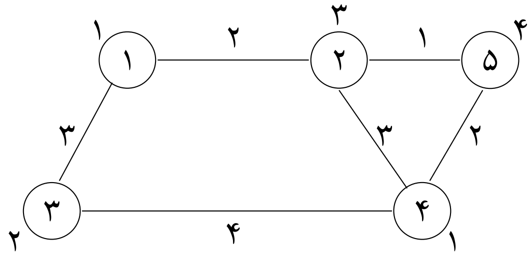
که d_{ij} کوتاهترین فاصله از نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام به ستون (مکان بالقوه) j ام است، و مجموعه‌ی Q شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند.

ماتریس $\hat{\hat{D}}$ لزوماً متقارن نیست؛ حتی زمانی که ماتریس D متقارن باشد. در این الگوریتم با استفاده از ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$ ، حل مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p−میانه‌ی غیرشرطی می‌شود.

اندازه‌ی ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$ ، برای مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی وقتی که $y_i \notin V$ که $i = ۱, ..., q$ (y_i مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود i ام است) برابر با $n \times n$ است و اندازه‌ی ماتریس

کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{D}$ ، برای مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی وقتی که $y_i \in V$ که $i = 1, ..., q$ برابر با $(n-q) \times (n-q)$ است.

مثال ۳.۱.۱. شبکه‌ی زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱۱)

شبکه‌ای با ۵ نقطه‌ی تقاضا است که وزن رئوس و فاصله‌ی بین دو رأس مجاور، روی آنها نوشته شده است. فرض کنید $Q = \{2, 3\}$ (سرویس‌دهنده‌های موجود در شبکه در رأس‌های ۲ و ۳ واقع شده‌اند). هدف، حل مسأله‌ی ۱–میانه‌ی شرطی است.

(۱) مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۱–میانه‌ی شرطی با استفاده از فرمول:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{5} w_i \min \{d(v_i, x_j)_{1 \leq j \leq 1}, d(v_i, y_j)_{1 \leq j \leq 2}\}$$

قرار می‌دهیم $y_1 = 2$ و $y_2 = 3$ و مسأله را حل می‌کنیم.

برای گره $x_1 = v_1$ داریم:

$d(v_1, x_1) = 0$ ، $d(v_1, y_1) = 2$ ، $d(v_1, y_2) = 3$

$d(v_2, x_1) = 2$ ، $d(v_2, y_1) = 0$ ، $d(v_2, y_2) = 5$

$d(v_3, x_1) = 3$ ، $d(v_3, y_1) = 5$ ، $d(v_3, y_2) = 0$

$d(v_4, x_1) = 5$ ، $d(v_4, y_1) = 3$ ، $d(v_4, y_2) = 4$

$d(v_5, x_1) = 3$ ، $d(v_5, y_1) = 1$ ، $d(v_5, y_2) = 6$

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره $x_1 = v_1$ واقع شود:

$$f(1) = w_1 \min\{d(v_1, x_1), d(v_1, y_1), d(v_1, y_2)\}$$

$$+w_2 \min\{d(v_2, x_1), d(v_2, y_1), d(v_2, y_2)\}$$

$$+w_3 \min\{d(v_3, x_1), d(v_3, y_1), d(v_3, y_2)\}$$

$$+w_۴ \min\{d(v_۴,x_۱),d(v_۴,y_۱),d(v_۴,y_۲)\}$$

$$+w_۵ \min\{d(v_۵,x_۱),d(v_۵,y_۱),d(v_۵,y_۲)\}$$

$$= ۱\times ۰ + ۳\times ۰ + ۲\times ۰ + ۱\times ۳ + ۴\times ۱ = ۷$$

برای گره $x_۴ = v_۴$ داریم:

$d(v_۱,x_۴)=۵$ ، $d(v_۱,y_۱)=۲$ ، $d(v_۱,y_۲)=۳$

$d(v_۲,x_۴)=۳$ ، $d(v_۲,y_۱)=۰$ ، $d(v_۲,y_۲)=۵$

$d(v_۳,x_۴)=۴$ ، $d(v_۳,y_۱)=۵$ ، $d(v_۳,y_۲)=۰$

$d(v_۴,x_۴)=۰$ ، $d(v_۴,y_۱)=۳$ ، $d(v_۴,y_۲)=۴$

$d(v_۵,x_۴)=۲$ ، $d(v_۵,y_۱)=۱$ ، $d(v_۵,y_۲)=۶$

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره $x_۴ = v_۴$ واقع شود:

$$f(۴) = w_۱ \min\{d(v_۱,x_۴),d(v_۱,y_۱),d(v_۱,y_۲)\}$$

$$+w_۲ \min\{d(v_۲,x_۴),d(v_۲,y_۱),d(v_۲,y_۲)\}$$

$$+w_۳ \min\{d(v_۳,x_۴),d(v_۳,y_۱),d(v_۳,y_۲)\}$$

$$+w_۴ \min\{d(v_۴,x_۴),d(v_۴,y_۱),d(v_۴,y_۲)\}$$

$$+w_۵ \min\{d(v_۵,x_۴),d(v_۵,y_۱),d(v_۵,y_۲)\}$$

$$= ۱\times ۲ + ۳\times ۰ + ۲\times ۰ + ۱\times ۰ + ۴\times ۱ = ۶$$

برای گره $x_۵ = v_۵$ داریم:

$d(v_۱,x_۵)=۳$ ، $d(v_۱,y_۱)=۲$ ، $d(v_۱,y_۲)=۳$

$d(v_۲,x_۵)=۱$ ، $d(v_۲,y_۱)=۰$ ، $d(v_۲,y_۲)=۵$

$d(v_۳,x_۵)=۶$ ، $d(v_۳,y_۱)=۵$ ، $d(v_۳,y_۲)=۰$

$d(v_۴,x_۵)=۲$ ، $d(v_۴,y_۱)=۳$ ، $d(v_۴,y_۲)=۴$

$d(v_۵,x_۵)=۰$ ، $d(v_۵,y_۱)=۱$ ، $d(v_۵,y_۲)=۶$

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره $x_۵ = v_۵$ واقع شود:

$$f(۵) = w_۱ \min\{d(v_۱,x_۵),d(v_۱,y_۱),d(v_۱,y_۲)\}$$

$$+w_۲ \min\{d(v_۲,x_۵),d(v_۲,y_۱),d(v_۲,y_۲)\}$$

$$+w_۳ \min\{d(v_۳,x_۵),d(v_۳,y_۱),d(v_۳,y_۲)\}$$

$$+w_۴ \min\{d(v_۴,x_۵),d(v_۴,y_۱),d(v_۴,y_۲)\}$$

$$+w_۵ \min\{d(v_۵, x_۵), d(v_۵, y_۱), d(v_۵, y_۲)\}$$

$$= ۱ \times ۲ + ۳ \times ۰ + ۲ \times ۰ + ۱ \times ۲ + ۴ \times ۰ = ۴$$

قصد داشتیم، مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ای انتخاب کنیم که مقدار تابع هدف را مینیمم کند؛ لذا گره ۵ با مقدار تابع هدف ۴، مکان بهینه‌ای است که باید انتخاب کنیم. بنابراین با استفاده از فرمول، مکان بهینه برای قرار دادن سرویس‌دهنده‌ی جدید گره ۵ است و سرویس‌دهنده‌ها در گره‌های ۲ و ۳ و ۵ واقع می‌شوند.

(۲) مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۱-میانه‌ی شرطی با استفاده از الگوریتم برمن و سیمچی:

در ابتدا، ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{D}$ را ایجاد می‌کنیم.

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه			
	۱	۴	۵	$a.$
۱	۰	۵	۳	۲
۴	۵	۰	۲	۳
۵	۳	۲	۰	۱
$V.$	M	M	M	۰

جدول (۱): ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{D}$

ستون $a.$ ، معرف Q سرویس‌دهنده موجود است.

با استفاده از این الگوریتم، حل مسأله‌ی ۱-میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی می‌شود. بنابراین قصد داریم، مکان ۲ سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ها (رأس‌ها) پیدا کنیم؛ به گونه‌ای که هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل روی رأس‌های شبکه قرار نداشته باشد و تابع هدف ۲-میانه‌ی غیرشرطی مینیمم شود.

اکنون ماتریس کوتاهترین فاصله را به شکل زیر ایجاد می‌کنیم.

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه				
	$۱, a.$	$۲, a.$	$۳, a.$	$۴, a.$	$۵, a.$
۱	۰	۲	۲	۲	۲
۴	۳	۳	۳	۰	۲
۵	۱	۱	۱	۱	۰
$V.$	۰	۰	۰	۰	۰

جدول (۲): ماتریس کوتاهترین فاصله

با توجه به ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی بالا، مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\{۱, a.\}$ واقع شده باشند. مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.

$d(v., a.) = ۰$ ، $d(v., ۱) = M$

$d(۱, a.) = \min\{d(۱, ۲), d(۱, ۳)\}$

$d(۴, a.) = \min\{d(۴, ۲), d(۴, ۳)\}$

$d(۵, a.) = \min\{d(۵, ۲), d(۵, ۳)\}$

مقدار تابع هدف:

$$w_۱ \min\{d(۱, ۱), d(۱, a.)\} + w_۴ \min\{d(۴, ۱), d(۴, a.)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵, ۱), d(۵, a.)\} + w(v.) \min\{d(v., ۱), d(v., a.)\}$$
$$= ۱ \times ۰ + ۱ \times ۳ + ۴ \times ۱ + w(v.) \times ۰$$
$$= ۷$$

حالت دوم: فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\{۲, a.\}$ واقع شده باشند. مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.

$d(v., a.) = ۰$ ، $d(v., ۲) = M$

مقدار تابع هدف:

$$w_۱ \min\{d(۱, ۲), d(۱, a.)\} + w_۴ \min\{d(۴, ۲), d(۴, a.)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵, ۲), d(۵, a.)\} + w(v.) \min\{d(v., ۲), d(v., a.)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۳ + ۴ \times ۱ + w(v.) \times ۰$$
$$= ۹$$

حالت سوم: فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\{۳, a.\}$ واقع شده باشند. مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.
$d(v., a.) = ۰$ ، $d(v., ۳) = M$
مقدار تابع هدف:

$$w_۱ \min\{d(۱,۳), d(۱,a.)\} + w_۴ \min\{d(۴,۳), d(۴,a.)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵,۳), d(۵,a.)\} + w(v.) \min\{d(v.,۳), d(v.,a.)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۳ + ۴ \times ۱ + w(v.) \times ۰$$
$$= ۹$$

حالت چهارم: فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\{۴, a.\}$ واقع شده باشند. مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.
$d(v., a.) = ۰$ ، $d(v., ۴) = M$
مقدار تابع هدف:

$$w_۱ \min\{d(۱,۴), d(۱,a.)\} + w_۴ \min\{d(۴,۴), d(۴,a.)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵,۴), d(۵,a.)\} + w(v.) \min\{d(v.,۴), d(v.,a.)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۰ + ۴ \times ۱ + w(v.) \times ۰$$
$$= ۶$$

حالت پنجم: فرض کنیم که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\{۵, a.\}$ واقع شده باشند. مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۲-میانه‌ی غیرشرطی را محاسبه می‌کنیم.
$d(v., a.) = ۰$ ، $d(v., ۵) = M$
مقدار تابع هدف:

$$w_۱ \min\{d(۱,۵), d(۱,a.)\} + w_۴ \min\{d(۴,۵), d(۴,a.)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵,۵), d(۵,a.)\} + w(v.) \min\{d(v.,۵), d(v.,a.)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۲ + ۴ \times ۰ + w(v.) \times ۰$$
$$= ۴$$

لذا مکان بهینه برای سرویس‌دهنده‌های جدید روی گره‌های (رأس‌های) $\{۵, a.\}$ انتخاب می‌شوند. بنابراین سرویس‌دهنده‌ها روی رأس‌های ۲ و ۳ و ۵ قرار می‌گیرند.

(۳) مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۱–میانه‌ی شرطی با استفاده از الگوریتم برمن و درزنر:

در ابتدا ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$ را تشکیل می‌دهیم.

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه		
	۱	۴	۵
۱	۰	۲	۲
۴	۳	۰	۲
۵	۱	۱	۰

جدول (۳): ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$

در ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$ ، گره‌های (رأس‌های) ۲ و ۳ که مربوط به سرویس‌دهنده‌های موجود در شبکه‌اند؛ حذف می‌شوند. در این الگوریتم، حل مسأله‌ی ۱–میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی ۱–میانه‌ی غیرشرطی می‌شود. مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ای (رأسی) انتخاب خواهد شد که تابع هدف مسأله‌ی ۱–میانه‌ی غیرشرطی را مینیمم کند. اکنون با توجه به ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی $\hat{\hat{D}}$، به محاسبه‌ی مقدار تابع هدف می‌پردازیم.

حالت اول: فرض کنیم که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی (رأس) ۱، انتخاب کنیم. بنابراین داریم:

$d(۱,۱) = ۰$ ، $d(۱,۲) = ۲$ ، $d(۱,۳) = ۳$

$d(۴,۱) = ۵$ ، $d(۴,۲) = ۳$ ، $d(۴,۳) = ۴$

$d(۵,۱) = ۳$ ، $d(۵,۲) = ۱$ ، $d(۵,۳) = ۶$

مقدار تابع هدف، در حالتی که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی ۱ انتخاب کنیم:

$$w_۱ \min\{d(۱,۱), d(۱,۲), d(۱,۳)\} + w_۴ \min\{d(۴,۱), d(۴,۲), d(۴,۳)\}$$

$$+ w_۵ \min\{d(۵,۱), d(۵,۲), d(۵,۳)\}$$

$$= ۱ \times ۰ + ۱ \times ۳ + ۴ \times ۱$$

$$= ۷$$

حالت دوم: فرض کنیم که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی (رأس) ۴ ، انتخاب کنیم. بنابراین داریم:

$d(۱,۴) = ۵$ ، $d(۱,۲) = ۲$ ، $d(۱,۳) = ۳$

$d(۴,۴) = ۰$ ، $d(۴,۲) = ۳$ ، $d(۴,۳) = ۴$

$d(۵,۳) = ۶$ ، $d(۵,۲) = ۱$ ، $d(۵,۴) = ۲$
مقدار تابع هدف، در حالتی که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی ۴ انتخاب کنیم:

$$w_۱ \min\{d(۱,۴), d(۱,۲), d(۱,۳)\} + w_۴ \min\{d(۴,۴), d(۴,۲), d(۴,۳)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵,۴), d(۵,۲), d(۵,۳)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۰ + ۴ \times ۱$$
$$= ۶$$

حالت سوم: فرض کنیم که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی (رأس) ۵ ، انتخاب کنیم.
بنابراین داریم:

$d(۱,۳) = ۳$ ، $d(۱,۲) = ۲$ ، $d(۱,۵) = ۳$
$d(۴,۳) = ۴$ ، $d(۴,۲) = ۳$ ، $d(۴,۵) = ۲$
$d(۵,۳) = ۶$ ، $d(۵,۲) = ۱$ ، $d(۵,۵) = ۰$

مقدار تابع هدف، در حالتی که مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ی ۵ انتخاب کنیم:

$$w_۱ \min\{d(۱,۵), d(۱,۲), d(۱,۳)\} + w_۴ \min\{d(۴,۵), d(۴,۲), d(۴,۳)\}$$
$$+w_۵ \min\{d(۵,۵), d(۵,۲), d(۵,۳)\}$$
$$= ۱ \times ۲ + ۱ \times ۲ + ۴ \times ۰$$
$$= ۴$$

مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی گره‌ای (رأسی) انتخاب می‌کنیم که مقدار تابع هدف را مینیمم می‌کند. لذا گره‌ی ۵ ، با مقدار تابع هدف ۴ ، مکان بهینه‌ای است که سرویس‌دهنده‌ی جدید روی آن قرار می‌گیرد.
همانطور که ملاحظه شد، جواب مسأله در هر ۳ روش یکسان است؛ و مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی گره‌های ۲ و ۳ و ۵ قرار می‌گیرد.

۴.۱.۳ نتایج محاسباتی

در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی، حل مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)–میانه‌ی غیرشرطی شد. در حالی که در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر، حل مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p–میانه‌ی غیرشرطی شد.

جواب مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی با استفاده از دو الگوریتم فوق، در یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها یکسان است. در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵]، تعداد محاسبات نسبت به الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر [۳] بیشتر است؛ لذا زمان حل،

برای یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها با الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵] طولانی‌تر است.

بنابراین الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر، برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رأس‌های شبکه کاراتر است و با استفاده از الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر [۳]، برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رأس‌های شبکه به زمان کمتری نیاز داریم.

۲.۳ مسأله‌ی مکانیابی p−مرکز شرطی روی شبکه

در این بخش، مسأله‌ی p−مرکز شرطی را روی شبکه‌ها بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک شبکه مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن نامنفی w_i است. در مسأله‌ی p−مرکز هدف پیدا کردن یک مجموعه شامل p مرکز محلی به عنوان سرویس‌دهنده است به گونه‌ای که ماکسیمم فاصله‌ی وزندار نقاط تقاضا تا این مجموعه، کمترین مقدار شود. در مسأله‌ی p−مرکز شرطی فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده از قبل موجود است و باید p تای دیگر به آنها اضافه شود.

در این بخش، الگوریتم‌های ارائه شده توسط برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] برای حل مسأله‌ی p−مرکز شرطی مورد بررسی قرار می‌گیرند؛ و نتایج آنها (از جمله زمان حل دو روش در پیدا کردن نقاط بهینه) با هم مقایسه می‌گردد. همچنین به مقایسه‌ی دو الگوریتم در پیدا کردن نقاط بهینه روی شبکه می‌پردازیم.

۱.۲.۳ تعریف مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز

فرض کنید یک شبکه مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن نامنفی w_i است. V مجموعه‌ای از نقاط تقاضا (رئوس) است که $|V| = n$ است و E مجموعه‌ای از یال‌ها است. d_{xy} کوتاهترین فاصله‌ی بین هر $x, y \in G$ است؛ و مجموعه‌ی Q که $|Q| = q$ شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند. در مسأله‌ی p−مرکز شرطی، هدف مینیمم کردن تابع زیر است:

$$G(X) = w_i \max\{d(v_i, x_j)_{1 \leq j \leq p}, d(v_i, y_j)_{1 \leq j \leq q}\} \qquad (۶.۳)$$

برای هر $i = 1, ..., n$.

که x_j مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید j ام است که در آن $j = 1, ..., p$ می‌باشد؛ و y_j مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود j ام است که در آن $j = 1, ..., q$ می‌باشد. در فرمول (۶.۳)،

نماد $d(v_i, x_j)_{1\leq j\leq p}$ کوتاهترین فاصله‌ی رأس i ام تا p سرویس‌دهنده‌ی جدید است و نماد $d(v_i, y_j)_{1\leq j\leq q}$ ، کوتاهترین فاصله‌ی رأس i ام تا q سرویس‌دهنده‌ی موجود است.

واژه‌ی سرویس‌دهنده‌ی موجود، به مفهوم سرویس‌دهنده‌ای است که از قبل در شبکه وجود دارد؛ و سرویس‌دهنده‌ی جدید، به مفهوم سرویس‌دهنده‌ای است که ما قصد داریم مکان بهینه‌ی آن را در شبکه پیدا کنیم. در حل مسأله‌ی p−مرکز شرطی با دو الگوریتمی که توسط برمن و سیمچی [۵]، برمن و درزنر [۳] ارائه شده است؛ فرض بر این است که مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مراکز محلی قرار می‌گیرند و لزومی ندارد که مکان سرویس‌دهنده‌هایی که از قبل در شبکه وجود دارند، روی مراکز محلی در شبکه قرار داشته باشند. سرویس‌دهنده‌هایی که از قبل روی شبکه‌اند، می‌توانند در هر نقطه‌ای از شبکه واقع شده باشند. در مسأله‌ی p−مرکز شرطی، سرویس‌دهنده‌های موجود و جدید روی مراکز محلی واقع می‌شوند. مجموعه‌ی مراکز محلی را با C نشان می‌دهیم.

۲.۲.۳ الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی

در ابتدا الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵] را برای حل مسأله‌ی p−مرکز شرطی روی شبکه، توضیح می‌دهیم. در این الگوریتم، از ماتریس فاصله برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی مراکز محلی در شبکه استفاده شده است.

فرض کنیم D یک ماتریس فاصله باشد. سطرهای ماتریس D متناظر با نقاط تقاضا (رأس‌ها) و ستون‌های ماتریس D متناظر با مراکز محلی در شبکه هستند که سرویس‌دهنده‌های جدید به عنوان مکان‌های بالقوه می‌توانند در آنها واقع شوند.

ایده‌ی الگوریتم برمن و سیمچی، ایجاد یک ستون جدید در ماتریس D است که این ستون، معرف همه‌ی سرویس‌دهنده‌های موجود است (سرویس‌دهنده‌هایی که از قبل در شبکه وجود دارند). ستون جدید را با $.a$ نشان می‌دهیم، و ماتریس فاصله را در این الگوریتم با $\hat{D}$ نشان می‌دهیم. درایه‌های ماتریس را به صورت $d(i, j)$ محاسبه کرده‌ایم که در آن $d(i, j)$ کمترین فاصله‌ای است که از نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام به مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید j ام (مکان بالقوه‌ی j ام) وجود دارد. برای ستون $.a$، درایه‌های ماتریس را به صورت $max\{d(i, k)\}_{k\in Q}$ محاسبه کرده‌ایم که در آن مجموعه‌ی Q شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند. $d(i, k)$ نشان‌دهنده‌ی کمترین فاصله‌ای است که از نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام به مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود k ام وجود دارد. فرض کنید C نشان‌دهنده‌ی مراکز محلی روی شبکه است و y_i مکان سرویس‌دهنده i ام موجود در شبکه است. اندازه‌ی ماتریس $\hat{D}$ وقتی که $y_i \notin C$ به ازای $i = 1, ..., q$، برای مسأله‌ی p−مرکز شرطی برابر است با $n \times (|C|)$. اندازه‌ی ماتریس $\hat{D}$ وقتی که $y_i \in C$ به ازای $i = 1, ..., q$، برای مسأله‌ی p−مرکز شرطی برابر است با

$.(n-q)\times(|C|-q)$

در این الگوریتم، حل مسأله‌ی p–مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)–مرکز غیرشرطی می‌شود.

۳.۲.۳ الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر

الگوریتم دوم، توسط برمن و درزنر [۳] برای حل مسأله‌ی p–مرکز شرطی روی شبکه ارائه شده است. در این الگوریتم برای حل مسأله‌ی p– مرکز شرطی، ماتریس فاصله‌ی D را اصلاح کرده‌ایم. به این صورت که سطرهای ماتریس متناظر با نقاط تقاضا (رئوس) هستند و ستون‌های ماتریس متناظر با مراکز محلی هستند که سرویس‌دهنده‌های جدید می‌توانند به عنوان مکان بالقوه در آنها واقع شوند. در این الگوریتم ماتریس فاصله‌ی اصلاح شده را با $\tilde{D}$ نشان داده‌ایم، که درایه‌های ماتریس $\tilde{D}$ به صورت زیر محاسبه شده است:

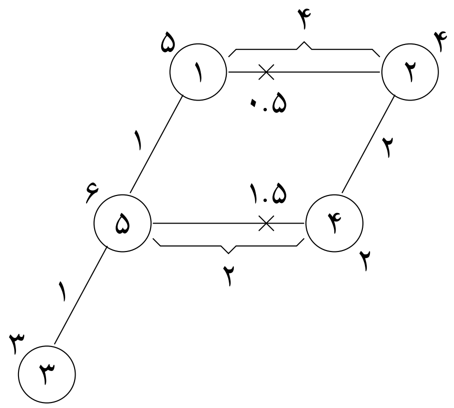
$$\tilde{D}_{ij}=\max\{\tilde{d}_{ij},\max\{\tilde{d}_{ik}\}_{k\in Q}\} \qquad (۷.۳)$$

در فرمول (۷.۳)، $\tilde{d}_{ij}$ نشان‌دهنده‌ی کوتاهترین فاصله از نقطه‌ی تقاضای i ام به ستون j ام است و $\tilde{d}_{ik}$ نشان‌دهنده‌ی کمترین فاصله‌ای است که از نقطه‌ی تقاضای i ام به مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود k ام وجود دارد.

اندازه‌ی ماتریس $\tilde{D}$ وقتی که $y_i\notin C$ به ازای $i=۱,\dots,q$ برای مسأله‌ی p–مرکز شرطی برابر است با $n\times|C|$. اندازه‌ی ماتریس $\tilde{D}$ برای مسأله‌ی p–مرکز شرطی وقتی که $y_i\in C$ به ازای $i=۱,\dots,q$ برابر است با $(n-q)\times(|C|-q)$.

در این الگوریتم، حل مسأله‌ی p–مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p–مرکز غیرشرطی می‌شود.

مثال ۱.۲.۳. شبکه‌ی زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱۲)

شبکه‌ای با ۵ نقطه‌ی تقاضا است که وزن رئوس و فاصله‌ی بین دو رأس مجاور، روی آنها نوشته شده است. فرض کنید $Q = \{\frac{۱}{۲}, ۴\}$ (سرویس‌دهنده‌های موجود در شبکه در مراکز محلی $\{\frac{۱}{۲}, ۴\}$ واقع شده‌اند). مراکز محلی در گراف در مکان‌های زیر واقع شده‌اند:

$$C = \{\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۴, ۵\}$$

مرکز محلی $\frac{۱}{۲}$ روی یال $(۱, ۲)$ و به فاصله‌ی ۰/۵ از نقطه‌ی تقاضای ۱ واقع است و مرکز محلی $\frac{۳}{۲}$ روی یال $(۵, ۴)$ و به فاصله‌ی ۱/۵ از نقطه‌ی تقاضای ۵ قرار دارد. هدف، حل مسأله‌ی ۱-مرکز شرطی است.

(۱) مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۱-مرکز شرطی با استفاده از فرمول:

$$f(x) = w_i \max\{d(v_i, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_i, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$

قرار می‌دهیم $y_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $y_۲ = ۴$ و مسأله را حل می‌کنیم.

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۱ واقع شود:

به ازای $i = ۱$ (نقطه‌ی تقاضای ۱) داریم:

$$d(v_۱, y_۱) = d(۱, \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} \text{ ، } d(v_۱, x_۱) = d(۱, ۱) = ۰$$

$$d(v_۱, y_۲) = d(۱, ۴) = ۳$$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = w_۱ \max\{d(v_۱, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۱, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}$$

$$= ۵ \times \max\{d(v_۱, x_۱), d(v_۱, y_۱), d(v_۱, y_۲)\}$$

$$= ۵ \times \max\{۰, \frac{۱}{۲}, ۳\}$$
$$= ۱۵$$

به ازای $i = ۲$ (نقطه‌ی تقاضای ۲) داریم:

$d(v_۲, y_۱) = d(۲, \frac{۱}{۲}) = \frac{۷}{۲}$ ، $d(v_۲, x_۱) = d(۲, ۱) = ۴$

$d(v_۲, y_۲) = d(۲, ۴) = ۲$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = w_۲ \max\{d(v_۲, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۲, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}$$
$$= ۴ \times \max\{d(v_۲, x_۱), d(v_۲, y_۱), d(v_۲, y_۲)\}$$
$$= ۴ \times \max\{۴, \frac{۷}{۲}, ۲\}$$
$$= ۱۶$$

به ازای $i = ۳$ (نقطه‌ی تقاضای ۳) داریم:

$d(v_۳, y_۱) = d(۳, \frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۲}$ ، $d(v_۳, x_۱) = d(۳, ۱) = ۲$

$d(v_۳, y_۲) = d(۳, ۴) = ۳$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = w_۳ \max\{d(v_۳, x_۱), d(v_۳, y_۱), d(v_۳, y_۲)\}$$
$$= ۳ \times \max\{۲, \frac{۵}{۲}, ۳\}$$
$$= ۹$$

به ازای $i = ۴$ (نقطه‌ی تقاضای ۴) داریم:

$d(v_۴, y_۱) = d(۴, \frac{۱}{۲}) = \frac{۷}{۲}$ ، $d(v_۴, x_۱) = d(۴, ۱) = ۳$

$d(v_۴, y_۲) = d(۴, ۴) = ۰$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = w_۴ \max\{d(v_۴, x_۱), d(v_۴, y_۱), d(v_۴, y_۲)\}$$
$$= ۲ \times \max\{۳, \frac{۷}{۲}, ۰\}$$
$$= ۷$$

به ازای $i = ۵$ (نقطه‌ی تقاضای ۵) داریم:

$d(v_۵, y_۱) = d(۵, \frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$ ، $d(v_۵, x_۱) = d(۵, ۱) = ۱$

$d(v_۵, y_۲) = d(۵, ۴) = ۲$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= w_5 \max\{d(v_5, x_j)_{1\leq j\leq 1}, d(v_5, y_j)_{1\leq j\leq 2}\}\\
&= w_5 \times \max\{d(v_5, x_1), d(v_5, y_1), d(v_5, y_2)\}\\
&= 6 \times \max\{1, \frac{3}{2}, 2\}\\
&= 12
\end{aligned}
$$

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی $\frac{3}{2}$ واقع شود:

به ازای $i = 1$ (نقطه‌ی تقاضای ۱) داریم:

$d(v_1, y_1) = d(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ، $d(v_1, x_1) = d(1, \frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$

$d(v_1, y_2) = d(1, 4) = 3$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{3}{2}) &= w_1 \max\{d(v_1, x_j)_{1\leq j\leq 1}, d(v_1, y_j)_{1\leq j\leq 2}\}\\
&= w_1 \times \max\{d(v_1, x_1), d(v_1, y_1), d(v_1, y_2)\}\\
&= 5 \times \max\{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 3\}\\
&= 15
\end{aligned}
$$

به ازای $i = 2$ (نقطه‌ی تقاضای ۲) داریم:

$d(v_2, y_1) = d(2, \frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$ ، $d(v_2, x_1) = d(2, \frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$

$d(v_2, y_2) = d(2, 4) = 2$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{3}{2}) &= w_2 \max\{d(v_2, x_j)_{1\leq j\leq 1}, d(v_2, y_j)_{1\leq j\leq 2}\}\\
& w_2 \times \max\{d(v_2, x_1), d(v_2, y_1), d(v_2, y_2)\}\\
&= 4 \times \max\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 2\}\\
&= 14
\end{aligned}
$$

به ازای $i = 3$ (نقطه‌ی تقاضای ۳) داریم:

$d(v_3, y_1) = d(3, \frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ ، $d(v_3, x_1) = d(3, \frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$

$d(v_3, y_2) = d(3, 4) = 3$

بنابراین داریم:

$$
f(\frac{3}{2}) = w_3 \max\{d(v_3, x_j)_{1\leq j\leq 1}, d(v_3, y_j)_{1\leq j\leq 2}\}
$$

$$= w_۳ \times \max\{d(v_۳, x_۱), d(v_۳, y_۱), d(v_۳, y_۲)\}$$
$$= ۳ \times \max\{\frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۲}, ۳\}$$
$$= ۹$$

به ازای $i = ۴$ (نقطه‌ی تقاضای ۴) داریم:

$d(v_۴, x_۱) = d(۴, \frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{۲}$ ، $d(v_۴, y_۱) = d(۴, \frac{۱}{۲}) = \frac{۷}{۲}$

$d(v_۴, y_۲) = d(۴, ۴) = ۰$

بنابراین داریم:

$$f(\frac{۳}{۲}) = w_۴ \max\{d(v_۴, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۴, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۴ \times \max\{d(v_۴, x_۱), d(v_۴, y_۱), d(v_۴, y_۲)\}$$
$$= ۲ \times \max\{\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}, ۰\}$$
$$= ۷$$

به ازای $i = ۵$ (نقطه‌ی تقاضای ۵) داریم:

$d(v_۵, x_۱) = d(۵, \frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲}$ ، $d(v_۵, y_۱) = d(۵, \frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$

$d(v_۵, y_۲) = d(۵, ۴) = ۲$

بنابراین داریم:

$$f(\frac{۳}{۲}) = w_۵ \max\{d(v_۵, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۵, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۵ \times \max\{d(v_۵, x_۱), d(v_۵, y_۱), d(v_۵, y_۲)\}$$
$$= ۶ \times \max\{\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}, ۲\}$$
$$= ۱۲$$

مقدار تابع هدف، وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۵ واقع شود:

به ازای $i = ۱$ (نقطه‌ی تقاضای ۱) داریم:

$d(v_۱, x_۱) = d(۱, ۵) = ۱$ ، $d(v_۱, y_۱) = d(۱, \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$

$d(v_۱, y_۲) = d(۱, ۴) = ۳$

بنابراین داریم:

$$f(۵) = w_۱ \max\{d(v_۱, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۱, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۱ \times \max\{d(v_۱, x_۱), d(v_۱, y_۱), d(v_۱, y_۲)\}$$

$$= ۵ \times \max\{۱, \frac{۱}{۲}, ۳\}$$
$$= ۱۵$$

به ازای $i =$ ۲ (نقطه‌ی تقاضای ۲) داریم:

$d(v_۲, y_۱) = d(۲, \frac{۱}{۲}) = \frac{۷}{۲}$ ، $d(v_۲, x_۱) = d(۲, ۵) = ۴$

$d(v_۲, y_۲) = d(۲, ۴) = ۲$

بنابراین داریم:

$$f(۵) = w_۲ \max\{d(v_۲, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۲, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۲ \times \max\{d(v_۲, x_۱), d(v_۲, y_۱), d(v_۲, y_۲)\}$$
$$= ۴ \times \max\{۴, \frac{۷}{۲}, ۲\}$$
$$= ۱۶$$

به ازای $i =$ ۳ (نقطه‌ی تقاضای ۳) داریم:

$d(v_۳, y_۱) = d(۳, \frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۲}$ ، $d(v_۳, x_۱) = d(۳, ۵) = ۱$

$d(v_۳, y_۲) = d(۳, ۴) = ۳$

بنابراین داریم:

$$f(۵) = w_۳ \max\{d(v_۳, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۳, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۳ \times \max\{d(v_۳, x_۱), d(v_۳, y_۱), d(v_۳, y_۲)\}$$
$$= ۳ \times \max\{۱, \frac{۵}{۲}, ۳\}$$
$$= ۹$$

به ازای $i =$ ۴ (نقطه‌ی تقاضای ۴) داریم:

$d(v_۴, y_۱) = d(۴, \frac{۱}{۲}) = \frac{۷}{۲}$ ، $d(v_۴, x_۱) = d(۴, ۵) = ۲$

$d(v_۴, y_۲) = d(۴, ۴) = ۰$

بنابراین داریم:

$$f(۵) = w_۴ \max\{d(v_۴, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۴, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\}$$
$$= w_۴ \times \max\{d(v_۴, x_۱), d(v_۴, y_۱), d(v_۴, y_۲)\}$$
$$= ۲ \times \max\{۲, \frac{۷}{۲}, ۰\}$$
$$= ۷$$

به ازای $i = ۵$ (نقطه‌ی تقاضای ۵) داریم:

$$d(v_۵, x_۱) = d(۵, ۵) = ۰ \text{ ، } d(v_۵, y_۱) = d(۵, \tfrac{۱}{۲}) = \tfrac{۳}{۲}$$

$$d(v_۵, y_۲) = d(۵, ۴) = ۲$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(۵) &= w_۵ \max\{d(v_۵, x_j)_{۱\leq j\leq ۱}, d(v_۵, y_j)_{۱\leq j\leq ۲}\} \\ &= w_۵ \times \max\{d(v_۵, x_۱), d(v_۵, y_۱), d(v_۵, y_۲)\} \\ &= ۶ \times \max\{۰, \frac{۳}{۲}, ۲\} \\ &= ۱۲ \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه شد، وقتی که سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۱ واقع شود؛ ماکسیمم فاصله‌ی وزندار نقاط تقاضا تا مجموعه‌ی سرویس‌دهنده‌ها، به ازای نقطه‌ی تقاضای ۲ به دست می‌آید که مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ۱۶ است. وقتی‌که سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی $\frac{۳}{۲}$ واقع شود؛ ماکسیمم فاصله‌ی وزندار نقاط تقاضا تا مجموعه‌ی سرویس‌دهنده‌ها، به ازای نقطه‌ی تقاضای ۱ به دست می‌آید که مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ۱۵ است. و وقتی که سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۵ واقع شود؛ ماکسیمم فاصله‌ی وزندار نقاط تقاضا تا مجموعه‌ی سرویس‌دهنده‌ها، به ازای نقطه‌ی تقاضای ۲ به دست می‌آید که مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ۱۶ است.

هدف در مسأله‌ی p–مرکز شرطی، مینیمم کردن تابع هدف است. لذا مکان بهینه برای سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی $\frac{۳}{۲}$ واقع می‌شود.

(۲) حل مسأله‌ی ۱-مرکز شرطی با الگوریتم اول:

در این روش، حل مسأله‌ی ۱-مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی ۲-مرکز غیرشرطی می‌شود. حال مسأله‌ی ۲-مرکز غیرشرطی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه			
	۱	۱/۵	۵	$a_{۰}$
۱	۰	۲/۵	۱	۳
۲	۴	۲/۵	۴	۳/۵
۳	۲	۲/۵	۱	۳
۴	۳	۰/۵	۲	۳/۵
۵	۱	۱/۵	۰	۲

جدول (۴)

که در جدول (۴) عناصر ماتریس در ستون $a_{۰}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{D}_{ij} = \max\{\{d(i,k)\}_{k\in Q}\}$$

و $a_{۰}$ مکان سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه واقع‌اند، بنابراین $a_{۰} = \{\frac{۱}{۲}, ۴\}$. محاسبه‌ی تابع هدف با استفاده از جدول (۴) و در حالتی‌که مسأله تبدیل به مسأله‌ی ۲-مرکز غیرشرطی می‌شود:

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه		
	$۱, a_{۰}$	$۱/۵, a_{۰}$	$۵, a_{۰}$
۱	۳	۳	۳
۲	۴	۳/۵	۴
۳	۳	۳	۳
۴	۳/۵	۳/۵	۳/۵
۵	۲	۲	۲

جدول (۵)

در جدول (۵) درایه‌های ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$D_{ij} = \max\{d(i,j), \max\{d(i,k)\}_{k\in Q}\}$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۱ و $a_{۰}$ واقع شوند:

$$w_{۱} \times ۳ = ۵ \times ۳ = ۱۵$$

$$w_{۲} \times ۴ = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$w_3 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$
$$w_4 \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$
$$w_5 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های $\frac{3}{2}$ و a. واقع شوند:

$$w_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$
$$w_2 \times \frac{7}{2} = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$
$$w_3 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$
$$w_4 \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$
$$w_5 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۵ و a. واقع شوند:

$$w_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$
$$w_2 \times 4 = 4 \times 4 = 16$$
$$w_3 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$
$$w_4 \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$
$$w_5 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

در این حالت، مکان بهینه برای سرویس‌دهنده‌های جدید در مراکز محلی $\{\frac{3}{2}, a.\}$ یا $\{\frac{3}{2}, 4, \frac{1}{2}\}$ قرار می‌گیرند.

(۳) حل مسأله‌ی ۱–مرکز شرطی با الگوریتم دوم:

ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم.

نقاط تقاضا	مکان های بالقوه		
	۱	۱/۵	۵
۱	۳	۳	۳
۲	۴	۳/۵	۴
۳	۳	۳	۳
۴	۳/۵	۳/۵	۳/۵
۵	۲	۲	۲

جدول (۶)

درایه‌های ماتریس در جدول (۶) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{D}_{ij} = \max\{\tilde{d}_{ij}, \max\{\tilde{d}_{ik}\}_{k\in Q}\}$$

با شیوه‌ی بالا، حل مسأله‌ی ۱-مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی ۱-مرکز غیرشرطی می‌شود.
محاسبه‌ی تابع هدف، با استفاده از ماتریس فاصله‌ی $\tilde{D}$:

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۱ قرار می‌گیرد:

$$w_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$

$$w_2 \times 4 = 4 \times 4 = 16$$

$$w_3 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$

$$w_4 \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$

$$w_5 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی $\frac{3}{2}$ قرار می‌گیرد:

$$w_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$

$$w_2 \times \frac{7}{2} = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$

$$w_3 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$

$$w_4 \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$

$$w_5 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی مرکز محلی ۵ قرار می‌گیرد:

$$w_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$

$$w_۲ \times ۴ = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$w_۳ \times ۳ = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$w_۴ \times \frac{۷}{۲} = ۲ \times \frac{۷}{۲} = ۷$$

$$w_۵ \times ۲ = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی مرکز محلی انتخاب می‌کنیم که ماکسیمم مقدار تابع هدف به ازای آن، مینیمم شود. لذا مرکز محلی $\frac{۳}{۲}$ ، با ماکسیمم مقدار تابع هدف ۱۵، مکان بهینه‌ای است که سرویس‌دهنده‌ی جدید روی آن قرار می‌گیرد.
همانطور که ملاحظه شد، جواب مسأله در هر ۳ روش یکسان است و مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی مراکز محلی $\frac{۱}{۲}$ و ۴ و $\frac{۳}{۲}$ قرار می‌گیرد.

۴.۲.۳ نتایج محاسباتی

حال به مقایسه‌ی دو الگوریتم فوق می‌پردازیم. در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی [۵]، حل مسأله‌ی p– مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)– مرکز غیرشرطی شد. در حالی که در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر [۳]، حل مسأله‌ی p– مرکز شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p– مرکز غیرشرطی شد.

جواب مسأله‌ی p– مرکز شرطی با استفاده از دو الگوریتم فوق، در یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها یکسان است. در الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی، تعداد محاسبات نسبت به الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر بیشتر است. لذا زمان حل، برای یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها با الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و سیمچی طولانی‌تر است.

بنابراین الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر، برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه کاراتر است؛ و با استفاده از الگوریتم پیشنهاد شده توسط برمن و درزنر، زمان کمتری برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه نیاز داریم.

فصل ۴

مسأله‌ی مکانیابی p−ماکسین شرطی روی شبکه

۱.۴ مقدمه

در این بخش، مسأله‌ی p−ماکسین شرطی را روی شبکه‌ها بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک شبکه مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن مثبت w_i است. در مسأله‌ی p−ماکسین هدف پیدا کردن یک مجموعه شامل p رأس به عنوان سرویس‌دهنده است به گونه‌ای که مجموع ماکسیمم فاصله‌ی وزندار سایر نقاط تا این مجموعه، بیشترین مقدار شود. در مسأله‌ی p−ماکسین شرطی فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده از قبل موجود است و باید p تای دیگر به آنها اضافه شود.

در این بخش، دو الگوریتم جدید برای حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی (با استفاده از تعمیم الگوریتم‌های برمن و درزنر [۳] و برمن و سیمچی [۵]) ارائه می‌شود؛ و نتایج آنها (از جمله زمان حل دو روش در پیدا کردن نقاط بهینه) با هم مقایسه می‌گردد. از جمله کاربردهای این تحقیق، می‌تواند در کمینه کردن زمان برای تعیین مکان بهینه‌ی ضایعات زباله باشد. ضایعات زباله باید دورترین فاصله را نسبت به نقاط تقاضا (مناطق مسکونی) داشته باشند و در عین حال در مکانی باشند که بتوانند به تقاضاها خدمت‌رسانی کنند. زمان حل مسائل از اهمیت زیادی برخوردار است. بدیهی است هرچه زمان حل یک مسأله کمتر باشد، عمل بهینه‌سازی در وقت و زمان صورت می‌گیرد. در این تحقیق هدف ارائه‌ی راه حلی با زمان کمتر، در تعیین مکان بهینه‌ی تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها است و فرض براین است که تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها از قبل در شبکه موجود باشند. فرض کنید یک شبکه مانند $G = (V, E)$ که هر رأس v_i آن دارای وزن w_i

است، داده شده باشد. در مسأله‌ی p–میانه، هدف پیدا کردن یک مجموعه شامل p رأس شبکه به عنوان سرویس‌دهنده است، به گونه‌ای که مجموع فاصله‌ی وزندار سایر نقاط تا این مجموعه کمترین مقدار شود. برمن و همکاران [۵] مسأله‌ی p–میانه‌ی شرطی را بررسی کرده‌اند. در این مسأله فرض بر این است که تعدادی سرویس‌دهنده روی شبکه، از قبل موجود است و باید p تای دیگر به آنها اضافه شود.

مسأله‌ی p–ماکسین توسط بورکارد[1] و همکاران [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسأله هدف، پیدا کردن یک مجموعه شامل p رأس شبکه به عنوان سرویس‌دهنده به گونه‌ای است که مجموع ماکسیمم فاصله‌ی وزندار سایر نقاط تا این مجموعه بیشترین مقدار شود.

در این تحقیق، الگوریتم‌های برمن و درزنر [۳] و برمن و سیمچی [۵] را برای مسأله‌ی p–ماکسین شرطی تعمیم داده‌ایم و به مقایسه‌ی دو الگوریتم در پیدا کردن نقاط بهینه روی شبکه پرداخته‌ایم. برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه، راه حل با زمان کمتر را ارائه می‌دهیم. راه حل با زمان کمتر (در پیدا کردن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها) باعث صرفه‌جویی در زمان و هزینه می‌شود؛ بنابراین از اهمیت زیادی برخوردار است و در عمل مفهوم بهینه‌سازی را توسعه می‌دهد. بخصوص وقتی که تعداد نقاط تقاضا و تعداد سرویس‌دهنده‌ها زیاد باشد این مفاهیم نمود بیشتری می‌یابند.

۱.۱.۴ تعریف مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز

فرض کنید یک شبکه مانند $G=(V,E)$ داده شده باشد؛ که هر رأس v_i آن دارای وزن مثبت w_i است. V مجموعه‌ای از نقاط تقاضا (رئوس) است که $|V|=n$ است و E مجموعه‌ای از یال‌ها است. d_{xy} کوتاهترین فاصله‌ی بین هر $x,y\in G$ است، و مجموعه‌ی Q که $|Q|=q$ شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند. هدف در مسأله‌ی p–ماکسین شرطی، ماکسیمم کردن تابع زیر است:

$$f(x)=\sum_{i=۱}^{n} w_i \max\{d(v_i,x_j)_{۱\leq j\leq p}, d(v_i,y_j)_{۱\leq j\leq q}\} \qquad (۱.۴)$$

که x_j مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید j ام است که در آن $j=۱,...,p$ می‌باشد و y_j مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود j ام است که در آن $j=۱,...,q$ می‌باشد.

در حل مسأله‌ی p–ماکسین شرطی با دو الگوریتمی که ارائه می‌دهیم؛ فرض بر این است که مکان سرویس‌دهنده‌های جدید و موجود روی رئوس شبکه قرار می‌گیرند.

[1] Burkard

۲.۴ طرح مسأله و راه حل پیشنهادی

هدف در مسأله‌ی p−ماکسین شرطی، پیدا کردن مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید روی رئوس شبکه است؛ به گونه‌ای که مجموع ماکسیمم فاصله‌ی وزندار سایر نقاط تا سرویس‌دهندگان، بیشترین مقدار شود. بنابراین قصد داریم، مکان بهینه‌ی یک مجموعه شامل p سرویس‌دهنده‌ی جدید را روی رئوس شبکه پیدا کنیم. در این تحقیق، با تبدیل مسأله‌ی شرطی به حالت غیرشرطی، مسأله‌ی p−ماکسین شرطی را حل می‌کنیم.

در این تحقیق، از ماتریس فاصله برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه استفاده کرده‌ایم و دو الگوریتم برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه ارائه داده‌ایم. در الگوریتم اول، حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی را تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)−ماکسین غیرشرطی کرده‌ایم؛ و در الگوریتم دوم، حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی را تبدیل به حل مسأله‌ی p−ماکسین غیرشرطی کرده‌ایم و به مقایسه‌ی دو الگوریتم (از لحاظ زمان حل) پرداخته‌ایم. اکنون به معرفی الگوریتم‌های حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی و توضیح یک مثال می‌پردازیم.

۱.۲.۴ الگوریتم اول

الگوریتم اول استفاده از روشی است که توسط برمن و سیمچی [۵] برای حل مسأله‌ی p−میانه‌ی شرطی ارائه شده است و ما، آن را برای حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی تعمیم داده‌ایم. در این الگوریتم برای حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی از ماتریس فاصله استفاده کرده‌ایم، که سطرهای ماتریس متناظر با نقاط تقاضا (رئوس) است و ستون‌های ماتریس متناظر با رئوسی است که سرویس‌دهنده‌های جدید به عنوان مکان‌های بالقوه می‌توانند در آن‌ها واقع شوند (مکان‌های بالقوه شامل رئوسی از شبکه هستند که هیچ سرویس‌دهنده‌ای از قبل روی آن‌ها وجود نداشته باشد).

در این الگوریتم با ایجاد یک ستون جدید که ارائه‌دهنده‌ی q سرویس‌دهنده‌ای است که از قبل در شبکه وجود دارند، ماتریس فاصله را ایجاد کرده‌ایم. ستون جدید را با $a.$ نشان می‌دهیم. ماتریس فاصله را در این الگوریتم با D نشان می‌دهیم. درایه‌های ماتریس را به صورت d_{ij} محاسبه کرده‌ایم که در آن d_{ij} کمترین فاصله‌ای است که از نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام به مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید j ام (مکان بالقوه‌ی j ام) وجود دارد؛ و برای ستون $a.$، درایه‌های ماتریس را به صورت $\max\{d_{ik}\}_{k\in Q}$ محاسبه کرده‌ایم که در آن مجموعه‌ی Q شامل سرویس‌دهنده‌هایی است که از قبل در شبکه وجود دارند و d_{ik} نشان‌دهنده‌ی کمترین فاصله‌ای است که از نقطه‌ی تقاضای (رأس) i ام به مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود k ام وجود دارد.

فرض کنید N نشان‌دهنده‌ی رئوس شبکه است و y_i مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود i ام در

شبکه باشد. اندازه‌ی ماتریس D وقتی که $y_i \notin N$ به ازای $i = 1, ..., q$، برای مسأله‌ی p–ماکسین شرطی برابر است با $n \times (n+1)$ ؛ و اندازه‌ی ماتریس D وقتی که $y_i \in N$ به ازای $i = 1, ..., q$، برای مسأله‌ی p–ماکسین شرطی برابر است با $n \times (n - q + 1)$.

در این الگوریتم، حل مسأله‌ی p–ماکسین شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+1)–ماکسین غیرشرطی می‌شود.

۲.۲.۴ الگوریتم دوم

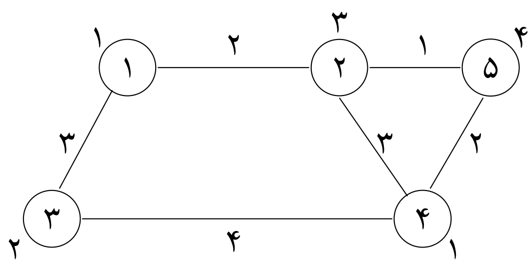
الگوریتم دوم، استفاده از الگوریتمی است که توسط برمن و درزنر [۳] ارائه شده است و ما، آن را برای حل مسأله‌ی p–ماکسین شرطی تعمیم داده‌ایم. در این الگوریتم برای حل مسأله‌ی p–ماکسین شرطی، ماتریس فاصله‌ی D را اصلاح کرده‌ایم. به این صورت که سطرهای ماتریس متناظر با نقاط تقاضا (رئوس) هستند و ستون‌های ماتریس متناظر با رئوسی است که سرویس‌دهنده‌های جدید می‌توانند به عنوان مکان بالقوه در آن‌ها واقع شوند. در این حالت ماتریس فاصله‌ی اصلاح شده را با $\tilde{D}$ نشان داده‌ایم. که درایه‌های ماتریس $\tilde{D}$ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\tilde{D}_{ij} = max\{\tilde{d}_{ij}, max\{\tilde{d}_{ik}\}_{k \in Q}\} \qquad (۲.۴)$$

اندازه‌ی ماتریس $\tilde{D}$ وقتی که $y_i \notin N$ به ازای $i = 1, ..., q$ برای مسأله‌ی p–ماکسین شرطی برابر است با $n \times n$ و اندازه‌ی ماتریس $\tilde{D}$ وقتی که $y_i \in N$ به ازای $i = 1, ..., q$ برای مسأله‌ی p–ماکسین شرطی برابر است با $n \times (n - q)$.

در این الگوریتم حل مسأله‌ی p–ماکسین شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p–ماکسین غیرشرطی می‌شود.

مثال ۱.۲.۴. شبکه‌ی زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱۳)

شبکه‌ای با ۵ نقطه‌ی تقاضا است که وزن رئوس و فاصله‌ی بین دو رأس مجاور، روی آن‌ها نوشته شده است. فرض کنید $Q = \{۲, ۳\}$ (سرویس‌دهنده‌های موجود در شبکه در گره‌های ۲ و ۳ واقع شده‌اند). هدف، حل مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی است.

(۱) مقدار تابع هدف مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی با استفاده از فرمول:

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{۵} w_i \max \{d(v_i, x_j)_{۱\le j \le ۱}, d(v_i, y_j)_{۱\le j\le ۲}\} \qquad (۳.۴)$$

قرار می‌دهیم $y_۱ = ۲$ و $y_۲ = ۳$ و مسأله را حل می‌کنیم.

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۱ واقع شود:

$$f(۱) = ۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۵ + ۴ \times ۶ = ۵۷$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۴ واقع شود:

$$f(۴) = ۱ \times ۵ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۵ واقع شود:

$$f(۵) = ۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۶ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

بنابراین با استفاده از فرمول، مکان بهینه برای قرار دادن سرویس‌دهنده‌ی جدید گره‌ی ۴ یا گره‌ی ۵ است. در نتیجه سرویس‌دهنده‌ها در گره‌های ۲ و ۳ و ۴ یا گره‌های ۲ و ۳ و ۵ واقع می‌شوند.

(۲) حل مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی با الگوریتم اول:

در این روش حل مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی ۲-ماکسین غیرشرطی می‌شود. حال مسأله‌ی ۲-ماکسین غیرشرطی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

نقاط تقاضا	مکان‌های بالقوه			
	۱	۴	۵	$a_\circ$
۱	۰	۵	۳	$max\{d_{۱۲}, d_{۱۳}\} = ۳$
۴	۵	۰	۲	$max\{d_{۴۲}, d_{۴۳}\} = ۴$
۵	۳	۲	۰	$max\{d_{۵۲}, d_{۵۳}\} = ۶$
۲	۲	۳	۱	$max\{d_{۲۲}, d_{۲۳}\} = ۵$
۳	۳	۴	۶	$max\{d_{۳۲}, d_{۳۳}\} = ۵$

جدول (۷)

در جدول (۷) عناصر ماتریس در ستون $a_\circ$ به صورت $\max\{d_{ik}\}_{k\in Q}$ و در مابقی ستون‌ها به صورت $d(i,j)$ محاسبه شده‌اند.

محاسبه‌ی تابع هدف با استفاده از جدول (۸) و در حالتی که مسأله تبدیل به مسأله‌ی ۲-ماکسین غیرشرطی می‌شود:

نقاط تقاضا	مکان‌های بالقوه				
	$۱, a_\circ$	$۲, a_\circ$	$۳, a_\circ$	$۴, a_\circ$	$۵, a_\circ$
۱	۳	۳	۳	۵	۳
۴	۵	۴	۴	۴	۴
۵	۶	۶	۶	۶	۶
۲	۵	۵	۵	۵	۵
۳	۵	۵	۵	۵	۶

جدول (۸)

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۱ و $a_\circ$ قرار می‌گیرند:

$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۵ + ۴ \times ۶ = ۵۷$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۲ و $a_\circ$ قرار می‌گیرند:

$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۶$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۳ و $a_\circ$ قرار می‌گیرند:

$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۶$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۴ و a. قرار می‌گیرند:
$$۱ \times ۵ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

مقدار تابع هدف وقتی که سرویس‌دهنده‌ها در مکان‌های ۵ و a. قرار می‌گیرند:
$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۶ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

لذا در مسأله‌ی ۲-ماکسین غیرشرطی، مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها در گره‌های ۴ و a. یا گره‌های ۵ و a. واقع می‌شوند. به بیانی دیگر سرویس‌دهنده‌ها در گره‌های ۴ و ۲ و ۳ ، یا گره‌های ۵ و ۲ و ۳ واقع می‌شوند.

(۳) حل مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی با الگوریتم دوم:

ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم.

نقاط تقاضا	مکان‌های بالقوه		
	۱	۴	۵
۱	۳	۵	۳
۴	۵	۴	۴
۵	۶	۶	۶
۲	۵	۵	۵
۳	۵	۵	۶

جدول (۹)

عناصر ماتریس در جدول (۹) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:
$$\tilde{D}_{ij} = max\{d_{ij}, max\{d_{ik}\}_{k\in Q}\}$$

با شیوه‌ی بالا مسأله‌ی ۱-ماکسین شرطی تبدیل به مسأله‌ی ۱-ماکسین غیرشرطی می‌شود.

محاسبه‌ی تابع هدف، با استفاده از ماتریس فاصله‌ی $\tilde{D}$:

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۱ قرار می‌گیرد:
$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۵ + ۴ \times ۶ = ۵۷$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۴ قرار می‌گیرد:
$$۱ \times ۵ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۵ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

وقتی سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۵ قرار می‌گیرد:
$$۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۲ \times ۶ + ۱ \times ۴ + ۴ \times ۶ = ۵۸$$

بنابراین با این الگوریتم نیز مکان بهینه برای سرویس‌دهنده‌ی جدید روی گره‌ی ۴ یا گره‌ی ۵ قرار می‌گیرد (با توجه به این‌که سرویس‌دهنده‌های موجود در گره‌های $a_\cdot = \{۲,۳\}$ واقع‌اند). در نتیجه مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها روی گره‌های ۲ و ۳ و ۴ ، یا گره‌های ۲ و ۳ و ۵ واقع می‌شود.

۳.۲.۴ نتایج محاسباتی

حال به مقایسه‌ی دو الگوریتم فوق می‌پردازیم. در الگوریتم اول، حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی (p+۱)−ماکسین غیرشرطی شد. در حالی که در الگوریتم دوم، حل مسأله‌ی p−ماکسین شرطی تبدیل به حل مسأله‌ی p−ماکسین غیرشرطی شد.

جواب مسأله‌ی p−ماکسین شرطی با استفاده از دو الگوریتم فوق، در یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها یکسان است.

در الگوریتم اول، تعداد محاسبات نسبت به الگوریتم دوم بیشتر است و لذا زمان حل برای یافتن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها با الگوریتم اول طولانی‌تر است.

بنابراین الگوریتم دوم، برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه کاراتر است؛ و با استفاده از الگوریتم دوم، زمان کمتری برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید روی رئوس شبکه نیاز داریم. در نتیجه عمل بهینه‌سازی را در زمان انجام داده‌ایم.

فصل ۵

مسأله‌ی میانه‌ی شرطی روی صفحه

۱.۵ مقدمه

در این فصل، به بررسی مسأله‌ی میانه و میانه‌ی شرطی روی صفحه می‌پردازیم.
وقتي‌که q سرویس‌دهنده از قبل روی صفحه وجود دارند و هدف، تعیین مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید روی صفحه است به طوری‌که تابع هدف مسأله‌ی میانه‌ی شرطی بهینه شود؛ مسأله را با نماد (p , q)− میانه نمایش می‌دهیم و مسأله‌ای که به تعیین مکان p سرویس‌دهنده روی صفحه می‌پردازد، طوری‌که سرویس‌دهنده‌ای از قبل روی صفحه وجود نداشته باشد را با نماد p−میانه نمایش می‌دهیم.

در این فصل، مسأله‌ی (۱ , ۱)−میانه و ۲−میانه روی صفحه و روش‌های حل آن‌ها را بیان می‌کنیم. حل مسأله‌ی (۱ , ۱)−میانه با فواصل اقلیدسی روی صفحه مشابه با حل مسأله‌ی ۲−میانه روی صفحه است [۲۳]. بنابراین ابتدا مسأله‌ی ۲−میانه روی صفحه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به توضیح مسأله‌ی (۱ , ۱)−میانه روی صفحه می‌پردازیم [۳۰]. مسأله‌ی (p , q)−میانه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید n نقطه‌ی تقاضا داریم که در مکان‌های x_i (برای هر $i = ۱, ..., n$) واقع شده‌اند؛ به گونه‌ای‌که هر نقطه‌ی تقاضا دارای وزن مثبت w_i است. q سرویس‌دهنده‌ی موجود که به نقاط تقاضا سرویس‌رسانی می‌کنند در مکان‌های y_i (برای هر $i = ۱, ..., q$) واقع شده‌اند. قصد داریم p سرویس‌دهنده‌ی جدید را تعیین مکان کنیم. مکان‌هایی که سرویس‌دهنده‌های جدید، در آن‌ها واقع می‌شوند را با نماد z_i (برای هر $i = ۱, ..., p$) نشان می‌دهیم.

هدف از حل مسأله‌ی (p , q)−میانه، تعیین مکان بهینه‌ی p سرویس‌دهنده‌ی جدید است؛ به

گونه‌ای‌که مقدار تابع $F(Z)$ مینیمم شود.

$$F(Z) = \sum_{i=1}^{n} w_i.[min\{min_{1\leq j\leq q}\{d(x_i, y_j)\}, min_{1\leq j\leq p}\{d(x_i, z_j)\}\}] \qquad (1.5)$$

در مسأله‌ی (p , q)−میانه، مکان q سرویس‌دهنده‌ی موجود و n نقطه‌ی تقاضا مشخص است. بنابراین در معادله‌ی (۱.۵)، مقدار $min_{1\leq j\leq q}\{d(x_i, y_j)\}$ به ازای هر i مشخص است. بنابراین معادله‌ی (۱.۵)، مستقل از q و y_j است. لذا عدد ثابت D_i را به ازای هر $i = 1, ..., n$ به صورت زیر وارد معادله‌ی (۱.۵) می‌کنیم.

$$D_i = min_{1\leq j\leq q}\{d(x_i, y_j)\} \qquad (2.5)$$

لذا معادله‌ی (۱.۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$F(Z) = \sum_{i=1}^{n} w_i.[min\{D_i, min_{1\leq j\leq p}\{d(x_i, z_j)\}\}] \qquad (3.5)$$

تابع هدف مسأله‌ی (p , q)−میانه برای $p \geq 1$ محدب نیست.

۲.۵ الگوریتم وایزفیلد

در این بخش، الگوریتم وایزفیلد [۷۹] را برای حل مسأله‌ی ۱−میانه روی صفحه توضیح می‌دهیم. فرض کنید که نقاط تقاضایی مانند $X_i = (x_i, y_i)$ (برای هر $i = 1, ..., n$) روی صفحه، وجود داشته باشند و $X = (x, y)$ مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید روی صفحه باشد. فاصله‌ی اقلیدسی بین نقاط $X = (x, y)$ و $X_i = (x_i, y_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(X, X_i) = d_i(X) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.5)$$

تابع هدف مسأله‌ی ۱−میانه روی صفحه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$minf(X) = min \sum_{i=1}^{n} w_i.d(X, X_i) = min \sum_{i=1}^{n} w_i.[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.5)$$

این الگوریتم، براساس روش نقطه‌ی ثابت عمل می‌کند و با شروع از یك نقطه‌ی اولیه، به جواب مسأله همگرا است. بنابراین ابتدا از تابع $f(X)$ نسبت به x و y مشتق می‌گیریم؛ و برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x_i).w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x.w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i.w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i.w_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}})}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{w_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}})}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y - y_i).w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y.w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i.w_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i.w_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}})}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{w_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}})}$$

لذا الگوریتم وایزفیلد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i.w_i}{[(x^k-x_i)^2+(y^k-y_i)^2+\varepsilon]^{\frac{1}{2}}})}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{w_i}{[(x^k-x_i)^2+(y^k-y_i)^2+\varepsilon]^{\frac{1}{2}}})} \qquad (۶.۵)$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

و

$$y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i.w_i}{[(x^k-x_i)^2+(y^k-y_i)^2+\varepsilon]^{\frac{1}{2}}})}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{w_i}{[(x^k-x_i)^2+(y^k-y_i)^2+\varepsilon]^{\frac{1}{2}}})} \qquad (۷.۵)$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

با شروع از یك نقطه‌ی اولیه، شروع به حل مسأله می‌کنیم. به دلیل اینکه نقطه‌ی اولیه ممکن است با یکی از نقاط تقاضا برابر باشد در مخرج کسر، مقدار مثبت ε را اضافه می‌کنیم؛ تا مخرج کسر، صفر نشود.

۳.۵ مسأله‌ی ۲–میانه روی صفحه

فرض کنید که n نقطه‌ی تقاضای متمایز در صفحه، در نقاط $X_i = (x_i, y_i)$ (به ازای هر $i = ۱, ..., n$) وجود داشته باشند و X و Y مکان دو سرویس‌دهنده‌ی جدید در صفحه باشند. مجموعه‌ی تمام نقاط تقاضا را با N نشان می‌دهیم $N = \{۱, ۲, ..., n\}$؛ و مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای ممکن از N به دو زیرمجموعه را با α نمایش می‌دهیم. افرازی از N به دو زیرمجموعه را با $\{N_۱, N_۲\}$ نشان داده و داریم:

$$N_۱ \cap N_۲ = \varnothing$$

و

$$N_۱ \cup N_۲ = N$$

برای $I \subseteq N$ تعریف می‌کنیم:

$$P(I, X) = \sum_{i \in I} f_i(X) \qquad (۸.۵)$$

که

$$f_i(X) = w_i.d_i(X) = w_i.d(X, X_i)$$

حال با فرض

$$P(N, X) = P(X) \qquad (۹.۵)$$

مسأله‌ی ۱–میانه را می‌توانیم به صورت زیر نشان دهیم:

$$\min P(X) = min \sum_{i=۱}^{n} f_i(X) \qquad (۱۰.۵)$$

برای حل مسأله‌ی ۲–میانه روی صفحه، مجموعه‌ی نقاط تقاضا را به دو افراز $N_۱$ و $N_۲$ تقسیم می‌کنیم و مسأله‌ی ۱–میانه را با الگوریتم وایزفیلد، در هر یك از افرازهای $N_۱$ و $N_۲$ حل می‌کنیم. افرازی از N به عنوان جواب مسأله‌ی ۲–میانه انتخاب می‌شود که مقدار تابع هدف به ازای آن، کمترین مقدار شود.

بنابراین حل مسأله‌ی ۲–میانه روی صفحه، تبدیل به حل دو مسأله‌ی ۱–میانه روی صفحه می‌شود. لذا مسأله‌ی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$min_{\{N_۱, N_۲\} \in \alpha}\{min\{P(N_۱, X)\} + min\{P(N_۲, Y)\}\} \qquad (۱۱.۵)$$

$$= min_{\{N_۱,N_۲\}\in\alpha}\{min\sum_{i\in N_۱} f_i(X)+min\sum_{i\in N_۲} f_i(Y)\}$$

$$= min_{\{N_۱,N_۲\}\in\alpha}\{min\sum_{i\in N_۱} w_i.d_i(X)+min\sum_{i\in N_۲} w_i.d_i(Y)\}$$

نقطه‌ی تقاضای i خدماتش را از سرویس‌دهنده‌ای جدید به دست می‌آورد که مقدار f_i را کمتر می‌کند.

لم ۱.۳.۵. [۲۳]. *هنگامی که $n \geq ۲$ ، مقدار بهینه برای تابع هدف مسأله‌ی تك- سرویس‌دهنده بزرگتر از مقدار بهینه‌ی تابع هدف برای مسأله‌ی دو- سرویس‌دهنده‌ی متناظر است.*

در ادامه، بین زیرمجموعه‌ی I از N و زیرمجموعه‌ی متناظر $\{X_i|i \in I\}$ از نقاط تقاضا تمایز قائل نمی‌شویم.

قضیه ۲.۳.۵. [۲۳]. *مسأله‌ی (۱۱.۵)، یك افراز بهینه‌ی $(N_۱^*, N_۲^*)$ دارد؛ به طوری که $N_۱^*$ و $N_۲^*$ کاملا به وسیله‌ی خطوطی از هم جدا شده‌اند.*

تعریف ۳.۳.۵. [۲۳]. نقطه‌ی محوری به نقطه‌ای گفته می‌شود که به عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و ما خطوطی که از این نقطه، به هر یك از نقاط تقاضا می‌گذرد را در نظر گرفته و زاویه‌ای که از هر یك از این خطوط با جهت مثبت محور x ها ایجاد می‌شود را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن افراز بهینه‌ی $(N_۱^*, N_۲^*)$، هر کدام از n نقطه‌ی تقاضا را به عنوان نقطه‌ی محوری در نظر می‌گیریم و افرازهای متناظر با آن نقطه‌ی محوری را به دست می‌آوریم و مسأله‌ی ۱ــمیانه را برای هر افراز حل می‌کنیم. در بین تمام افرازها، افرازی بهینه است که به ازای آن مجموع مینیمم مقدار دو تابع هدف (مسأله‌ی ۱ــمیانه) کمترین مقدار شود.

فرض کنید که x_k نقطه‌ی محوری باشد. زوایای $۰ \leq \Theta_۱, ..., \Theta_{k-۱}, \Theta_{k+۱}, ..., \Theta_n \leq ۲\pi$ ، زاویه‌هایی هستند که نیم خط گذرنده از x_k به هر کدام از نقاط تقاضا، با جهت مثبت محور x ها می‌سازند؛ آنها را به صورت غیرکاهشی مرتب می‌کنیم.

فرض کنید که $L(\Theta)$ خط کامل باشد که تعمیم نیم خط گذرنده از x_k است که با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی $۰ \leq \Theta < \pi$ می‌سازد.

افراز $N_۱(\Theta)$، شامل نقطه‌ی تقاضای x_k به علاوه‌ی همه‌ی نقاط تقاضایی مانند x_i است که $\Theta \leq \Theta_i \leq \Theta + \pi$ و افراز $N_۲(\Theta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_۲(\Theta) = N - N_۱(\Theta)$$

مجموعه‌ی متناهی $\{(N_1(\Theta), N_2(\Theta))|0 \leq \Theta < \pi\}$ دقیقا افرازهای خاص با نقطه‌ی محوری، x_k است. زاویه‌ی Θ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\Theta_1^* = min\{\Theta_i|\Theta_i > \Theta\} \tag{۱۲.۵}$$

$$\Theta_2^* = min\{\Theta_i|\Theta_i > \Theta + \pi\} \tag{۱۳.۵}$$

$$\Theta = min\{\Theta_1^*, \Theta_2^* - \pi\} \tag{۱۴.۵}$$

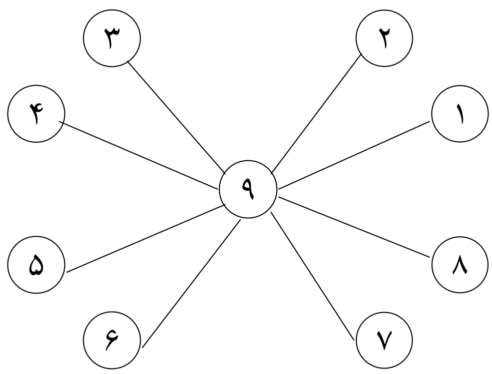
در گام اول، مقدار Θ را برابر با صفر درنظر می‌گیریم و افرازهای $N_1(0)$ و $N_2(0)$ را به دست می‌آوریم. افرازهای $N_1(\Theta)$ و $N_2(\Theta)$ را تا زمانی که زاویه‌ی $\pi > \Theta$ باشد؛ به دست می‌آوریم.

مثال ۴.۳.۵. مجموعه‌ی نقاط تقاضای $N = \{1, 2, ..., 9\}$ را در نظر بگیرید، که در آن

$$\Theta_1 = 30, \Theta_2 = 60, \Theta_3 = 120, \Theta_4 = 150$$

$$, \Theta_5 = 210, \Theta_6 = 240, \Theta_7 = 300, \Theta_8 = 330$$

است. Θ_i زاویه‌ای است که نیم خط گذرنده از نقطه‌ی تقاضای ۹ به نقطه‌ی تقاضای i ام، با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. افرازهای N_1 و N_2 را با نقطه‌ی محوری ۹ به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.



شکل (۱۴)

گام اول

$$\Theta_1^* = min\{\Theta_i|\Theta_i > \Theta\}$$

$$\Theta_۱^* = min\{۳۰, ۶۰, ۱۲۰, ..., ۳۳۰\} = ۳۰$$

$$\Theta_۲^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > \pi\} = min\{۲۱۰, ۲۴۰, ..., ۳۳۰\} = ۲۱۰$$

$$\Theta = min\{۳۰, ۲۱۰ - ۱۸۰\} = ۳۰$$

گام دوم

$$\Theta_۱^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۳۰\} = min\{۶۰, ..., ۳۳۰\} = ۶۰$$

$$\Theta_۲^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۳۰ + ۱۸۰ = ۲۱۰\} = ۲۴۰$$

$$\Theta = min\{۶۰, ۲۴۰ - ۱۸۰\} = ۶۰$$

گام سوم

$$\Theta_۱^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۶۰\} = ۱۲۰$$

$$\Theta_۲^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۶۰ + ۱۸۰ = ۲۴۰\} = ۳۰۰$$

$$\Theta = min\{۱۲۰, ۱۲۰\} = ۱۲۰$$

گام چهارم

$$\Theta_۱^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۱۲۰\} = min\{۱۵۰, ۲۱۰, ۲۴۰, ۳۰۰, ۳۳۰\} = ۱۵۰$$

$$\Theta_۲^* = min\{\Theta_i | \Theta_i > ۱۲۰ + ۱۸۰ = min\{۳۳۰\} = ۳۳۰$$

$$\Theta = min\{۱۵۰, ۳۳۰ - ۱۸۰\} = ۱۵۰$$

بنابراین مجموعه‌ی افرازهای $N_۱$ و $N_۲$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\{(N_1(\Theta), N_2(\Theta)) | 0 \le \Theta < \pi\}$$

$$= \{(N_1(0), N_2(0)), (N_1(30), N_2(30)), (N_1(60), N_2(60))$$
$$, (N_1(120), N_2(120)), (N_1(150), N_2(150))\}$$

افراز $N_1(0)$ شامل نقطه‌ی تقاضای ۹ به علاوه‌ی تمام نقاط تقاضایی است که با محور x ها، زاویه‌ی $0 \le \Theta_i \le \pi$ می‌سازند.

$$N_1(0) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$$

و

$$N_2(0) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 9\} = \{5, 6, 7, 8\}$$

افراز $N_1(30)$ شامل نقطه‌ی تقاضای ۹ به علاوه‌ی تمام نقاط تقاضایی است که با محور x ها، زاویه‌ی $30 \le \Theta_i \le 210$ می‌سازند.

$$N_1(30) = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$$

$$N_2(30) = N - N_1(30) = \{6, 7, 8\}$$

افراز $N_1(60)$ شامل نقطه‌ی تقاضای ۹ به علاوه‌ی تمام نقاط تقاضایی است که با محور x ها، زاویه‌ی $60 \le \Theta_i \le 240$ می‌سازند.

$$N_1(60) = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$$

$$N_2(60) = N - N_1(60) = \{1, 7, 8\}$$

افراز $N_1(120)$ شامل نقطه‌ی تقاضای ۹ به علاوه‌ی تمام نقاط تقاضایی است که با محور x ها، زاویه‌ی $120 \le \Theta_i \le 300$ می‌سازند.

$$N_1(120) = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

$$N_{۲}(۱۲۰) = N - N_{۱}(۱۲۰) = \{۱, ۲, ۸\}$$

افراز $N_{۱}(۱۵۰)$ شامل نقطه‌ی تقاضای ۹ به علاوه‌ی تمام نقاط تقاضایی است که با محور x ها، زاویه‌ی $۱۵۰ \leq \Theta_i \leq ۳۳۰$ می‌سازند.

$$N_{۱}(۱۵۰) = \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

$$N_{۲}(۱۵۰) = N - N_{۱}(۱۵۰) = \{۱, ۲, ۳\}$$

۴.۵ مسأله‌ی $(۱, ۱)$−میانه روی صفحه

حل مسأله‌ی $(۱, ۱)$−میانه روی صفحه، مشابه با حل مسأله‌ی ۲−میانه روی صفحه است. در مسأله‌ی $(۱, ۱)$−میانه روی صفحه، یك سرویس‌دهنده‌ی موجود از قبل روی صفحه تعیین مکان شده است و به نقاط تقاضا، سرویس‌رسانی می‌کند. هدف، تعیین مکان بهینه‌ی یك سرویس‌دهنده‌ی جدید روی صفحه است؛ طوری که تابع هدف ۱−میانه‌ی شرطی مینیمم شود. برای پیدا کردن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ی جدید، نقاط تقاضا را به دو افراز تقسیم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاضا را به عنوان نقطه‌ی محوری در نظر می‌گیریم.

مجموعه‌ی $\{(N_{۱}(\Theta), N_{۲}(\Theta)) | ۰ \leq \Theta < \pi\}$ را مانند آنچه برای مسأله‌ی ۲−میانه گفته شد؛ به دست می‌آوریم. در هر مرحله، سرویس‌دهنده‌ی موجود قطعا در یکی از افرازها واقع شده است. نقاط تقاضایی که در این افراز هستند؛ به وسیله‌ی سرویس‌دهنده‌ی موجود، سرویس‌رسانی می‌شوند. در افراز بعدی، مسأله‌ی ۱−میانه را با الگوریتم وایزفیلد حل می‌کنیم. برای پیدا کردن جواب بهینه، همه‌ی نقاط تقاضا را به عنوان نقطه‌ی محوری در نظر می‌گیریم و افرازهای مربوط به آن‌ها را به دست می‌آوریم. جواب بهینه برابر با جوابی است که به ازای آن، مجموع مینیمم دو تابع هدف مسأله‌ی ۱−میانه کمترین مقدار شود. بنابراین برای حل مسأله‌ی $(۱, ۱)$−میانه روی صفحه، با استفاده از افراز نقاط تقاضا فقط نیاز به حل یك مسأله‌ی ۱−میانه داریم.

۵.۵ الگوریتم ابتکاری برای حل مسأله‌ی $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$−میانه

برای هر نقطه‌ی تقاضا، نزدیکترین فاصله‌ی نقطه‌ی تقاضا تا سرویس‌دهنده‌ی موجود (که مساوی با D_i است) را به دست می‌آوریم.

مجموعه‌ی نقاط تقاضا را به دو گروه افراز می‌کنیم. گروهی که به سرویس‌دهنده‌های جدید نزدیکتر هستند و گروهی که به سرویس‌دهنده‌های موجود نزدیکترند. الگوریتم با حل مسأله‌ی p−میانه شروع می‌شود. در هر تکرار، همه‌ی نقاط تقاضایی را که به سرویس‌دهنده‌های موجود نزدیکترند؛ از مسأله حذف می‌کنیم و مسأله‌ی p−میانه را روی باقی مانده‌ی نقاط تقاضا حل می‌کنیم. این امر سبب کاهش محاسبات، برای به دست آوردن تابع هدف می‌گردد. روند ادامه می‌یابد تا اینکه هیچ کاهشی در مقدار تابع هدف به وجود نیاید.

الگوریتم ۱: راه حل ابتکاری برای مسأله‌ی (p , q)−میانه

۱) برای هر $i = ۱, ..., n$، D_i را محاسبه کنید.

$$D_i = min_{۱ \leq j \leq q}\{d(x_i, y_j)\}$$

مسأله‌ی p−میانه را روی همه‌ی نقاط تقاضا حل کنید و جواب به دست آمده را به عنوان راه حل آغازین یعنی $z^{(۰)}$ در نظر بگیرید؛ و شمارنده‌ی تکرار را $k = ۰$ در نظر بگیرید.

۲) مجموعه‌ی $I^{(k)} = \{i | min_{۱ \leq j \leq p}\{d(z_j^{(k)}, x_i)\} < D_i\}$ را پیدا کنید و مقدار تابع هدف $F^{(k)} = F(z^{(k)})$ را به صورت زیر محاسبه کنید:

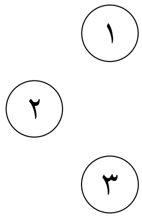
$$F(z) = \sum_{i=۱}^{n} w_i.[min\{min_{۱ \leq j \leq q}\{d(x_i, y_j)\}, min_{۱ \leq j \leq p}\{d(x_i, z_j)\}\}]$$

۳) برای $k > ۰$؛ اگر $F^{(k)} = F^{(k-۱)}$ (یا به کار بردن یك مقدار خطا برای معیار همگرا بودن) با مقدار $z^{(k)}$ به عنوان راه حل ابتکاری توقف کنید.

۴) درغیراین صورت؛ مسأله‌ی p−میانه را روی مجموعه‌ی نقاط تقاضا در $I^{(k)}$ حل کنید و جواب به دست آمده را با $z^{(k+۱)}$ نشان دهید.

۵) قرار دهید $k = k + ۱$ و به گام ۲ بروید.

مثال ۱.۵.۵. در شکل (۱۵)، مسأله‌ی (۱ , ۱)−میانه را با استفاده از الگوریتم ابتکاری حل می‌کنیم. مکان سرویس‌دهنده‌ی موجود روی نقطه‌ی تقاضای ۱ واقع شده است. وزن نقاط تقاضا برابر با ۱ در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۵)

نقطه تقاضای (گره) ۱ با مختصات $X_1 = (x_1, y_1) = (1, 2)$ و نقطه تقاضای ۲ با مختصات $X_2 = (x_2, y_2) = (0, 1)$ و نقطه تقاضای ۳ با مختصات $X_3 = (x_3, y_3) = (1, 0)$ در نظر گرفته شده است.

حل:

$$D_1 = \{d(1, 1)\} = [(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$D_2 = \{d(2, 1)\} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1/4$$

$$D_3 = \{d(3, 1)\} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} = 2$$

حل مسأله‌ی ۱-میانه روی صفحه:

با استفاده از الگوریتم وایزفیلد، مسأله‌ی ۱-میانه روی صفحه را حل می‌کنیم؛ مقدار خطا برای معیار همگرا بودن (در روش نقطه ثابت) را برابر با ۰/۰۱ در نظر می‌گیریم. مقادیر بدست آمده برای x^k ها و y^k ها به صورت جدول زیر می‌باشند.

k	x^k	y^k
۰	۰.۵	۰.۵
۱	۰.۵۹	۰.۷۷
۲	۰.۵۵	۰.۸۹
۳	۰.۵۱	۰.۹۵
۴	۰.۴۸	۰.۹۸
۵	۰.۴۶	۰.۹۹
۶	۰.۴۸	۱

جدول (۱۰)

با توجه به اینکه داریم:

$$|x^{۶} - x^{۵}| < ۰/۰۱$$

و

$$|y^{۶} - y^{۵}| < ۰/۰۱$$

لذا توقف می‌کنیم.
بنابراین جواب اولیه به صورت $z^{(۰)} = (۰/۴۸, ۱)$ انتخاب می‌شود.
با توجه به اینکه فقط نقاط تقاضای ۲ و ۳ در معادله‌ی $d(z^{(۰)}, X_i) < D_i$ صدق می‌کنند.
بنابراین داریم:

$$I^{(۰)} = \{i | min\{d(z^{(۰)}, X_i) < D_i\} = \{۲, ۳\}$$

مقدار $F^{(۰)}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F^{(۰)} = F(z^{(۰)}) =$$

$$۱ \times min\{d(X_۱, X_۱), d(X_۱, z^{(۰)})\} + ۱ \times min\{d(X_۲, X_۱), d(X_۲, z^{(۰)})\}$$

$$+۱ \times min\{d(X_۳, X_۱), d(X_۳, z^{(۰)})\}$$

$$= ۱ \times ۰ + ۱ \times ۱/۴ + ۱ \times ۱/۱۳ = ۲/۵۳$$

مسأله‌ی ۱-میانه روی صفحه را با نقاط تقاضای ۲ و ۳ حل می‌کنیم. نقطه‌ی شروع حل را برابر با $(x^۰, y^۰) = (۰/۵, ۰/۵)$ در نظر می‌گیریم. جواب مسأله با استفاده از الگوریتم وایزفیلد برابر با $z^{(۱)} = (۰/۵, ۰/۵)$ به دست می‌آید.

$$z^{(۱)} = (۰/۵, ۰/۵)$$

$$I^{(۱)} = min\{i|min\{d(z^{(۱)}, X_i) < D_i\}$$

$$d(z^{(۱)}, X_۱) < D_۱$$

$$d(z^{(۱)}, X_۲) < D_۲$$

$$d(z^{(۱)}, X_۳) < D_۳$$

نقاط تقاضای ۲ و ۳ در نامعادله‌ی بالا صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$I^{(۱)} = \{۲, ۳\}$$

$$F^{(۱)} = F(z^{(۱)}) =$$

$$۱ \times min\{d(X_۱, X_۱), d(X_۱, z^{(۱)})\} + ۱ \times min\{d(X_۲, X_۱), d(X_۲, z^{(۱)})\}$$

$$+۱ \times min\{d(X_۳, X_۱), d(X_۳, z^{(۱)})\}$$

$$= ۱ \times ۰ + ۱ \times ۰/۷۱ + ۱ \times ۰/۷۱ = ۱/۴۲$$

چون $F^{(۱)} \neq F^{(۰)}$ لذا مسأله‌ی ۱-میانه را روی مجموعه‌ی نقاط تقاضا در $I^{(۱)}$ حل می‌کنیم. جواب مسأله با استفاده از الگوریتم وایزفیلد برابر با $z^{(۲)} = (۰/۵, ۰/۵)$ به دست می‌آید.

$$I^{(۲)} = \{i|min\{d(z^{(۲)}, X_i) < D_i\}$$

$$d(z^{(۲)}, X_۱) < D_۱$$

$$d(z^{(۲)}, X_۲) < D_۲$$

$$d(z^{(۲)}, X_۳) < D_۳$$

فقط نقاط تقاضای ۲ و ۳ در نامساوی بالا صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$I^{(۲)} = \{۲, ۳\}$$

$$F^{(۲)} = F(z^{(۲)}) =$$

$$۱ \times min\{d(X_۱, X_۱), d(X_۱, z^{(۲)})\} + ۱ \times min\{d(X_۲, X_۱), d(X_۲, z^{(۲)})\}$$

$$+۱ \times min\{d(X_۳, X_۱), d(X_۳, z^{(۲)})\}$$

$$= ۱ \times ۰ + ۱ \times ۰/۷۱ + ۱ \times ۰/۷۱ = ۱/۴۲$$

چون $F^{(۲)} = F^{(۱)}$ ، لذا نقطه‌ی $z^{(۲)} = (۰/۵, ۰/۵)$ به عنوان جواب بهینه انتخاب می‌شود و سرویس‌دهنده‌ی جدید روی این نقطه واقع می‌شود.

۶.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

روش‌های مختلفی برای حل مسائل مکانیابی شرطی روی شبکه‌ها وجود دارد. ولی می‌توان راه حل‌هایی ارائه داد که باعث صرفه جویی در زمان و هزینه شوند و مفهوم بهینه‌سازی در زمان و هزینه توسعه یابد. برای مثال، تعیین مکان مراکز اورژانس، آتش‌نشانی، پلیس، بیمارستان‌ها و ... در داخل یک شهر. اینکه این مراکز در کدام نقاط قرار بگیرند؛ به گونه‌ای که قابل دسترسی به مناطق مسکونی باشند و در عین‌حال کمترین صدمه را به نقاط تقاضا وارد کنند. تمام این مفاهیم و

عمل بهینه‌سازی در زمان و هزینه، با طرح الگوریتم‌هایی برای تعیین مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها نمود می‌یابد. در میان الگوریتم‌های مطرح شده؛ الگوریتمی سودمند است که در زمان کمتر و با هزینه‌ی کمتری قابل اجرا باشد.

مراجع

[1] O. Alp, E. Erkut and Z. Drezner, "An effective genetic algorithm for the p-median problem." Annals of Operations Research, 122: 21-42, 2003.

[2] J.E. Beasley and OR-library, " distributing test problems by electronic mail." Journal of the Operational Research Society 41: 1069-1072, 1990. Also available at: http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/orlib/pmedinfo.html.

[3] O. Berman and Z. Drezner, "A new formulation for the conditional p-median and p-center problems." Operations Research Letters 36: 481-483, 2008.

[4] O. Berman, G. Handler and D. Einva, "The zone constrained location problem on a network." Eur. J. Opl Res. 53: 14-24, 1991.

[5] O. Berman and D. Simchi-Levi, "The conditional location problem on networks." Transportation Science 24: 77-78, 1990.

[6] R.E. Burkard and H. Dollani, "Center problems with pos/neg weights on trees." SFB Report No. 215, Institute of Math. B, Technical University Graz, Febrary, 2001.

[7] R.E. Burkard and H. Dollani, "Robust location problems with pos/neg weights on a tree." Networks, 38: 102-113, 2001.

[8] R.E. Burkard, J. Fathali and H. T. Kakhki, " The p-maxian problem on a tree." In Proceedings of Oper. Res. Lett., 331-335, 2007.

[9] R.E. Burkard and J. Krarup, "A linear algorithm for the pos/neg-weighted 1-median problem on a cactus." Computing, 60: 193-215, 1998.

[10] P. Cappanera, ”A survey on obnoxious facility location problems.” Thechnical Report: TR- 99-11, Department of Computer Science, University of Piza, 1999.

[11] R. Chandrasekran and A. Tamir, ”Polynomially bounded algorithms for locating p-center on a tree.” Mathematical Programming 22: 304-315, 1982.

[12] R. Chen, ”Conditional minimum and minimax location-allocation problems in Euclidean space.” Transportation Sci. 22: 157-160, 1988.

[13] R. Chen and G.Y. Handler, ”The conditional p-center in the plane.”, Naval Research Logistics 40: 117-127, 1993.

[14] N. Christofides, Graph Theory, an Algorithmic Approach, Academic, New York, 1975.

[15] J. Current, M. Daskin and D. Schilling, ”Discrete network location models.” Chapter 3 in: Facility Location Theory and Methods. Z. Drezner and H. Hamacher (eds.), 2001. Chicago University Press, Chicago, Illinois, 1929.

[16] M.S. Daskin, Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications. John Wiley, New York, 1995.

[17] C. Dibble and P.J. Densham, ”Generating interesting alternatives in GIS and SDSS using genetic algorithms.” GIS/LIS symposium, University of Nebraska, Lincoln, 1993.

[18] W. Domschke and A. Drexl, Location and layout planning, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 134-238, 1985.

[19] P. D. Dowling and R. F. Love, ”Bounding methods for facilities location algorithms.” Naval Res. Logist. Q. 33: 775-787, 1986.

[20] Z. Drezner, ”On the modified one-center model.” Mgmt Sci. 27: 848-851, 1981.

[21] Z. Drezner, ”Competitive location strategies for two facilities.” Regional Sci. Urban Econom. 23: 485-493, 1982.

[22] Z. Drezner, ”The p-center problem-heuristic and optimal algorithms.” J. Opl Res. Soc. 35: 741-748, 1984.

[23] Z. Drezner, ”The planar two-center and two-median problems.” Transportation Sci. 18: 351-361, 1984.

[24] Z. Drezner, ”The p-cover problem.” Eur. J. Opl Res. 26: 312-313, 1986.

[25] Z. Drezner, "On the conditional p-center problem," Trans. Sci. 23: 51-53, 1989.

[26] Z. Drezner, "A note on the weber location problem." Ann. Ops Res. 40: 153-161, 1992.

[27] T. Drezner, "Locating a single new facility among existing, unequally attractive facilities." J. Regional Sci. 34: 237-252, 1994.

[28] Z. Drezner, "On the conditional p-median problem." Computers and Operations Research 22: 525-530, 1995.

[29] Z. Drezner and E. Zemel. "Competitive location in the plane." Ann. Ops Res. 40: 173-193, 1992.

[30] Z. Drezner and H. Hamacher, Facility location: Application and Theory. Springer-Verlage, Berlin: 2002.

[31] D. J. Elzinga and D. W. Hearn, "On stopping rules for facilities location algorithms." IIE Trans. 15: 81-83, 1983.

[32] D. Erlenkotter, "A dual-based procedure for uncapacitated facility location." Operations Research 26: 992-1009, 1978.

[33] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernighan, AMPL a Modeling Language for Mathematical Programming. The Scientific Press, South San Francisco 1993.

[34] R. Francis, Jr. L. F. Mcginnis and J. A. White, Facility Layout and Location: an Analytical Approach. Prentice Hall, 1992.

[35] R. D. Galvao, "The use of lagrangean relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems." Location Science 1: 57-79, 1993.

[36] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guid to the Theory of NP-Completeness. Freeman, San Francisco, California, 1979.

[37] R. S. Garfinkel, A. W. Neebe, and M. R. Rao, "The m-center problem: Minimax Facility location," Manag. Sci. 23: 1133-42, 1977.

[38] B. Gavish and S. Sridhar, "Computing the 2-median on tree networks is O(n log n) time." Networks, 26: 305-317, 1995.

[39] A. J. Goldman, "Optimal center location in simple networks." Transportation Sci. 5: 212-221, 1971.

[40] S. L. Hakimi, "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph." Operations Research, 12: 450-459, 1964.

[41] S. L. Hakimi, ”Optimum distribution of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems,” Oper. Res. 13: 462-475, 1965.

[42] S. L. Hakimi, ”On locating new facilities in a competitive environment.” Eur. J. Opl Res. 12: 29-35, 1983.

[43] T. Hale, Trevor Hale’s Location Science References.
http:// www.ent.ohiou.edu 2004.

[44] H. W. Hamacher and S. Nickel, ”Classification of location models.” Location Sci. 6: 229-242, 1998.

[45] Y. G. Handler and P. B. Mirchandani, Location on Networks Theory and Algorithms, The MIT Press, Cambridge, Mass 1979.

[46] P. Hansen, M. Labbe, D. Peeters and J. F. Thisse, ”Single facility location on networks.” Annals of Discrete Math, 31: 113-146, 1987.

[47] P. Hansen and N. Meladenovic, ”Variable neighborhood search for the p-median.” Location Sci. 5: 207-226, 1997.

[48] M. Hosage and M. F. Goodchild, ”Discrete space location-allocation solutions from genetic algorithms.” Annals of Operational Research, 6: 35-46, 1986.

[49] H. Jeul, ”On a rational stopping rule for facilities location algorithms.” Naval Res. Logist. Q. 31: 9-11, 1984.

[50] O. Kariv and S. L. Hakimi, ”An algorithmic approach to network location problems. Part I: p-centers.” SIAM J. Appl. Math. 37: 513-538, 1979.

[51] J. Krarup and P. M. Pruzan, ”The simple plant location problem: Survey and synthesis.” EJOR, 12: 36-81, 1983.

[52] A. A. Kuehn and M. J. Hamburger, ”A heuristic program for locating warehouses.” Management Science. 9: 643-666, 1963.

[53] C. C. Lin, ”A note about the new emergency facility insertion in an undirected connected graph,” in Sixth Annual Pittsburgh Conference on Modelling Simulation, Pittsburgh, Penna 1975.

[54] R. F. Love and P. D. Dowling, ”A new bounding method for single facility location models.” Presented at the Isolde iv Conference, Namur. Belgium 1987.

[55] R. F. Love and W. Y. Yeong, ”A stopping rule for facilities location algorithms.” Aiie Trans. 13: 357-362, 1981.

[56] R. F. Love, J. G. Morris and G. O. Wesolowsky, Facilities Location, Models and Methods. North-Holland, Amsterdam 1988.

[57] F. E. Maranzana, ”On the location of supply points to minimize transport costs.” Operational Research Quarterly, 15: 261-270, 1964.

[58] E. Minieka, ”The m-center problem.” SIAM Review 12: 138-139, 1970.

[59] E. Minieka, ”The centers and medians of a graph,” Oper. Res. 25: 641-650, 1977.

[60] E. Minieka, ”Optimization algorithms for networks and graphs.” Marcel Dekker, New York, 1978.

[61] E. Minieka, ”Conditional centers and medians on a graph,” Networks 10: 265-272, 1980.

[62] P. B. Mirchandani and R. Francis, Discrete Location Theory, J. Wiley, 1990.

[63] P. B. Mirchandani and A. Oudjit, ”Localizing 2-medians on probabilistic and deterministic tree networks.” Networks, 10: 329-350, 1980.

[64] J. A. Moreno-Perez, J. M. Moreno-Vega and N. Meladenovic, ”Tabu search and simulated annealing in p-median problems.” Talk at the Canadian Operational Research Society Conference, Montral, 1994.

[65] A. Okabe, B. Boots and K. Sugihara, ”Spatial tessellations-concepts and applications of voronoi diagrams.” John Wiley Sons, Chichester, U.K. 1992.

[66] S. H. Owen and M. S. Daskin, ”Strategic facility location: A review.” EJOR, 111: 423-447, 1998.

[67] B. Pelegrin, ”Heuristic methods for the p-center problem.” RAIRO Recherche Operationelle 25: 65-72, 1991.

[68] W. L. Price, Graphs and Networks, Auerbach, Princeton, NJ, 1971.

[69] C. S. Revelle and R. W. Swain, ”Centeral facilities location.” Geographical Analysis 2: 30-42, 1970.

[70] E. Rolland, D. A. Schilling and J. R. Current, ”An efficient tabu search heuristic for the p-median problem.” EJOR, 96: 329-342, 1997.

[71] M. P. Scaparra and M. G. Scutella, "Facilities, locations, customers: Building blocks of location models: A survey." Thechnical Report: tr-01-18, University of Piza, Italy, 2001.

[72] E. L. Senne and L. A. N. Lorena, "Lagrangean/surrogate heuristics for p-median problems." Chapter 3 in: Computing tools for modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in computer science and operations research, M. Laguna and J. L. Gonzalez-velarde (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2000.

[73] A. Tamir, "Improved complexity bounds for center location problems on networks by using dynamic data structures." SIAM journal of Discrete Mathematics 1: 377-396, 1988.

[74] A. Tamir, "An $o(pn^2)$ algorithm for the p-median and related problems on tree graphs." Operations Research Letters, 19: 59-64, 1996.

[75] B. C. Tansel, R. L. Francis and T. J. Lowe, "Location on networks: A survey." Management Sci, 29: 482-511, 1983.

[76] M. B. Teitz and P. Bart, "Heuristic methods for estimating generalized vertex median of a weighted graph." Operations Research, 16: 955-961, 1968.

[77] C. D. T. Watson-gandy, "Heuristic procedures for the m-partial cover problem on the plane." Eur. J. Opl Res. 11: 149-157, 1982.

[78] A. Weber, "Uber den standort der industrient." Tubingen, 1909, English trans: Theory of location of industries, (G. J. Friedrich, ed. and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois, 1929.

[79] E. Weiszfeld, "Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnes est minimum." Tohoku Math. J. 43: 335-386, 1937.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزمند .... Greedy
ابتکاری .... Heuristic
ابتکاری سازنده .... Constructive heuristics (CH)
ابتکاری کلاسیک .... Classical heuristics
اصلاح‌شده .... Modified
NP–سخت .... NP-hard
اندازه‌ی ماتریس .... Size of matrix
برنامه‌ریزی خطی .... Linear programming
برنامه‌ریزی ریاضی .... Mathematical programming (MP)
برنامه‌ریزی غیرخطی .... Nonlinear programming
بهینه‌سازی .... Optimization
پوش‌بالایی .... Upper envelope
p–شعاع رأسی .... Vertex p-radius
p–شعاع مطلق .... Absolute p-radius
p–ماکسین .... P-maxian
p–ماکسین شرطی .... Conditional p-maxian
p–ماکسین غیرشرطی .... Unconditional p-maxian
p–مرکز .... P-center
p–مرکز رأسی .... Vertex p-center

p–مرکز شرطی .... Conditional p-center
p–مرکز غیرشرطی .... Unconditional p-center
p–مرکز مطلق .... Absolute p-center
p–میانه .... P-median
p–میانه‌ی شرطی .... Conditional p-median
p–میانه‌ی غیرشرطی .... Unconditional p-median
تابع فاصله .... Distance function
تابع فاصله‌ی نقطه-رأس .... Point-Vertex distance function
تابع فاصله‌ی نقطه-رأس شرطی .... Conditional point-vertex distance function
تابع فاصله‌ی نقطه-یال .... Point-Edge distance function
تابع مقعر .... Concave function
تابع هدف .... Objective function
تابع قطعه به قطعه خطی .... Piecewise linear function
جانشینی رأس .... Vertex substitution
جستجوی محلی .... Local search (LS)
جستجوی همسایگی .... Neighborhood search
جواب بهینه .... Optimal solution
جهت‌دار .... Directed
خدمات .... Service
خط کامل .... Full-line
دانتزیگ .... Dantzig
درخت .... Tree
رأس .... Vertex
زیردرخت .... Subtree
ستون ماتریس .... Column of a matrix
سرویس‌دهنده .... Facility

سرویس‌دهنده‌ی جدید	New facility
سرویس‌دهنده‌ی موجود	Existing facility
سطر ماتریس	Row of a matrix
شبکه	Network
شرطی	Conditional
(ضریب زاویه) شیب	Slope
عناصر ماتریس	Matrix element
غیرجهت‌دار	Undirected
غیرشرطی	Unconditional
فاصله	Distance
فاصله‌ی رأس-یال شرطی	Conditional vertex-edge distance
فاصله‌ی کلی	Total distance
فاصله‌ی نقطه-رأس	Point-vertex distance
فراابتکاری	Metaheuristics (MH)
آزادسازی لاگرانژ	Lagrangean relaxatin
کلی	Total
گراف	Graph
گراف جهت‌دار	Directed graph
گراف غیرجهت‌دار	Undirected graph
گره	Node
ماتریس	Matrix
ماتریس رأس-یال	Vertex-Edge matrix
ماتریس فاصله	Distance matrix
ماتریس فاصله‌ی اصلاح‌شده	Revised distance matrix
ماتریس فاصله‌ی رأس-یال	Vertex-Edge distance matrix
ماتریس فاصله‌ی شرطی	Conditional distance matrix

ماتریس کوتاهترین فاصله .... Shortest distance matrix
ماتریس کوتاهترین فاصله‌ی اصلاح‌شده .... Modified shortest distance matrix
ماکزیمم .... Maximum
ماکسین .... Maxian
ماکسین شرطی .... Conditional maxian
ماکسین غیرشرطی .... Unconditional maxian
متغیر .... Variable
متقارن .... Symmetric
مجموع .... Sum
مجموعه .... Set
مجموعه‌ی متناهی .... Finite set
مجموعه‌ی نامتناهی .... Infinite set
محدودیت .... Constraint
مدل‌بندی .... Modeling
مرکز .... Center
مرکز شرطی .... Conditional center
مرکز کلی .... General center
مرکز کلی شرطی .... Conditional general center
مرکز محلی .... Local center
مرکز مطلق .... Absolute center
مرکز مطلق شرطی .... Conditional absolute center
مرکز مطلق کلی .... General absolute center
مرکز مطلق کلی شرطی .... Conditional general absolute center
مسیر .... Path
معیار بهینگی .... Optimality criterion
معیار توقف .... Termination criterion

مقعر .... Concave
مکان بالقوه .... Potential location
مکانیابی .... Location
مکانیابی شرطی .... Conditional location
مکانیابی غیرشرطی .... Unconditional location
میانه .... Median
میانه‌ی شرطی .... Conditional median
میانه‌ی غیرشرطی .... Unconditional median
میانه‌ی کلی .... General median
میانه‌ی مطلق .... Absolute median
میانه‌ی کلی شرطی .... Conditional general median
میانه‌ی مطلق شرطی .... Conditional absolute median
میانه‌ی مطلق کلی .... General absolute median
میانه‌ی مطلق کلی شرطی .... Conditional general absolute median
مینیمم .... Minimum
نقاط تقاضا .... Demand point
نقطه‌ی بهینه .... Optimum point
نقطه‌ی عطف .... Inflection point
نقطه‌ی محوری .... Pivot point
وزن‌دار .... Weighted
یال .... Edge
یال بالایی .... Top edge

Surname: Ziyanloo Name: Somaye

Title: Conditional location on networks

Supervisor: Dr. Jafar Fathali

Advisor: S. Reza Musawi

Degree: Master of Science Subject: Applied Mathematics

Field: Operations Research

Shahrood University of Technology Faculty of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of Pages: 92

Keywords: Location; Conditional p-median; Conditional p-center; Conditional p-maxian; Conditional absolute median; Conditional absolute center; Conditional general median; Conditional general center; Conditional general absolute median; Conditional general absolute center

Abstract

Location problem is one of the most important problems in operations research and has many applications in the real world, such as locating of fire stations, police stations, emergency centers, hospitals, goods distribution centers, bus stops, subway stations, official centers, server in computer networks, post offices, garbage disposal centers, nuclear palnts and etc. Two significant instances problem of location theory are p-median and p-center problems. In Conditional location problems, a number of facilities already exist in the network, and our goal is to determine the location of new facilities in the network. In this thesis we described the issues and ways to resolve them, and to issue conditional p-maxian on the networks can offer two solutions.

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

Conditional location on networks

supervisor

Dr. Jafar Fathali

Advisor

S. Reza Musawi

by

Somaye Ziyanloo

2013