دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

نگاشتهای تصویر در فضای حاصلضرب تانسوری

نگارش

فرشته کشاورز

استاد راهنما

دکتر مهدی ایران منش

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

شهریور۱۳۹۱

صفحة تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با اصل امضای هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

قبل از هر چیز خداوند مهربان را شکر می گویم که این موهبت را نصیب من نمود تا بتوانم در وادی علم و دانش قدمی هر چند ناچیز بردارم.

از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش به خاطر کمک های بی دریغش صمیمانه تشکر می کنم.

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد مشاورم جناب آقای سید رضا موسوی ابراز می دارم و می دانم که زحمات آن ها قابل جبران نیست.

از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون برای این اساتید خواهانم.

انسان مجموعه ای از آنچه دارد نیست، بلکه مجموعه ای است از آنچه هنوز ندارد اما می تواند داشته باشد.

ژان پل سارتر

تقدیم به مادر عزیز و پدر بزرگوارم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم.

عزیزانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن نه به معنای کامل بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

چکیده

این پایان نامه به صورت زیر فصل بندی می شود:

فصل اول پایان نامه را به بیان تعاریف و مفاهیم مورد نیازی که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرد اختصاص می دهیم.

در فصل دوم، ابتدا به مفهوم هندسی تصویر در یک فضای برداری دلخواه و توصیف ویژگی های آن در قالب قضایا و لم های متعدد می پردازیم. سپس نتیجه حاصل را به همراه اثبات بیان و بررسی کرده و کاربردی از آن را در آنالیز عددی (نظریه بهترین تقریب) ارائه و نتیجه این بررسی ها را با استفاده از مثال هایی دنبال می کنیم. در ادامه به بیان نگاشت های تصویر در فضای باناخ و به طور کلیتر در هر فضای برداری نرمدار می پردازیم و بالاخص با به میان آمدن بحث کمینگی بین این نگاشت های تصویر تحت شرایط خاص، روی تعداد و یکتایی و غیریکتایی آن ها در قالب قضایا و لم های متعدد بحث می کنیم و نتایج حاصل را به همراه اثبات می آوریم و البته از ارائه مثال در خلال مباحث نیز غافل نبودیم.

در فصل سوم، ابتدا با معرفی عملگر تانسوری به بیان مفهوم فضای حاصلضرب تانسوری و ویژگی های آن می پردازیم. سپس با معرفی نرم های متعدد روی این فضا و بیان خواص آن ها و همچنین مقایسه آن ها، وجود عملگرهای خطی و کراندار، بالاخص نگاشت های تصویر روی این فضای تانسوری مجهز به نرم را با اثبات می آوریم.

بهترین احتمال کران پایین در مورد نگاشتهای تصویری که بروی زیرفضاهای غنی از $L_p(\mu)$ تعریف می شوند را محاسبه می کنیم. نرم نگاشتهای تصویر کمینه ای که بروی ابرصفحه هایی در $L_p[0,1]$ تعریف می شوند را می یابیم و در پایان کاربرد این نگاشتهای تصویر کمینه را در نظریه بهترین تقریب نشان می دهیم.

در فصل چهارم، ابتدا فرمول گسترش یک نگاشت تصویر را بیان کردیم و سپس مفهوم آن را با یک مثال کاربردی روی نگاشت تصویر لاگرانژ معرفی شده در فصل دوم، روشن ساختیم و بدین ترتیب اهمیت فضای حاصلضرب تانسوری را بهتر درک و این توسیع را در قالب قضایا و لم های متعدد بحث و بررسی و در نهایت فصل را به اتمام می رسانیم.

واژه‌های کلیدی: نگاشت تصویر - کمینگی- یکتایی- فضای حاصلضرب تانسوری - عملگر تانسوری- نرم متقاطع- فضای باناخ - نگاشت تصویر لاگرانژ- نظریه بهترین تقریب- عملگر- زیرفضا

پیشگفتار

در جبر خطی و آنالیز تابعی، یک نگاشت تصویر یک تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش تعریف می شود بطوریکه نگاشت خودتوان باشد. تحت این تبدیل تصویر پایا می ماند. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

۱.۱.۱ فضای باناخ

در این فصل مفاهیم مورد نیاز برای فصول بعد را تعریف می کنیم:

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $(X,+)$ یک گروه آبلی باشد و برای هر عدد حقیقی λ و هر $x \in X$ ، $\lambda x \in X$ ، در این صورت X را یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی گوییم هر گاه، برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda, \mu \in R$

۱) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

۲) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

۳) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

۴) $1x = x$

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری X یک **فضای ضرب داخلی** [1] نامیده می شود اگر برای هر زوج از عناصر x, y در X یک ضرب حقیقی مقدار $<x, y>$ که در شرایط زیر صدق کند، تعریف شود:

(۱) $<x, x> \geq 0 \quad \forall x \in X$

(۲) $<x, x> = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in X$

[1] Inner Product Space

$$< x,y >=< y,x > \quad \forall x,y \in X \ (\ ۳\ )$$

$$< \alpha x,y >= \alpha < x,y > \quad \forall x,y \in X, \alpha \in F \ (\ ۴\ )$$

$$< x+y,z >=< x,z > + < y,z > \quad \forall x,y,z \in X \ (\ ۵\ )$$

فضاهای ضرب داخلی را بعضی اوقات **فضاهای پیش هیلبرت** [۲] نیز می نامند.

می دانیم تابع ضرب داخلی $<.,.>$ روی $X \times X$ همان ضرب اسکالر روی X است.

بوضوح خواص (۱) و (۲) مثبت معین بودن این ضرب داخلی را بیان می کنند.

خاصیت (۳) متقارن بودن این ضرب داخلی را بیان می کند.

از خواص (۴) و (۵) و با کمک گرفتن از استقرا داریم:

$$< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < x_i, y > \qquad (۱.۱)$$

از خاصیت (۳) و (۱.۱) بدست می آوریم:

$$< x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < x, y_i > \qquad (۲.۱)$$

ویژگی های (۱.۱) ، (۲.۱) دوخطی بودن این ضرب داخلی را بیان می کند.

ضرب داخلی را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x(i)y(i) \qquad x(i),y(i) \in R^n$$

[۲] Pre - Hilbert Spaces

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\| . \|: X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک نرم روی X نامیم هر گاه

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $\| x \| \geq 0$

۲) $\| x \| = 0$ ، اگر و تنها اگر $x = 0$

۳) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

۴) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$ ، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

فضای برداری X مجهز به نرم $\| . \|$ را فضای برداری نرمدار [3] می نامیم و آن را با $(X, \| . \|)$ نمایش می دهیم.

مثال. فرض کنیم R^n فضای تمام n تایی های مرتب از اعداد حقیقی باشد در این صورت $\| x \| = max_{i \in r} | x_i |$ یک نرم روی R^n می باشد.

تعریف ۴.۱.۱. زیرفضای بسته X_0 از یک فضای خطی نرمدار X دارای یک زیرفضای متمم [4] است، هرگاه زیرفضای بسته ای مانند X_1 از X وجود داشته باشد بطوریکه

$$X = X_0 + X_1 \ \ , \ \ X_0 \cap X_1 = \{0\}$$

نتیجه ۵.۱.۱. زیرفضاهای متناهی بعد از یک فضای خطی نرمدار و همچنین زیرفضاهای تام از یک فضای ضرب داخلی طبق قضیه تصویر [5] ($X = X_0 + X_0^{\perp}$) دارای زیرفضای متمم هستند.

تعریف ۶.۱.۱. یک دنباله مانند x_n از فضای نرمدار X همگرا به نقطه x گفته می شود در صورتیکه:

[3] Normed Vector Space
[4] Complement Subspace
[5] Projection Theorem

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in N \quad \forall n \in N \ n \geq N_0 \Longrightarrow \| x_n - x \| \leq \varepsilon$$

و ما آن را به صورت $x_n \longrightarrow x$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. یک گردایه m از زیرمجموعه های مجموعه ناتهی X یک جبر مجموعه ها نامیده می شود:

الف) اگر $A, B \in m$ آنگاه $A \cap B \in m$

ب) اگر $A \in m$ آنگاه $A^c \in m$

تعریف ۸.۱.۱. جبر m یک σ - جبر نامیده می شود هر گاه اجتماع هر گردایه شمارش پذیر از عناصر m در m باشند.

تعریف ۹.۱.۱. اگر X یک مجموعه ناتهی باشد و m یک σ - جبر از زیرمجموعه های X باشد، در این صورت (X, m) را یک فضای اندازه پذیر [۶] گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱. سه تایی (X, m, μ) یک فضای اندازه [۷] نامیده می شود که در آن X یک مجموعه غیرتهی و m یک σ - جبر از زیرمجموعه های X و μ یک اندازه روی m می باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای برداری $(X, \| \,.\, \|)$ یک **فضای باناخ** [۸] نامیده می شود هر گاه $\| \,.\, \|$ یک نرم کامل روی X باشد، یعنی نسبت به متر $d(x, y) = \| x - y \|$ ، هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

به عنوان مثال فضاهای L^p ($1 \leqslant p < \infty$) که فضای همه توابعی است که p - نرمشان متناهی است، نمونه ای از یک فضای باناخ است و $\| f \|_p$ به صورت زیر تعریف می شود:

[۶] Measurable Space
[۷] Measure Space
[۸] Banach Space

$$\| f \|_p = (\int_T | f |^p \, d\mu)^{1/p}$$

که در آن (T, m, μ) یک فضای اندازه است بدین معنی که T یک مجموعه غیر تهی و m یک σ - جبر از زیرمجموعه های T و μ یک اندازه روی m فرض شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای برداری مجهز به ضرب داخلی که متر القایی تام باشد را فضای هیلبرت [۹] گوییم و با H نمایش می دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. یک زیرمجموعه مانند K از فضای نرمدار X را بسته می نامیم اگر به ازای هر $\{x_n\} \subset K$ به قسمی که $x_n \longrightarrow x$ آنگاه $x \in K$. به عبارت دیگر K شامل تمام نقاط حدی خود باشد.

یک زیرمجموعه مانند A از فضای نرمدار X ، باز نامیده می شود در صورتیکه متمم آن یک مجموعه بسته باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک زیرمجموعه غیر تهی مانند K را مخروط می نامند در صورتیکه برای هر دو نقطه دلخواه $x, y \in K$ و هر $\alpha, \beta \geq o$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in K$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $(X, \| \, . \, \|_۱)$ و $(Y, \| \, . \, \|_۲)$ دو فضای نرمدار باشند و f یک نگاشت از X به Y باشد. گوییم f یک نگاشت پیوسته است در صورتیکه برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد یک $\delta > ۰$ به طوریکه:

$$\| y - x \|_۱ \leq \delta \Longrightarrow \| f(y) - f(x) \|_۲ \leq \varepsilon$$

فرض کنیم X, Y دو فضای نرمدار باشند. تابع دوسویی $f : X \longrightarrow Y$ را هومئومرفیسم گوییم هر گاه f و تابع معکوس آن $f^{-۱} : Y \longrightarrow X$ هر دو پیوسته باشند.

---
[۹] Hilbert Space

تعریف ۱۶.۱.۱. یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری V_1 ، نگاشتی است مانند $f : V \longrightarrow V_1$ بطوریکه به ازای هر $x, y \in V$ و اسکالرهای α, β ،

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

در حالت خاص که V_1 میدان اسکالرها باشد، f یک تابعک خطی نامیده می شود.

فضای دوگان یک فضای برداری نرمدار مانند X ، عبارت است از فضای برداری X^* ، که اعضای آن تابعکهای خطی و پیوسته روی X می باشند.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم X, Y دو مجموعه ناتهی و $P(X), P(Y)$ مجموعه های توانی آن ها باشند، در این صورت تابع $f : A \subset P(X) \longrightarrow P(Y)$ یک تابع مجموعه ای[۱۰] می نامیم.

به عنوان مثال تابعی که به هر بازه (a, b) عدد حقیقی $b - a$ را نسبت می دهد، یک تابع مجموعه ای می باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید X دسته ای از زیرمجموعه های اعداد حقیقی باشد. اندازه لبگ[۱۱] یک تابع مجموعه ای، μ است که به مجموعه مشخص E یک عدد نامنفی نسبت می دهد و دارای خواص زیر است:

الف) $\mu(\phi) = ۰$

ب) برای هر بازه $I = (a, b)$ داشته باشیم:

$$\mu(I) = L(I) = b - a$$

ج) اگر E_i یک دنباله از مجموعه های مجزا باشد، آنگاه:

$$\mu(\cup E_i) = \sum \mu(E_i)$$

[۱۰] Set Function
[۱۱] Lebesgue Measure

د) μ ، نسبت به انتقال پایا باشد. یعنی اگر E مجموعه ای باشد که برای آن μ تعریف شده و $E+y=\{x+y : x\in E\}$ آنگاه:

$$\mu(E+y)=\mu(E)$$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و m یک σ - جبر از زیرمجموعه های X باشد، در این صورت اندازه μ یک تابع مجموعه ای نامنفی است که برای تمام عناصر m تعریف شده است و داریم:

الف) $\mu(\phi)=0$

ب) برای هر دنباله شمارای E_i از عناصر مجزای m داریم:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

۲.۱.۱ بهترین تقریب[۱۲]

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم $(X,\|\ .\ \|)$ یک فضای نرمدار باشد و $y\in X$ یک نقطه دلخواه باشد در این صورت تابع $d:X\times X\longrightarrow R$ با ضابطه $d(x,y)=\|y-x\|$ را تابع فاصله نامند.

به ازای هر زیرمجموعه غیرتهی مانند G از X فاصله مجموعه G تا نقطه x را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$d(x,G)=inf_{y\in G}d(x,y)$$

البته از نماد $d_G(x)$ نیز استفاده می شود.

قضیه ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد در این صورت:

$$\forall x,y,z\in X\quad d(x+y,z+y)=d(x,z)$$

[۱۲] Best Approximation

$$\forall \alpha \in R \quad d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x,y)$$

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $G \subseteq X$ و $x \in X$ ، عنصر $g_. \in G$ را بهترین تقریب G از نقطه x گوییم در صورتیکه:

$$d(x, g_.) = d(x, G)$$

مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب G از x را با نماد $P_G(x)$ نشان می دهیم به عبارت دیگر

$$P_G(x) = \{g' \in G : d(x, g') = d(x, G)\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم T عملگری خطی و کراندار باشد، تعریف می کنیم:

$$B(H) = \{T \mid T : H \longrightarrow H\}$$

که یک جبر باناخ است بدین معنی که $B(H)$ یک فضای باناخ نسبت به نرم

$$\| T \| = Sup\{\| Tx \| : \| x \| \leq ۱, T \in B(H)\}$$

می باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم X, Y فضاهای خطی نرمدار و $X_.$ زیرفضایی از X باشند، در این صورت عملگر خطی $A : X_. \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی بسته [۱۳] یا بطور خلاصه عملگر بسته نامیده می شود، اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در $X_.$ که در شرط زیر صدق کند

$$x_n \longrightarrow x \ , \ Ax_n \longrightarrow y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

[۱۳] Closed Linear Operator

داشته باشیم

$$x \in X_., Ax = y$$

تعریف ۲۵.۱.۱. عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ که در آن X, Y فضاهای خطی نرمدار می باشند، یک ایزومتری [۱۴] خطی می نامند اگر $\forall x \in X \quad \| x \| = \| Ax \|$.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم Y یک زیرفضای ناتهی از X باشد، تعریف می کنیم:

$$Y^{\perp} = \{f \in X^* : f \mid_Y = 0\}$$

که زیرفضای عمود نامیده می شود.

تعریف ۲۷.۱.۱ (فضای هاسدورف[۱۵])**.** یک فضای توپولوژیک که در آن، هر جفت از نقاط متمایز را می توان در همسایگی های باز مجزایی محصور کرد.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم $f : M \longrightarrow R$ یک تابع باشد، در این صورت **محمل** [۱۶] f را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Supp(f) := \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$$

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد، $\varphi : V \times V \longrightarrow V$ را یک **تابع دوخطی** [۱۷] می نامیم درصورتیکه φ در شرایط زیر صدق کند:

۱-

[۱۴] Isometry
[۱۵] Hausdorff Space
[۱۶] Support
[۱۷] Bilinear Function

$$\forall V_1, V_2, V_3 \in V \ \ \varphi(V_1 + V_2, V_3) = \varphi(V_1, V_3) + \varphi(V_2, V_3)$$

-۲

$$\forall V_1, V_2, V_3 \in V \ \ \varphi(V_1, V_2 + V_3) = \varphi(V_1, V_2) + \varphi(V_1, V_3)$$

-۳

$$\forall V_1, V_2 \in V, \forall r \in R \ \ \varphi(V_1 r, V_2) = \varphi(V_1, r V_2)$$

تعریف ۳۱.۱.۱. $T \in B(H)$ نرمال است، اگر $TT^* = T^*T$ و **خود الحاق** [۱۸] است، اگر $T = T^*$ که در آن T^* عملگر الحاقی عملگر T نامیده می شود و داریم:

$$< Tx, y >=< x, T^*y > \qquad \forall x, y \in H$$

تعریف ۳۲.۱.۱. اگر $A : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی و کراندار، بین دو فضای نرمدار X, Y باشد، در این صورت $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$ الحاق از A نامیده می شود، بطوریکه تساوی زیر برقرار باشد:

$$A^*\varnothing = \varnothing o A \qquad \forall \varnothing \in Y^*$$

[۱۸] Self Adjoint

فصل ۲

نگاشت تصویر

تعریف ۳۳.۰.۲. فرض کنید A, B زیرفضاهای فضای برداری V باشند که $V = A \bigoplus B$ و در نتیجه هر $x \in V$ را می توان به گونه ای یکتا به صورت $x = a + b$ نوشت که $a \in A, b \in B$. منظور از تصویر روی A به موازات B نگاشت خطی $p : V \longrightarrow V$ با تعریف $p(x) = a$ است.

مثال. می دانیم $R^۲ = X \bigoplus D$ که $X = \{(x, ۰); x \in R\}$ و $D = \{(x, x); x \in R\}$ است. تصویر روی X به موازات D به صورت

$$p(x, y) = (x - y, ۰)$$

است. در نتیجه نگاره نقطه (x, y) ، محل تلاقی X با خط گذرنده از نقطه (x, y) است که با خط D موازی است. از این رو اصطلاحهای بکار رفته هندسی اند.

تعریف ۳۴.۰.۲. نگاشت خطی $f : V \longrightarrow V$ را یک **تصویر** [۱] نامیم اگر زیرفضاهایی چون A, B وجود داشته باشد به طوری که $V = A \bigoplus B$ و f تصویر روی A به موازات B باشد.

نگاشت خطی $f : V \longrightarrow V$ را **خودتوان** [۲] می گوییم اگر $fof = f$.

قضیه ۳۵.۰.۲. ۱اگر $V = A \bigoplus B$ و p تصویر روی A به موازات B باشد آنگاه

[۱] Projection
[۲] Idempotent

$A = Imp = \{x \in V : x = p(x)\}$ (۱)

$B = Kerp$ (۲)

(۳) p خودتوان است.

اثبات. (۱) واضح است که $A = Imp \supseteq \{x \in V ; x = p(x)\}$. حال اگر $a \in A$ ، آنگاه نمایش یکتای آن که به صورت مجموع عضوی از A, B است عبارت است از $a = a + \circ$. در نتیجه $p(a) = a$ و بنابراین رابطه مشمولیت فوق به تساوی تبدیل می شود.

(۲) فرض کنید $x \in V$ نمایش یکتایی به صورت $x = a + b$ داشته باشد که در آن $a \in A, b \in B$. در این صورت، چون $p(x) = a$ داریم

$$p(x) = \circ_V \Longleftrightarrow a = \circ_V \Longleftrightarrow x = b \in B$$

به عبارت دیگر $Kerp = B$.

(۳) به ازای هر $x \in V$ داریم $p(x) \in A$ و بنابر (۱) ، داریم $p(x) = p[p(x)]$. درنتیجه $p = pop$.

■

قضیه ۳۶.۰.۲. نگاشت خطی $f : V \longrightarrow V$ یک تصویر است اگر و تنها اگر خودتوان باشد. در این صورت $V = Imf \bigoplus Kerf$ و f تصویر روی Imf به موازات $Kerf$ است.

اثبات. فرض کنید f یک تصویر باشد. در این صورت زیرفضاهای A, B یی وجود دارند که $V = A \bigoplus B$ و f تصویر روی A به موازات B است. از قضیه قبل نتیجه می شود که f خودتوان است.

برعکس، فرض کنید $f : V \longrightarrow V$ خودتوان باشد. اگر $x \in Imf \bigcap Kerf$ ، آنگاه به ازای یک y داریم $x = f(y)$ و $f(x) = \circ_V$. در نتیجه

$$x = f(y) = f[f(y)] = f(x) = \circ_V$$

و بنابراین

$$Imf \bigcap Kerf = \circ_V$$

حال می بینیم که به ازای هر $x \in V$

$$f[x - f(x)] = f(x) - f[f(x)] = f(x) - f(x) = \circ_V$$

و درنتیجه $x - f(x) \in Kerf$. حال اتحاد $x = f(x) + x - f(x)$ نشان می دهد که

$$V = Imf + Kerf$$

و چون $Imf \cap Kerf = \varnothing$ داریم:

$$V = Imf \bigoplus Kerf$$

حال فرض کنید $x = a + b$ که $b \in Kerf, a \in Imf$. در این صورت به ازای یک y داریم،

$$f(b) = \circ_V \ , \ a = f(y)$$

و درنتیجه

$$f(x) = f(a + b) = f(a) + \circ_V = f[f(y)] = a$$

به عبارت دیگر f تصویر روی Imf به موازات $kerf$ است.

■

نتیجه ۳۷.۰.۲. اگر $f : V \longrightarrow V$ یک تصویر باشد آنگاه $id_V - f$ نیز تصویر است. در این حالت

$$Imf = Ker(id_V - f)$$

اثبات. داریم $fof = f^۲$ و از $f^۲ = f$ نتیجه می گیریم

$$(id_V - f)^۲ = id_V - f - f + f^۲ = id_V - f$$

همچنین از قضیه ۳۶.۰.۲ داریم

$$x \in Imf \Longleftrightarrow x = f(x) \Longleftrightarrow (id_V - f)(x) = ۰_V$$

و درنتیجه $Imf = Ker(id_V - f)$ ■

قضیه ۳۸.۰.۲. اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه زیرفضاهای ناصفری چون $V_۱, ..., V_n$ وجود دارند که $V = \bigoplus_{i=۱}^n V_i$ اگر و تنها اگر نگاشتهای خطی $p_۱, ..., p_n : V \longrightarrow V$ وجود داشته باشند که

(۱) $\sum_{i=۱}^n p_i = id_V$

(۲) $p_i o p_j = ۰ \quad (i \neq j)$

به علاوه این نگاشتها لزوما تصویرند و به ازای هر $i = ۱, ..., n$ ، $V_i = Imp_i$

اثبات. ابتدا فرض کنید $V = \bigoplus_{i=۱}^n V_i$. در این صورت به ازای $i = ۱, ..., n$ ، داریم

$$V = V_i \bigoplus \sum_{j \neq i} V_j$$

اگر p_i تصویر روی V_i به موازات $\sum_{j \neq i} V_j$ باشد به ازای هر زیرفضای X از V داریم

$$p_i^{\rightarrow}(X) = \{p_i(x); x \in X\}$$

درنتیجه به ازای هر $j \neq i, x \in V$ داریم

$$p_i[p_j(x)] \in p_i^{\rightarrow}(Imp_j) = p_i^{\rightarrow}(V_j)$$

$$\subseteq p_i^{\rightarrow}(\sum_{k \neq i} V_k)$$

$$= p_i^{\rightarrow}(Kerp_i)$$

$$= \{0_v\}$$

بنابراین $p_i o p_j = 0$. همچنین هر $x \in V$ را می توان به گونه یکتا به صورت $x = \sum_{i=1}^n x_i$ نوشت که به ازای هر i ، $x_i \in V_i$ و چون به ازای هر i ، $p_i(x) = x_i$ درنتیجه

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n p_i(x) = (\sum_{i=1}^n p_i)(x)$$

و بنابراین $\sum_{i=1}^n p_i = id_V$

به عکس، فرض کنید $p_n, ..., p_1$ در (۱) و (۲) صدق کنند. در این صورت می بینیم که

$$p_i = p_i o id_v = p_i o \sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n (p_i o p_j) = p_i o p_i$$

بنابراین هر p_i خودتوان و بنا به قضیه ۳۷.۰.۲ تصویر است. حال به ازای هر $x \in V$ داریم

$$x = id_V(x) = (\sum_{i=1}^n p_i)(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \in \sum_{i=1}^n Imp_i$$

که از آن نتیجه می شود $V = \sum_{i=1}^n Imp_i$. حال اگر $x \in Imp_i \bigcap \sum_{j \neq i} Imp_j$ ، آنگاه بنابر قضیه ۳۶.۰.۲ ، $x = \sum_{j \neq i} x_j$ و $x = p_i(x)$ که به ازای هر $j \neq i$ ، $p_j(x_j) = x_j$. بنابراین

$$x = p_i(x) = p_i(\sum_{j \neq i} x_j) = p_i(\sum_{j \neq i} p_j(x_j)) = \sum_{j \neq i} p_i[p_j(x_j)] = 0_V$$

و نتیجه می شود که $V = \bigoplus_{i=1}^n Imp_i$.

■

۱.۲ نگاشت تصویر کمینه

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم $(X, \| \, . \, \|)$ یک فضای باناخ باشد و $Y \subset X$ یک زیرفضای بسته باشد، نگاشت خطی $P : X \longrightarrow Y$ یک **نگاشت تصویر** [۳] نامیده می شود اگر

$$(Py = y \qquad \forall y \in Y)$$

و مجموعه ای از همه نگاشت های تصویر از X به Y را با $P(X, Y)$ نمایش می دهیم.

$p. \in P(X, Y)$ یک **نگاشت تصویر کمینه** [۴] نامیده می شود اگر

$$\| p. \| = inf \, \{ \| \, p \, \| : p \in P(X, Y) \, \}$$

که گاهی این کمینه نرم را با ثابتی مانند $\lambda(X, Y)$ نیز نمایش می دهند.

در فصول آتی نشان خواهیم داد که نگاشتهای تصویر کمینه در نظریه بهترین تقریب از اهمیت ویژه ای برخوردارند.

فرض کنیم W یک فضای برداری و زیرفضاهای V, U به ترتیب فضای برد و فضای پوچ باشند، ویژگی های زیر دنبال می شود:

۱- تحدید نگاشت تصویر P به U ، عملگر همانی Id روی U است به عبارت دیگر

$$\forall \, x \in U \quad : \; Px = x$$

۲- $W = U \bigoplus V$ که نتیجه می دهد هر بردار دلخواه مانند x ، نمایش منحصر به فردی به فرم $x = u + v$ دارد بطوریکه $u \in U, v \in V$. در این نمایش

[۳] Projection Mapping
[۴] Minimal Projection

$$u = Px \ , \ v = x - Px = (I - P)x$$

۳- برد و هسته نگاشت تصویر P نسبت به هم متمم هستند . (با فرض $Q = I - P$)

۴- عملگر Q یک نگاشت تصویر بوده و برد و هسته اش به ترتیب هسته و برد نگاشت تصویر P است .

۵- P یک نگاشت تصویر در امتداد V بروی U و Q یک نگاشت تصویر در امتداد U بروی V است .

۶- مقادیر ویژه نگاشت تصویر P فقط می تواند مقادیر ۱ ,۰ باشد .

۷- اگر نگاشت تصویر نابدیهی باشد، یک چند جمله ای کمینه مانند $X^۲ - X = X(X - ۱)$ دارد، بنابراین از قابلیت قطری شدن برخوردار است .

مثال. نگاشت $P : X \longrightarrow Y$ را با فرض $X := R^۳, Y := \{(x, y, ۰) \mid x, y \in R\}$ در نظر می گیریم. اگر ماتریس این نگاشت را p نامگذاری کنیم، برای هر بردار دلخواه $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ مشاهده می کنیم

$$p^۲ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} x \\ y \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$p \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم Y, Z فضای باناخ باشند. برای هر p که $۱ \leq p < \infty$ ، فضای باناخ $Y \bigoplus_p Z$ را به عنوان یک فضای برداری متشکل از همه زوج های $(y, z) \quad y \in Y, z \in Z,$ ،مجهز به نرم

$$\| \ (y, z) \ \| := \big(\| \ y \ \|^p + \| \ z^p \ \| \ \big)^{۱/p}$$

تعریف می کنیم . اگر L, T عملگرهایی خطی به ترتیب روی فضاهای Y, Z باشند ، عملگر (L, T) را روی $Y \bigoplus_p Z$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(L, T)(y, z) = (Ly, Tz)$$

لم ۱. $\| (L,T) \| = max\{\| L \|, \| T \|\}$

اثبات. $\| (L,T)(y,z) \|^p = \| (Ly,Tz) \|^p = \| Ly \|^p + \| Tz \|^p \leq \| L \|^p \| y \|^p + \| T \|^p \| z \|^p \leq$

$(max\{\| L \|, \| T \|\})^p (\| y \|^p + \| z \|^p) = (max\{\| L \|, \| T \|\})^p \quad \| (y,z) \|^p$

بنابراین

$$\| (L,T) \| \leq max\{\| L \|, \| T \|\}$$

حال فرض کنیم $\| T \| = max\{\| L \|, \| T \|\}$ و $\{z_n\} \subset Z$ به طوریکه $\| z_n \| = ۱$ و $\| Tz_n \| \longrightarrow \| T \|$

چون $\| (۰, z_n) \| = ۱$ داریم :

$$\| (L,T)(۰, z_n) \| \longrightarrow \| T \| = max\{\| L \|, \| T \|\}$$

و بطور مشابه اگر $\| L \| = max\{\| L \|, \| T \|\}$ تساوی ثابت می شود. ■

لم ۲. فرض کنیم Y, Z فضاهای باناخ و V, W به ترتیب زیرفضاهای دلخواهی از Y, Z باشند. تعریف می کنیم

$$U := V \bigoplus_p W := \Big\{(v,w) : v \in V, w \in W\Big\} \subset Y \bigoplus_p Z$$

پس $\lambda(U, Y \bigoplus_p Z) = max\{\lambda(V,Y), \lambda(W,Z)\}$ به علاوه اگر V زیرفضای سره ای از Y و W زیرفضای دلخواهی از Z باشند به طوریکه $\lambda(W,Z) > \lambda(V,Y)$ ، نگاشت تصویر کمینه از Z به روی W وجود دارد، سپس برای هر $p \in [۱, \infty[$ ، نگاشت تصویر کمینه از $X = Y \bigoplus_p Z$ به روی $U = V \bigoplus_p W$ منحصر به فرد نیست.

اثبات. فرض کنیم Q, R نگاشت های تصویر کمینه به ترتیب به روی V, W باشند. نگاشت تصویر (Q,R) از X به روی U را تشکیل می دهیم ، داریم :

$$(Q,R)(y,z) := (Qy, Rz) \quad , \quad (y,z) \in X$$

اکنون با استفاده از لم قبل داریم :

$$\| (Q,R) \| = max\{\| Q \|, \| R \|\} = \| R \| = \lambda(W,Z)$$

حال نشان می دهیم (Q,R) ، یک نگاشت تصویر کمینه از X به روی U است . فرض کنیم $J : X \longrightarrow Z$ یک نگاشت باشد، تعریف می کنیم : $J(y,z) = z$ و همچنین $E : Z \longrightarrow X$ با $E(z) = (o,z)$ مفروض باشد. بوضوح

$$\| E \| = \| J \| = ۱ \; , EJ = id$$

فرض کنیم S نگاشت تصویر دیگری از X به روی U باشد . از آنجاییکه $JU \subset W$ نتیجه می گیریم

$$JSE : Z \longrightarrow W$$

حال برای هر $w \in W$ داریم:

$$JSEw = JS(۰,w) = J(۰,w) = w$$

چون $(۰,w) \in U$ و همچنین JSE یک نگاشت تصویر از Z به روی W است. از آنجاییکه R یک نگاشت تصویر کمینه به روی W است، داریم:

$$\| (Q,R) \| = max\{\| Q \|, \| R \|\} = \| R \| \leq \| JSE \| \leq \| S \|$$

که نتیجه می دهد (Q,R) یک نگاشت تصویر کمینه به روی U است.

حال فرض کنیم Q نگاشت تصویری دلخواه و نه الزاما مینیمال از Y به روی V با شرط $\| Q \| \leq \lambda(W,Z) = \| R \|$ باشد، در این صورت برای دو نگاشت تصویر متمایز $Q_۱, Q_۲$ از Y به روی V با شرط $\| Q_i \| \leq \lambda(W,Z) \quad i = ۱,۲$ ، نگاشت های تصویر متناظر $(Q_۱,R),(Q_۲,R)$ متفاوت هستند. ■

تعریف ۳.۱.۲. فضای همه دنباله هایی که $p-$ نرمشان متناهی است فضای l_p می نامیم به عبارت دیگر

$$l_p := \left\{ a = (a_i)_{i=1}^{\infty} :\| a \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

تذکر : فضای l_p نیز مانند فضای L_p ، یک فضای باناخ است با این تفاوت که ترانزیتیو [۵] یا ترایا نیست و یا به عبارت دیگر، ایزومتری های محدودی دارد.

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنیم $1 \leq p \leq \infty, p \neq 2$ در این صورت داریم:

۱- یک زیرفضای سه بعدی $U \subset l_p^5$ وجود دارد بطوریکه نگاشت تصویر کمینه به روی U منحصر به فرد نیست.

۲- برای هر $N \geq 5$ و هر $3 \leq n \leq N-2$ زیرفضای n بعدی $U \subset l_p^N$ وجود دارد بطوریکه نگاشت تصویر کمینه بروی آن منحصر به فرد نیست.

۳- برای هر $N \geq 5$ و هر $2 \leq m \leq N-3$ زیرفضای $U \subset l_p^N$ با همبعد متناهی [۶] m وجود دارد بطوریکه نگاشت تصویر کمینه بروی آن منحصر به فرد نیست.

۴- برای هر $n \geq 3$ و هر $m \geq 2$ فضای نامتناهی بعد l_p شامل زیرفضاهای U_n از بعد n و U_m با همبعد m وجود دارند بطوریکه نگاشت های تصویر کمینه منحصر به فرد نیستند.

اثبات. (۱) : از آنجایی که $l_p^5 = l_p^2 \bigoplus_p l_p^3$ با در نظر گرفتن زیرفضای یک بعدی دلخواه $V \subset l_p^2$ ، ما اطمینان داریم که $\lambda(V, l_p^2) = 1$ ، اکنون فرض کنیم W زیرفضای دو بعدی دلخواهی از l_p^3 باشد به طوریکه $\lambda(W, l_p^3) > 1$ به عنوان مثال $W := \{(b,c,d) \in l_p^3 : b + c + d = 0\}$ بنابراین

$$\lambda(W, l_p^3) = 1/3(1 + 2^{q/p})^{1/q} \;\; (1 + 2^{p/q})^{1/p}$$

و با استفاده از لم قبل نتیجه حاصل می شود. یک مثال واقعی از چنین فضایی عبارت است از:

---
[۵] Transitive
[۶] Codimension

$$U := \{(\circ, a, b, c, d) \in l_p^{5} : b + c + d = \circ\}$$

(۲): داریم $N-2 \geq 3$ و $l_p^N = l_p^2 \bigoplus_p l_p^{N-2}$ ، برای هر $3 \leq n \leq N-2$ یک زیرفضای $(n-1)$ بعدی $W \subset l_p^{N-2}$ و یک زیرفضای یک بعدی $V \subset l_p^2$ وجود دارد به طوریکه $\lambda(V, l_p^2) = 1$, $\lambda(W, l_p^{N-2}) > 1$ و از آنجایی که V یک زیرفضای سره از l_p^2 می باشد، با استفاده از لم قبل برهان کامل می شود.

برهان (۳) و (۴) مشابه برهانهای ارائه شده است. ■

یادآوری : S را یک مخروط می نامیم اگر

$$\forall \alpha > \circ, \forall x \in S : \alpha x \in S$$

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $P : X \longrightarrow X$ یک عملگر خطی باشد.عملگر P را پایا [۷] روی S می نامیم هر گاه به ازای هر $S \subset X$ ، داشته باشیم $PS \subset S$ ، در حالتی که P یک نگاشت تصویر و S یک مخروط باشد، P را یک **نگاشت تصویر حافظ شکل** [۸] می نامیم.

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنیم $(X, \| . \|)$ یک فضای باناخ و $f \in X^*$ از نرم یک باشد، f را یک تابعک نرمی [۹] می نامیم، اگر داشته باشیم: $\forall x \in X \quad f(x) = \| x \|$ و $\circ \neq x \in X$ یک نقطه هموار نامیده می شود اگر این تابعک نرمی منحصر به فرد باشد.

۱.۱.۲ بهترین تقریب [۱۰]

بحث بهترین تقریب در سال های اخیر به طور گسترده ای در بخش های مختلف ریاضی از جمله مسائل بهینه سازی و عددی و حتی برنامه نویسی به کار برده می شود. یک مثال ساده و شهودی آن بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه

[۷] Invariant
[۸] Shape Preserving Projection
[۹] Norming Functional
[۱۰] Best Approximation

است که نسبت به نقطه ای در همان فضا دارای کمترین فاصله باشند. این مساله کاربردهای زیادی در زندگی و به خصوص مسائل اقتصادی به همراه داشته است.

تعریف ۲.۱.۷. فرض کنیم K یک زیرمجموعه ناتهی از فضای ضرب داخلی X و عنصر $x \in X$ مفروض باشد. عنصر $y_. \in K$ یک بهترین تقریب x نامیده می شود اگر

$$\| x - y_. \| = dist(x, K)$$

بطوریکه

$$dist(x, K) := inf_{y \in K} \| x - y \|$$

تعریف شود.

مجموعه ای از تمام بهترین تقریب های x را با $P_K(x)$ نشان می دهیم. بنابراین

$$P_K(x) := \{y \in K : \| x - y \| = dist(x, K)\}$$

لم ۳. فرض کنیم Y یک زیرفضای بسته از فضای باناخ X باشد، در این صورت $p \in P(X, Y)$ دارای نرم یک است اگر و فقط اگر برای هر $Y \ni y \neq ۰$ عنصری از $Ker(p)$ وجود داشته باشد بطوریکه یک تابعک نرمی برای y باشد.

اثبات. ابتدا مشاهده می کنیم که $\| p \| = ۱$ اگر و فقط اگر برای هر $y \in Y$ ، ۰ ، بهترین تقریبی برای y در $V = Ker(p)$ باشد. در حقیقت اگر $\| p \| = ۱$ ، آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$\| x - (Id - p)x \| \leq \| p \| \, dist(x, V) \leq \| x - (Id - p)x \|$$

درنتیجه

$$dist(x,V) = \parallel px \parallel \quad \forall x \in X$$

و چون $p \in P(X,Y)$ ، $\forall y \in Y, \forall v \in V$ داریم:

$$dist(y,v) = \parallel y \parallel$$

بعکس، اگر ۰ بهترین تقریبی برای $y = px$ در V باشد و $x \in X$ آنگاه $(Id-p)x$ بهترین تقریب برای x در V است. بنابراین برای هر $x \in X$ داریم:

$$\parallel px \parallel = \parallel x - (Id-p)x \parallel \leq \parallel x \parallel$$

پس

$$\parallel p \parallel = ۱$$

■

لم ۴. فرض کنیم X یک فضای نرمدار و $Y \subset X$ زیرفضایی با همبعد n و $f_۱, f_۲, ..., f_n \in Y^\perp$ یک پایه برای $Y^\perp$ و همچنین $p \in P(X,Y)$ ، در نتیجه عناصر منحصر به فردی مانند $z_۱, z_۲, ..., z_n \in Ker(p)$ وجود دارد بطوریکه:

$$f_i(z_j) = \delta_{ij}, px = x - \sum_{i=۱}^{n} f_i(x) z_i \quad \forall x \in X$$

اثبات. چون $Y^\perp = Span[f_۱, f_۲, ..., f_n]$ و $X = Y \bigoplus Ker(p)$ برای هر $z \in Ker(p)$ ، اگر $f_i(z) = ۰$ برای $i = ۱, ..., n$ ، $z = ۰$ نتیجه می دهد $f_۱ \mid_{Ker(p)}, ..., f_n \mid_{Ker(p)}$ مستقل خطی هستند. بنابراین عناصر منحصر به فردی مانند $z_۱, ..., z_n \in Ker(p)$ وجود دارد به طوریکه $f_i(z_j) = \delta_{ij}$ برای $i,j = ۱, ..., n$ قرار می

دهیم $Qx = x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i$ $\forall x \in X$ و $Q |_{Y} = p |_{Y} = Id |_{Y}$ و $Q |_{Ker(p)} = 0$ و از آنجایی که $Qz_i = 0$ برای $i = 1, ..., n$ بنابراین $Q = p$ و به این ترتیب برهان کامل می شود. ■

۲.۲ نگاشت تصویر متعامد [11]

۱.۲.۲ نگاشت تصویرآبلیکو [12]

تعریف ۱.۲.۲. یک نگاشت تصویر، متعامد نامیده می شود اگر و فقط اگر خود الحاق باشد، در حقیقت اگر x, y بردارهایی دلخواه در دامنه نگاشت تصویر باشند آنگاه $px \in U, y - py \in V$ که U ، برد و V ، فضای پوچ می باشند.داریم:

$$< px, y - py >= (px)^T (y - py) = x^T (p^T - p^T p) y = x^T (p - p^T p)^T y \quad x, y \in R^n$$

بنابراین $px, y - py$ متعامد هستند اگر و فقط اگر $p^T p = p$ یا به عبارت دیگر برای هر x, y ، $p^T = p, p^2 = p$

۲.۲.۲ کاربرد

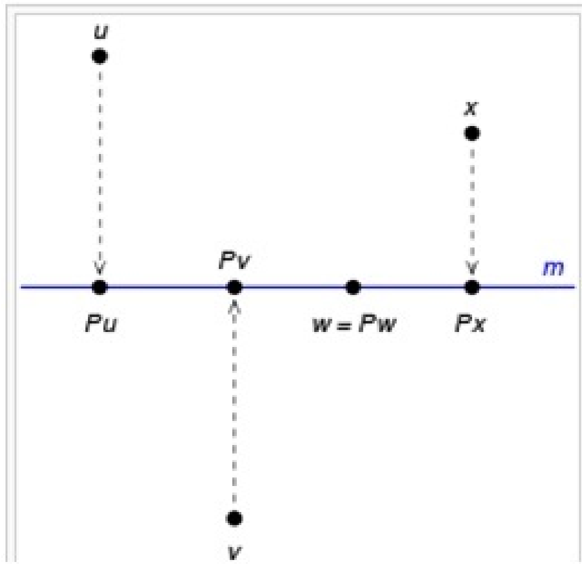
کاربردهای فراوانی از نگاشت های تصویر در آنالیز عددی و نظریه بهترین تقریب [13] دیده می شود، به عنوان مثال هنگامی که $P : X \longrightarrow V$ یک نگاشت تصویر باشد، Px را می توان به عنوان تقریبی از x در V در نظر گرفت، بنابراین داریم :

$$\| x - Px \| \leq \| I - P \| .dist(x, V)$$

زیرا برای هر عنصر دلخواه $v \in V$ داریم:

$$\| x - Px \| = \| (x - v) - P(x - v) \| = \| (I - P)(x - v) \| \leq \| I - P \| \quad \| x - v \|$$

[11] Orthogonal Projection
[12] Oblique Projection
[13] Best Approximation Theory



شکل ۱.۲: تبدیل P یک نگاشت تصویر متعامد بروی خط m است

که با گرفتن inf روی υ همان نامساوی بالا حاصل می شود.

در انتهای فصل سوم ملاحظه خواهید کرد که برای نگاشت تصویر $V \longrightarrow [۰,۱] P : L_p$ که نشان می دهیم دارای نرم $\wedge_p$ است، با شرایطی روی t ، نرم نگاشت تصویر $I - P$ کمتر از یک خواهد شد و درنتیجه

$$\| x - Px \| \leq dist(x, V)$$

حال توجه خود را به نگاشت تصویر متعامد از $L_۲\,[a,b]$ به روی یک زیرفضای n بعدی V معطوف می کنیم. یک پایه متعامد نرمال [۱۴] $\{\upsilon_۱, ..., \upsilon_n\}$ برای V انتخاب می کنیم. بنابراین

$$< \upsilon_i, \upsilon_j >= \int_a^b \upsilon_i(s)\upsilon_j(s)d(s) = \delta_{ij}$$

نگاشت تصویر متعامد از $L_۲\,[a,b]$ به روی V به صورت زیر تعریف می شود:

$$Px = \sum_{i=۱}^{n} < x, \upsilon_i > \ \upsilon_i$$

[۱۴] Orthonormal Basis

بوضوح V برد نگاشت تصویر P است. برد P^* توسط n تابع مختلط مقدار ϕ_i به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi_i(x) =< x, v_i >$$

اصطلاح نگاشت تصویر آبلیکو در مقابل نگاشت تصویر متعامد قرار دارد.

فرض کنیم بردارهای $u_1, ..., u_k$ تشکیل یک پایه برای برد نگاشت تصویر می دهند و فرض کنیم این بردارها در ماتریسی بنام A که از مرتبه $n \times k$ است، مرتب شده باشند. می دانیم برد و فضای پوچ، فضاهای متمم هستند، بنابراین فضای پوچ، بعد $n - k$ خواهد داشت، که این می رساند متمم متعامد [۱۵] فضای پوچ دارای بعد k است. فرض کنیم $v_1, ..., v_k$ تشکیل یک پایه برای متمم متعامد فضای پوچ نگاشت تصویر P می دهند و همچنین فرض کنیم این بردارها در ماتریس B قرار دارند در این صورت، نگاشت تصویر به صورت زیر تعریف می شود:

$$P = A(B^T A)^{-1} B^T$$

مثال. ماتریس P را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

بوضوح P یک نگاشت تصویر است زیرا

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = P$$

نگاشت تصویر P متعامد است اگر و فقط اگر $\alpha = 0$ باشد.

۳.۲ نگاشت تصویر روی فضاهای برداری نرمدار [۱۶]

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. اگر $X = U \bigoplus V$ آنگاه، عملگر $P(u+v) = u$ یک نگاشت تصویر با برد U و هسته V است که بوضوح $P^2 = P$.

[۱۵] Orthogonal Projection
[۱۶] Projections On Normed Vector Spaces

بعکس اگر P یک نگاشت تصویر روی فضای باناخ X باشد آنگاه $P^{۲} = P$ و چون $(I-P)^{۲} = I-P$ بنابراین $I-P$ نیز یک نگاشت تصویر است.

رابطه $I = P + (I-P)$ نتیجه می دهد X برابر جمع مستقیم $Ran(I-P) \bigoplus Ran(P)$ است .

در حالت کلی یک نگاشت تصویر نیازی به پیوسته بودن ندارد . اگر زیرفضای U از X در توپولوژی نرم بسته نباشد، نگاشت تصویر بروی U پیوسته نخواهد بود ، به عبارت دیگر برد نگاشت تصویر پیوسته P ، الزاما یک زیرفضای بسته است . بعلاوه هسته یک نگاشت تصویر پیوسته ، بسته است . بنابراین نگاشت تصویر پیوسته P ، یک تجزیه از X به دو زیرفضای بسته متمم به صورت زیر ارائه می کند:

$$X = Ran(P) \bigoplus Ker(P) = Ran(P) \bigoplus Ran(I-P)$$

عکس نیز برقرار است. فرض کنیم U یک زیرفضای بسته از X باشد . اگر زیرفضای بسته ای مانند V وجود داشته باشد بطوریکه $X = U \bigoplus V$ آنگاه نگاشت تصویر P با برد U و هسته V ، پیوسته است، زیرا طبق قضیه گراف بسته ، اگر فرض کنیم $x_n \longrightarrow x, Px_n \longrightarrow y$ ، باید نشان دهیم $Px = y$ ازآنجاییکه U بسته است و $Px_n \subset U$ بنابراین y در U است و در نتیجه $Py = y$

همچنین

$$x_n - Px_n = (I-P)x_n \longrightarrow x - y$$

چون V بسته و $(I-P)x_n \subset V$ بنابراین $x - y \in V$ و

$$P(x-y) = Px - Py = Px - y = ۰ \Rightarrow Px = y$$

در بحث بالا، U, V بعنوان زیرفضاهای بسته مطرح شدند ولی در حالت کلی برای یک زیرفضای بسته U ، نیازی به وجود یک زیرفضای بسته متمم V نیست. هر چند که در مورد فضاهای هیلبرت، با در نظر گرفتن یک متمم متعامد، این امر همیشه می تواند تحقق پیدا کند ولی در مورد فضاهای باناخ طبق نتیجه فوری قضیه هان

- باناخ[۱۷] یک زیرفضای یک بعدی که بسته و متمم باشند وجود دارد.

فرض کنیم U توسط u تولید شده باشد، طبق قضیه هان - باناخ، یک تابع حقیقی یا مختلط مقدار خطی و کراندار مانند Φ وجود دارد بطوریکه $\Phi(u) = 1$. عملگر

$$P(x) = \Phi(x)u$$

یک نگاشت تصویر می باشد بوضوح داریم $P^2 = P$ زیرا داریم:

$$P(P(x)) = \Phi(P(x))u = \Phi(\Phi(x)u)u$$

از آنجاییکه تابع Φ خطی است داریم:

$$= \Phi(x)\Phi(u)u$$

با جایگزین کردن $\Phi(u) = 1$ داریم:

$$P(P(x)) = \Phi(x)u$$

کرانداری Φ ، پیوستگی نگاشت تصویر P را می رساند زیرا داریم:

$$\mid P(x) - P(y) \mid = \mid \Phi(x)u - \Phi(y)u \mid = \mid \Phi(x) - \Phi(y) \mid \quad \mid u \mid \leq \parallel \Phi \parallel \quad \mid x - y \mid \quad \mid u \mid$$

چون $\mid x - y \mid \longrightarrow 0$ ، از کرانداری Φ نتیجه می گیریم سمت راست نامساوی بالا به سمت صفر میل می کند. بنابراین

[۱۷] Hahn - Banach

$$Ker(P) = Ran(I - P)$$

یک زیرفضای متمم بسته U است.

فرض کنیم V یک زیرفضای n بعدی از یک فضای نرمدار X و همچنین Φ یک زیرفضای n بعدی از X^* باشد. اگر Φ روی V کلی [۱۸] باشد به این معنی که اگر $\phi(v) = 0$ برای هر $v \in V$ در این صورت $v = 0$ ، آنگاه یک نگاشت تصویر منحصر به فرد P وجود دارد بطوریکه $P(X) = V, P^*(X^*) = \Phi$. نگاشت تصویر P خاصیت درونیابی $\phi(Px) = \phi(x)$ برای هر $x \in X, \phi \in \Phi$ را داراست.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم $p \in B(H)$ یک نگاشت تصویر باشد، شرایط زیر معادلند:

۱- p خودالحاق است.

۲- p نرمال است.

۳- $R(p) = N(p)^{\perp}$

۴- $\forall x \in H \quad < px, x >=\| px \|^2$ و اگر p, q دو نگاشت تصویر خودالحاق باشند، آنگاه $R(p) \perp R(q)$ اگر و تنها اگر $pq = 0$

اثبات. ۱ $\longrightarrow$ ۲ بوضوح $p^*p = pp^* = p^2 = p$

۲ $\longrightarrow$ ۳ چون p نرمال است، داریم: $N(p) = N(p^*) = R(p)^{\perp}$ و از آنجاییکه p یک نگاشت تصویر می باشد، $\exists x \quad s.t \quad y = p(x) \quad iff \quad (1 - p)y = (p - p^2)x = 0$ بنابراین $R(p) = N(1 - p)$ و در نتیجه $R(p)$ بسته است و در نهایت $R(p) = R(p)^{\perp\perp} = N(p)^{\perp}$

۳ $\longrightarrow$ ۴ برای هر $x \in H$ داریم:

$$H = Kerp \bigoplus Kerp^{\perp} = N(p) \bigoplus R(p)$$

[۱۸] Total

بنابراین

$$\exists y \in N(p), z \in R(p)$$

بطوریکه $x = y + z$ و همچنین

$$< px, x >=< py + pz, y + z >=< z, y + z >=< z, y > + < z, z >=\| z \|^۲=\| px \|^۲$$

و اگر p, q نگاشت های خودالحاق باشند، داریم:

$$< px, qy >=< x, p^* qy >=< x, pqy > \quad \forall x, y \in H$$

در نتیجه

$$R(p) \perp R(q) \quad iff \quad pq = ۰$$

۴ $\longleftarrow$ ۱ داریم:

$$< px, x >=< x, p^* x >= \overline{< p^* x, x >}$$

از طرف دیگر طبق فرض داریم:

$$< px, x >=\| px \|^۲ \in R$$

درنتیجه

$$< px, x >=< p^* x, x > \quad \forall x \in H$$

بنابراین $p = p^*$ ■

۴.۲ نگاشت تصویر درونیاب لاگرانژ [۱۹]

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم S یک فضای هاسدورف فشرده و V یک زیرفضای n بعدی در $C(S)$ باشد و فرض کنیم $s_1, ..., s_n$ ، n نقطه از S با این ویژگی که مجموعه ای از توابع ارزشیاب مختلط مقدار [۲۰] $\{s_1^{\wedge}, ..., s_n^{\wedge}\}$ روی V کلی باشد، یعنی اگر $\nu \in V$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $\nu(s_i) = 0$ آنگاه $\nu = 0$ ، بنابراین عناصر $\nu_1, ..., \nu_n$ در V وجود دارد بطوریکه $\nu_i(s_j) = \delta_{ij}$. در این صورت نگاشت تصویر درونیاب لاگرانژ P به صورت زیر تعریف می شود:

$$Px = \sum_{i=1}^{n} x(s_i)\upsilon_i \qquad x \in C(S)$$

بوضوح $Px \in V$ و Px ، x را در نقاط $s_1, ..., s_n$ درونیابی می کند، بطوریکه $(Px)(s_i) = xs_i$ ، که ترجیح می دهیم به فرم

$$s_i^{\wedge}(Px) = s_i^{\wedge}(x)$$

یا به فرم بهتر زیر بنویسیم:

$$s_i^{\wedge} o P = s_i^{\wedge} \qquad 1 \leq i \leq n$$

مشاهده می کنیم که

$$P\upsilon = \upsilon \qquad \forall \upsilon \in V$$

$$P^*\phi = \phi \qquad \forall \phi \in < s_1^{\wedge}, ..., s_n^{\wedge} >$$

زیرا P^* نیز یک نگاشت تصویر با برد n بعدی که همان برد تولید شده بوسیله $\{s_1^{\wedge}, ..., s_n^{\wedge}\}$ می باشد که زیرفضایی از $C(S^*)$ است و شامل همه تابعک های خطی به فرم زیر می باشد:

[۱۹] Lagrange Interpolating Projection

[۲۰] Evaluation Functionals

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^{1} \qquad (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$$

تساوی $P^*\phi = \phi$ بیان می کند که مقدار تابع مختلط ϕ در x همان مقدار Px می باشد، که در حقیقت همان خاصیت درونیابی [۲۱] است. بنابراین عملگر لاگرانژ P شرایط یک نگاشت تصویر را داراست.

قضیه ۲.۴.۲. یک نگاشت تصویر از یک فضای نرمدار به روی یک زیرفضا بطور منحصر به فرد به وسیله بردی از الحاقش [۲۲] مشخص می شود.

اثبات. فرض کنیم $P : X \longrightarrow V, Q : X \longrightarrow V$ نگاشت های تصویر هستند، و $range(P^*) = range(Q^*)$ نشان می دهیم $P = Q$

مشاهده می کنیم برای هر x ، Qx در برد Q است که همان برد P می باشد، بنابراین Qx یک نقطه ثابت P محسوب می شود. در نتیجه $PQx = Qx, PQ = Q$ بطور مشابه $Q^*P^* = P^*$ بنابراین

$$Q^* = (PQ)^* = Q^*P^* = P^*$$

اگر $x \in X, \phi \in X^*$ آنگاه

$$\phi(Px) = (P^*\phi)(x) = (Q^*\phi(x) = \phi(Qx)$$

چون x, ϕ دلخواه بودند، تساوی $P = Q$ نتیجه می شود. ■

[۲۱] Interpolation Property
[۲۲] Adjoint

فصل ۳
فضای حاصلضرب تانسوری

در این فصل بعد از معرفی عملگر تانسوری به تعریف فضای حاصلضرب تانسوری می پردازیم و این عملگر را به عنوان عضوی از این فضا تعریف می کنیم و وجود نگاشتهای خطی و کراندار را روی این فضای نرمدار بررسی می کنیم.

۱.۳ معرفی عملگر تانسوری

فرض کنیم X,Y فضاهای باناخ باشند و همچنین فرض کنیم X^* فضای دوگان متناظر با فضای X باشد. $x_۱, ..., x_k \in X$ و $y_۱, ..., y_k \in Y$ ، را در نظر می گیریم.

عملگر $A : X^* \longrightarrow Y$ را با ضابطه زیر درنظر بگیرید:

$$Af = \sum_{i=۱}^{k} f(x_i)y_i \quad f \in X^* \tag{۱.۳}$$

همانطور که می بینید متناظر با $x_i \in X, y_i \in Y, n \in N$ ، عملگرهای متفاوتی روی فضای X^* تعریف می شود، ما جهت تمایز این عملگرها عبارت $\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i$ را به کار خواهیم برد. در حالت خاص

$$(x \bigotimes y)f = f(x)y \quad \forall x \in X, y \in Y, f \in X^*$$

همچنین با توجه به این عملگرها یک رابطه هم ارزی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i \sim \sum_{i=۱}^{m} v_i \bigotimes u_i$$

اگر و فقط اگر این دو عبارت عملگر یکسانی را تعریف کنند.

مجموعه تمام کلاس های هم ارزی ایجاد شده از این رابطه هم ارزی را فضای حاصلضرب تانسوری [۱] و آن را با نماد $X \bigotimes Y$ نمایش می دهند.

و به طور کلی $X \bigotimes Y$ را فضای همه عملگرهای متناهی بعد از فضای دوگان X^* به Y معرفی می کنیم و یا به عبارت ریاضی

$$X \bigotimes Y = \{\textstyle\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i \mid \quad x_i \in X, y_i \in Y\}$$

عمل جمع و ضرب اسکالر روی این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{k}^{n} x_k \bigotimes y_k + \sum_{j}^{m} v_j \bigotimes u_j = \sum_{i}^{n+m} a_i \bigotimes b_i$$

که در آن

$$a_i = x_k, b_i = y_k \quad ۱ < i < n$$

و برای $i = n + j$

$$a_i = v_j, b_i = u_j$$

همچنین به ازای هر $\lambda \in R$ داریم:

[۱] Tensor Product Space

$$\lambda \sum_{k}^{n} x_k \bigotimes y_k = \sum_{k}^{n} \lambda x_k \bigotimes y_k = \sum_{k}^{n} x_k \bigotimes \lambda y_k$$

بطور خاص:

$$x \bigotimes \circ = \circ \bigotimes y = \circ \bigotimes \circ = \circ$$

لم ۵. در فضای $X \bigotimes Y$ هر عبارت در صورتیکه هم ارز $\circ \bigotimes \circ$ نباشد هم ارز با یک عبارت مانند $\sum_{k}^{n} x_k \bigotimes y_k$ می باشد که در آن مجموعه های $\{x_۱, ..., x_n\}, \{y_۱, ..., y_n\}$ مستقل خطی می باشند.

اثبات. رجوع شود به [۱۰]

■

این عملگر کراندار است زیرا با کمک نامساوی شوارتز داریم:

$$\| (\sum x_i \bigotimes y_i)(\phi) \| = \| \sum < \phi, x_i > y_i \| \leqq \sum \| \phi \| \| x_i \| \| y_i \| \quad \forall \phi \in X^*$$

و همچنین

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i \sim \sum_{j=۱}^{m} u_j \bigotimes v_j \Longleftrightarrow \sum_{i=۱}^{n} < \phi, x_i >< \psi, y_i > =$$

$$\sum_{j=۱}^{m} < \phi, u_j >< \psi, v_j > \quad \forall \phi \in X^*, \psi \in Y^*$$

$$\Rightarrow < \psi, \sum_{i=۱}^{n} < \phi, x_i > y_i > = < \psi, \sum_{j=۱}^{m} < \phi, u_j > v_j >$$

و چون تساوی بالا برای هر $\psi \in Y^*$ برقرار است بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} < \phi, x_i > y_i = \sum_{j=۱}^{m} < \phi, u_j > v_j$$

و قرارداد می کنیم برای $x \in X, \phi \in X^*$

$$x(\phi) =< \phi, x >$$

۲.۳ نرم های متقاطع و حاصلضرب های تانسوری فضاهای باناخ

اگر A, B فضاهای باناخ باشند، حاصلضرب تانسوری جبری از A, B همان حاصلضرب تانسوری A, B به عنوان فضاهای برداری است که با $A \bigotimes B$ نمایش می دهیم.

حاصلضرب تانسوری $A \bigotimes B$ شامل همه جمع های متناهی به فرم

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i$$

که در آن $n \in N, a_i, b_i \in B$

هنگامی که A, B فضاهای باناخ باشند ، یک نرم متقاطع p روی حاصلضرب تانسوری $A \bigotimes B$ ، نرمیست که در شرایط زیر صدق می کند:

$$p(a \bigotimes b) =\| a \| \quad \| b \|$$

اصطلاح نرم متقاطع منطقی [۲] نیز همان تعریف قبلی است.

یک نرم متقاطع ماکسیمال به نام π وجود دارد که نرم متقاطع تصویری [۳] نامیده شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\pi(x) = inf \{\sum_{i=1}^{n} \| a_i \| \quad \| b_i \| \quad : \; x = \sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i \}$$

که $x \in A \bigotimes B$

و همچنین یک نرم متقاطع مینیمال ε وجود دارد که نرم متقاطع یک به یک [۴] نامیده شده و به صورت زیر

[۲] Reasonable Cross-Norm
[۳] Projective Cross-Norm
[۴] Injective Cross-Norm

تعریف می شود:

$$\varepsilon(x) = sup\{|\ (a' \bigotimes b'(x)\ |\ \ :\ a' \in A', b' \in B', \parallel a' \parallel = \parallel b' \parallel = ۱\}$$

که در آن $x \in A \bigotimes B$ و A', B' دوگان فضاهای باناخ A, B می باشند.

حاصلضرب تانسوری در دو نرم بالا، حاصلضرب های تانسوری تصویری و یک به یک نامیده می شود و به ترتیب با $A\widehat{\bigotimes}_\varepsilon B, A\widehat{\bigotimes}_\pi B$ نمایش داده می شوند.

یک نرم متقاطع یکنواخت در حقیقت همان نرم متقاطع منطقی روی $X \otimes Y$ است این بدین معنی است که اگر $A \in L(X), B \in L(Y)$ و α نیز یک نرم متقاطع یکنواخت باشد آنگاه نامساوی زیر برقرار است:

$$\alpha(\sum_{i=۱}^{n}(Ax_i \bigotimes By_i)) \leqslant \parallel A \parallel \ \ \parallel B \parallel \ \ \alpha(\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i) \quad \forall \sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i \in X \bigotimes Y$$

بنابراین اگر X, W, Y, Z فضاهای باناخ دلخواهی باشند آنگاه برای عملگرهای $S : X \longrightarrow W, T : Y \longrightarrow Z$ ، عملگر

$$S \bigotimes T : X \bigotimes\nolimits_\alpha Y \longrightarrow W \bigotimes\nolimits_\alpha Z$$

پیوسته است و $\parallel S \bigotimes T \parallel \leq \parallel S \parallel \ \ \parallel T \parallel$

(زیرا

$$\parallel S \bigotimes T \parallel = sup\left\{|\ (S \bigotimes T)(z)\ |: z \in X \bigotimes_\alpha Y, \alpha(z) \leqslant ۱\right\}$$

$$= sup\left\{|\ (S \bigotimes T)(\sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i)\ |: z = \sum_{i=۱}^{n} x_i \bigotimes y_i, \alpha(z) \leqslant ۱\right\}$$

$$= sup\left\{\mid \sum_{i=1}^{n} Sx_i \bigotimes Ty_i \mid \leqslant \parallel S \parallel \quad \parallel T \parallel \ \alpha(z)\right\}$$

و چون $\alpha(z) \leqslant 1$ نتیجه حاصل میشود.)

اگر A, B دو فضای باناخ باشند و α یک نرم متقاطع یکنواخت باشد آنگاه α ، یک نرم متقاطع روی حاصلضرب تانسوری $A \bigotimes B$ تعریف می شود.

مقدار نرم α روی $A \bigotimes B$ و همچنین روی حاصلضرب تانسوری $A\widehat{\bigotimes}_\alpha B$ برای هر عنصر x در $A\widehat{\bigotimes}_\alpha B$ یا $A \bigotimes_\alpha B$ با $\alpha_{A,B}(x)$ یا $\alpha(x)$ نمایش داده می شود.

اگر A, B فضاهای باناخ دلخواهی باشند و α نیز یک نرم متقاطع یکنواخت باشد آنگاه

$$\varepsilon_{A,B}(x) \leq \alpha_{A,B}(x) \leq \pi_{A,B}(x)$$

(زیرا بنا به تعریف و با فرض $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i$ داریم:

$$\mid (a' \bigotimes b')(\sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i) \mid = \mid \sum_{i=1}^{n} a'(a_i) \bigotimes b'(b_i) \mid$$

بوضوح $a'(a_i), b'(b_i)$ عضوی از میدان می باشند بنابراین حاصلضرب تانسوری آن ها به ضرب داخلی مبدل می شود، بنابراین در ادامه و با استفاده از نامساوی شوارتز داریم:

$$= \mid \sum_{i=1}^{n} < a'(a_i), b'(b_i) > \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \mid < a'(a_i), b'(b_i) > \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \parallel a'(a_i) \parallel \quad \parallel b'(b_i) \parallel \leq \sum_{i=1}^{n} \parallel a_i \parallel \quad \parallel b_i \parallel$$

زیرا طبق تعریف $\parallel a' \parallel = \parallel b' \parallel = 1$

درنتیجه

$$sup\left\{(a'\bigotimes b')(\sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i) \mid \right\} \leq \sum_{i=1}^{n} \parallel a_i \parallel \quad \parallel b_i \parallel$$

$$sup\left\{(a'\bigotimes b')(\sum_{i=1}^{n} a_i \bigotimes b_i) \mid \right\} \leq inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \parallel a_i \parallel \quad \parallel b_i \parallel\right\}$$

$$\Longrightarrow \varepsilon(x) \leq \pi(x)$$

تعریف ۱.۲.۳. عنصر e از فضای باناخ X روی میدان K به عنوان یک واحد بطور ضعیف [5] روی X عمل می کند اگر $e \in S_X$ - S_X کره واحد فضای X است- و یک فضای باناخی مانند Y روی میدان K شامل X به همراه یک نگاشت دوخطی کراندار $f : X \times X \longrightarrow Y$ با نرم یک وجود داشته باشد بطوریکه تساوی های $f(e,x) = f(x,e) = x$ برای هر $x \in X$ برقرار باشد.

لم ۶. فرض کنیم X یک فضای باناخ روی میدان K و e عنصری از فضا با نرم یک باشد، در این صورت عبارت های زیر معادلند:

۱ - e به عنوان یک واحد بطور ضعیف روی X عمل می کند.

۲-تساوی $\parallel e \bigotimes x + x \bigotimes e \parallel_\pi = ۲ \parallel x \parallel$ برای هر $x \in X$ برقرار است.($\parallel . \parallel_\pi$ نرم تانسوری تصویری [6] نامیده می شود)

۳-فضای باناخی چون Y روی میدان K به همراه نگاشت دوخطی متقارن کراندار [7] $f : X \times X \longrightarrow Y$ وجود دارد بطوریکه نرم آن یک و برای هر $x \in X$ داریم: $\parallel f(e,x) \parallel = \parallel x \parallel$

اثبات. ۲ $\longrightarrow$ ۱

[5] Weakly as a Unit
[6] Projective Tensor Norm
[7] Bounded Symmetric bilinear Mapping

فرض کنیم Y یک فضای باناخ روی میدان K و شامل X باشد به طوریکه نگاشتی دوخطی کراندار و از نرم یک مانند $f : X \times X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که $f(e,x) = f(x,e) = x$ برای هر $x \in X$ بنابراین، نگاشتی خطی کراندار و از نرم یک مانند h از حاصلضرب تانسوری تصویری $X \bigotimes_\pi X$ به Y وجود داشته باشد به طوریکه

$$f(x_1, x_2) = h(x_1 \bigotimes x_2) \ , \ \ x_1, x_2 \in X$$

بنابراین

$$2 \| x \| = \| f(e,x) + f(x,e) = \| h(e \bigotimes x + x \bigotimes e) \| \leqq \| e \bigotimes x + x \bigotimes e \|_\pi$$

$3 \longrightarrow 2$

اگر ۲ برقرار باشد آنگاه Y با **حاصلضرب تانسوری تصویری کامل** [8] $X \widehat{\bigotimes}_\pi X$ متناظر و داریم:

$$f(x_1, x_2) := 1/2(x_1 \bigotimes x_2 + x_2 \bigotimes x_1)$$

$1 \longrightarrow 3$

فرض کنیم ۳ برقرار باشد سپس نگاشت خطی و ایزومتری از X به Y با ضابطه $x \longrightarrow \widehat{x} := f(x,e)$ و همچنین نگاشت دوخطی و کراندار $\widehat{f} : \widehat{X} \times \widehat{X} \longrightarrow Y$ با ضابطه $\widehat{f}(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) := f(x_1, x_2)$ به طوریکه $\| \widehat{f} \| = 1$ را در نظر می گیریم و تعریف می کنیم

$$\widehat{f}(\widehat{e}, \widehat{x}) = \widehat{f}(\widehat{x}, \widehat{e}) = f(e,x) = \widehat{x}$$

برای هر $\widehat{x} \in \widehat{X}$ ■

لم ۰.۷ [1] اگر $P : X \longrightarrow U, Q : X \longrightarrow V$ نگاشتهای تصویر فضاهای باناخ باشند، بطوریکه $PQP = QP$ آنگاه جمع بولی

---

[8] Complete Projective Tensor Product

$$P \bigoplus Q = P + Q - PQ$$

یک نگاشت تصویر از X بروی $U + V$ است.

اثبات. بوضوح $P \bigoplus Q$ یک نگاشت از X روی $U + V$ می باشد و برای اثبات اینکه هر عنصر از U را ثابت نگه می دارد، کافیست داشته باشیم:

$$(P \bigoplus Q)P = P^۲ + QP - PQP = P + QP - QP = P$$

و بطور مشابه $P \bigoplus Q$ هر عنصر از V را ثابت نگه می دارد زیرا

$$(P \bigoplus Q)Q = PQ + Q^۲ - PQ^۲ = PQ + Q - PQ = Q$$

■

لم ۸. فرض کنیم G یک زیرفضای متناهی بعد با پایه $\{g_۱, ..., g_n\}$ از فضای باناخ X باشد. فرض کنیم Y فضای باناخ دیگری باشد و α یک نرم متقاطع منطقی روی $X \bigotimes Y$. نگاشتهای خطی و کراندار $L_i : X \bigotimes_\alpha Y \longrightarrow Y$ وجود دارد بطوریکه

$$z = \sum_{i=۱}^{n} g_i \bigotimes L_i z \quad \forall z \in G \bigotimes Y$$

اثبات. تابعکهای $\phi_۱, ..., \phi_n \in X^*$ را انتخاب می کنیم بطوریکه $\phi_i(g_i) = \delta_{ij}$. عملگر L_i را روی فضای حاصلضرب تانسوری $X \bigotimes Y$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_i(\sum_j x_j \bigotimes y_j) = \sum_j \phi_i(x_j) y_j \quad (۱ \leqslant i \leqslant n)$$

توجه کنیم که اگر عنصر $z = \sum_j x_j \bigotimes y_j$ به عنوان یک عضو $L(X^*, Y)$ تلقی شود، آنگاه $L_i z = z(\phi_i)$ بنابراین تعریف $L_i z$ مستقل از نمایش z خواهد بود. داریم:

$$\| L_i z \| = \| z(\phi_i) \| \leqslant \alpha(z) \| \phi_i \|$$

با سوپریمم گرفتن از طرفین رابطه بالا داریم:

$$\| L_i \| = sup \{ \| L_i z \| : \alpha(z) \leqslant ۱ \} \leqslant \| \phi_i \|$$

اگر $z \in G \bigotimes Y$ باشد آنگاه

$$z = \sum_{j=۱}^{n} g_j \bigotimes y_j$$

و

$$L_i z = z(\phi_i) = \sum_{j=۱}^{n} \phi_i(g_j) y_j = y_j$$

به این ترتیب برهان کامل می شود. ■

لم ۹. فرض کنیم G و H به ترتیب زیرفضاهای متناهی بعد از فضاهای باناخ به ترتیب X و Y و $\{g_۱, ..., g_n\}$ و $\{h_۱, ..., h_m\}$ به ترتیب پایه هایی برای زیرفضاهای G و H باشند. فرض کنیم α یک نرم متقاطع منطقی روی فضای حاصلضرب تانسوری $X \bigotimes Y$ باشد. در این صورت عملگرهای خطی کراندار

$$\varrho_i : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow Y \ , \ \Upsilon_j : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow X$$

وجود دارند بطوریکه برای هر

$$w \in W = G \bigotimes Y + X \bigotimes H$$

داریم:

$$w = \sum_{i=1}^{n} g_i \bigotimes \varrho_i w + \sum_{j=1}^{m} \Upsilon_j w \bigotimes h_j$$

اثبات. با استناد به لم ۷ نگاشتهای تصویر

$$P : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow G \bigotimes Y \ , \ Q : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow X \bigotimes H$$

وجود دارد بطوریکه $P + Q - QP$ یک نگاشت تصویر از $X \otimes_{\alpha} Y$ بروی W است.

با استناد به لم قبل نگاشتهای خطی و کراندار

$$L_i : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow Y \ , \ K_j : X \bigotimes_{\alpha} Y \longrightarrow X$$

وجود دارند بطوریکه

$$z = \sum_{i=1}^{n} g_i \bigotimes L_i z \quad (z \in G \bigotimes Y)$$

$$z = \sum_{j=1}^{m} K_j z \bigotimes h_j \quad (z \in X \bigotimes H)$$

تعریف می کنیم

$$L_i P = \varrho_i$$

و

$$K_jQ(I-P)=\Upsilon_j$$

پس برای هر $w \in W$ داریم:

$$w = Pw + Q(I-P)w$$

$$w=\sum_{i=1}^{n} g_i \bigotimes L_iPw+\sum_{j=1}^{m} K_jQ(I-P)w \bigotimes h_j$$

$$w=\sum_{i=1}^{n} g_i \bigotimes \varrho_i w+\sum_{j=1}^{m} \Upsilon_j w \bigotimes h_j$$

و به این ترتیب برهان کامل می شود.

■

تعریف ۲.۲.۳. برای هر $f \in S(L_p)$ تعریف می کنیم:

$$S(L_p) := \cap_{\varepsilon>0} \left\{T(f) : T \text{ و یک ایزومورفیسم است } max(\| T \|, \| T^{-1} \|) \leq 1+\varepsilon \right\}$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم $1 < p < \infty$ و

$$\alpha_p := sup_{t\in(0,1)}((t^{p-1})+(1-t)^{p-1})^{1/p} \ \ (t^{q-1}+(1-t)^{q-1})^{1/q}$$

در این صورت

(۱) نگاشت تصویر $P = I - 1 \bigotimes 1$ یک نگاشت تصویر کمینه بروی $Ker1 \subset L_p[0, 1]$ است و

$$\| P \| = \lambda(Ker1, L_p[0, 1]) = \alpha_p > 1$$

(۲) برای هر $f \in L_q[a, b]$ داریم

$$\lambda(Kerf, L_p[0, 1]) = \alpha_p$$

و برای هر $f \in S(L_p)$ یک تابعک نرمی منحصر به فرد $N_f \in S(L_q)$ وجود دارد بطوریکه

$$N_f(f) = 1$$

یا

$$f(N_f) = 1$$

اثبات. (۱) مرجع [۶] را ملاحظه کنید.

(۲) مرجع [۹] را ملاحظه کنید. ■

لم ۱۰. فرض کنیم $f \in S(L_p)$. نگاشت تصویر کمینه منحصر به فرد از $L_p[0, 1]$ بروی $Kerf$ به صورت $P = Id - f \bigotimes N_f$ است.

اثبات. فرض کنیم $1 < p < \infty$ و $Q = Id - 1 \bigotimes 1$ که یک نگاشت تصویر کمینه می باشد. با استفاده از تعریف $S(L_p)$ دنباله ای از ایزومرفیسم های T_n وجود دارد بطوریکه

$$T_n(1) = N_f \quad , \quad \| T_n \| \ . \ \| T_n^{-1} \| \longrightarrow 1$$

فرض کنیم $f_n = ۱ \circ T_n^{-۱}$ و $P_n = Id - f_n \otimes N_f$ را در نظر می گیریم. از آنجاییکه

$$T_n \circ Q \circ T_n^{-۱} = T_n \circ (Id - ۱ \bigotimes ۱) \circ T_n^{-۱}) = T_n \circ (Id - (۱ \bigotimes ۱) \circ T_n^{-۱}$$

$$= T_n \circ (Id - ۱ \circ T_n^{-۱}) = Id - (۱ \circ T_n^{-۱}) \bigotimes T_n(۱) = Id - f_n \bigotimes N_f$$

$$= P_n$$

داریم:

$$\| P_n \| \longrightarrow \| Q \|$$

بعلاوه چون

$$f(N_f) = ۱\ ,\ f_n(N_f) = (۱ \circ T_n^{-۱})T_n(۱) = ۱$$

مشاهده می کنیم که

$$\| f_n \| \longrightarrow f$$

در نتیجه

$$\| f_n - f \| \longrightarrow ۰$$

بنابراین

$$\| P_n \| = \| Id - f_n \bigotimes N_f \| \longrightarrow \| Id - f \bigotimes N_f \| := \| P \|$$

در نتیجه (چون حد منحصر به فرد است) داریم:

$$\| P \| = \| Q \| = \alpha_p$$

پس P دارای کمترین نرم است، بنابراین یک نگاشت تصویر کمینه می باشد.

■

یادآوری : اگر A یک مجموعه فرض شود، χ_A تابع مشخصه تعریف شده روی مجموعه A می باشد.

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنیم (T, σ, μ) یک فضای اندازه باشد، زیرفضای V از $L_p[0,1]$ غنی [9] نامیده می شود اگر دارای خاصیت زیر باشد:

برای هر $A \in \sigma$ و هر $\varepsilon > 0$ یک افراز [10] $\{A_1, A_2\}$ از A در σ موجود باشد بطوریکه $\mu(A_1) = \mu(A)/2$ و $\nu_\varepsilon \in V$ موجود باشد بطوریکه

$$y := \chi_{A_1} - \chi_{A_2}$$

$$\| \nu_\varepsilon - y \| < \varepsilon$$

تعریف ۳.۲.۵. عدد $\wedge_p$ را به صورت

$$\wedge_p = \begin{cases} max\{\varphi_p(t), t \in [0,1]\} & 1 < p < \infty \\ 2 & p = 1 \end{cases}$$

تعریف می کنیم که در آن

[9] Rich
[10] Partition

$$\varphi_p(t) := [t^{1/(p-1)} + (1-t)^{1/(p-1)}]^{(p-1)/p} + [t^{p-1} + (1-t)^{p-1}]^{1/p}$$

اگر فرض کنیم $1/p + 1/q = 1$ آنگاه داریم:

$$\varphi_p = \varphi_q, \wedge_p = \wedge_q$$

و همچنین

$$\varphi_p(t) = \varphi_p(1-t), \varphi_2(t) = 1, \varphi_p(t) \geq 1$$

اگر $p \neq 2$ باشد

$$\varphi_p(t) = 1 \Longleftrightarrow t \in \{0, 1/2, 1\}$$

بنابراین اگر $p \neq 2$ آنگاه، $\wedge_p \geq t$.

قضیه ۶.۲.۳. هر زیرفضایی با همبعد متناهی مانند V از $L_p(\mu)$ بطوریکه $1 \leq p < \infty$ ، غنی است.

اثبات. اگر (T, σ, μ) یک فضای اندازه فرض شود و f_i توابع اندازه پذیر روی T با شرط

$$\int_T f_i d\mu < \infty \qquad 1 \leq i \leq n$$

باشند آنگاه یک سیگما جبر $\sigma_1 \subset \sigma$ وجود دارد بطوریکه μ یک اندازه مثبت روی σ_1 و برای هر $D \in \sigma_1$ داریم:

$$\int_D f_i d\mu = \mu(D) \int_T f_i d\mu$$

فرض کنیم $A \in \sigma$ و $c \in [0, 1]$ داده شده باشند می توان مجموعه متناهی $\{f_1, ..., f_n\}$ از اعضای $L_p(\mu)$ را انتخاب کرد بطوریکه

$$V = \left\{x \in L_p(\mu) : \int_T x f_i d\mu = 0, 1 \leq i \leq n\right\}$$

$A_1 \in \sigma_1$ را انتخاب می کنیم بطوریکه $\mu(A_1) = c\mu(A)$ و $\int_{A_1} f_i d\mu = c\mu(A) \int_A f_i d\mu$

اگر $A_2 = A \setminus A_1$ و $y = (1 - c)\chi_{A_1} - c\chi_{A_2}$ داریم:

$$\int_T f_i y = \int_{A_1} f_i y + \int_{A_2} f_i y = 0$$

درنتیجه $y \in V$. با انتخاب $c = 1/2$ مشاهده می کنیم که زیرفضای V غنی است.

■

لم ۱۱. اگر V یک زیرفضای غنی از $L_p(\mu)$ باشد، برای هر $A \in \sigma, c \in [0, 1]$ و $\varepsilon > 0$ یک افراز $\{C, D\}$ از A در σ وجود دارد بطوریکه $\mu(C) = c\mu(A)$ و $\nu_\varepsilon \in V$ وجود دارد بطوریکه

$$y = (1 - c)\chi_C - c\chi_D$$

داریم:

$$\| \nu_\varepsilon - y \| < \varepsilon$$

اثبات. به [۱۲] رجوع شود.

■

لم ۱۲. فرض کنیم $x, y \in R, \lambda \in [۰,۱]$ و قرار می دهیم $a = a(x,y,\lambda) = \lambda x + (۱-\lambda)y$ در این صورت مسئله ماکزیمم

$$max\,\{\lambda \mid x-a \mid^p + (۱-\lambda) \mid y-a \mid^p : \lambda \mid x \mid^p + (۱-\lambda) \mid y \mid^p = ۱\}$$

دارای مقدار $\wedge_p^p$ است. علاوه بر این، مقدار ماکزیمم به ازای یک $x > ۰. y < ۰$ مشاهده خواهد شد.

اثبات. به [۱۲] رجوع شود.

■

۳.۳ یافتن یک کران پایین برای نگاشتهای تصویری که بروی زیرفضاهای غنی از $L_p(\mu)$ تعریف می شوند

در این بخش، یک کران پایین برای نگاشت های تصویری که بروی زیرفضاهای غنی از $L_p(\mu)$ تعریف می شوند، می یابیم و با محدود کردن فضای باناخ مورد بحث به $L_p[۰,۱]$ ، نرم نگاشت های تصویر کمینه ای که بروی ابرصفحه هایی در $L_p[۰,۱]$ تعریف می شوند را محاسبه می کنیم و در پایان با آوردن یکی از کاربردهای این نگاشت های تصویر در نظریه بهترین تقریب، بر اهمیت بحث کمینگی نگاشت های تصویر، تاکید می کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم $۱ \leq p < \infty$. اگر V یک زیرفضای سره غنی از $L_p(\mu)$ و $P : L_p(\mu) \longrightarrow V$ یک نگاشت تصویر باشد، سپس $\| P \| \geq \wedge_p$.

اثبات. فرض کنیم که $P : L_p(\mu) \longrightarrow V$ یک نگاشت تصویر باشد و $\varepsilon > ۰$ ، ما می خواهیم یک عنصر انتخاب شده $u \in L_p(\mu)$ را به کمک یک تابع ساده تقریب بزنیم به قسمی که $\| u \| = ۱, Pu = ۰$. در حقیقت ما می توانیم مجموعه های مجزای $A_i \in \sigma, ۱ \leq i \leq m$ و اعداد c_i را بیابیم بطوریکه برای $x = \sum_{i=۱}^{m} c_i \chi_{A_i}$ داشته باشیم

$$\| x - u \| < k\varepsilon$$

(k عددی ثابت است.)

فرض کنیم $\alpha, -\beta, \lambda$ با شرط $\alpha, \beta > ۰$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ عناصر صادق در مسئله اکسترمم لم ۱۲ باشند. بنابر لم ۱۱ برای مجموعه A_i و با فرض $c = \lambda$ یک افراز $\{A_{i_۱}, A_{i_۲}\}$ از A_i در σ با شرط $\mu(A_{i_۱}) = c\mu(A_i)$ و $\nu_i \in V$ وجود دارد بطوریکه برای $y_i = (۱ - \lambda)\chi_{A_{i_۱}} - \lambda\chi_{A_{i_۲}}$ داریم

$$\| \nu_i - y_i \| \leq k\varepsilon$$

تعریف می کنیم

$$z_i = (\alpha + \beta) y_i$$

و

$$\omega_i = (\alpha + \beta)\nu_i$$

پس

$$z_i = (\alpha - a)\chi_{A_{i_۱}} - (\beta + a)\chi_{A_{i_۲}}$$

(قرار دهید $a = \lambda\alpha - (۱ - \lambda)\beta$)

اکنون می نویسیم

$$x = \sum_{i=۱}^{m} d_i a \chi_{A_i} \qquad (d_i = c_i / a)$$

و قرار می دهیم

$$z = \sum_{i=۱}^{m} d_i z_i \ \ , \ \ \omega = \sum_{i=۱}^{m} d_i \omega_i$$

توجه کنید که $\omega \in V$ داریم:

$$\| z + x \|^p = \| \sum_{i=۱}^{m} d_i(\alpha\chi_{A_{i_۱}} - \beta\chi_{A_{i_۲}}) \|^p$$

$$= \sum_{i=۱}^{m} | d_i |^p \mu(A_i)(\lambda\alpha^p + (۱-\lambda)\beta^p = \sum_{i=۱}^{m} | d_i^p | \mu(A_i)$$

(زیرا بر طبق لم ۱۲ برای $\alpha, \beta > ۰$ داریم: $\lambda\alpha^p + (۱-\lambda)\beta^p = ۱$)

$$| z^p | = \sum_{i=۱}^{m} | d_i |^p (\lambda(\alpha - a)^p + (۱-\lambda)(\beta + a)^p)\mu(A_i) = \wedge_p^p \sum_{i=۱}^{m} | d_i |^p \mu(A_i)$$

همچنین داریم:

$$\| P \| \geq \| P(\omega + u) \| / \| \omega + u \| = \| \omega \| / \| \omega + u \|$$

از آنجاییکه ω توسط z و u توسط x تقریب زده شده است، با انتخاب ε ، به قدر کافی کوچک، داریم:

$$\| P \| - \varepsilon \geq \| z \| / \| z + x \| \geq \wedge_p$$

■

۱.۳.۳ محاسبه نرم نگاشتهای تصویر کمینه ای که بروی ابرصفحه هایی در $L_p[۰,۱]$ تعریف می شوند

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد. هر مجموعه به فرم زیر را یک ابرصفحه در X می نامند که در آن $\{۰\} \setminus x^* \in X^*$ و $c \in R$.

$$H = \{y \in X \mid x^*(y) = c\}$$

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم $p \geq ۱$ و I زیرمجموعه دلخواهی از N باشد. زیرفضای V با $CodimV = CardI$ و یک نگاشت تصویر $P : L_p[۰,۱] \longrightarrow V$ وجود دارد بطوریکه $\| P \| = \wedge_p$.

اثبات. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ یک افراز $[۰,۱]$ باشد و همچنین فرض کنیم $\varphi_i \in L_q[۰,۱]$ بطوریکه محمل φ_i مشمول در A_i شود. تعریف می کنیم

$$V = \left\{x \in L_p[۰,۱] : \int_۰^۱ \varphi_i(x) = ۰, i \in I\right\}$$

اگر I نامتناهی باشد در این صورت V یک مثال برای یک زیرفضای غنی با هم دامنه نامتناهی است (V غنی است چون برای تمام اندیسها مگر تعداد متناهی اندیس i داریم $\mu(A_i) < \varepsilon$) تعریف می کنیم

$$X_i = \{x \in L_p[۰,۱] : Suppx \subset A_i\}$$

بنابراین $L_p[۰,۱]$ مجموع مستقیمی از X_i می شود. اگر $x = \sum_{i\in I} x_i$ ، پس $\| x \|^p = \sum_{i\in I} \| x_i \|^p$ و علاوه بر این X_i با $L_p[A_i]$ ایزومتریک است. فرض کنیم P_i یک نگاشت تصویر کمینه از X_i بروی ابرصفحه $V \cap X_i$ باشد. اگر $x = \sum_{i\in I} x_i$ ، تعریف می کنیم:

$$Px = \sum_{i\in I} P_i x_i$$

که P یک نگاشت تصویر از $L_p(\mu)$ بروی V است و

$$\| Px \|^p = \sum_{i\in I} \| P_i x_i \|^p \leq \sum_{i\in I} \| P \|^p \| x_i \|^p$$

در [۱۱] نشان داده شده است که تمام $\| P_i \|$ ها با هم برابر هستند و در [۶] نشان داده شده است که این مقدار مشترک برابر $\wedge_p$ است. بنابراین داریم:

$$\| Px \| \leq \wedge_p (\sum_{i\in I} \| x_i \|^p)^{1/p} = \wedge_p \| x \|$$

و اما طبق قضیه قبل داریم $\| P \| \geq \wedge_p$ و به این ترتیب برهان این قضیه کامل می شود.

■

۴.۳ کاربرد در نظریه بهترین تقریب

در بالا مشاهده کردیم که $P : L_p[0,1] \longrightarrow V$ یک نگاشت تصویر کمینه با نرم $\wedge_p$ است. می دانیم که اگر $t \in \{0, 1/2, 1\}$ باشد، $\varphi_p(t) = 1$ درنتیجه برای $1 < p < \infty$ ، $\wedge_p = 1$ و همچنین در فصل دوم نشان دادیم که وقتی P یک نگاشت تصویر است، $I - P$ یک نگاشت تصویر بروی $Ker(P)$ می باشد.

در حالتی که نرم $I - P$ حداکثر یک است، Px را می توان به عنوان بهترین تقریب x درنظر گرفت زیرا داریم:

$$\| x - Px \| \leq \| I - P \| \quad dist(x, V)$$

بنابراین

$$\| x - Px \| \leq dist(x, V)$$

فصل ۴

توسیع برخی نگاشتهای تصویر

در این فصل با توجه به نگاشت تصویر لاگرانژ معرفی شده در فصل دوم، توسیع این نگاشت تصویر را بیان کرده و مشاهده می کنیم که این نگاشت تصویر بروی فضای حاصلضرب تانسوری تعریف می شود که متشکل از تمام توابع دومتغیره ای است که می توان در حالت خاص به فرم یک چندجمله ای نمایش داده شوند.

اگر نگاشت تصویر P از $C(S)$ بروی یک زیرفضای V تعریف شود آنگاه، یک روش مقدماتی برای گسترش P به $C(S \times T)$ وجود دارد. فرمول گسترش نگاشت تصویر $\bar{P}$ به صورت زیر می باشد:

$$(\bar{P}z)(s,t) = (Pz^t)(s) \quad , z \in C(S \times T) \qquad (۱.۴)$$

و همچنین تعریف می کنیم:

$$z^t(s) = z(s,t) = z_t(s)$$

به عنوان یک مثال توجه خود را به نگاشت تصویر لاگرانژ معطوف می کنیم. نگاشت گسترش داده شده در

این حالت به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\bar{P}z)(s,t) = \sum_{i=۱}^{n} z(s_i,t)\upsilon_i(s) \qquad (۲.۴)$$

بنابراین $\bar{P}$ نگاشتی از $C(S\times T)$ به روی زیرفضایی از فضای همه توابع به فرم

$$(s,t) \longmapsto \sum_{i=۱}^{n} y_i(t)\ \upsilon_i(s) \qquad y_i \in C(T)$$

می باشد. این زیرفضا با $V\bigotimes C(T)$ نشان داده می شود. در حقیقت ساختمان $\bar{P}$ در فرمول (۱.۴) و بالاخص (۲.۴) می تواند بهترین توضیح برای حاصلضرب های تانسوری لاگرانژ باشد.

تعریف ۱.۰.۴. فرض کنیم α نرم دلخواهی روی $X\bigotimes Y$ باشد. α یک نرم متقاطع [۱] نامیده می شود اگر

$$\alpha(x\bigotimes y) = \parallel x \parallel \quad \parallel y \parallel \quad ,x\in X, y\in Y$$

فرض کنیم $A:X\longrightarrow X, B:Y\longrightarrow Y$ دو نگاشت خطی کراندار باشند، عملگر $A\bigotimes B$ را روی $X\bigotimes Y$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(A\bigotimes B)(\sum_{i=۱}^{m}(x_i\bigotimes y_i) = \sum_{i=۱}^{m}(Ax_i\bigotimes By_i)$$

اگر نرم متقاطع α روی $X\bigotimes Y$ در نظر گرفته شده باشد، آنگاه $X\bigotimes_\alpha Y$ یک فضای باناخ خواهد بود و ما مایلیم $A\bigotimes B$ را به یک نگاشت خطی پیوسته از $X\bigotimes_\alpha Y$ به توی $X\bigotimes_\alpha Y$ بسط دهیم. وجود چنین بسطی بستگی به کرانداری $A\bigotimes B$ روی $X\bigotimes Y$ دارد.

[۱] Cross-Norm

تعریف ۲.۰.۴. نرم متقاطع α که در نامساوی زیر صدق می کند را نرم متقاطع یکنواخت [۲] می نامیم:

$$\alpha(\sum_{i=1}^{m} Ax_i \bigotimes By_i) \leq \| A \| \; \| B \| \alpha(\sum_{i=1}^{m} x_i \bigotimes y_i)$$

بوضوح عملگر $A \bigotimes B$ روی $X \bigotimes Y$ نسبت به نرم α کراندار است . بنابراین

$$\| A \bigotimes B \| = Sup\{\alpha[(A \bigotimes B)z] : z \in X \bigotimes Y, \alpha(z) \leq 1\} \leq \| A \| \; \| B \|$$

و با انتخاب $x_n \in X, y_n \in Y$ بطوریکه

$$\| x_n \| = \| y_n \| = 1, lim \| Ax_n \| = \| A \|, lim \| By_n \| = \| B \|$$

داریم:

$$\alpha[(A \bigotimes B)(x_n \bigotimes y_n)] = \alpha(Ax_n \bigotimes By_n) = \| Ax_n \| \; \| By_n \| \longrightarrow \| A \| \; \| B \|$$

حال به نگاشت تصویر لاگرانژ P و بسطش یعنی $\bar{P}$ برمی گردیم .مشاهده می کنیم که $\bar{P} = P \bigotimes_\alpha I$ زیرا این عملگرها اثر یکسانی روی زوج $x \bigotimes y$ دارند. درحقیقت

$$[\bar{P}(x \bigotimes y)](s,t) = [y(t)x](s) = y(t)(Px)(s)$$

$$[(P \bigotimes I)(x \bigotimes y)](s,t) = [(Px) \bigotimes (Iy)](s,t) = y(t)(Px)(s)$$

قضیه ۳.۰.۴. فرض کنیم P یک نگاشت تصویر از X به روی U و Q نیز یک نگاشت تصویر از Y به روی V باشد. اگر α یک نرم متقاطع روی $X \bigotimes Y$ باشد، آنگاه $P \bigotimes_\alpha Q$ یک نگاشت تصویر از $X \bigotimes_\alpha Y$ به روی $U \bigotimes_\alpha V$ است.

[۲] Uniform Cross-Norm

اثبات. بوضوح $P\bigotimes Q$ نگاشتی از $X\bigotimes Y$ به روی $U\bigotimes V$ است، بنابراین $P\bigotimes_\alpha Q$ نگاشتی از $X\bigotimes_\alpha Y$ به روی $U\bigotimes_\alpha V$ است که درحقیقت بستاری از $U\bigotimes V$ در $X\bigotimes_\alpha Y$ می باشد. اگر $u\in U, v\in V$ آنگاه

$$(P\bigotimes Q)(u\bigotimes v)=u\bigotimes v$$

بنابراین $P\bigotimes_\alpha Q$ یک نگاشت تصویر به روی $U\bigotimes_\alpha V$ است . ■

تعریف ۴.۰.۴. فرض کنیم X,Y فضاهای باناخ باشند و همچنین $A\in L(X), B\in L(Y)$ ، عملگر خطی $A\bigotimes B$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(A\bigotimes B)(x\bigotimes y)=A(x)\bigotimes B(y)$$

نرم α روی $X\bigotimes Y$ یکنواخت نامیده می شود اگر

$$\| A\bigotimes B\|_\alpha\leq\| A\| \ .\ \| B\| \quad ,A\in L(X), B\in L(Y)$$

قضیه ۵.۰.۴. فرض کنیم P یک نگاشت تصویر از فضای باناخ X بروی زیرفضای G و Q نیز یک نگاشت تصویر از فضای باناخ Y بروی زیرفضای H باشد و همچنین α نیز یک نرم یکنواخت روی $X\bigotimes Y$ باشد، در این صورت

$$(P\bigotimes_\alpha I)\bigoplus(I\bigotimes_\alpha Q)$$

یک نگاشت تصویر از $X\bigotimes_\alpha Y$ بروی

$$G\bar{\bigotimes}Y+X\bar{\bigotimes}H$$

می باشد.

اثبات. می دانیم عملگر $P \bigotimes I$ یک نگاشت تصویر از $X \bigotimes Y$ بروی $G \bigotimes Y$ است. از یکنواختی نرم α داریم:

$$\| P \bigotimes I \| = \| (P \bigotimes I)(\sum_{i=1}^{n} x_i \bigotimes y_i) \| = \| \sum_{i=1}^{n} P x_i y_i \| = \| P(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) \| = \| P \|$$

(زیرا طبق تعریف

$$\| P \| = sup\{\| Px \| : \| x \| \leq 1\}$$

$P \bigotimes_\alpha I$ یک نگاشت تصویر از $X \bigotimes_\alpha Y$ بروی $G \bar{\bigotimes} Y$ است و بطور مشابه $I \bigotimes_\alpha Q$ نیز یک نگاشت تصویر از $X \bigotimes_\alpha Y$ بروی $X \bar{\bigotimes} H$ است. با استفاده از خطی بودن و پیوستگی ما می توانیم نشان دهیم که

$$(P \bigotimes_\alpha I)(I \bigotimes_\alpha Q) = (I \bigotimes_\alpha Q)(P \bigotimes_\alpha I)$$

(زیرا اثر هر دو طرف روی عنصر دلخواه $\sum_{i=1}^{n} x_i \bigotimes y_i$ ، $\sum_{i=1}^{n} P x_i \bigotimes Q y_i$ می شود که عنصری از فضای $X \bigotimes Y$ است.)

بنابراین شرایط لم ۷ از فصل ۳ برقرار است و به این ترتیب برهان کامل می شود. ■

مراجع

[1] Boris Shekhtman, Leslaw Skrzypek. On the non-uniqueness of minimal projection in $\mathrm{L}_p spaces, volume 244 of Departmentof Mathematics University of South Florida. Springer, $, 2009.

GrzegorzY Lewicki , Michael Prophet. Minimal shape-preserving projections in tensor product spaces. Department of Mathematics, University of Northern Iowa, Cedar Falls, IA, USA.*, 931-951, 2010.*

Julio Becerra Guerrero, A. Rodriguez-Palacios. Transitivity of the Norm on Banach Spaces. Departamento de Matematica Aplicada, Spain.*, 18(6):1-58, 2002.*

E. w. cheney. Multivariate Approximation Teory-Selected Topics. Department of mathematics, University of Texas*, Austin, April 1986.*

N. Dunford and J. T. Schwartz. Linear Operators, Part I: Generai Theory Interscience. Projection(Linear Algebra)*, 1985.*

C. Franchetti. The norm of the minimal projection onto hyperplanes in $L^p[0,1] and the radial constant. Boll Un. Mat. Ital., B(7)4-B(1990), 803-821.$

Ryan, R. A. Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, New York: Springer. Topological Tensor Product*, 2002.*

S. Rolewicz. On projections on subspaces of finite codimension. Institute of Mathematics, Polish Acad, Sci.*, October 1988. Preprint 436.*

S. Rolewicz. On projections on subspaces of codimension one. Studia Math*, 96(1): 17-19, 1990.*

W. A. Light and E. W. Cheney. Approximation theory in tensor product space. Lecture Note in Mathematics*, 1169. (1985).*

S. Rolewicz. On minimal projections of the space $L^p[0,1] on 1-codimensional subspace. Bull. Acad. Pol. Sc. Math, 34(1986), 151-153.$

Carol Franchetti. Lower Bounds For The Norms Of Projections With Small Kernels . Bull. Austral. Math. Soc*, Vol. 46 (19926), 507-511.*

فهرست الفبایی

Shahrood University of Technology
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Projection Maps In Tensor Product space

By:
Freshte Keshavarz

Supervisor:
Professor Mehdi iranmanesh ...

Advisor:
Seyed Reza Musavi

09/2012