دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان

هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر فینسلری ناوردای چپ

نگارش

نرگس فتحی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی
دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

شهریور ۱۳۹۱

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم و جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حجازی و جناب آقای دکتر موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و جناب آقای دکتر شریفی و جناب آقای دکتر طیبی که داوری این رساله را بر عهده داشتند نهایت تشکر را دارم.

همچنین از پدر و مادر عزیز ، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب ، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم سپاسگزاری می نمایم و از همسر مهربانم و خواهران و برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان نهایت تشکر را دارم.

نرگس فتحی
شهریور ۱۳۹۱

تقدیم

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:
خانواده مهربانم به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و همسر عزیزم که در این راه همراه و حامی من بود.
بار الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته ی آنان جامه ی عمل بپوشانم .
پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما .

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی هندسه ریمانی و فینسلری پرداخته ایم. سپس هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر فینسلری ناوردای چپ را مورد مطالعه قرار می دهیم و التصاق چرند-راند، تانسور انحنا، انحنای پرچمی، تانسور ریچی و ژئودزیک این گونه فضا ها را ارائه می دهیم. در انتها به بررسی متر های راندرز از نوع بروالد روی گروه های لی ۵− بعدی پوچتوان از رده ۲می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: جبر لی پوچتوان از رده۲، متر فینسلری ناوردای چپ، انحنای پرچمی فضاهای فینسلری.

مقالات مستخرج

۱- هندسه گروه های لی ۵ بعدی پوچ توان از رده ۲، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

۲- متر های فینسلری ناوردا روی فضاهای فینسلری مختلط متقارن، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

پیشگفتار

هندسه ای که ریمان [۱] آن را برای اولین بار مطرح ساخت و بنام هندسه ریمانی معروف گردید در حقیقت تعمیم مطالبی بنام هندسه دیفرانسیل رویه ها است که توسط گاوس [۲] مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می گردد که تو سط این ضرب می توان طول بردارهای مماس بر رویه در $R^۳$را بدست آورد. این ضرب داخلی را معمولا توسط $\langle\, ,\rangle$ نمایش می دهند. از خواص جالب توجه این ضرب آن است که کلیه خواص هندسی رویه ها ازجمله طول قوس یک منحنی $\gamma(t)$ در روی هر رویه را نیز می توان با استفاده از آن بدست آورد.

$$L = \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle^{\frac{۱}{۲}}\, dt$$

مفاهیم دیگری نیز با استفاده از این ضرب داخلی در رویه تعریف می شوند که عبارتند از مساحت یک رویه، زاویه بین دو منحنی، انحنای رویه و غیره. طول قوس یک خم و روش محاسبه آن اساس تعریف خواص هندسی آن فضاست. به عبارت دقیقتر وقتی روشی یا فرمولی برای محاسبه طول قوس یک خم در یک فضا ارائه می دهیم یک نوع ضرب داخلی یا متر روی آن فضا تعریف کرده ایم. با استفاده از این متر می توان کلیه خواص هندسی دیگر آن فضا را تعریف نمود. لذا می توان گفت که به نوعی با ارائه یک متر در یک فضا در حقیقت هندسه آن فضا را معرفی کرده ایم. در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعدها منجر به تعریف انتگرال ریمان و متر ریمان گردیده، موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود.

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آنها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در این پایان نامه یکی از آنها به نام متر فینسلری مورد بررسی قرار می گیرد. مطالعه متر فینسلر ابتدا توسط جی . اف. بی. ریمان در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آنجائیکه او عقیده داشت که مفهوم متر که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما با توجه به این که این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. ازجمله این افراد پل فینسلر [۳] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۴] و

---

[۱] Riemann
[۲] Gauss
[۳] Paul Finsler
[۴] Constantin Caratheodory

قضیه اولر توانست تعریف مدونی از این متر را ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. وی ثابت کرد که این تابع ریمان در هر نقطه $x \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $F^۲ = g_{ij}(x,y)y^i y^j$ روی T_xM تعریف می کند.

یکی از موضوعات جالب و اساسی در ریاضیات مدرن، تئوری گروه ها و جبر های لی متناهی البعد است که آن را می توان در کارهای سوفوس لی [۵] مشاهده کرد. منشا این تئوری را می توان در اندیشه ها و ایده های لی از تئوری گالیس [۶] در معادلات دیفرانسیل و در برنامه ارلانگر [۷] کلین [۸] از مباحث گروه های متقارن جست و جو کرد.

شیوه ها و روش های لی در بسیاری از مسائل آنالیز و هندسه در حالت موضعی بوده اند، اما در اوایل قرن بیستم ای. کارتان و ویل [۹] روش سیستماتیکی از جنبه های سراسری لی را آغاز کردند. از این پس این تئوری شاخه های زیادی پیدا کرد که اکنون این مفاهیم و روش ها ریاضیات و فیزیک نظری را فرا گرفته است.

در زمینه متر های ریمانی و فینسلری ناوردا روی منیفلد های همگن در حالت خاص گروه لی در سال های اخیر کارهای زیادی انجام شده که در زیر به برخی از آنها اشاره می کنیم. مقالات دنگ و هو [۱۰] [۴، ۵، ۶] و مقالات اسرافیلیان و سلیمی مقدم [۹، ۱۰] و مقاله سلیمی مقدم [۲۱] از این قبیلند.

گروه های لی پوچتوان در بسیاری از زمینه های ریاضیات نقش مهمی ایفا می کنند و مخصوصا گروه های لی پوچتوان از رده ۲ اهمیت بسزایی در ریاضیات دارند. در زمینه گروه های لی پوچتوان کارهای زیادی صورت گرفته ازجمله جی. ولف [۱۱] در [۲۵] ثابت کرده است که هر گروه لی پوچتوان ناآبلی انحنای برشی منفی و مثبت می پذیرد و میلنور [۱۲] [۱۹] این نتایج را در مورد انحنای ریچی گسترش داد.

در سال های اخیر در زمینه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر های ریمانی و فینسلری ناوردای چپ مقالات زیادی وجود دارد که در ادامه به برخی از آنها اشاره می کنیم. پ. ابرلاین [۱۳] در [۷، ۸] هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ را مورد بررسی قرار داده اند.

---

[۵] Sophus Lie
[۶] Galois
[۷] Erlanger program
[۸] Klein
[۹] E. Cartan and Weyl
[۱۰] Deng and Hou
[۱۱] J.Wolf
[۱۲] Milnor
[۱۳] P. Eberlein

در ادامه توضیح مختصری در مورد مطالب این پایان نامه ارائه داده می شود. در فصل اول، مفاهیم مقدماتی مرتبط با هندسه ریمانی و گروه و جبر لی پوچتوان از رده ۲ بیان خواهد شد و فصل دوم نیز شامل مفاهیم اساسی هندسه فینسلری خواهد بود. در فصل سوم هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با منر فینسلری ناوردای چپ مورد بررسی قرار خواهد گرفت و در فصل آخر به بررسی متر های راندرز روی گروه های لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ به عنوان مثال خاصی از فصل سوم پرداخته خواهد شد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اساسی گروه و جبر لی و هندسه ریمانی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم مقدماتی گروه و جبر لی بیان خواهد شد و در ادامه مفاهیم اولیه و قضیه هایی از هندسه ریمانی که در فصل های بعدی مورد نیاز است، ذکر خواهد شد و در انتهای فصل نیز هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲.۱ مفاهیم اساسی گروه و جبر لی

در این بخش ابتدا گروه و جبرلی را تعریف می کنیم و پس از آن مفاهیم مرتبط را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. (گروه لی). منیفلدG، را یک گروه لی می نامیم اگر دارای یک ساختار گروه باشد و تابع $\theta : G \times G \longrightarrow G$ تعریف شده به وسیله $(a,b) \to ab^{-1}$ هموار باشد. تابع θ را تابع ضرب می نامیم.

به ازای هر $\mathfrak{g} \in G$ تابع $L_{\mathfrak{g}} : G \longrightarrow G$ تعریف شده به وسیله $a \to \mathfrak{g}a$ را انتقال چپ [1] توسط $\mathfrak{g}$ می نامیم.

به ازای هر $\mathfrak{g} \in G$تابع $R_{\mathfrak{g}} : G \longrightarrow G$ تعریف شده بوسیله $a \to a\mathfrak{g}$ را انتقال راست [2] توسط$\mathfrak{g}$ می نامیم.

در زیر مثال های از گروه لی را بیان می کنیم.

مثال ۲.۲.۱. $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid detA \neq 0\}$ یک گروه لی $n^{2}-$ بعدی است.

[1] left translation
[2] right translation

مثال ۳.۲.۱. $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid detA = ۱\}$ یک زیرگروه لی $(n^۲ - ۱)-$ بعدی از $GL(n,R)$ است.

مثال ۴.۲.۱. $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\}$ یک زیرگروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}-$ بعدی از $GL(n,R)$ است.

تعریف ۵.۲.۱. (جبر لی). [۱۳] فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد و $[,] : V \times V \longrightarrow V$ نگاشتی R دوخطی با خواص زیر باشد.

$$[X,Y] = -[Y,X] \qquad \forall X,Y \in V$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = ۰ \qquad \forall X,Y,Z \in V \qquad \text{(اتحاد ژاکوبی)}$$

دوتایی$(V,[,])$ را یک جبر لی می نامیم.

در ادامه مثال هایی از جبر لی را بیان خواهیم کرد.

مثال ۶.۲.۱. [۱۳] فضای برداری $M_{n\times n}(R)$ همراه با براکت

$$[A,B] = AB - BA \qquad \forall A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

یک جبر لی $n^۲$ -بعدی است.

مثال ۷.۲.۱. [۱۳] فضای برداری $\mathcal{X}(M)$ (فضای همه میدان های برداری روی منیفلد M) همراه با براکت

$$[X,Y]f = XY\ f - YX\ f \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

یک جبر لی نامتناهی البعد است.

مثال ۸.۲.۱. [۱۳] اگر $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ جبر های لی باشند، آنگاه $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ همراه با براکت

$$[(X,Y),(X',Y')] = ([X,X'],[Y,Y']) \qquad \forall X,X' \in \mathcal{G},\ Y,Y' \in \mathcal{H}$$

یک جبر لی خواهد بود.

اکنون فرض کنیم G یک گروه لی باشد، میدان برداری هموار $X \in \mathcal{X}(G)$ را میدان برداری ناوردای چپ [۳] می نامیم اگر تحت همه انتقال های چپ، ناوردا باشد یعنی

$$d\, L_{\mathfrak{g}} X = X \qquad \forall \mathfrak{g} \in G$$

لم ۹.۲.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد و مجموعه همه میدان های ناوردای چپ روی G را با نماد $\mathcal{G}$ نمایش دهیم. آنگاه $\mathcal{G}$ یک زیر جبر لی از $\mathcal{X}(G)$ خواهد شد.

اثبات. به [۱۴] رجوع شود. □

$\mathcal{G}$ معرفی شده در لم بالا، جبر لی گروه لی G نامیده می شود و ثابت می شود یک فضای برداری متناهی البعد است .

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد و $\mathcal{G}$ جبر لی متناظر آن باشد، نگاشت $F : \mathcal{G} \to T_eG$ که $X \to X_e$ می برد، یک یکریختی فضای برداری است. بنابر این $\mathcal{G}$ متناهی البعد است و با G هم بعد می باشد.

اثبات. به [۱۴] رجوع شود. □

قبل از تعریف نگاشت نمائی گروه لی ، مفاهیم مقدماتی و قضیه های مرتبط با آن را ذکر خواهیم کرد.

تعریف ۱۱.۲.۱. (خم انتگرال [۴]). فرض کنید M یک منیفلد و $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ یک خم هموار تعریف شده روی بازه I باشد. بوضوح $c^{\cdot} : I \subset \mathbb{R} \to TM$ نیز هموار می باشد.

خم هموار $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ ، را یک خم انتگرال از میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ نامیم اگر در شرط زیر صدق کند.

$$c^{\cdot}(t) = X(c(t)) \qquad \forall t \in I.$$

لم ۱۲.۲.۱. فرض کنید X یک میدان برداری روی منیفلد M باشد، آنگاه برای هر $p \in M$، بازه باز I_p شامل صفر و خم انتگرال از X، $c_p : I_p \to M$ با شرط $c_p(۰) = x$ وجود دارد. اگر I_p ماکسیمال باشد، آنگاه c_p منحصر به فرد خواهد بود.

[۳] Left-invariant vector field
[۴] Integral Curves

اثبات. به [۱۴] مراجعه شود. □

اگر H, G گروه های لی باشند، یک هومورفیسم گروه لی از H به G عبارتست از نگاشت هموار $K : H \to G$ طوری که هومورفیسم گروه نیز باشد.

اگر $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ جبر های لی باشند، نگاشت خطی $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ را هومورفیسم جبر لی می نامیم اگر

$$F[X, Y] = [FX, FY].$$

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ جبر های لی باشند و $(E_1, \cdots E_n)$ پایه ای برای $\mathcal{G}$ باشد و $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه F یک هومورفیسم جبر لی است اگر و فقط اگر

$$F[E_i, E_j] = [FE_i, FE_j].$$

اثبات. به [۱۳] رجوع شود. □

در قضیه بعدی نشان خواهیم داد که هومورفیسم بین گروه های لی، بین جبر های لی آنها هومورفیسم جبر لی القا می کند.

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید G و H گروه های لی و $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ جبرهای لی متناظرشان باشند و فرض کنید نگاشت $F : G \to H$ یک هومورفیسم گروه لی باشد، آنگاه برای هر $X \in \mathcal{G}$ ، میدان برداری منحصر به فردی در $\mathcal{H}$ چنان موجود است که با X ، F - مرتبط می باشد و علاوه بر این نگاشت $d\,F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ یک هومورفیسم جبر لی خواهد بود.

اثبات. به [۱۳] رجوع شود. □

نگاشت $d\,F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ در قضیه قبلی را هومورفیسم جبر لی القایی [۵] می نامیم.

قضیه ۱۵.۲.۱. (خواصی از هومورفیسم القایی). فرض کنید G یک گروه لی باشد در این صورت:

(۱) هومورفیسم $d\,Id_G : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ القاشده بوسیله نگاشت همانی از G ، همانی $\mathcal{G}$ است.

[5] induced Lie algebra homomorphism

(۲) اگر نگاشت های $F_1 : G \to H$ و $F_2 : H \to K$ هومومورفیسم های گروه لی باشند، آنگاه

$$d\,(F_1 \circ F_2) = d\,F_1 \circ d\,F_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{K}.$$

اثبات. به [۱۳] رجوع شود. $\square$

هومومورفیسم گروه لی $T : G \to GL(V)$ را یک نمایش از گروه لی G روی فضای برداری متناهی البعد V می نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. (زیر گروه یک پارامتری[۶]). فرض کنید G یک گروه لی باشد، هومومورفیسم گروه لی $F : (R, +) \to G$، را یک زیر گروه یک پارامتری از G می نامند.

قضیه ۱۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد و $X \in \mathcal{G}$ ، خم انتگرال از X با شروع از نقطه e ، یک زیر گروه یک پارامتری از G خواهد بود.

اثبات. به [۱۴] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۸.۲.۱. هر زیر گروه یک پارامتری از گروه لی G ، یک خم انتگرال از میدان برداری ناوردای چپ است. بنابراین تناظر یک به یک زیر وجود دارد.

$$\{\text{زیر گروه های یک پارامتری از گروه لی} G\} \longleftrightarrow \mathcal{G} \longleftrightarrow T_eG$$

اثبات. به [۱۴] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید G یک گروه لی و $\mathcal{G}$ جبر لی متناظر آن باشد، نگاشت $\exp : \mathcal{G} \to G$، تعریف شده به وسیله $\exp X = F(1)$، نگاشت نمائی[۷] گروه لی G نامیده می شود ، که در آن F بیانگر یک زیر گروه یک پارامتری تولید شده بوسیله X می باشد.

[۶] One-Parameter Subgroup
[۷] exponential map

قضیه ۲۰.۲.۱. فرض کنید G یک گروه لی با جبر لی متناظر $\mathcal{G}$ باشد:

(۱) نگاشت نمائی، یک نگاشت هموار از جبر لی $\mathcal{G}$ به گروه لی G است.

(۲) برای هر $X \in \mathcal{G}$، $F(t) = \exp(tX)$ یک زیر گروه یک پارامتری از G تولید شده به وسیله X است.

(۳) برای هر $X \in \mathcal{G}$، $\exp(s+t)X = \exp(sX) + \exp(tX)$.

(۴) $d\exp : T_\circ\mathcal{G} \to T_eG$ یک نگاشت همانی خواهد بود.

اثبات. به [۱۴] رجوع شود. □

قضیه ۲۱.۲.۱. (فرمول کامپبل-بیکر-هاسدورف[۸]). فرض کنید G یک گروه لی با جبر لی متناظر $\mathcal{G}$ باشد، برای عدد مختلط z نزدیک ۱ تابع f را به این صورت $f(z) := \dfrac{log(z)}{z-۱} = \sum_{n\geqslant \circ} \dfrac{(-۱)^n}{n+۱}(z-۱)^n$ درنظر می گیریم. سپس برای X و Y نزدیک صفر در $\mathcal{G}$ داریم، $\exp X.\exp Y = \exp C(X,Y)$، که در آن :

$$\begin{aligned}
C(X,Y) &= Y + \int_\circ^۱ f(e^{t.adX}.e^{adY}).Xdt \\
&= X + Y + \sum_{n\geqslant\circ} \frac{(-۱)^n}{n+۱} \int_\circ^۱ \Big(\sum_{\substack{k,l\geqslant\circ \\ k+l\geqslant ۱}} \frac{t^k}{k!l!}(adX)^k(adY)^l \Big)^n Xdt \\
&= X + Y + \sum_{n\geqslant\circ} \frac{(-۱)^n}{n+۱} \sum_{\substack{k_۱,\cdots,k_n\geqslant\circ \\ l_۱,\cdots,l_n\geqslant\circ \\ k_i+l_i\geqslant ۱}} \frac{(adX)^{k_۱}(adY)^{l_۱}\cdots(adX)^{K_n}(adY)^{l_n}}{(k_۱\cdots k_n+۱)+k_۱!\cdots k_n!l_۱!\cdots l_n!}X \\
&= X + Y + \frac{۱}{۲}[X,Y] + \frac{۱}{۱۲}([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]) + \cdots
\end{aligned}$$

اثبات. به [۱۸] مراجعه شود. □

برای تعریف گروه لی پوچتوان نیاز به مفاهیمی هست که در زیر به معرفی آنها می پردازیم.

[۸] Campbell-Baker-hausdorff formula

تعریف ۲۲.۲.۱. (نمایش الحاقی گروه لی). [۱۴] فرض کنیم G یک گروه لی باشد، برای هر $\mathfrak{g} \in G$، نگاشت مزدوج $C_{\mathfrak{g}} :$ $G \to G$ ، که توسط $C_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}^{-1}$ تعریف می شود، یک همومورفیسم گروه لی است.

همومورفیسم جبر لی القائی نگاشت مزدوج $C_{\mathfrak{g}}$ را با $Ad(\mathfrak{g}) = (C_{\mathfrak{g}})_* : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ نمایش می دهیم.

به ازای هر $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in G$ ، $C_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}} = C_{\mathfrak{g}} \circ C_{\mathfrak{h}}$ است، پس $Ad(\mathfrak{g}\mathfrak{h}) = Ad(\mathfrak{g}) \circ Ad(\mathfrak{h})$.

بنابراین نگاشت $Ad : G \to GL(\mathcal{G})$ یک نمایش است، که نمایش الحاقی [۹] G نامیده می شود.

تعریف ۲۳.۲.۱. (نمایش الحاقی جبر لی[۱۰]). [۱۴] نگاشت $ad : \mathcal{G} \to \mathcal{GL}(\mathcal{G})$ تعریف شده به وسیله $ad(X)Y = [X, Y]$ را نمایش الحاقی جبر لی $\mathcal{G}$ می نامیم.

قضیه ۲۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و$\mathcal{G}$ جبر لی متناظر آن باشد و $Ad : G \to GL(\mathcal{G})$ نمایش الحاقی گروه لی G باشد، آنگاه نمایش جبر لی القائی $Ad_* : \mathcal{G} \to \mathcal{GL}(\mathcal{G})$ به این صورت $Ad_* = ad$ بیان می شود.

اثبات. به [۱۴] مراجعه شود. $\square$

در ادامه به تعریف برخی مفاهیم اساسی مورد بحث مانند جبر و گروه لی پوچتوان می پردازیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. (درون ریختی پوچتوان[۱۱]). [۱۱] فرض کنید V فضای برداری حقیقی متناهی البعد باشد، درون ریختی $N \in Hom(V, V)$ پوچتوان نامیده می شود اگرعددصحیح مثبت K وجود داشته باشد که $N^K = ۰$.

تعریف ۲۶.۲.۱. (جبر لی پوچتوان[۱۲]). [۱۱، ۷] جبر لی متناهی البعد $\mathcal{N}$ روی اعداد حقیقی را پوچتوان نامیم، اگر برای هر $Z \in \mathcal{N}$ ، $ad_{\mathcal{N}}Z$ یک درون ریختی پوچتوان از $\mathcal{N}$ باشد. یا به طور معادل عددصحیح K وجود داشته باشد که برای هر عدد صحیح $K \geq ۱$، $\mathcal{N}^K = \{۰\}$. که در آن $\mathcal{N}^K = [\mathcal{N}, \mathcal{N}^{K-۱}]$ و $\mathcal{N}^۰ = \mathcal{N}$ تعریف شده اند.

جبر لی $\mathcal{N}$ را پوچتوان از رده K نامیم اگر $\mathcal{N}^K = \{۰\}$ ولی $\mathcal{N}^{K-۱} \neq \{۰\}$ باشد.

تعریف ۲۷.۲.۱. (گروه لی پوچتوان).[۱۳] گروه لی N را پوچتوان نامیم اگر جبر لی متناظر آن پوچتوان باشد.

[۹] adjoint representation
[۱۰] adjoint representation of Lie algebra
[۱۱] nilpotent endomorphism
[۱۲] nilpotent Lie algebra
[۱۳] nilpotent Lie group

تعریف ۲۸.۲.۱. (جبر لی پوچتوان از رده ۲[۱۴]). جبر لی $\mathcal{N}$ را پوچتوان از رده ۲ گوییم اگر در شرط $[\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \mathcal{N}]] = 0$ صدق کند.

در ادامه مثالی از جبر لی پوچتوان از رده **۲** بیان خواهیم کرد.

مثال ۲۹.۲.۱. [۷] فرض کنید $n \geqslant 1$ عدد صحیحی دلخواه، $\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\}$ پایه ای برای فضای برداری $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2n}$ و $\mathcal{Z}$ فضای برداری تولید شده به وسیله عضو Z باشد. تعریف کنید

$$[X_i, Y_i] = -[Y_i, X_i] = Z \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

و سایر براکت ها برابر صفر باشند. جبر لی $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$، جبر هایزنبرگ [۱۵] $(2n+1)-$ بعدی است.

۳.۱ مفاهیم اولیه هندسه ریمانی

در این بخش مفاهیم اساسی هندسه ریمانی را بیان خواهیم کرد و خواص هندسی این فضا را مورد بحث و بررسی قرارخواهیم داد.

همانطور که می دانیم متر ریمان روی منیفلد هموار M یک میدان ۲-تانسوری $g \in \mathcal{X}^2(M)$ است که متقارن $(g(X, Y) = g(Y, X))$ و مثبت معین $(\forall X \neq 0, g(X, X) > 0)$ است، که در آن $\mathcal{X}^2(N)$ بیانگر فضای همه برش های هموار از کلاف $T^2N = \bigcup_{p \in M} T^2_0(T_pM)$ است .

متر ریمان یک ضرب داخلی روی فضای T_pM القا می کند که با نماد $\langle X, Y \rangle_p$ یا $g_p(X, Y)$ نمایش می دهیم.

اگر (x, U) یک چارت در همسایگی نقطه p از منیفلد n-بعدی M ، $x(p) = (x^1, \cdots, x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی T_pN باشد داریم:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \qquad , \qquad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود.

$$g_p(X, Y) = g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j (X, Y)$$

[۱۴] two-step nilpotent Lie algebra
[۱۵] Heisenberg algebra

چون g متقارن است رابطه بالا را می توان به صورت $g = g_{ij}dx^i dx^j$ نوشت که در آن $g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)$ توابعی هستند که روی چارت (x, U) در همسایگی نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) = \langle\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\rangle$$

و در رابطه $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می کند.

مثال ۱.۳.۱. فضای R^n با مختصات اقلیدسی و پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم اگر مختصات نقطه p توسط $(x^1, \cdots, x^n)$ داده می شود، داریم:

$$g_{ij}(p) = \langle\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\rangle = \delta_{ij}$$

متریک ریمان حاصل $g = \delta_{ij}dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ را متریک اقلیدسی می نامیم.

قضیه ۲.۳.۱. روی هر منیفلد هموار (دیفرانسیل پذیر) M (هاسدورف و پایه شمارا) می توان یک متر ریمان تعریف نمود.

برای آن که بتوان هندسه یک فضا را مطالعه نمود باید ببینیم خط راست را چگونه می توان روی آن فضا تعریف کرد. اگر منیفلد خمیدگی داشته باشد ممکن است آن چیزی که ما آن را با تعبیر اقلیدس و اصول موضوعه آن خط راست می نامیم دیگر وجود نداشته باشد.

برای تعمیم تعریف خط راست روی منیفلدها که آن را ژئودزیک می نامیم باید از خواص خط راست استفاده کنیم. بارزترین خط راست طبیعت کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه است که استفاده از آن کمی پیچیده به نظر می رسد، لذا از خاصیت خط راست به عنوان یک منحنی با شتاب صفر استفاده می کنیم. استفاده از این خاصیت خط راست روی منیفلدها احتیاج به مقدماتی از جمله تعریف یک نوع مشتق گیری دارد که در این بخش به شرح آن می پردازیم. این مشتق گیری تعمیمی است از مشتق سویی یا اثر یک میدان برداری X روی یک تابع f که در این بخش به مطالعه آن می پردازیم. به عبارت دقیقتر مشتق سویی $X.f$ میزان تغییرات تابع f در سوی بردار X ارزیابی می کند، در صورتی که این مشتق میزان تغییرات توابع، میدان های برداری، ۱ -فرم ها و یا به طور کلی یک میدان تانسوری را در سوی یک بردار محاسبه می نما ید.

ویتا دانشمند ایتالیایی در سال ۱۹۱۷ مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۱.۳.۳. [۱۵] فرض کنیم (E, Π, M) یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد و $\mathcal{E}(M)$ فضای همه برش های هموار از E باشد. یک التصاق [16] در E نگاشت:

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

است که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\nabla_X Y$ نسبت به X ، $C^\infty(M)$ خطی باشد یعنی:

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \qquad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

(۲) $\nabla_X Y$ نسبت به Y ، R خطی باشد یعنی:

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad \forall a, b \in R$$

(۳) ∇ در قاعده لایب-نیتزی صدق کند:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

منظور از یک التصاق خطی (التصاق آفین) روی منیفلد M التصاقی در کلاف مماس TM است یعنی نگاشت

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

که در شرایط تعریف (۱.۳.۳) صدق کند.

[16] Connection

قضیه ۴.۳.۱. [۱۵] فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد، التصاق خطی منحصر به فرد ∇ روی M چنان موجود است که

(۱) ∇ دارای تاب صفر باشد یعنی :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

(۲) ∇ متریک - سازگار باشد یعنی:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

علاوه بر این داریم:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle \end{aligned} \tag{1.1}$$

∇ توصیف شده را التصاق ریمانی یا لویی -چوی ویتا [۱۷] می نامیم.

در ادامه به تعریف تانسور انحنای ریمان [۱۸] می پردازیم،که برای اولین بار ب. ریمان در سال **۱۸۵۴** آن را بیان کرد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی همراه با التصاق لویی-چوی ویتا ∇ باشد. نگاشت

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

را انحنای ریمان یا تانسور انحنای ریمان نامیم.

[۱۷] Riemannian connection or the Levi–Civita connection

[۱۸] Riemann curvature tensor

به راحتی می توان بررسی نمود که تانسور انحنای ریمان یک میدان تانسوری از نوع $\binom{۱}{۳}$ است که نسبت به دو متغییر اول پاد متقارن است.

تانسور انحنای ریمان را می توان به صورت یک میدان تانسوری $\binom{۰}{۴}$ نیز تعریف نمود.

تعریف ۶.۳.۱. [۱] فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. حاصلضرب داخلی تانسور انحنای ریمان را با R_m نمایش داده آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$R_m(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W\rangle \qquad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

R_m را تانسور انحنای ریمان نوع دوم یا برای سادگی انحنای ریمان نیز می نامیم.

قضیه ۷.۳.۱. [۱] فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی و R_m تانسور انحنای ریمان (نوع دوم) آن باشد. آنگاه برای هر $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ داریم:

(الف) $$R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(X, W, Y, Z)$$

(ب) $$R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(W, X, Z, Y)$$

(پ) $$R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(Y, Z, W, X)$$

(ت) $$R_m(W, X, Y, Z) + R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) = ۰$$

اثبات. با استفاده از تعریف داریم $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ ، درنتیجه

$$R_m(W, X, Y, Z) = \langle R(W, X)Y, Z\rangle = -\langle R(X, W)Y, Z\rangle = -R_m(X, W, Y, Z)$$

بدین ترتیب حکم (a) ثابت می شود.

برای اثبات حکم (b) کافیست ثابت کنیم $R_m(W, X, Y, Y) = ۰$. زیرا بدین ترتیب $R_m(W, X, Y + Z, Y + Z) = ۰$.

باتوجه به تساوی زیر حکم (b) ثابت می شود.

$$\begin{aligned} R_m(W,X,Y+Z,Y+Z) &= R_m(W,X,Y,Y)+R_m(W,X,Z,Y) \\ &+ R_m(W,X,Y,Z)+R_m(W,X,Z,Z) \end{aligned}$$

در این مرحله ثابت می کنیم $R_m(W,X,Z,Y)=0$.

با توجه به شرط متریک سازگاری داریم:

$$X\langle Y,Z\rangle=\nabla_X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle$$

$$X\mid Y\mid^2=\nabla_X\langle Y,Y\rangle=2\langle Y,\nabla_X Y\rangle$$

$$WX\mid Y\mid^2=\nabla_W(2\langle Y,\nabla_X Y\rangle)=2\langle\nabla_W Y,\nabla_X Y\rangle+2\langle Y,\nabla_W\nabla_X Y\rangle$$

$$XW\mid Y\mid^2=2\langle\nabla_X\nabla_W Y,Y\rangle+2\langle\nabla_W Y,\nabla_X Y\rangle$$

$$[W,X]\mid Y\mid^2=2\langle\nabla_{[W,X]}Y,Y\rangle$$

با کم کردن دو رابطه آخر از سومی حکم ثابت می شود.

حکم (d) را قبل از حکم (c) ثابت می کنیم . برای اثبات حکم (d) کافیست معادله زیر را ثابت کنیم.

$$R(W,X)Y+R(X,Y)W+R(Y,W)X=0$$

معادله بالا با توجه به تعریف تانسور انحنا و اتحاد ژاکوبی به آسانی ثابت می شود.

با توجه به قسمت (d) روابط زیر را داریم:

$$R_m(W,X,Y,Z)+R_m(X,Y,W,Z)+R_m(Y,W,X,Z)=0$$

$$R_m(X,Y,Z,W)+R_m(Y,Z,W,X)+R_m(Z,X,Y,W)=0$$

$$R_m(Y,Z,W,X)+R_m(Z,W,Y,X)+R_m(W,Y,Z,X)=0$$

$$R_m(Z,W,X,Y)+R_m(W,X,Z,Y)+R_m(X,Z,W,Y)=0$$

چهار معادله بالا را با هم جمع می کنیم و با استفاده از خواص (۱) و (۲) حکم (c) ثابت می شود. □

تانسور انحنای ریمان تعیین کننده آن است که تا چه اندازه یک منیفلد می تواند خمیده باشد یا به عبارت دیگر چه اندازه به R^n ازنظر ایزومتریک بودن نزدیک است. منیفلد ریمانی (M,g) را مسطح یا تخت می نامیم اگر به طور موضعی با R^n ایزومتریک باشد.

حال فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی مسطح باشد. بنابر تعریف یک ایزومتری موضعی مانند φ بین M و R^n وجود دارد.

$$\varphi:(M,g)\to(R^n,\bar{g}) \qquad \varphi^*\bar{g}=g$$

با توجه به این که در R^n تانسور انحنای ریمان صفر است و تانسور انحنا تحت ایزومتری ها پایاست. لذا اگر M مسطح باشد تانسور انحنای ریمان آن برابر صفر می شود. می توان نشان داد عکس این موضوع صحت دارد.

قضیه ۸.۳.۱. یک منیفلد ریمانی مسطح است اگر وتنها اگر تانسور انحنای ریمان آن برابر صفر باشد.

تعریف ۹.۳.۱. (تانسور ریچی[۱۹]). تانسور ریچی منیفلد ریمانی (M,g) عبارتست از میدان ۲ $-$ تانسوری هموردا که به صورت زیر تعریف می شود.

$$Ric(X,Y)=trace\,\{\xi\longrightarrow R(\xi,X)Y\mid \xi\in\mathcal{X}(M)\},\forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$$

تعریف ۱۰.۳.۱. (انحنای برشی[۲۰]). فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد و $p\in M$ و $X,Y\in T_pM$ پایه های دلخواه از یک زیر فضای ۲ $-$ بعدی Π از T_pM باشد، آنگاه عدد

$$K(\Pi)=K(X,Y)=\frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^{۲}}$$

را انحنای برشی Π درنقطه p می نامیم.

اگر $\{X,Y\}$ پایه متعامد یکه باشد آنگاه $\langle Y,X\rangle=۰$ و $\langle X,X\rangle=\langle Y,Y\rangle=۱$ بنابر این داریم

[۱۹] Ricci tensor
[۲۰] Sectional curvature

$$K(\Pi) = K(X, Y) = R_m(X, Y, Y, X).$$

لم ۱۱.۳.۱. فرض کنید Π یک زیر فضای ۲ -بعدی از فضای مماس T_pM باشد و $X, Y \in \Pi$ دو بردار مستقل خطی باشند آنگاه انحنای برشی $K(X, Y)$ مستقل از انتخاب بردارهای $X, Y \in \Pi$ است.

در لم زیر نشان می دهیم که انحناهای برشی یک منیفلد کاملا انحنای ریمانی آن را نتیجه می دهد.

لم ۱۲.۳.۱. [۱] فرض کنید V یک فضای برداری با بعد $n \geqslant ۲$ با ضرب داخلی $\langle , \rangle$ باشد. فرض کنید R_m و $R_{m'}$ دو تانسور $\binom{۰}{۴}$ باشند که در شرایط قضیه (۷.۳.۱) صدق کنند. اگر

$$\frac{R_m(X, Y, Y, X)}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^۲} = \frac{R_{m'}(X, Y, Y, X)}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^۲}$$

آنگاه $R_m = R_{m'}$.

اثبات. با توجه به فرض مشاهده می کنیم که $R_m(X, Y, Y, X) = R_{m'}(X, Y, Y, X)$ برای هر $X, Y \in V$. باید نشان دهیم که به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ داریم $R_m(X, Y, Z, W) = R_{m'}(X, Y, Z, W)$. فرض کنیم به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$، $\mathcal{R} = R_m(X, Y, Z, W) - R_{m'}(X, Y, Z, W)$. بنا بر فرض به ازای هر $X, Y \in V$ داریم $\mathcal{R}(X, Y, Y, X) = ۰$. برای اثبات کافی است نشان دهیم که به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ داریم $\mathcal{R} = ۰$. به ازای هر $X, Y, Z \in V$ چون R نیز دارای خواص تقارن است داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= \mathcal{R}(X+Y, Z, Z, X+Y) \\ &= \mathcal{R}(X, Z, Z, X + (X, Z, Z, Y) + \mathcal{R}(Y, Z, Z, X) + \mathcal{R}(Y, Z, Z, Y) \\ &= ۲\mathcal{R}(X, Z, Z, Y) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه $\mathcal{R}(X,Z,Z,Y)=۰$ داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= \mathcal{R}(X,Z+W,Z+W,Y) \\ &= \mathcal{R}(X,Z,Z,Y)+\mathcal{R}(X,Z,W,Y)+\mathcal{R}(X,W,Z,Y)+\mathcal{R}(Z,W,W,Y) \\ &= \mathcal{R}(X,Z,W,Y)+\mathcal{R}(X,W,Z,Y). \end{aligned}$$

در نتیجه داریم $\mathcal{R}(X,Z,W,Y)=-\mathcal{R}(X,W,Z,Y)$. لذا $\mathcal{R}$ نسبت به هر زوج از اندیس های همجوار پادمتقارن است.

حال با توجه به خاصیت آخر قضیه (۷.۳.۱) داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= \mathcal{R}(X,Y,Z,W)+\mathcal{R}(Y,Z,X,W)+\mathcal{R}(Z,X,Y,W) \\ &= \mathcal{R}(X,Y,Z,W)-\mathcal{R}(Y,X,Z,W)-\mathcal{R}(X,Z,Y,W) \\ &= ۳\mathcal{R}(X,Y,Z,W). \end{aligned}$$

از آنجا به ازای هر $X,Y,Z,W\in V$ ، داریم $R_m(X,Y,Z,W)=R_{m'}(X,Y,Z,W)$. □

گزاره ۱۳.۳.۱. انحنای ریمانی یک منیفلد را می توان بر حسب انحنای برشی آن به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle \quad &= K(X+W,Y+Z)-K(X+W,Y)-K(X+W,Z) \\ &\quad -K(X,Y+Z)-K(W,Y+Z)+K(X,Z)+K(W,Y) \\ &\quad -K(Y+W,X+Z)+K(Y+W,X)+K(Y+W,Z) \\ &\quad +K(Y,X+Z)+K(W,X+Z)-K(Y,Z)-K(W,X). \end{aligned}$$

بنابر این انحنای ریمانی یک منیفلد می تواند انحنای برشی آن را به طور کامل ارائه نمایید.

تعریف ۱۴.۳.۱. [۱] فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد. M را با انحنای ثابت می نامیم اگر انحنای برشی K در تمام نقاط $p\in M$ ثابت باشد.

مثال ۱.۳.۱۵. کره S^n با متریک القایی از R^n یک فضا با انحنای ثابت $K = 1$ است.

در انتهای این بخش ژئودزیک های منیفلد ریمانی (M, g) را تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳.۱۶. (ژئودزیک)[21] . فرض کنید (M, g) منیفلد ریمانی با التصاق خطی ∇ باشد. خم $\gamma : I \subset R \longrightarrow M$ را ژئودزیک نامیم اگر $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.

۴.۱ هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ

در این بخش هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ را مورد بررسی قرار می دهیم. خواص هندسی این گونه فضاها از جمله التصاق چرن-راند، تانسور انحنا، انحنای پرچمی، تانسور ریچی و ژئودزیک را مورد مطالعه قرار می دهیم.

در این بخش چنانچه هر کجا ارجاع داده نشده بود، آن مطلب از مرجع [۷] می باشد.

دراین بخش از N برای نمایش یک گروه لی پوچتوان از رده ۲، از $\mathcal{N}$ برای نمایش جبر لی متناظر آن و از $\mathcal{Z}$ برای نمایش مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ استفاده خواهیم کرد. همچنین فرض می کنیم $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی روی $\mathcal{N}$ باشد. در اینصورت زیر فضای متمم متعامد $\mathcal{Z}$ نسبت به این ضرب داخلی را با نماد $\mathcal{V}$ نمایش می دهیم.

برای هر عضو Z از $\mathcal{Z}$ نگاشت خطی پادمتقارن $j(Z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$j(Z) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$j(Z)X = (adX)^*Z, X \in \mathcal{V}$$

که در آن $(adX)^*$ ترانهاده نگاشت خطی adX نسبت به ضرب داخلی $\langle , \rangle$ است.

برای گروه لی پوچتوان از رده ۲، فرمول کامپبل-بیکر-هاسدورف به صورت زیر بیان می شود.

$$\exp(X).\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]\right) \tag{۱.۲}$$

در ادامه برای به دست آوردن ژئودزیک های گروه لی ذکر شده نیاز به بیان قضیه زیر داریم.

[21] geodesic

قضیه ۱.۴.۱. اگر N گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده ۲ و $\mathcal{N}$ جبر لی متناضر آن باشد، آنگاه برای هر $\xi, A \in \mathcal{N}$ نگاشت $d\exp_\xi : T_\xi\mathcal{N} \to T_{\exp(\xi)}N$ به صورت زیر بیان می شود.

$$d\exp_\xi(A_\xi) = dL_{\exp(\xi)}\Big(A + \frac{1}{2}[A,\xi]\Big)$$

که در آن A_ξ بیانگر سرعت اولیه از خم $t \to \xi + tA$ و $L_{\exp(\xi)}$ بیانگر انتقال چپ توسط $\exp(\xi)$ است.

اثبات. با استفاده از تعریف $d\exp_\xi(A_\xi)$ سرعت اولیه از خم $t \to \exp(\xi + tA)$ است و $dL_{\exp(\xi)}\Big(A + \frac{1}{2}[A,\xi]\Big)$ سرعت اولیه از خم $t \to \exp(\xi).\exp\Big(t\Big\{A + \frac{1}{2}[A,\xi]\Big\}\Big)$ است و از طرفی با توجه به رابطه (۲.۱) داریم:

$$\exp(\xi).\exp\Big(t\Big\{A + \frac{1}{2}[A,\xi]\Big\}\Big) = \exp(\xi + tA).$$

در نتیجه حکم ثابت می شود. $\square$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید N یک گروه لی باشد، متر ریمانی روی N ناوردای چپ نامیده می شود، اگر

$$\langle X,Y\rangle_y = \langle (d\,L_x)yX, (d\,L_x)yX\rangle_{L_xy} \qquad \forall x,y \in N, , Y \in T_yN.$$

در این قسمت التصاق لوی-چوی ویتای گروه لی پوچتوان از رده ۲ را مورد بررسی قرار می دهیم.

برای میدان برداری های ناوردای چپ $X, Y,$ سه جمله سمت راست معادله (۱.۱) صفر می شود، بنابراین داریم:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle.$$

بوضوح داریم:

$$2\nabla_X Y = [X,Y] - (adY)^*X - (adX)^*Y \tag{۳.۱}$$

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید $\{N, \langle,\rangle\}$ گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده ۲ با جبر لی $\mathcal{N}$ و متر ریمانی ناوردای چپ $\langle,\rangle$ باشد، در این صورت:

(الف) به ازای هر $X, Y \in \mathcal{V}$ داریم:

$$\nabla_X Y = \frac{۱}{۲}[X, Y]$$

(ب) برای هر $X\mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla_X Z = \nabla_Z^W X = -\frac{۱}{۲} j(Z)X$$

(پ) برای هر $Z, Z^* \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla_Z Z^* = ۰$$

اگر Z, Y, X میدان برداری های ناوردای چپ باشند، آنگاه $R(X, Y)Z$ نیز ناوردای چپ خواهد بود. بنابر این ما می توانیم R را به عنوان یک نگاشت سه خطی

$$R : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$

$$R(X.Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

در نظر بگیریم.

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنید $\{N, \langle , \rangle\}$ گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده **۲** با جبر لی $\mathcal{N}$ و متر ریمانی ناوردای چپ $\langle , \rangle$ باشد، در این صورت:

(الف) برای هر $Z_۱, Z_۲, Z_۳ \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$R(Z_۱, Z_۲)Z_۳ = ۰$$

(ب) برای هر $X \in \mathcal{V}$ و $Z_۱, Z_۲ \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\begin{aligned} R(X, Z_۱)Z_۲ &= -\frac{۱}{۴} j(Z_۱)(j(Z_۲)X) \\ R(Z_۱, Z_۲)X &= \frac{۱}{۴} j(Z_۱)(j(Z_۲)X) - \frac{۱}{۴} j(Z_۲)(j(Z_۱)X) \end{aligned}$$

(پ) برای هر $X, Y \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$R(X,Y)Z = -\frac{۱}{۴}[X, j(Z)Y] + \frac{۱}{۴}[Y, j(Z)X]$$

(ت) برای هر $X, X^*, Y \in \mathcal{V}$ داریم:

$$R(X,Y)X^* = -\frac{۱}{۴}j([Y,X^*])X + \frac{۱}{۴}j([X,X^*])Y + \frac{۱}{۴}j([X,Y])X^*$$

تانسور ریچی از (N,g) برای $X, Y \in \mathcal{N}$ به این صورت

$$Ric(X,Y) = trace\{\xi \to R(\xi,X)Y \mid \xi \in \mathcal{N}\}$$

تعریف می شود.

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنید $\{N, \langle , \rangle\}$ گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده **۲** با جبر لی $\mathcal{N}$ و متر ریمانی ناوردای چپ $\langle , \rangle$ باشد، در این صورت:

(الف) برای هر $X \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$Ric(Z, Z^*) = ۰$$

(ب) برای هر $Z, Z^* \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$Ric(Z, Z^*) = -\frac{۱}{۴}trace\{j(Z) \circ j(Z^*\})$$

فرض کنید $\Pi \subset T_xN$ و $\Pi = span(X,Y)$ و جفت (X,Y) نسبت به $\langle , \rangle$ متعامد یکه باشد، آنگاه انحنای پرچمی عبارتست از:

$$K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle.$$

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنید $\{N, \langle , \rangle\}$ گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده **۲** با جبر لی $\mathcal{N}$ و متر ریمانی ناوردای چپ $\langle , \rangle$ باشد، در این صورت

(۱) اگر $X, Y \in \mathcal{V}$ و نسبت به $\langle , \rangle$ متعامد یکه باشند، آنگاه:

$$K(X,Y) = -\frac{۳}{۴}\|[X,Y]\|^{۲}.$$

(۲) اگر $X \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ و نسبت به $\langle , \rangle$ متعامد یکه باشند، آنگاه:

$$K(X,Z) = -\frac{۱}{۴}\|j(Z)X\|^{۲}.$$

(۳) اگر و $Z, Z^* \in \mathcal{Z}$ و نسبت به $\langle , \rangle$ متعامد یکه باشند، آنگاه:

$$K(Z,Z^*) = ۰.$$

قضیه ۷.۴.۱. فرض کنید $\{N, \langle , \rangle\}$ گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده **۲** با جبر لی $\mathcal{N}$ و متر ریمانی ناوردای چپ $\langle , \rangle$ باشد، در این صورت خم γ ژئودزیکی از التصاق چرن-راند است اگر و فقط اگر در معادلات زیر صدق کند:

$$Z' + \frac{۱}{۲}[X', X] = Z_۰, \quad X'' - j(Z_۰)X' = ۰$$

فصل ۲

مفاهیم اساسی هندسه فینسلری

۱.۲ مقدمه

در این فصل مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری را در دو حالت موضعی و سراسری مطالعه خواهیم کرد. هندسه فینسلری مورد نیاز در فصل های بعدی حالت سراسری آن است. اما برای روشن شدن اهمیت کار انجام شده در این پایان نامه، مفاهیم مقدماتی فینسلری در حالت موضعی نیز بیان شده است.

۲.۲ مفاهیم اولیه هندسه فینسلری در حالت موضعی

این بخش شامل مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری در حالت موضعی می باشد.

برای تعریف متر فینسلری نیاز به بیان نرم مینکوفسکی داریم که در ادامه به آن می پردازیم.

فرض کنید M یک منیفلد هموار و T_xM فضای مماس در نقطه $x \in M$ باشد، کلاف مماس بر M با نماد

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$$

نمایش داده می شود.

تعریف ۱.۲.۲. (نرم مینکوفسکی[1]). فرض کنید V فضای برداری متناهی البعد با ساختار دیفرانسیلی استاندارد باشد. یک نرم مینکوفسکی روی V تابع نامنفی $f : V \longrightarrow [0, \infty)$ است، که دارای خواص زیر باشد:

[1] Minkowski norm

(۱) f روی $V \setminus \{0\}$ هموار باشد.

(۲) $f(\lambda y) = \lambda f(y) \qquad \forall \lambda > 0, y \in V$

(۳) ماتریس هسیان زیر در تمام نقاط $V \setminus \{0\}$ معین مثبت باشد:

$$(g_{ij}) := \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}\right)$$

تعریف ۲.۲.۲. (متر فینسلری). [۲۳] تابع $F : TM \longrightarrow [0, \infty)$ را یک متر فینسلری می نامیم اگر دارای خواص زیر باشد:

(۱) F روی $TM \setminus \{0\}$ هموار باشد.

(۲) برای هر $x \in M$ ، $F_x := F|_{T_xM}$ نرم مینکوفسکی روی T_xM باشد.

دو تایی (M, F) را منیفلد فینسلری می نامیم.

در ادامه مثال هایی از متر فینسلری را بیان خواهیم کرد.

مثال ۳.۲.۲. [۱] ساده ترین مثال از یک متر فینسلری متر ریمانی است. منیفلد ریمانی (M, g) را می توان به عنوان یک منیفلد فینسلری در نظر گرفت که تابع اساسی آن توسط $F(x, y) = \sqrt{g_{ij}y^iy^j}$ تعریف می شود.

مثال ۴.۲.۲. [۱] فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی بوده و $\omega = \omega_i(x)dy^i$ یک میدان ۱- فرمی روی M باشد. همچنین فرض کنیم $\alpha(x, y) = \sqrt{g_{ij}y^iy^j}$ و $\beta = \omega_i(x)y^i$. آنگاه می توان نشان داد که $F = \alpha + \beta$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت F را متر راندرز [۲] و (M, F) را منیفلد راندرزی می نامند.

در ادامه به بیان التصاق چرن-راند [۳] می پردازیم، اما قبل از آن مفاهیم مقدماتی مرتبط را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۵.۲.۲. [۳] فرض کنید M یک منیفلد هموار و $TM_0 = TM \setminus \{0\} = \{y \in T_xM | y \neq 0, x \in M\}$ و $\pi : TM \longrightarrow M$ تعریف شده بوسیله $(x, y) \to x$ نگاشت تصویر متعارف باشد. در این صورت کلاف مماس برگشتی [۴]

[۲] Randers metric
[۳] Chern-Rund connection
[۴] pull- back tangent bundle

π^*TM ، یک کلاف برداری روی کلاف مماس $TM_\circ$ است که تارهای آن در هر نقطه $(x,y) \in TM_\circ$ به شکل زیر است:

$$\pi^*TM|_{(x,y)} := \{(x,y,v)|v \in T_xM\} \cong T_xM$$

به عبارت دیگر $\pi^*TM|_{(x,y)}$ یک کپی از T_xM است.

کلاف کتانژانت برگشتی [۵] π^*T^*M همانند کلاف مماس برگشتی π^*TM قابل تعریف است و تارهای آن در هر نقطه $(x,y) \in TM_\circ$ ، یک کپی از T_x^*M است.

فرض کنید (x^i) و (x^i, y^i) به ترتیب مختصات موضعی برای منیفلدهای M و TM باشند و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ و $\{dx^i, dy^i\}$ به ترتیب کنج های موضعی متعارف برای $T(TM_\circ)$ و $T^*(TM_\circ)$ باشند.

با فرضیات بالا کلاف مماس عمودی [۶] به صورت زیر قابل تعریف است:

$VTM := spsn\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ کلاف مماس عمودی M است که زیر کلافی از $T(TM_\circ)$ خواهد بود.

فرض کنید $\partial_i := (x, y\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$ ، در این صورت $\{\partial_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM می باشد.

کلاف برداری π^*TM برش متعارف $\mathcal{Y}$ را دارد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathcal{Y}_{(x,y)} := (x,y,y)$$

در $y = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$ ، $\mathcal{Y}$ به صورت زیر می تواند بیان شود:

$$\mathcal{Y} = y^i\partial_i$$

اکنون دو تانسور مهم در هندسه فینسلری را بیان خواهیم کرد که برای تعریف التصاق چرن-راند به آنها نیاز داریم.

تعریف ۶.۲.۲. (تانسور اساسی و تانسور کارتان). [۷] [۳] فرض کنید F متر فینسلری روی M و

$$g_{ij} := \frac{۱}{۲}[F^۲]_{y^iy^j}(x,y), \quad C_{ijk} := \frac{۱}{۴}[F^۲]_{y^iy^jy^k}(x,y)$$

[۵] pull-back cotangent bundle
[۶] horizontal tangent cotangent bundle,
[۷] fundamental tensor and Cartan tensor

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{G} := g_{ij}dx^i \otimes dx^j, \quad \mathcal{C} := C_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ تانسورهایی روی $TM_\circ$ هستند که به ترتیب تانسور اساسی و تانسور کارتان نامیده می شوند.

قضیه ۷.۲.۲. (چرن). [۳] فرض کنید (M, F) منیفلد فینسلری $n-$ بعدی باشد. برای کنج موضعی دلخواه $\{e_i\}$ برای π^*TM و هم کنج دوگان آن $\{w^i\}$ برای π^*T^*M مجموعه یکتایی از ۱-فرمی های موضعی $\{w_j^i\}$ روی $TM_\circ$ وجود دارد به طوریکه:

$$dw^i = w^j \wedge w_j^i \qquad \text{(تاب-آزاد)} \tag{۱.۲}$$

$$dg_{ij} = g_{kj}w_i^k + g_{ik}w_j^k + ۲C_{ijk}w^{n+k} \qquad \text{(تقریبا متریک سازگاری)} \tag{۲.۲}$$

که

$$w^{n+k} := dy^i + y^j w_j^i \tag{۳.۲}$$

که $\mathcal{Y} := y^i e_i$ ، $g_{ij} := \mathcal{G}(e_i, e_j)$ و $C_{ijk} := \mathcal{C}(e_i, e_j, e_k)$.

اثبات. قضیه را در مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) برای $TM_\circ$ ثابت می کنیم. قرا می دهیم $e_i = \partial_i$ و $w^i := dx^i$. ۱-فرمی های موضعی w_j^i به صورت زیر بیان می شوند:

$$w_j^i := \Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k$$

معادله (۱.۲) با معادله زیر هم ارز است.

$$\circ = d^۲x^i = dx^j \wedge (\Gamma_{jk}^i dx^k + \Gamma_{jk}^i dy^k)$$

این نتیجه می دهد $\Pi^i_{jk} = 0$ و $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. بنابراین $w^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$. فرض کنید

$$N^i_j := y^m \Gamma^i_{mj} \tag{۴.۲}$$

در نتیجه فرمول (۲.۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$dg_{ij} = g_{im}\Gamma^m_{jl} dx^l + g_{mj}\Gamma^m_{il} dx^l + 2C_{ijm}(dy^m + N^m_l dx^l) \tag{۵.۲}$$

چون

$$C_{ijk} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

در نتیجه بدست می آید:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{im}\Gamma^m_{jl} + g_{mj}\Gamma^m_{il} + 2C_{ijm}N^m_l \tag{۶.۲}$$

با توجه به معادله (۶.۲) می توان معادلات زیر را نوشت

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g_{jm}\Gamma^m_{il} + g_{ml}\Gamma^m_{ij} + 2C_{jml}N^m_i \tag{۷.۲}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = g_{ml}\Gamma^m_{ij} + g_{im}\Gamma^m_{jl} + 2C_{iml}N^m_j \tag{۸.۲}$$

معادله (۷.۲) و (۸.۲) را با هم جمع کرده و از معادله (۶.۲) کم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 2g_{ml}\Gamma^m_{ij} + 2C_{jml}N^m_i + 2C_{iml}N^m_j - C_{ijm}N^m_l$$

از فرمول بالا Γ^k_{ij} به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\} \\ &\quad -g^{kl}\{C_{jml}N^m_i + C_{iml}N^m_j - C_{ijm}N^m_l\}\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

برای اینکه Γ^i_{jk} به طور کامل مشخص شود، باید N^i_j بر حسب جملاتی از F نوشته شود. با انقباض معادله (۹.۲) با y^i نتیجه زیر حاصل می شود:

$$N^k_j = \frac{۱}{۲}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\}y^i - ۲g^{kl}C_{jml}G^m \qquad (۱۰.۲)$$

که

$$G^i := \frac{۱}{۲}N^i_j y^j = \frac{۱}{۲}\Gamma^i_{jk}y^j y^k$$

با انقباض معادله (۱۰.۲) با $\frac{۱}{۲}y^i$ نتیجه زیر به دست می آید:

$$G^i = \frac{۱}{۴}g^{il}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\}y^j y^k \qquad (۱۱.۲)$$

اکنون معادله (۱۱.۲) را در معادله (۱۰.۲) قرار می دهیم و نتیجه بدست آمده را در معادله (۹.۲) جایگزین می کنیم. بدین ترتیب حکم ثابت می شود. □

با فرم های التصاق چرن-راند یعنی $\{w^i_j\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM، التصاق خطی ∇ روی π^*TM به صورت زیر تعریف می شود.

$$\nabla X := \{dX^i + X^j w^i_j\} \otimes e_i$$

که $X = X^i(x,y)e_i \in \mathcal{X}(\pi^*TM)$. که آن را التصاق چرن- راند نامیم.

با استفاده از معادلات

$$[F^۲]_{x^l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}y^i y^j, \qquad [F^۲]_{x^k y^l}y^k = ۲\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}y^i y^k,$$

(۱۱.۲) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$G^i = \frac{۱}{۴}g^{il}\{[F^۲]_{x^k y^l}y^k - [F^۲]_{x^l}\}. \qquad (۱۲.۲)$$

با کمک فرمول های

$$[F^2]_{x^l} = 2FF_{x^l}, \qquad [F^2]_{x^k y^l} y^k = \frac{2F_{x^k}y^k}{F} g_{ml} y^m + 2FF_{x^k x^l} y^k,$$

به دست می آوریم:

$$G^i = Py^i + Q^i \tag{۱۳.۲}$$

که در آن:

$$P := \frac{2F_{x^k}y^k}{2F}, \qquad Q^i = \frac{F}{2}\{F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\}.$$

توابع موضعی N^i_j در (۴.۲) و (۱۰.۲) را ضرایب التصاق نامیده می شوند. از (۱۱.۲) نسبت به y^i دیفرانسیل می گیریم، نتیجه می شود:

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \tag{۱۴.۲}$$

بنابراین N^i_j فقط G^i وابسته می باشد.

فرض کنید

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{۱۵.۲}$$

آنگاه $HTM := span\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ زیر کلافی از $T(TM_0)$ است و $T(TM_0) = HTM \oplus VTM$.

توابع موضعی Γ^i_{jk} در (۹.۲) علائم کریستوفل التصاق چرن- راند [8] نامیده می شود.

متر های فینسلری از نوع بروالد، خانواده خاصی از مترهای فینسلری است که در زیر به تعریف آن می پردازیم.

تعریف ۸.۲.۲. [۳] متر فینسلری F روی منیفلد M از نوع بروالد [9] نامیده می شود، اگر در مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) در TM_0، نماد های کریستوفل Γ^i_{jk} فقط توابعی بر حسب $x \in M$ باشند.

[8] Christoffel symbols of the Chern connection
[9] Berwald

مثال ۹.۲.۲. متر های ریمانی، مترهای بروالد بدیهی هستند.

انحنای ریمان کمیتی اساسی در هندسه فینسلری می باشد، که در ادامه به تعریف آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۰.۲.۲. (تانسور انحنا). [۲، ۳] در یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) در TM_0 ، هم کنج موضعی $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ روی TM_0 به صورت زیر به دست می آید:

$$\omega^i = dx^i, \qquad \omega^{n+i} = \delta y^i := dy^i + N^i_j dx^i$$

که در آن $N^i_j = y^m \Gamma^i_{mj}$ در (۴.۲) تعریف شده است. فرم های انحنای Ω^i_j به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Omega^i_j := d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \tag{۱۶.۲}$$

که در آن $\{\omega^i_j\}$ ، فرم های التصاق چرن-راند نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM است.

از (۱.۲) دیفرانسیل می گیریم در نتیجه

$$\begin{aligned} d^2\omega^i &= d\omega^j \wedge \omega^i_j - \omega^j \wedge d\omega^i_j \\ &= \{\omega^m \wedge \omega^j_m\} \wedge \omega^i_j - \omega^j \wedge \{\Omega^i_j + \omega^m_j \wedge \omega^i_m\} \\ &= -\omega^j \wedge \Omega^i_j. \end{aligned}$$

چون $d^2\omega^i = 0$ در نتیجه

$$\omega^i \wedge \Omega^i_j = 0. \tag{۱۷.۲}$$

Ω^i_j را می توان بر حسب جملاتی از $\omega^i \wedge \omega^j$ ، $\omega^i \wedge \omega^{n+j}$ و $\omega^{n+i} \wedge \omega^{n+j}$ بیان کرد. با استفاده از (۱۷.۲)، Ω^i_j به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l + P_j{}^i{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^{n+l} \tag{۱۸.۲}$$

که

$$\begin{aligned} R_j{}^i{}_{kl} &+ R_j{}^i{}_{kl} = ۰, \\ R_j{}^i{}_{kl} &+ R_k{}^i{}_{lj} + R_l{}^i{}_{jk} = ۰, \\ P_j{}^i{}_{kl} &= P_k{}^i{}_{jl} \end{aligned}$$

$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}dx^k$ را در (۱۶.۲) قرار می دهیم و با توجه به (۱۸.۲) نتیجه زیر بدست می آید:

$$R_j{}^i{}_{kl} = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{ls}, \tag{۱۹.۲}$$

بنابراین

$$R^i{}_{kl} = y^j R_j{}^i{}_{kl} = \frac{\partial N^i_l}{\partial x^k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial x^l} + N^s_l \frac{\partial N^i_k}{\partial y^s} - N^s_k \frac{\partial N^i_l}{\partial y^s}, \tag{۲۰.۲}$$

چون $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^i}$ ، پس $R^i{}_{kl}$ به صورت مستقیم در جملات G^i بیان می شود. از انقباض (۲۰.۲) با y^l نتیجه زیر حاصل می شود:

$$R^i{}_k := R^i{}_{kl}y^l = ۲\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^۲ G^i}{\partial x^j \partial y^k} + ۲G^i \frac{\partial^۲ G^i}{\partial x^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین انحنای ریمان، خانواده ای از نگاشت های خطی روی صفحات مماس است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$R = \{R_y | y \in T_xM \backslash \{۰\},\ x \in M\}$$

که $R_y = R^i{}_{kl}\dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k|_x : T_xM \to T_xM$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_y(v) := R^i{}_k(x,y)v^k \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM.$$

علاوه بر این :

$$R_y(y) := ۰, \qquad R_{\lambda y} = \lambda^۲ R_y, \qquad \lambda > ۰$$

R_y نسبت به g_y خود-الحاق است یعنی:

$$g_y\left(R_y(u), v\right) = g_y(u, R_y(v)), \qquad v, u \in T_xM.$$

انحنای پرچمی هندسه فینسلری تعمیم طبیعی از انحنای برشی در هندسه ریمانی است.

تعریف ۱۱.۲.۲. (انحنای پرچمی)[۱۰]. فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری و پرچم (Π, y) شامل بردار هیج جا ناصفر y و یک صفحه ۲− بعدی $\Pi \subset T_xM$ باشد که توسط دو بردار y, u تولید شده باشد. انحنای پرچمی (Π, y) به صورت زیر تعریف می شود.

$$K(\Pi, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - [g_y(y, u)]^{۲}}.$$

تعریف ۱۲.۲.۲. (تانسور ریچی). [۳] فرض کنید

$$Ric := g^{ij}g_y(R_y(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})),$$

که در آن $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای برای T_xM است. و $(g^{ij}) := (g_{ij}^{-۱})$,$g_{ij} := g_y(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Ric یک تابع اسکالری خوش تعریف روی $TM_۰$ است که تانسور ریچی نامیده می شود و در مختصات موضعی به صورت زیر بیان می شود:

$$Ric := g^{ij}R_{ij} = R^m{}_m.$$

۳.۲ مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری در حالت سراسری

این بخش شامل مفاهیم و تعاریف هندسه فینسلری مورد نیاز در فصل های بعدی خواهد بود.

تعریف ۱.۳.۲. (نرم مینکوفسکی). فرض کنید V فضای برداری متناهی البعد با ساختار دیفرانسیلی استاندارد باشد. یک نرم مینکوفسکی روی V تابع نامنفی $f : V \longrightarrow [۰, \infty)$ است، که دارای خواص زیر باشد:

(۱) f روی $V \setminus \{۰\}$ هموار باشد.

[۱۰] Flag curvature

(۲) $f(\lambda y) = \lambda f(y) \qquad \forall \lambda > 0, y \in V$

(۳) برای هر $W \in V \setminus \{0\}$ فرم دو خطی متقارن g_W معین مثبت باشد

$$g_W(X,Y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2\left(W + rX + sY\right)}{\partial r \partial s}|_{r=s=0}$$

تعریف ۲.۳.۲. (متر فینسلری.) تابع $F : TM \longrightarrow [0,\infty)$ را یک متر فینسلری می نامیم اگر دارای خواص زیر باشد:

(۱) F روی $TM \setminus \{0\}$ هموار باشد.

(۲) برای هر $x \in M$ ، $F_x := F|_{T_xM}$ نرم مینکوفسکی روی T_xM باشد.

دو تایی (M,F) را منیفلد فینسلری می نامیم.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید N یک گروه لی باشد، تابع اساسی فینسلری $F : TN \to [0,\infty)$ ناوردای چپ نامیده می شود، اگر

$$F(y,X) = F((L_x)y, (d\,L_x)yX) \qquad \forall x,y \in N, \forall X \in T_yN.$$

تعریف ۴.۳.۲. (متر ریمانی بوسان و تانسورکارتان بوسان[11]). [۲۴] فرض کنید W میدان برداری هیچ جا ناصفر روی M باشد، متر ریمانی بوسان $\langle , \rangle_W$ تعیین شده به وسیله تابع اساسی فینسلری F و میدان برداری مرجع W به صورت زیر بیان می شود:

$$\langle X_p, Y_p\rangle_W = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2\left(W_p + sX_p + tY_p\right)}{\partial s \partial t}|_{s=t=0} \qquad \forall p \in N, \forall X,Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$$

تانسور کارتان بوسان به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{C}_\flat\left(X_p,Y_p,Z_p\right)_W = \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t}|_{s=t=0} F^2\left(W_p + rX_p + sY_p + tZ_p\right) \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}\left(M\right)$$

نوع $(1,2)$ تانسور کارتان بوسان نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{C}_W : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}(\mathcal{M}) \qquad \langle \mathcal{C}_W(X,Y), Z\rangle_W = \mathcal{C}_\flat(X,Y,Z)_W.$$

[11] osculating Riemann metric and osculating Cartan tensor

برای تانسور کارتان داریم:

$$\mathcal{C}_\flat(X,Y,W)_W = \mathcal{C}_\flat(Y,W,X)_W = \mathcal{C}_\flat(W,X,Y)_W = ۰ \qquad (۲۲.۲)$$

قضیه ۵.۳.۲. (قضیه وجود و یکتایی التصاق چرن-راند). [۲۰] فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری بوده و U زیر مجموعه بازی از M باشد. نگاشت منحصربه فرد

$$\nabla : \mathcal{X}^+(U) \times \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)$$

$$(W,X,Y) \longrightarrow \nabla^W_X Y$$

با خواص زیر وجود دارد:

(۱) برای هر $W \in \mathcal{X}^+(U)$، نگاشت

$$\nabla^W : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)$$

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla^W_X Y$$

یک التصاق آفین باشد.

(۲) ∇^W دارای تاب صفر باشد یعنی :

$$\nabla^W_X Y - \nabla^W_Y X - [X,Y] = ۰$$

(۳) ∇^W متریک - سازگار باشد یعنی:

$$X\langle Y,Z\rangle_W = \langle \nabla^W_X Y, Z\rangle_W + \langle Y, \nabla^W_X Z\rangle_W + ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_X W, Y, Z\right)_W$$

علاوه بر این داریم:

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla^W_X Y, Z\rangle_W &= X\langle Y,Z\rangle_W + Y\langle Z,X\rangle_W - Z\langle X,Y\rangle_W \\ &+\langle [X,Y], Z\rangle_W - \langle [Y,Z], X\rangle_W + \langle [Z,X], Y\rangle_W \\ &-2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_X W, Y, Z\right)_W - 2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_Y W, Z, X\right)_W \\ &+2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_Z W, X, Y\right)_W . \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

∇ توصیف شده را التصاق چرن-راند می نامیم.

تعریف ۶.۳.۲. (تانسور انحنای ریمان). فرض می کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد، نگاشت

$$R : \mathcal{X}^+(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow\mathcal{X}(M)$$

را تانسور انحنای ریمان نامیم، اگر به ازای هر $W\in\mathcal{X}^+(M)$ ، R^W به صورت زیر تعریف شود.

$$R^W(X,Y)Z = \nabla^W_X\nabla^W_Y Z - \nabla^W_Y\nabla^W_X Z - \nabla^W_{[X,Y]} Z$$

تعریف ۷.۳.۲. (تانسور ریچی). تانسور ریچی منیفلد فینسلری (M,F) عبارتست از میدان $2-$ تانسوری هموردا که به صورت زیر تعریف می شود.

$$Ric(X,Y) = trace\,\{\xi\longrightarrow R(\xi,X)Y \mid \xi\in\mathcal{X}(M)\,\}, \forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$$

تعریف ۸.۳.۲. (انحنای پرچمی).

فرض کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلری و پرچم (Π,W) شامل بردار هیچ جا ناصفر W و یک صفحه $2-$ بعدی $\Pi\subset T_xM$ باشد که توسط دو بردار W,Y تولید شده باشد. حال انحنای پرچمی (Π,W) را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$K(\Pi,W) = \frac{\langle R^W(V,W)W,V\rangle_W}{\langle W,W\rangle_W\langle V,V\rangle_W - \langle W,V\rangle_W^2}$$

فصل ۳

هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر فینسلری ناوردای چپ

۱.۳ مقدمه

گروه های لی پوچتوان در بسیاری از زمینه های ریاضیات نقش مهمی ایفا می کنند و مخصوصا گروه های لی پوچتوان از رده ۲ اهمیت بسزایی در ریاضیات دارند. در زمینه گروه های لی پوچتوان کارهای زیادی صورت گرفته ازجمله جی. ولف [۱] در [۲۵] ثابت کرده است که هر گروه لی پوچتوان ناآبلی انحنای برشی منفی و مثبت می پذیرد و میلنور در [۲] [۱۹] این نتایج را در مورد انحنای ریچی گسترش داد.

یک کلاس خاص از گروه های لی پوچتوان از رده ۲، گروه های نوع هایزنبرگ هستند که توسط آ. کاپلان [۳] در [۱۶، ۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته اند.

در سال های اخیر در زمینه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر های ریمانی و فینسلری ناوردای چپ مقالات زیادی وجود دارد([۷، ۸، ۲۱]). پ. ابرلاین [۴] در [۷] هندسه گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ را در مورد بررسی قرار داد. مطالب این فصل تعمیمی از کار پ. ابرلاین در زمینه فینسلری می باشد.

[۱] J.Wolf
[۲] Milnor
[۳] A.Kaplan
[۴] P. Eberlein

همانطور که در فصل قبل بیان شد التصاق چرن-راند یک التصاق خطی روی کلاف مماس π^*TM است که :

$$\nabla : \mathcal{X}(TM) \times \mathcal{X}(\pi^*TM) \to \mathcal{X}(\pi^*TM).$$

اکنون با استفاده از این التصاق و یک میدان برداری هیچ جا ناصفر، می توان یک التصاق خطی روی منیفلد M به صورت زیر تعریف کرد:

$$\nabla^W : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla^W_X Y$$

که در بخش بعد جزئیات آن بیان خواهد شد.

برای رسیدن به نتایج مطلوب نیاز به یک شرط اضافی داریم که شرط سازگاری [5] نامیده می شود که در ادامه تعریف خواهد شد.

از این پس از N برای نمایش یک گروه لی پوچتوان از رده ۲، از $\mathcal{N}$ برای نمایش جبر لی متناظر آن و از $\mathcal{Z}$ برای نمایش مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ استفاده خواهیم کرد. همچنین فرض می کنیم $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی روی $\mathcal{N}$ باشد. در اینصورت زیر فضای متمم متعامد $\mathcal{Z}$ نسبت به این ضرب داخلی را با نماد $\mathcal{V}$ نمایش می دهیم.

برای هر عضو Z از $\mathcal{Z}$ نگاشت خطی پادمتقارن $j(Z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$j(Z) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$j(Z)X = (adX)^*Z, X \in \mathcal{V}$$

که در آن $(adX)^*$ ترانهاده نگاشت خطی adX نسبت به ضرب داخلی $\langle , \rangle$ است.

در این متن منظور از میدان برداری مرجع W ، یک میدان برداری پایای چپ (ثابت) است، که در مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ واقع است. برای زیر مجموعه باز U از N چنین میدان برداری وجود دارد ولی در حالت سراسری ممکن است چنین میدان برداری وجود نداشته باشد. از این به بعد بین U و N تفاوت قائل نمی شویم. ساختار فینسلری روی منیفلد N نسبت به میدان برداری

[5] Compatible

مرجع W یک ساختار ریمانی روی N القاء می کند، نگاشت خطی پادمتقارن بالا برای میدان برداری مرجع W را با نماد j_W نمایش می دهیم.

در این فصل هر کجا ارجاع داده نشده بود آن مطلب از مرجع [۲۴] می باشد.

۲.۳ التصاق چرن -راند

تعریف ۱.۲.۳. (التصاق چرن-راند). التصاق چرن-راند

$$\nabla^W : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$$

نسبت به میدان برداری مرجع W به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} ۲\langle \nabla^W_X Y, Z\rangle_W \quad = \quad & X\langle Y, Z\rangle_W + Y\langle Z, X\rangle_W - Z\langle X, Y\rangle_W \\ & + \langle [X,Y], Z\rangle_W - \langle [Y,Z], X\rangle_W + \langle [Z,X], Y\rangle_W \\ & - ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_X W, Y, Z\right)_W - ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_Y W, Z, X\right)_W \\ & + ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_Z W, X, Y\right)_W . \end{aligned}$$

التصاق چرن - راند دارای تاب صفر است یعنی :

$$\nabla^W_X Y - \nabla^W_Y X - [X,Y] = ۰$$

و التصاق چرن - راند تقریبا متریک - سازگار است یعنی:

$$X\langle Y, Z\rangle_W = \langle \nabla^W_X Y, Z\rangle_W + \langle Y, \nabla^W_X Z\rangle_W + ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla^W_X W, Y, Z\right)_W \qquad (۱.۳)$$

برای میدان برداری های ناوردای چپ W, Z, Y, X سه جمله سمت راست معادله (۱.۳) صفر می شود، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_X^W Y, Z\rangle_W &= \langle[X,Y],Z\rangle_W - \langle[Y,Z],X\rangle_W + \langle[Z,X],Y\rangle_W \\ &\quad -2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_X^W W, Y, Z\right)_W - 2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_Y^W W, Z, X\right)_W \\ &\quad +2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_Z^W W, X, Y\right)_W . \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

قضیه ۲.۲.۳. اگر میدان برداری مرجع W در مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ پوچتوان از رده ۲ قرار داشته باشد آ نگاه برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} 2\nabla_X^W Y &= [X,Y] - (adY)^*X - (adX)^*Y \\ &\quad +\mathcal{C}_W((adX)^*W, Y) + \mathcal{C}_W((adY)^*W, X) \\ &\quad +(ad\mathcal{C}_W(X,Y))^*W. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم $\nabla_W^W W = 0$. برای همین فرض می کنیم $X = Y = W \in \mathcal{Z}$ و در رابطه (۲.۳) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_W^W W, Z\rangle_W &= \langle[W,W],Z\rangle_W - \langle[W,Z],X\rangle_W + \langle[Z,W],W\rangle_W \\ &\quad -2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_W^W W, W, Z\right)_W - 2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_W^W W, W, X\right)_W \\ &\quad +2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_Z^W W, W, W\right)_W . \end{aligned}$$

بوضوح سه جمله اول سمت راست تساوی مساوی صفر می باشد و سه جمله آخر سمت راست ساوی با توجه به رابطه (۲۲.۲) مساوی صفر است. بنابر این $\nabla_W^W W = 0$. حال $\nabla_X^W W$ را بدست می آوریم:

برای هر $Y = W \in \mathcal{Z}$ و $Z \in \mathcal{N}$ و با جایگذاری در رابطه (۲.۳) بدست می آید:

$$\begin{aligned}
۲\langle \nabla_X^W W, Z\rangle_W \quad &= \quad \langle [X,W], Z\rangle_W - \langle [W,Z], X\rangle_W + \langle [Z,X], W\rangle_W \\
&\quad -۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_X^W W, W, Z\right)_W - ۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_W^W W, Z, X\right)_W \\
&\quad +۲\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_Z^W W, X, W\right)_W .
\end{aligned}$$

بوضوح جمله اول و دوم سمت راست تساوی مساوی صفر است و سه جمله آخر سمت راست تساوی نیز با توجه به رابطه (۲۲.۲) مساوی صفرند. در نتیجه داریم:

$$۲\langle \nabla_X^W W, Z\rangle_W = \langle [Z,X], W\rangle_W = -\langle (adX)Z, W\rangle_W = -\langle (adX)^* W, Z\rangle_W$$

یعنی $\nabla_X^W W = -\frac{۱}{۲}(adX)^* W$. به همین ترتیب $\nabla_Y^W W = -\frac{۱}{۲}(adY)^* W$ و $\nabla_Z^W W = -\frac{۱}{۲}(adZ)^* W$.

حال با توجه به روابط بدست آمده در بالا، رابطه (۲.۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
۲\langle \nabla_X^W Y, Z\rangle_W \quad &= \quad \langle [X,Y], Z\rangle_W - \langle Z, (adY)^* X, \rangle_W - \langle Z, (adX)^* Y\rangle_W \\
&\quad +\langle \mathcal{C}_W((adX)^* W, Y), Z\rangle_W + \langle \mathcal{C}_W((adY)^* W, X), Z\rangle_W \\
&\quad -\langle \mathcal{C}_W(X,Y), (adZ)^* W)\rangle_W .
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
-\langle \mathcal{C}_W(X,Y), (adZ)^* W\rangle_W &= -\langle W, (adZ)C_W(X,Y))\rangle_W = \langle W, [\mathcal{C}_W(X,Y), Z]\rangle_W \\
&= \langle W, ad(\mathcal{C}_W(X,Y))Z\rangle_W = \langle Z, ad(\mathcal{C}_W(X,Y))^* W\rangle_W
\end{aligned}$$

بدین ترتیب حکم ثابت می شود. □

قضیه ۳.۲.۳. اگر میدان برداری مرجع W در مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ پوچتوان از رده ۲ قرار داشته باشد و $X, Y \in \mathcal{N}$ آنگاه $\nabla_X^W Y \in \mathcal{N}$.

قضیه ۴.۲.۳. اگر میدان برداری مرجع W در مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ پوچتوان از رده ۲ قرار داشته باشد آنگاه:

(الف): برای هر $X, Y \in \mathcal{V}$ داریم:

$$\nabla^W_X Y = \frac{۱}{۲}[X, Y] + \frac{۱}{۲}\mathcal{D}_W(X, Y)$$

(ب): برای هر $X \in \mathcal{V}$ و هر $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla^W_X Z = -\frac{۱}{۲}\jmath_W(Z)X + \frac{۱}{۲}\mathcal{C}_W(\jmath_W(W)X, Z) + \frac{۱}{۲}\jmath_W(W)\mathcal{C}_W(X, Z)^{\mathcal{V}}$$
$$\nabla^W_X Z = \nabla^W_Z X$$

(پ): برای هر $Z, Z^* \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla^W_Z Z^* = \frac{۱}{۲}\jmath_W(W)\mathcal{C}_W(Z, Z^*)^{\mathcal{V}}$$

اثبات. اگر $X, Y \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{N}$ ، آنگاه با توجه به این که N گروه لی پوچتوان از رده ۲ است داریم:

$$\langle (adY)^* X, Z\rangle = \langle (adY)Z, X\rangle = \langle [Y, Z], X\rangle = ۰$$

بنابراین $(adY)^*X = ۰$ ، به همین ترتیب $(adY)^*X = ۰$.

از طرف دیگر اگر $X, Y \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{N}$ ، آنگاه

$$\langle ad(\mathcal{C}_W(X, Y)^{\mathcal{Z}})^* W, Z\rangle = \langle ad(\mathcal{C}_W(X, Y)^{\mathcal{Z}})Z, W\rangle = \langle [\mathcal{C}_W(X, Y)^{\mathcal{Z}}, Z], W\rangle = ۰$$

بنابراین $ad(C_W(X, Y)^{\mathcal{Z}})^* W = ۰$.

حال با توجه به روابط بدست امده در با لا و رابطه (۵.۳) و جایگذاری در رابطه (۳.۳) حکم (a)ثابت می شود.

اگر $X, Y \in \mathcal{N}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ ، آنگاه

$$\langle (adZ)^* X, Y\rangle = \langle (adZ)Y, X = \langle [Z, Y], X\rangle = ۰$$

بنابراین $(adZ)^*X = ۰$ ، پس جمله دوم و پنجم از رابطه (۳.۳) مساوی صفر خواهد بود. در نتیجه حکم (b) ثابت می شود.

با توجه به رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} ۲\nabla_Z^W Z^* &= [Z, Z^*] - (adZ^*)^*X - (adZ)^*Z^* \\ &+\mathcal{C}_W((adZ)^*W, Z^*) + \mathcal{C}_W((adZ^*)^*W, Z) \qquad (۴.۳) \\ &+(ad\mathcal{C}_W(Z, Z^*))^*W. \end{aligned}$$

بوضوح جمله اول سمت راست رابطه (۴.۳) برابر صفر است.

چون $(adZ)^*Z^* = (adZ^*)^*Z = (adZ)^*W = (adZ^*)^*W = ۰$ ، پس جملات دوم و سوم و چهارم و پنجم سمت راست رابطه (۴.۳) برابر صفرند. در نتیجه حکم (c) ثابت می شوند. □

تعریف ۵.۲.۳. متر فینسلری ناوردای چپ را با جبرلی $\mathcal{N}$ سازگار می نامند، اگر

$$\mathcal{C}_W\left(X, Y\right)^{\mathcal{Z}} = ۰, \mathcal{C}_W\left(Z, Y\right)^{\mathcal{V}} = ۰ \qquad \forall X, Y \in \mathcal{N}, \forall Z \in \mathcal{Z}$$

که $\mathcal{C}_W(.) = \mathcal{C}_W(,)^{\mathcal{Z}} + \mathcal{C}_W(,)^{\mathcal{V}}$ مولفه های تجزیه متعامد از تانسور کارتان می باشند.

نگاشت $\mathcal{D}_W : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_W\left(X, Y\right) &= \mathcal{C}_W\left(j_W\left(W\right)X, Y\right) + \mathcal{C}_W\left(j_W\left(W\right)Y, X\right) \\ &+j_W\left(W\right)\mathcal{C}_W\left(X, Y\right)^{\mathcal{V}}. \qquad (۵.۳) \end{aligned}$$

نتیجه ۶.۲.۳. اگر متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی سازگار باشد برای التصاق چرن-راند داریم:

(الف): برای هر $X, Y \in \mathcal{V}$ داریم:

$$\nabla_X^W Y = \frac{۱}{۲}[X, Y] + \frac{۱}{۲}\mathcal{D}_W(X, Y) \qquad \forall X, Y \in \mathcal{V}$$

(ب): برای $X \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla^W_X Z = \nabla^W_Z X = -\frac{۱}{۲} j_W(Z)X$$

(پ): برای $Z, Z^\star \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\nabla^W_Z Z^* = ۰$$

اثبات. با توجه به شرط سازگاری متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی به سادگی حکم (a) و (c) ثابت می شوند.

با توجه به قضییه قبل داشتیم:

$$\nabla^W_X Z = -\frac{۱}{۲} j_W(Z)X + \frac{۱}{۲}\mathcal{C}_W(j_W(W)X, Z) + \frac{۱}{۲} j_W(W)\mathcal{C}_W(X, Z)^{\mathcal{V}}, \forall X \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{Z} \quad (۶.۳)$$

با توجه به شرط سازگاری متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی جمله سوم سمت راست رابطه (۶.۳) برابر صفر است و از طرف دیگر

$$\frac{۱}{۲}\mathcal{C}_W(j_W(W)X, Z) = \frac{۱}{۲}\Big(\mathcal{C}_W(j_W(W)X, Z)^{\mathcal{Z}} + \mathcal{C}_W(j_W(W)X, Z)^{\mathcal{V}}\Big) = ۰$$

در نتیجه حکم (b) ثابت می شود. □

۳.۳ تانسور انحنا و تانسور ریچی

در این بخش تانسور انحنا و تانسور ریچی گروه های لی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر فینسلری ناوردای چپ را با توجه به شرط سازگاری متر فینسلری ناوردای چپ با جبرلی مورد بحث قرار می دهیم.

اگر X, Y, Z میدان برداری های ناوردای چپ باشند، آنگاه $R^W(X, Y)Z$ نیز ناوردای چپ خواهد بود. بنابر این می توان R^W را به عنوان نگاشت سه خطی زیر در نظر گرفت.

$$R^W : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$

که به صورت زیر بیان می شود:

$$R^W(X,Y)Z = \nabla^W_X \nabla^W_Y Z - \nabla^W_Y \nabla^W_X Z - \nabla^W_{[X,Y]} Z$$

حال فرمولی برای تانسور انحنای گروه لی مذکور در حالت های مختلفی که برای میدان برداری های ناوردای چپ امکانپذیر است، ارائه می دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. اگر متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی سازگار باشد. در این صورت:

(الف) برای هر $Z_۱, Z_۲, Z_۳ \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$R^W(Z_۱, Z_۲)Z_۳ = ۰$$

(ب) برای هر $X \in \mathcal{V}$ و $Z_۱, Z_۲ \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\begin{aligned} R^W(X, Z_۱)Z_۲ &= -\frac{۱}{۴} j_W(Z_۱)(j_W(Z_۲)X), \\ R^W(Z_۱, Z_۲)X &= \frac{۱}{۴} j_W(Z_۱)(j_W(Z_۲)X) - \frac{۱}{۴} j_W(Z_۲)(j_W(Z_۱)X) \end{aligned}$$

(پ) برای هر $X, Y \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$\begin{aligned} R^W(X,Y)Z &= -\frac{۱}{۴}[X, j_W(Z)Y] + \frac{۱}{۴}[Y, j_W(Z)X] \\ &\quad -\frac{۱}{۴}\mathcal{D}_W(X, j_W(Z)Y) + \frac{۱}{۴}\mathcal{D}_W(Y, j_W(Z)X) \\ R^W(X,Z)Y &= -\frac{۱}{۴}[X, j_W(Z)Y] - \frac{۱}{۴}\mathcal{D}_W(X, j_W(Z)Y) \\ &\quad +\frac{۱}{۴} j_W(Z)\mathcal{D}_W(X,Y) \end{aligned}$$

(پ) برای $X, X^*, Y \in \mathcal{V}$ داریم:

$$\begin{aligned} R^W(X,Y)X^* &= -\frac{۱}{۴}j_W([Y,X^*])X + \frac{۱}{۴}j_W([X,X^*])Y + \frac{۱}{۴}j_W([X,Y])X^* \\ &\quad + \frac{۱}{۴}[X, \mathcal{D}_W(Y,X^*)] + \frac{۱}{۴}\mathcal{D}_W(X, \mathcal{D}_W(Y,X^*)) \\ &\quad - \frac{۱}{۴}[Y, \mathcal{D}_W(X,X^*)] - \frac{۱}{۴}\mathcal{D}_W(Y, \mathcal{D}_W(X,X^*)). \end{aligned}$$

اثبات. با توجه به قسمت (c) از نتیجه (۶.۲.۳) حکم (a) به آسانی نتیجه می شود.

با استفاده از قسمت های (b) و (c) از نتیجه (۶.۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} R^W(X,Z_۱)Z_۲ &= -\nabla^W_{Z_۱}\nabla^W_X Z_۲ = \frac{۱}{۲}\nabla^W_{Z_۱}(j_W(Z_۲)X) \\ &= -\frac{۱}{۴}j_W(Z_۱)(j_W(Z_۲)X), \\ R^W(Z_۱,Z_۲)X &= \nabla^W_{Z_۱}\nabla^W_{Z_۲}X - \nabla^W_{Z_۲}\nabla^W_{Z_۱}X \\ &= -\frac{۱}{۲}\nabla^W_{Z_۱}(j_W(Z_۲)X) + \frac{۱}{۲}\nabla^W_{Z_۲}(j_W(Z_۱)X) \\ &= \frac{۱}{۴}j_W(Z_۱)(j_W(Z_۲)X) - \frac{۱}{۴}j_W(Z_۲)(j_W(Z_۱)X) \end{aligned}$$

بنابراین حکم (b) ثابت شد.

قسمت (c) گزاره با استفاده از نتیجه (۶.۲.۳) به صورت زیر اثبات می شود:

$$\begin{aligned}
R^W(X,Y)Z &= \nabla^W_X\nabla^W_Y Z - \nabla^W_Y\nabla^W_X Z\\
&= -\frac{1}{2}\nabla^W_X(j_W(Z)Y) + \frac{1}{2}\nabla^W_Y(j_W(Z)X)\\
&= -\frac{1}{4}[X, j_W(Z)Y] - \frac{1}{4}\mathcal{D}_W(X, j_W(Z)Y)\\
&\quad +\frac{1}{4}[Y, j_W(Z)X] + \frac{1}{4}\mathcal{D}_W(Y, j_W(Z)X),\\
R^W(X,Z)Y &= \nabla^W_X\nabla^W_Z Y - \nabla^W_Z\nabla^W_X Y\\
&= -\frac{1}{2}\nabla^W_X(j_W(Z)Y) - \frac{1}{2}\nabla^W_Z([X,Y] + \mathcal{D}_W(X,Y))\\
&= -\frac{1}{2}\nabla^W_X(j_W(Z)Y) - \frac{1}{2}\nabla^W_Z[X,Y] - \frac{1}{2}\nabla^W_Z\mathcal{D}_W(X,Y)\\
&= \frac{1}{4}(-[X, j_W(Z)Y] - \mathcal{D}_W(X, j_W(Z)Y)\\
&\quad + j_W(Z)\mathcal{D}_W(X,Y)).
\end{aligned}$$

قسمت آخر قضیه نیز با استفاده از گزاره (۶.۲.۳) به صورت زیر اثبات می شود.

$$\begin{aligned}
R^W(X,Y)X^* &= \nabla^W_X\nabla^W_Y X^* - \nabla^W_Y\nabla^W_X X^* - \nabla^W[X,Y]X^*\\
&= \frac{1}{2}\nabla^W_X([Y,X^*] + \mathcal{D}_W(Y,X^*))\\
&\quad -\frac{1}{2}\nabla^W_Y([X,X^*] + \mathcal{D}_W(X,Y)) + \frac{1}{2}j_W([X,Y])X^*\\
&= -\frac{1}{4}j_W([Y,X^*])X + \frac{1}{4}j_W([X,X^*])Y + \frac{1}{4}j_W([X,Y])X^*\\
&\quad +\frac{1}{4}[X, \mathcal{D}_W(Y,X^*)] + \frac{1}{4}\mathcal{D}_W(X, \mathcal{D}_W(Y,X^*))\\
&\quad -\frac{1}{4}[Y, \mathcal{D}_W(X,X^*)] - \frac{1}{4}\mathcal{D}_W(Y, \mathcal{D}_W(X,X^*))
\end{aligned}$$

□

تانسور ریچی از منیفلد فینسلری (N, F) برای $X, Y \in \mathcal{N}$ به صورت زیر

$$Ric(X, Y) = trace\{\xi \to R^W(\xi, X)Y \mid \xi \in \mathcal{N}\}$$

تعریف می شود.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی $\mathcal{N}$ سازگار باشد، در این صورت

(الف) به ازای هر $X \in \mathcal{V}$ و هر $Z \in \mathcal{Z}$ تانسور ریچی به صورت زیر بیان می شود:

$$4Ric(X, Z) = d_1(X, Z) - d_2(X, Z)$$

(ب) به ازای هر $X \in \mathcal{V}$ و $Z \in \Psi = \{Z \in \mathcal{Z} \mid j_W(Z) = 0\}$ داریم:

$$Ric(X, Z) = 0$$

(پ) برای هر $Z, Z^* \in \mathcal{Z}$ داریم:

$$Ric(Z, Z^*) = -\frac{1}{4} trace\{j_W(Z) \circ j_W(Z^*)\})$$

که در آن $d_1(X, Z)$ و $d_2(X, Z)$ برای $X \in \mathcal{V}$ و $Z \in \mathcal{Z}$ به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$d_1(X, Z) = trace\{\xi \mapsto \mathcal{D}_W(X, j_W(Z)\xi) | \xi \in \mathcal{V}\}$$

$$d_2(X, Z) = trace\{\xi \mapsto \mathcal{D}_W(\xi, j_W(Z)X) | \xi \in \mathcal{V}\}$$

اثبات. فرض کنید $(V_1, \cdots, V_n)$ و $(Z_1, \cdots, Z_m)$ به ترتیب پایه های یکامتعامدی برای $\mathcal{V}$و $\mathcal{Z}$ باشند.

ادعا می کنیم

$$Ric(X, Z) = \sum_{i=1}^{n} \langle R^W(V_i, X)Z, V_i\rangle_W + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle R^W(Z_\alpha, X)Z, Z_\alpha\rangle_W \tag{۷.۳}$$

برای اثبات ادعا، ابتدا ماتریس متناظر تبدیل خطی را که $\xi \in \mathcal{N}$ را به $R^W(\xi, X)Z$ می برد، را بدست می آوریم. می دانیم

$$R^W(V_i, X)Z = \sum_{i=۱}^{n} \langle R^W(V_i, X)Z, V_i\rangle_W V_i + \sum_{\alpha=۱}^{m} \langle R^W(V_i, X)Z, Z_\alpha)\rangle_W Z_\alpha$$
$$R^W(Z_\alpha, X)Z = \sum_{i=۱}^{n} \langle R^W(Z_\alpha, X)Z, V_i\rangle_W V_i + \sum_{\alpha=۱}^{m} \langle R^W(Z_\alpha, X)Z, Z_\alpha)\rangle_W Z_\alpha$$

بنابراین ماتریس متناظر تبدیل خطی بالا عبارتست از

$$\begin{pmatrix} R^W(V_۱, X)Z, V_۱\rangle_W & \dots & \langle R^W(V_n, X)Z, V_۱\rangle_W & \langle R^W(Z_۱, X)Z, V_۱\rangle_W & \dots & \langle R^W(Z_m, X)Z, V_۱\rangle_W \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle R^W(V_۱, X)Z, V_n\rangle_W & \dots & \langle R^W(V_n, X)Z, V_n\rangle_W & \langle R^W(Z_۱, X)Z, V_n\rangle_W & \dots & \langle R^W(Z_m, X)Z, V_n\rangle_W \\ \langle R^W(V_۱, X)Z, Z_۱\rangle_W & \dots & \langle R^W(V_n, X)Z, Z_۱\rangle_W & \langle R^W(Z_۱, X)Z, Z_۱\rangle_W & \dots & \langle R^W(Z_m, X)Z, Z_۱\rangle_W \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle R^W(V_۱, X)Z, Z_m\rangle_W & \dots & \langle R^W(V_n, X)Z, Z_m\rangle_W & \langle R^W(Z_۱, X)Z, Z_m\rangle_W & \dots & \langle R^W(Z_m, X)Z, Z_m\rangle_W \end{pmatrix}$$

در نتیجه ادعا ثابت می شود.

طبق قسمت (b) از قضیه (۱.۳.۳) نتیجه می شود، $R^W(Z_\alpha, X)Z \in \mathcal{V}$. بنابراین جمله دوم سمت راست رابطه (۱۵.۳) صفر خواهد شد.

حال با توجه به قسمت (c) از قضیه (۱.۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} Ric(X, Z) &= \sum_{i=۱}^{n} \langle R^W(V_i, X)Z, V_i\rangle_W \\ &= -\frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle [V_i, j_W(Z)X], V_i\rangle_W + \frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle [X, j_W(Z)V_i], V_i\rangle_W \\ &\quad -\frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle \mathcal{D}_W(V_i, j_W(Z)X), V_i\rangle_W + \frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle \mathcal{D}_W(X, j_W(Z)V_i), V_i\rangle_W \\ &= -\frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle \mathcal{D}_W(V_i, j_W(Z)X), V_i\rangle_W + \frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{n} \langle \mathcal{D}_W(X, j_W(Z)V_i), V_i\rangle_W \\ &= \frac{۱}{۴}(d_۱(X, Z) - d_۲(X, Z)). \end{aligned}$$

در نتیجه قسمت (a) قضیه ثابت گردید.

طبق قسمت (b) و (a) از قضیه (۱.۳.۳) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} Ric(Z,Z^*) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R^W(V_i,Z)Z^*,V_i\rangle_W + \sum_{\alpha=1}^{m}\langle R^W(Z_\alpha,Z)Z^*,Z_\alpha\rangle_W \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\langle j_W(Z)(j_W(Z^*))V_i,V_i\rangle_W \\ &= -\frac{1}{4}trace\{j_W(Z)\circ j_W(Z^*)\}) \end{aligned}$$

□

۴.۳ انحنای پرچمی و ژئودزیک

فرض کنید $\Pi \subset T_xN$ و $\Pi = span(V,W)$ و جفت (V,W) نسبت به $\langle,\rangle_W$ متعامد یکه باشد، آنگاه انحنای پرچمی از (Π,W) عبارتست از:

$$K(\Pi,W) = \langle R^W(V,W)W,V\rangle_W.$$

در ادامه برای بررسی انحنای پرچمی گروه های لی پوچتوان از رده ۲، بردار مرجع W را با بردار قطب انحنای پرچمی منطبق در نظر می گیریم و فرض می کنیم بردار مرجع W یک بردار ژئودزیک [۶] باشد یعنی $\nabla_W^W W = 0$.

قضیه ۱.۴.۳. بردار هیچ جا ناصفر $W \in \mathcal{N}$ بردار ژئودزیک نامیده می شود اگر و تنها اگر

$$\langle [Z,W],W\rangle_W = 0 \qquad \forall Z \in \mathcal{N}.$$

اثبات. بنابر رابطه (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_W^W W,Z\rangle_W \quad &= \quad \langle [W,W],Z\rangle_W - \langle [W,Z],Z\rangle_W + \langle [Z,W],W\rangle_W \\ &\quad -2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_W^W W,W,Z\right)_W - 2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_W^W W,W,Z\right)_W \\ &\quad +2\mathcal{C}_\flat\left(\nabla_Z^W W,W,W\right)_W. \end{aligned}$$

[۶] Geodesic vector

بوضوح جمله اول سمت راست تساوی مساوی صفر است و سه جمله آخر سمت راست تساوی با توجه به رابطه (۲۲.۲) مساوی صفر است. بنابر این

$$\langle \nabla_W^W W, Z\rangle_W = -\langle [W,Z], Z\rangle_W + \langle [Z,W], W\rangle_W = ۲\langle [Z,W], W\rangle_W \tag{۸.۳}$$

با توجه به تساوی (۸.۳) اثبات حکم بدیهی است. □

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید N گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده ۲ همراه با متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی $\mathcal{N}$ باشد و W یک بردار ژئودزیک با طول واحد در منیفلد ذکر شده باشد، در این صورت

(۱) اگر $Z \in \mathcal{Z}$ و $\Pi = span(Z,W)$ و جفت (Z,W) نسبت به $\langle , \rangle_W$ متعامد یکه باشد، آنگاه

$$K(\Pi, W) = \frac{۱}{۴}\|(adW)^* Z\|_W^۲.$$

در حالت خاص

$$K(\Pi, W) = ۰, W \in \mathcal{Z}.$$

(۲) اگر $V \in \mathcal{V}$ و $\Pi = span(V,W)$ و جفت (V,W) نسبت به $\langle , \rangle_W$ متعامد یکه باشد، آنگاه

$$K(\Pi, W) = -\frac{۳}{۴}\|[V,W]\|_W^۲ + \frac{۱}{۴}\|(adV)^* W\|_W^۲.$$

در حالت خاص

$$K(\Pi, W) = \frac{۱}{۴}\|j_W(W)V\|_W^۲, W \in \mathcal{Z}.$$

اثبات. اگر W یک بردار ژئودزیک باشد یعنی $\nabla_W^W W = ۰$ ، آنگاه با توجه به رابطه (۲۲.۲) و رابطه (۲.۳) نتیجه زیر بدست می آید:

$$۲\langle \nabla_X^W W, Z\rangle_W = \langle [X,W], Z\rangle_W - \langle [W,Z], X\rangle_W + \langle [Z,X], W\rangle_W,$$

با توجه به تساوی های زیر، $\nabla_X^W W$ را بدست می آوریم.

$$\langle [W,Z],X\rangle_W=\langle (adW)Z,X\rangle_W=\langle (adW)^*X,Z\rangle_W,$$

$$\langle [Z,X],W\rangle_W=-\langle (adX)Z,W\rangle_W=\langle (adX)^*W,Z\rangle_W.$$

بنابراین

$$\nabla^W_X W=\frac{۱}{۲}\{[X,W]-(adW)^*X-(adX)^*W\}$$

حال با توجه به تاب آزادی التصاق چرن-راند $\nabla^W_W X$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\nabla^W_W X=\frac{۱}{۲}\{[W,X]-(adW)^*X-(adX)^*W\}.$$

در این مرحله از اثبات با توجه به تساوی های زیر التصاق چرن-راند را در حالت های خاص بدست می آوریم.

اگر W یک بردار ژئودزیک باشد و $X\in\mathcal{N}$ و $Z\in\mathcal{Z}$ ، آنگاه

$$\langle (adZ)^*W,X\rangle_W=\langle (adZ)X,W\rangle_W=\langle [Z,X],W\rangle_W=۰,$$

اگر W یک بردار ژئودزیک باشد و $X\in\mathcal{N}$ و $V\in\mathcal{V}$ ، آنگاه

$$\langle (adW)^*V,X\rangle_W=\langle (adW)X,V\rangle_W=\langle [W,X],W\rangle_W=۰,$$

در نتیجه

$$\nabla^W_Z W = -\frac{۱}{۲}(adW)^*Z=\nabla^W_W Z \qquad \forall Z\in\mathcal{Z}, \tag{۹.۳}$$

$$\nabla^W_V W = \frac{۱}{۲}\{[V,W]-(adV)^*W\} \qquad \forall V\in\mathcal{V}, \tag{۱۰.۳}$$

$$\nabla^W_W V = \frac{۱}{۲}\{[W,V]-(adV)^*W\} \qquad \forall V\in\mathcal{V}. \tag{۱۱.۳}$$

فرض کنید $Z\in\mathcal{Z}$ باشد:

$$\begin{aligned} R^W(Z,W)W &= \nabla^W_Z\nabla^W_W W-\nabla^W_W\nabla^W_Z W-\nabla^W_{[Z,W]}W \\ &= -\nabla^W_W\nabla^W_Z W=\frac{۱}{۲}\nabla^W_W(adW)^*Z. \end{aligned}$$

چون $(adW)^*Z \in \mathcal{V}$ ($\langle (adW)^*Z, X\rangle_W = \langle (adW)X, Z\rangle_W = \langle [W,X], Z\rangle_W = 0$ $\quad \forall X \in \mathcal{Z}$) .

اکنون بنابر رابطه (۱۱.۳) داریم:

$$R^W(Z,W)W = \frac{1}{4}\{[W,(adW)^*Z] - [ad(adW)^*Z)^*W]\}$$

در ادامه

$$\begin{aligned}
\langle R^W(Z,W)W, W\rangle_W &= \frac{1}{4}\langle [W,(adW)^*Z], Z\rangle_W - \frac{1}{4}\langle [ad(adW)^*Z)^*W], Z\rangle_W \\
&= \frac{1}{4}\langle (adW)(adW)^*Z), Z\rangle_W - \frac{1}{4}\langle ad((adW)^*Z)Z, W\rangle_W \\
&= \frac{1}{4}\langle (adW)^*Z, adW)^*Z\rangle_W - \frac{1}{4}\langle [(adW)^*Z), Z], W\rangle_W \\
&= \frac{1}{4}\|(adW)^*Z\|_W^2.
\end{aligned}$$

بنابراین قسمت (۱) ثابت شد.

حال فرض کنید $V \in \mathcal{V}$ باشد، در نتیجه $(adV)^*W \in \mathcal{V}$. اکنون بنابر رابطه های (۹.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
R^W(V,W)W &= \nabla_W^W\nabla_W^W W - \nabla_W^W\nabla_V^W W - \nabla_{[V,W]}^W W \\
&= -\frac{1}{2}\nabla_W^W[V,W] + \frac{1}{2}\nabla_W^W(adV)^*W + \frac{1}{2}(adW)^*[V,W] \qquad (12.3)\\
&= \frac{3}{4}(adW)^*[V,W] + \frac{1}{4}[W,(adV)^*W] - \frac{1}{4}ad((adV)^*W)^*W.
\end{aligned}$$

باتوجه به تساوی (۱۲.۳) و تساوی های زیر، قسمت (۲) قضیه را اثبات خواهیم کرد.

با فرض اینکه W یک بردار ژئودزیک باشد و $V \in \mathcal{V}$ ، داریم:

$$\langle (adW)^*[V,W], V\rangle_W = \langle (adW)V, [V,W]\rangle_W = -\langle [V,W],[V,W]\rangle_W,$$

$$\begin{aligned}
\langle ad((adV)^*W)^*W, V\rangle_W &= \langle ad((adV)^*W)V, W\rangle_W = \langle [(adV)^*W, V], W\rangle_W \\
&= -\langle [V,(adV)^*W], W\rangle_W = -\langle (adV)((adV)^*W), W\rangle_W \\
&= -\langle (adV)^*W), (adV)^*W)\rangle_W.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\langle R^W(V,W)W,V\rangle_W &= \frac{۳}{۴}\langle (adW)^*[V,W],V\rangle_W + \frac{۱}{۴}\langle [W,(adV)^*W],V\rangle_W \\ &\quad -\frac{۱}{۴}\langle ad((adV)^*W)^*W,W\rangle_W \\ &= -\frac{۳}{۴}\|[V,W]\|_W^{۲} + \frac{۱}{۴}\|(adV)^*W\|_W^{۲}.\end{aligned}$$

در حالت خاصی که $W \in \mathcal{Z}$ باشد، انحنای پرچمی به صورت زیر بدست می آید:

$$K(\Pi,W) = \frac{۱}{۴}\|(adV)^*W\|_W^{۲} = \frac{۱}{۴}\|j_W(W)V\|_W^{۲}, W \in \mathcal{Z}.$$

□

تعریف ۳.۴.۳. (ژئودزیک). فرض کنید (N,F) منیفلد فینسلری با التصاق چرن-راند ∇^W باشد. خم $\gamma : I \subset R \longrightarrow M$ را ژئودزیک نامیم اگر $\nabla^W_{\gamma'}\gamma' = ۰$.

برای توصیف ژئودزیک های (N,F) کافی است آن دسته از ژئودزیک هایی که از نقطه همانی N شروع می شوند را بررسی کنیم. فرض کنید γ خمی باشد که $\gamma(۰) = e$ و $\gamma'(۰) = X_۰ + Y_۰ \in \mathcal{N}$ که $X_۰ \in \mathcal{V}, Y_۰ \in \mathcal{Z}$. در مختصات نمائی داریم:

$$\gamma(t) = \exp(X(t)+Z(t)), \quad X(t)\in\mathcal{V},\ Z(t)\in\mathcal{Z},$$

و

$$X'(۰) = X_۰, \quad Z' = Z_۰.$$

به سادگی مشاهده می شود:

$$\gamma'(t) = dL_{\gamma(t)}\left(X'(t) + Z'(t) + \frac{۱}{۲}[X'(t)+X(t)]\right) \tag{۱۳.۳}$$

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید متر فینسلری ناوردای چپ با جبر لی پوچتوان از رده ۲ سازگار باشد و W در مرکز جبر لی قرار داشته باشد، آنگاه خم γ ژئودزیکی از التصاق چرن-راند است اگر و فقط اگر در معادلات زیر صدق کند:

$$Z' + \frac{1}{2}[X', X] = Z_0, \; X'' - j_W(Z_0)X' + \frac{1}{2}\mathcal{D}_W(X', X') = 0$$

اثبات. فرض می کنیم $S = X' + Z' + \frac{1}{2}[X' + X]$. با استفاده از خاصیت ناوردای چپ التصاق چرن-راند و (۱۳.۳) داریم:

$$\nabla^W_{\gamma'}\gamma' = \nabla^W_S S = \nabla^W_S X' + \nabla^W_S(Z' + \frac{1}{2}[X', X]). \qquad (۱۴.۳)$$

فرض کنید $(V_1, \cdots, V_n)$ و $(Z_1, \cdots, Z_m)$ به ترتیب پایه های یکامتعامدی برای $\mathcal{V}$و $\mathcal{Z}$ باشند و $X = v^i V_i$ ، $Z = u^\alpha Z_\alpha$. علاوه بر این با این فرض که A^α_{ij} ثابت های ساختاری جبر لی باشند، داریم:

$$[V_i, V_j] = A^\alpha_{ij} Z_\alpha$$

با این فرضیات ابتدا جمله اول سمت راست تساوی (۱۴.۳) را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\nabla^W_S X' &= \nabla^W_S(v^{\cdot i} V_i) = v^{\cdot i}\nabla^W_S V_i \\
&= X'' + v^{\cdot i}\nabla^W_{X'} V_i + v^{\cdot i}\nabla^W_{Z' + \frac{1}{2}[X', X]} V_i \\
&= X'' + \frac{1}{2}v^{\cdot i}[X', V_i] + \frac{1}{2}\mathcal{D}_W(X', V_i) \\
&\quad -\frac{1}{2}v^{\cdot i} j_W(Z' + \frac{1}{2}[X', X])V_i \\
&= X'' + \frac{1}{2}\mathcal{D}_W(X', X') - \frac{1}{2}v^{\cdot i} j_W(Z' + \frac{1}{2}[X', X])X.
\end{aligned}$$

حال دومین جمله سمت راست (۱۴.۳) را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\nabla^W_S(Z' + \frac{۱}{۲}[X', X]) &= \nabla^W_S(u^{\cdot\alpha} Z_\alpha) + \frac{۱}{۲}\nabla^W_S\left(v^{\cdot i} v^j A^\alpha_{ij} Z_\alpha\right) \\
&= u^{\cdot\cdot\alpha} + u^{\cdot\alpha}\nabla^W_S Z_\alpha \\
&\quad + \frac{۱}{۲}(v^{\cdot\cdot i} v^j + v^{\cdot i} v^{\cdot j}) A^\alpha_{ij} Z_\alpha + \frac{۱}{۲} v^{\cdot i} v^j A^\alpha_{ij} \nabla^W_S Z_\alpha \\
&= Z'' + \frac{۱}{۲}[X'', X] + \left(u^{\cdot\alpha} + \frac{۱}{۲} v^{\cdot i} v^j A^\alpha_{ij}\right)\nabla^W_{X'} Z_\alpha \\
&= Z'' + \frac{۱}{۲}[X'', X] - \frac{۱}{۲} j_W(Z' + \frac{۱}{۲}[X', X])X'.
\end{aligned}$$

بنابر این

$$\nabla^W_{\gamma'}\gamma' = X'' + \frac{۱}{۲}\mathcal{D}_W(X', X') + Z'' + \frac{۱}{۲}[X'', X] - j_W(Z' + \frac{۱}{۲}[X', X])X'$$

چون خم γ ژئودزیکی از التصاق چرن-راند است و علاوه بر این $\mathcal{N} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{V}$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
X'' + \frac{۱}{۲}\mathcal{D}_W(X', X') - j_W(Z' + \frac{۱}{۲}[X', X])X' &= ۰ \\
Z'' + \frac{۱}{۲}[X'', X] &= ۰.
\end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

معادله دوم (۱۵.۳) نتیجه می دهد:

$$Z' + \frac{۱}{۲}[X', X] = ۰$$

بنابراین معادله دوم از (۱۵.۳) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$X'' + \frac{۱}{۲}\mathcal{D}_W(X', X') - j_W(Z_۰)X' = ۰.$$

□

فصل ۴

متر های راندرز روی گروه های لی۵-بعدی پوچتوان از رده ۲

۱.۴ مقدمه

در این فصل به بررسی هندسه گروه های لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ پرداخته و فرمول صریحی برای التصاق لویی-چوی ویتا، تانسور انحنا و انحنای برشی و عددی این گونه فضاها ارائه می دهیم. علاوه بر این ثابت می کنیم تنها گروه های لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ با مرکز ۳ -بعدی هستند که متر راندرز ناوردای چپ از نوع بروالد می پذیرند. در انتهای فصل هم ثابت می شود انحنای برشی و انحنای پرچمی فضای مذکور هم علامت خواهند شد.

در این فصل هر کجا ارجاع داده نشده بود آن مطلب از مرجع [۲۲] می باشد.

۲.۴ متر راندرز

همانطور که می دانیم مترهای راندرز با متر های ریمانی و میدان های برداری (۱-فرمی ها) ساخته می شوند.

فرض کنید g و X به ترتیب متر ریمانی و میدان برداری روی منیفلد M باشند طوری که $\|X\| = \sqrt{g(X,X)} < ۱$. متر راندرز F تعریف شده به وسیله g و X عبارتست از

$$F(x,Y) = \sqrt{g(x)(Y,Y)} + g(x)(X(x),Y), \qquad \forall x \in M,\ Y \in T_xM. \tag{۱.۴}$$

لم ۱.۲.۴. فرض کنید F متر راندرز تعریف شده در رابطه (۱.۴) روی منیفلد M باشد، آنگاه (M, F) را ازنوع بروالد است اگر و فقط اگر میدان برداری X نسبت به متر ریمانی g موازی باشد.

اثبات. به [۵]رجوع شود. $\square$

با استفاده از متر ریمانی ناوردای چپ و میدان برداری ناوردای چپ می توان متر راندرز ناوردای چپ روی گروه لی N ساخت. فرض کنید N یک گروه لی باشد و g و X به ترتیب متر ریمانی ناوردای چپ و میدان برداری ناوردای چپ باشند، به طوری که $\|X\| < ۱$. با استفاده از رابطه (۱.۴) می توان متر راندرز ناوردای چپ را تعریف کرد.

گزاره ۲.۲.۴. تناظر یک به یکی بین متر راندرز ناوردای چپ روی گروه لی N با متر ریمانی ناوردای چپ g و میدان برداری ناوردای چپ X با طول کمتر از یک وجود دارد. بنابر این بین متر راندرز ناوردای چپ با مجموعه $V = \{X \in \mathcal{N} \mid \langle X, X\rangle < ۱\}$ یک تناظر یک به یک وجود دارد.

از این پس N نماد یک گروه لی همبند ساده پوچتوان از رده ۲ با جبر لی $\mathcal{N}$ است.

۳.۴ جبر های لی با مرکز ۱ $-$ بعدی

در این قسمت فرض می کنیم مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ ۱ $-$ بعدی باشد.

هوملیا و کوالسکی در [۱۲] نشان داده اند که برای جبر لی ۵$-$بعدی $\mathcal{N}$ پایه یکامتعامد $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ چنان موجود است که

$$[e_۱, e_۲] = \lambda e_۵ \qquad [e_۳, e_۴] = \mu e_۵$$

طوریکه $\{e_۵\}$ پایه ای برای $\mathcal{Z}$ و $۰ < \mu \leq \lambda$ بوده و کلیه براکتهای ارایه نشده بین اعضای پایه، صفر می باشد.

با استفاده از معادله (۳.۱) داریم:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
∇_{e_1}	0	$\frac{\lambda}{2}e_5$	0	0	$-\frac{\lambda}{2}e_2$
∇_{e_2}	$-\frac{\lambda}{2}e_5$	0	0	0	$\frac{\lambda}{2}e_1$
∇_{e_3}	0	0	0	$\frac{\mu}{2}e_5$	$-\frac{\mu}{2}e_4$
∇_{e_4}	0	0	$-\frac{\mu}{2}e_5$	0	$\frac{\mu}{2}e_3$
∇_{e_5}	$-\frac{\lambda}{2}e_2$	$\frac{\lambda}{2}e_1$	$-\frac{\mu}{2}e_4$	$\frac{\mu}{2}e_3$	0

جدول ۱

با استفاده از جدول بالا تانسور انحنای ریمان به صورت زیر بدست می آید.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
$R(e_1,e_2)$	$\frac{3\lambda^2}{4}e_2$	$-\frac{3\lambda^2}{4}e_1$	$\frac{\lambda\mu}{2}e_4$	$-\frac{\lambda\mu}{2}e_3$	0
$R(e_1,e_3)$	0	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_4$	0	$\frac{\lambda\mu}{4}e_2$	0
$R(e_1,e_4)$	0	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_3$	$\frac{\lambda\mu}{4}e_2$	0	0
$R(e_1,e_5)$	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_5$	0	0	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_1$
$R(e_2,e_3)$	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_4$	0	0	$\frac{\lambda\mu}{4}e_1$	0
$R(e_2,e_4)$	$\frac{\lambda\mu}{4}e_3$	0	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_1$	0	0
$R(e_2,e_5)$	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_5$	0	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_2$
$R(e_3,e_4)$	$\frac{\lambda\mu}{2}e_2$	$-\frac{\lambda\mu}{2}e_1$	$\frac{3\mu^2}{4}e_4$	$-\frac{3\mu^2}{4}e_3$	0
$R(e_3,e_5)$	0	0	$-\frac{\mu^2}{4}e_5$	0	$\frac{\mu^2}{4}e_3$
$R(e_4,e_5)$	0	0	0	$-\frac{\mu^2}{4}e_5$	$\frac{\mu^2}{4}e_4$

جدول ۲

برای محاسبه انحنای برشی و انحنای عددی گروه لی N به صورت زیر عمل می کنیم.

فرض کنید $\{Y,Z\}$ پایه یکامتعامدی برای زیر فضای دو-بعدی از T_eN باشد و

$$Y=ae_1+be_2+ce_3+de_4+fe_5 \qquad Z=\tilde{a}e_1+\tilde{b}e_2+\tilde{c}e_3+\tilde{d}e_4+\tilde{f}e_5 \tag{۲.۴}$$

با استفاده از جدول۲ داریم:

$$\begin{aligned} R(Z,Y)Y &= (b\tilde{a}-a\tilde{b})\left(\frac{۳\lambda^{۲}}{۴}(ae_{۲}-be_{۱})+\frac{\lambda\mu}{۲}(ce_{۴}-de_{۳})\right)\\ &+(d\tilde{c}-c\tilde{d})\left(\frac{\lambda\mu}{۲}(ae_{۲}-be_{۱})+\frac{۳\mu^{۲}}{۴}(ce_{۴}-de_{۳})\right)\\ &+\frac{\lambda^{۲}}{۴}\{(f\tilde{b}-b\tilde{f})(fe_{۲}-be_{۵})+(f\tilde{a}-a\tilde{f})(fe_{۱}-ae_{۵})\}\\ &+\frac{\mu^{۲}}{۴}\{(f\tilde{c}-c\tilde{f})(fe_{۳}-ce_{۵})+(f\tilde{d}-d\tilde{f})(fe_{۴}-de_{۵})\}\\ &+\frac{\lambda\mu}{۴}\{(c\tilde{a}-a\tilde{c})(be_{۴}-de_{۲})+(d\tilde{a}-a\tilde{d})(ce_{۲}-be_{۳})\\ &+(c\tilde{b}-b\tilde{c})(de_{۱}-ae_{۴})+(d\tilde{b}-b\tilde{d})(ae_{۳}-ce_{۱})\}. \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

در نتیجه انحنای برشی K^R به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} K^{R}(Y,Z) &= -\frac{۳}{۴}\{\lambda^{۲}(a\tilde{b}-b\tilde{a})^{۲}+\mu^{۲}(c\tilde{d}-d\tilde{c})^{۲}\}+\frac{\lambda^{۲}}{۴}\{(f\tilde{a}-a\tilde{f})^{۲}+(f\tilde{b}-b\tilde{f})^{۲}\}\\ &+\frac{\mu^{۲}}{۴}\{(f\tilde{c}-c\tilde{f})^{۲}+(f\tilde{d}-d\tilde{f})^{۲}\}+\frac{۳\lambda\mu}{۲}(a\tilde{b}-b\tilde{a})(d\tilde{c}-c\tilde{d}). \end{aligned}$$

فرمول بالا نشان می دهد که گروه لی ریمانی N انحنای برشی منفی و مثبت می پذیرد. ولف در [1] [۲۵] ثابت کرده که یک گروه لی ناآبلی انحنای برشی منفی و مثبت می پذیرد.

انحنای عددی گروه لی موردنظر برای هر $x \in N$ به صورت زیر می باشد:

$$S(x) = -\frac{\lambda^{۲}+\mu^{۲}}{۲} < ۰,$$

که نمایانگر این است که انحنای عددی این گونه گروه لی ثابت منفی است.

گزاره ۱.۳.۴. روی گروه لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ با مرکز ۱ $-$ بعدی هیچ متر راندرز ناوردای چپ از نوع بروالد وجود ندارد.

[1] Wolf

اثبات. با توجه به گزاره (۲.۲.۴) برای یک متر راندرز از نوع بروالد نیاز به یک میدان برداری ناوردای چپ با طول کمتر از یک داریم که نسبت به التصاق لویی- چوی ویتا موازی باشد. فرض کنید $Q \in \mathcal{N}$ یک میدان برداری ناوردای چپ باشد که نسبت به التصاق لویی- چوی ویتا موازی باشد، با توجه به جدول ۱ ، $Q = ۰$ می شود. □

۴.۴ جبر های لی با مرکز ۲ −بعدی

در این بخش فرض می کنیم مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ ۲ − بعدی باشد.

هوملیا و کوالسکی در [۱۲] نشان داده اند که برای جبر لی ۵−بعدی $\mathcal{N}$ پایه یکامتعامد $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ چنان موجود است که

$$[e_۱, e_۲] = \lambda e_۴ \qquad [e_۱, e_۳] = \mu e_۵$$

طوریکه $\{e_۴, e_۵\}$ پایه ای برای $\mathcal{Z}$ و $\lambda \geq \mu > ۰$ بوده و کلیه براکتهای ارایه نشده بین اعضای پایه، صفر می باشد.

با استفاده از فرمول (۲.۱) داریم:

	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	$e_۴$	$e_۵$
$\nabla_{e_۱}$	۰	$\frac{\lambda}{۲}e_۴$	$\frac{\mu}{۲}e_۵$	$\frac{\lambda}{۲}e_۲$	$-\frac{\mu}{۲}e_۳$
$\nabla_{e_۲}$	$-\frac{\lambda}{۲}e_۴$	۰	۰	$\frac{\lambda}{۲}e_۱$	۰
$\nabla_{e_۳}$	$-\frac{\mu}{۲}e_۵$	۰	۰	۰	$\frac{\mu}{۲}e_۱$
$\nabla_{e_۴}$	$-\frac{\lambda}{۲}e_۲$	$\frac{\lambda}{۲}e_۱$	۰	۰	۰
$\nabla_{e_۵}$	$-\frac{\mu}{۲}e_۳$	۰	$\frac{\mu}{۲}e_۱$	۰	۰

جدول۳

با استفاده از جدول بالا تانسور انحنای ریمان به صورت زیر بدست می آید.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
$R(e_1,e_2)$	$\frac{3\lambda^2}{4}e_2$	$-\frac{3\lambda^2}{4}e_1$	0	0	0
$R(e_1,e_3)$	$\frac{3\mu_2}{4}e_3$	0	$-\frac{3\mu_2}{4}e_1$	0	0
$R(e_1,e_4)$	$-\frac{\lambda^2}{4}e_4$	0	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_1$	0
$R(e_1,e_5)$	$-\frac{\mu^2}{4}e_5$	0	0	0	$\frac{\mu^2}{4}e_1$
$R(e_2,e_3)$	0	0	0	$\frac{\lambda\mu}{4}e_5$	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_4$
$R(e_2,e_4)$	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_4$	0	$\frac{\lambda^2}{4}e_2$	0
$R(e_2,e_5)$	0	0	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_4$	$\frac{\lambda\mu}{4}e_3$	0
$R(e_3,e_4)$	0	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_5$	0	0	$\frac{\lambda\mu}{4}e_2$
$R(e_3,e_5)$	0	0	$-\frac{\mu^2}{4}e_5$	0	$\frac{\mu^2}{4}e_3$
$R(e_4,e_5)$	0	$\frac{\lambda\mu}{4}e_3$	$-\frac{\lambda\mu}{4}e_2$	0	0

جدول۴

برای Y و Z معرفی شده در رابطه (۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} R(Z,Y)Y \quad = \quad & \frac{3\lambda^2}{4}(b\tilde{a}-a\tilde{b})(ae_2-be_1)+\frac{3\mu^2}{4}(c\tilde{a}-a\tilde{c})(ae_3-ce_1) \\ & \frac{\lambda^2}{4}(d\tilde{a}-a\tilde{d})(de_1-ae_4)+(d\tilde{b}-b\tilde{d})(de_2-be_4) \\ & \frac{\mu^2}{4}(f\tilde{a}-a\tilde{f})(fe_1-ae_5)+(f\tilde{c}-c\tilde{f})(fe_3-ce_5) \\ & \frac{\lambda\mu}{4}\{(c\tilde{b}-b\tilde{c})(de_5-fe_4)+(f\tilde{b}-b\tilde{f})(de_3-ce_4) \\ & (d\tilde{c}-c\tilde{d})(fe_2-be_5)+(f\tilde{d}-d\tilde{f})(be_3-ce_2)\}. \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

انحنای پرچمی صفحه تولید شده به وسیله $\{Y,Z\}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} K^R(Y,Z) \quad = \quad & -\frac{3}{4}\{\lambda^2(b\tilde{a}-a\tilde{b})^2+\mu^2(c\tilde{a}-a\tilde{c})^2\}+\frac{\lambda^2}{4}\{(d\tilde{a}-a\tilde{d})^2+(d\tilde{b}-b\tilde{d})^2\} \\ & +\frac{\mu_2}{4}\{(f\tilde{a}-a\tilde{f})^2+(f\tilde{c}-c\tilde{f})^2\} \\ & +\frac{\lambda\mu}{2}\{(f\tilde{b}-b\tilde{f})(d\tilde{c}-c\tilde{d})+(c\tilde{b}-b\tilde{f})(d\tilde{f}-f\tilde{d})\}. \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

انحنای عددی گروه لی موردنظر برای هر $x \in N$ به صورت زیر می باشد:

$$S(x) = -\frac{\lambda^{۲} + \mu^{۲}}{۲} < ۰,$$

فرمول بالا نشان می دهد که انحنای عددی گروه لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ همراه با متر ریمانی ناوردای چپ ثابت منفی می باشد.

گزاره ۱.۴.۴. روی گروه لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ با مرکز ۲$-$ بعدی هیچ متر راندرز ناوردای چپ از نوع بروالد وجود ندارد.

۵.۴ جبر های لی با مرکز ۳$-$ بعدی

در این قسمت فرض می کنیم مرکز جبر لی $\mathcal{N}$ ۳$-$بعدی باشد.

هوملیا و کوالسکی در [۱۲] نشان داده اند که برای جبر لی ۵$-$بعدی $\mathcal{N}$ پایه یکامتعامد $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ چنان موجود است که

$$[e_۱, e_۲] = \lambda e_۳$$

طوریکه $\{e_۳, e_۴, e_۵\}$ پایه ای برای $\mathcal{Z}$ و $\lambda > ۰$ بوده و کلیه براکتهای ارایه نشده بین اعضای پایه، صفر می باشد.

با استفاده از رابطه (۲.۱) داریم:

	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	$e_۴$	$e_۵$
$\nabla_{e_۱}$	۰	$\frac{\lambda}{۲}e_۳$	$-\frac{\lambda}{۲}e_۲$	۰	۰
$\nabla_{e_۲}$	$\frac{\lambda}{۲}e_۳$	۰	$\frac{\lambda}{۲}e_۱$	۰	۰
$\nabla_{e_۳}$	$-\frac{\lambda}{۲}e_۲$	$\frac{\lambda}{۲}e_۱$	۰	۰	۰
$\nabla_{e_۴}$	۰	۰	۰	۰	۰
$\nabla_{e_۵}$	۰	۰	۰	۰	۰

جدول۵

با استفاده از جدول بالا تانسور انحنای ریمان به صورت زیر بدست می آید.

	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	$e_۴$	$e_۵$
$R(e_۱, e_۲)$	$\frac{۳\lambda^۲}{۴}e_۲$	$-\frac{۳\lambda^۲}{۴}e_۱$	۰	۰	۰
$R(e_۱, e_۳)$	$-\frac{\lambda^۲}{۴}e_۱$	۰	$\frac{\lambda^۲}{۴}e_۱$	۰	۰
$R(e_۱, e_۴)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۱, e_۵)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۲, e_۳)$	۰	$-\frac{\lambda^۲}{۴}e_۳$	$\frac{\lambda^۲}{۴}e_۲$	۰	۰
$R(e_۲, e_۴)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۲, e_۵)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۳, e_۴)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۳, e_۵)$	۰	۰	۰	۰	۰
$R(e_۴, e_۵)$	۰	۰	۰	۰	۰

جدول۶

برای Y و Z معرفی شده در رابطه (۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} R(Z,Y)Y &= \frac{\lambda^۲}{۴}(b\tilde{a} - a\tilde{b})(ae_۲ - be_۱) + (c\tilde{a} - a\tilde{c})(ce_۱ - ae_۳) \\ & (c\tilde{b} - b\tilde{c})(ce_۱ - be_۳). \end{aligned}$$

انحنای برشی صفحه تولید شده به وسیله $\{Y, Z\}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$K^R(Y,Z) = -\frac{\lambda^۲}{۴}\{(c\tilde{a} - a\tilde{c})^۲ + (c\tilde{b} - b\tilde{c})^۲ - ۳(b\tilde{a} - a\tilde{b})^۲\}. \quad (۷.۴)$$

انحنای عددی گروه لی موردنظر برای هر $x \in N$ به صورت زیر می باشد:

$$S(x) = -\frac{\lambda^۲}{۲} < ۰.$$

فرمول بالا نشان می دهد که انحنای عددی گروه لی ۵ -بعدی پوچتوان از رده ۲ با مرکز ۳ -بعدی همراه با متر ریمانی ناوردای چپ ثابت منفی می باشد.

در ادامه متر راندرز ناوردای چپ از نوع بروالد روی گروه لی مذکور را مورد بحث قرار می دهیم.

فرض کنید $Q \in \mathcal{N}$ یک میدان برداری ناوردای چپ باشد که نسبت به التصاق لویی -چوی ویتای القاشده به وسیله متر ریمانی

ناوردای چپ روی N موازی باشد. با استفاده از جدول ۵ داریم:

$$Q = q_۱ e_۴ + q_۲ e_۵ \tag{۸.۴}$$

و فرض می کنیم $\|Q\| < ۱$ باشد.

گزاره ۱.۵.۴. فرض کنید F متر راندرز از نوع بروالد القا شده به وسیله متر ریمانی g و میدان برداری ناوردای چپ Q با توجه به فرمول (۱.۴) باشد. آنگاه انحنای پرچمی از پرچم (Π, Y) در T_eN عبارتست از:

$$K(\Pi, Y) = \frac{K^R(Y,Z)}{(۱ + q_۱ d + q_۲ f)^۲},$$

که در آن Z بیانگر هر برداری در صفحه Π است به طوری که $\{Y, Z\}$ پایه یکامتعامدی برای Π باشد.

اثبات. چون متر راندرز از نوع بروالد است پس التصاق لویی- چوی ویتای متر ریمانی g با التصاق چرن-راند متر راندرز F بر هم منطبق می شوند، در نتیجه تانسور انحنای g و F یکی می شوند.

به سادگی می توان بدست آورد:

$$\begin{aligned} g_Y(R(Z,Y)Y,Z) &= \langle R(Z,Y)Y,Z\rangle(۱ + \langle Q,Y\rangle) \\ &\quad + \langle Q,Z\rangle\langle R(Z,Y)Y, Q + A\rangle \\ &= K^R(Y,Z)(۱ + q_۱ d + q_۲ f), \end{aligned}$$

$$g_Y(Y,Y) = (۱ + \langle Q,Y\rangle)^۲ = (۱ + q_۱ d + q_۲ f)^۲,$$

$$g_Y(Z,Z) = ۱ + \langle Q,Z\rangle^۲ + \langle Q,A\rangle = ۱ + (q_۱\tilde{d} + q_۲\tilde{f})^۲ + q_۱ d + q_۲ f,$$

$$g_Y(Y,Z) = \langle Q,Z\rangle(۱ + \langle Q,Y\rangle) = (q_۱\tilde{d} + q_۲\tilde{f})(۱ + q_۱ d + q_۲ f).$$

در نتیجه با استفاده از تعریف انحنای پرچمی حکم ثابت می شود. □

در نتیجه منیفلد فینسلری (N, F) در هر نقطه انحنای پرچمی مثبت، صفر و منفی می پذیرد.

مراجع

[۱] بهروز بیدآباد، هندسه منیفلد(۲)، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، چاپ اول زمستان ۱۳۸۹.

[2] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*, (Berlin, Springer, 2000).*

[3] S. S. Chern, and Z. Shen, Riemann-finsler geometry*, Volume 6 of Nanka itracts inmathematics. World Scientific publishing, 2005.mnv*

[4] S. Deng and Z. Hou, Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys.A: Math. Gen. 37 (2004) 8245–8253.*

[5] S. Deng and Z. Hou, Invariant Randers metrics on homogeneous Riemannian manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 4353–4360.*

[6] S. Deng and Z. Hou, Homogeneous Finsler spaces of negative curvature*, J. Geom.Phys. 57(2) (2007) 657–664.*

[7] P. Eberlein Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Sci.Ecole Norm. Sup., 4e s´erie, 27, (1994), 611–660.*

[8] P. Eberlein, Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric II*, Trans.Amer. Math. Soc., 343, (1994), 805–828.*

[9] E. Esrafilian and H. R. Salimi Moghaddam, Flag curvature of invariant Randers metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 3319–3324.*

[10] E. Esrafilian and H. R. Salimi Moghaddam, Induced invariant Finsler metrics onquotient groups*, Balkan J. Geom. Appl. 11(1) (2006) 73–79.*

[11] S. Helgason, Differentioal Geometry and Symmetric Spaces*, Academic press, 1962.*

[12] S. Homolya and O. Kowalski, Simply connected two-step homogeneous nilmanifoldsof dimension 5*, Note di Matematica 26(1) (2006) 69–77.*

[13] John. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2000.*

[14] John. M. Lee, Smooth Manifolds*, Springer, 2002.*

[15] John. M. Lee, Reimannian Manifolds*, Springer.1997.*

[16] A. Kaplan, Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geometriae Dedicata,11, (1981), 127–136.*

[17] A. Kaplan, On the geometry of groups of Heisenberg type*, Bull. London Math. Soc., 15,(1983), 35–42.*

[18] Ivan Kolár and Peter W. Michor and Jan Slovák, Natural Operations in differential Geometry*, Mathematics Subject Classification(2000)*

[19] *J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on lie groups, Adv. Math. 21, 293–329 (1976).*

[20] *H. B. Rademacher,* Nonreversible Finsler metrics of positive of flag curvature*, In D. Bao, R. Bryant, S. chern, and Z. Shen, editors, A sampler of Rimann-Finsler Geometry, volume 50 of MSRI Publication, pages 261–302. Combridge university press, (2004).*

[21] *H. R. Salimi Moghaddam,* On the flag curvature of invariant Randers metrics*, Math. Phys. Anal. Geom. 11 (2008) 1–9.*

[22] *H. R. Salimi Moghaddam,* on the Randers metrics on two-step homogenous nil-manifolds of dimention five*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 8, No. 3 (2011) 501–510*

[23] *Z. Shen,* Lectures on Finsler Geometry*, (World Scientific, 2001).*

[24] *A. Tóth and Z. Kovács,* On the geometry of two-step nilpotent groups with left invariant Finsler metrics*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyregyhazi. 24 (2008) 155–168.*

[25] *J. A. Wolf,* Curvature in nilpotent Lie groups*, Proceeding of the Am. Math. Society, 15(2) (Apr. 1964) 271–274.*

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

التصاق .... *connection*
التصاق آفین .... *affine connection*
التصاق چرن-راند .... *Chern-Rund connection*
التصاق لویی-چوی ویتا .... *Levi–Civitaconnection*
انتقال راست .... *right translation*
انتقال چپ .... *left translation*
انحنای برشی .... *sectional curvature*
بروالد .... *Berwald*
تانسور اساسی و تانسور کارتان .... *fundamental tensor and Cartan tensor*
تانسور ریچی .... *Ricci tensor*
تانسور انحنا .... *curvature tensor*
جبر لی .... *Lie algebra*
جبر لی پوچتوان .... *nilpotent Lie algebra*
جبر لی پوچتوان از رده ۲ .... *two-step nilpotent Lie algebra*
خم انتگرال .... *integral curves*
زیر گروه یک پارامتری .... *one-parameter subgroup*
درونریختی پوچتوان .... *nilpotent endomorphism*
علائم کریستوفل التصاق چرن- راند .... *Christoffel symbols of the Chern-Round connection*
فرمول کامپبل-بیکر-هاسدورف .... *Campbell-Baker-Hausdorff formula*
متر راندرز .... *Randers metric*
متر ریمان .... *Riemannian metric*
متر ریمانی بوسان و تانسورکارتان بوسان .... *osculating Riemann metric and osculating Cartan tensor*
متر فینسلری .... *Finsler metric*
میدان برداری .... *vector field*
میدان برداری ناوردای چپ .... *left-invariant vector field*
نرم مینکوفسکی .... *Minkowski norm*
نمایش الحاقی جبر لی .... *adjoint representation of Lie group*
نمایش الحاقی گروه لی .... *adjoint representation of Lie algebra*
نگاشت نمائی گروه لی .... *exponential map of Lie group*
همومورفیسم جبر لی .... *Lie algebra homomorphism*
همومورفیسم گروه لی .... *Lie group homomorphism*
کلاف مماس عمودی .... *horizontal tangent cotangent bundle*

کلاف مماس برگشتی .... *pull- back tangent bundle*
کلاف کتانژانت برگشتی .... *pull-back cotangent bundle*

Abstract

In this thesis in the first chapters we give the basic concepts of Riemannian and Finsler geometry. Then, we study the geometry of two-step nilpotent Lie groups with left-invariant Finsler metric and give an explicit form for the Chern-Rund connection,curvature tensor, Ricci tensor, flag curvature and geodesics of these spaces.

Finally, we study The Randers metrics on two-step nilpotent Lie groups of dimension five.

Keywords: *2-step nilpotent Lie algebra, left-invariant Finsler metric, curvature of Finsler spaces.*

Shahrood University of thechnology

Faculty of Methematics

Department of pure Mathematics

M.Sc. Thesis

On the geometry of two-step nilpotent Lie groups with left-invariant Finsler metric

By:

Narges Fathi

Supervisor:
Dr. Ebrahim Hashemi
Dr. Hamid-reza Salimi-moghaddam

September 2012