دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه ارشد ریاضی

عنوان

مترهای راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن ریمانی

نگارش

سکینه مارزلو

استاد راهنما

دکتر حیدر جعفری

دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

شهریور ۱۳۹۱

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم. از پدر و مادر عزیزم که همواره در همه ی مراحل زندگیم حامی و پشتیبان من هستند و استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم به عنوان استاد راهنما که همواره اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داه اند و همچنین آقای دکتر جعفری استاد راهنمای گرامی بنده و مشاورین محترم آقای دکتر حجازی و آقای موسوی و داوران گرامی آقایان دکتر شریفی و دکتر طیبی کمال تشکر را دارم .

سکینه مارزلو
شهریور ۱۳۹۱

تقدیم

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:
محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیز ی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند و نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.
الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته ی آنان جامه ی عمل بپوشانم .
پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما .

چکیده

در این پایان نامه متر های راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن ریمانی را مطالعه می کنیم. ابتدا توصیف کاملی برای متر های ریمانی ناوردا و متر های فینسلری ناوردا روی منیفلد های همگن ارائه می دهیم، سپس وجود و ساختار متر های راندرز ناوردا را روی منیفلد های همگن بیان می کنیم و در نهایت ژئودزیک و انحنای پرچمی آن را محاسبه می نماییم.

واژه‌های کلیدی: فضای همگن به طور طبیعی تحویلی، متر راندرز ناوردا، ژئودزیک، انحنای پرچمی

مقالات مستخرج

۱- ژئودزیک های مترهای راندرز ناوردا روی منیفلدهای همگن ریمانی، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

۲- متر های فینسلری ناوردا روی فضاهای فینسلری مختلط متقارن، چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز ۶ الی ۹ شهریور ماه ۱۳۹۱.

پیشگفتار

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه ی طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آن ها در علوم فنی و مهندسی و فیزیک، در اینجا به یکی از آن ها به نام متر فینسلری اشاره می کنیم. مطالعه ی متر فینسلری ابتدا توسط جی اف بی ریمان [۱] در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آن جایی که وی عقیده داشت که مفهوم متری که بعد ها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه ی مفاهیم هندسی و ادامه ی کارهای گاوس [۲] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما نظر به این که این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت بعد ها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت، از جمله این افراد پل فینسلر [۳] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج به دست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۴] و قضیه ی اویلر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص آن را نیز داشت. در سال ۱۹۴۱ جی راندرز [۵] یک نوع بسیار جالب از متر های فینسلری را در نظر گرفت که جمع یک متر ریمانی و یک ۱-فرمی است یعنی $F = \alpha + \beta$. این نوع از متر های فینسلری امروزه متر راندرز نامیده می شود. فضاهای راندرز زمانی که وی در زمینه ی نسبیت عام مطالعه می کرد معرفی شدند[۳]، این گونه متر ها به طور طبیعی در زمینه های دیگر فیزیک مانند اپتیک نیز کاربرد فراوان دارند. بارز ترین مشخصه ی خاصیت فیزیکی جهان یک سویه بودن بازه های شبه زمانی است، واضح است که این نامتقارن بودن نباید در توصیفات ریاضی رخ دهد بنابراین لازم و قابل توجه است که یک متر با این خاصیت نامتقارنی در نظر گرفته شود، متر راندرز ساده ترین و بهترین راه برای حل این مشکل می باشد. در ریاضیات، متر راندرز یک فضایی ایجاد می کند که در آن هندسه ی ریمانی را به هندسه ی فینسلری ربط می دهد.

با توجه به اهمیت متر راندرز در هندسه و سایر علوم، در این پایان نامه می خواهیم متر های راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن ریمانی را بررسی کنیم و کمیت های هندسی ژئودزیک و انحنای پرچمی آن را محاسبه کنیم. برای این منظور در فصل اول به معرفی متر ریمان و تعمیم آن یعنی متر فینسلری می پردازیم، سپس به عنوان یک مورد خاص از متر های فینسلری، متر های

---

[۱] Georg Friedrich Berhnard Riemann
[۲] Carl Friedrich Gauss
[۳] Paul Finsler
[۴] Constantin Caratheodory
[۵] G. Randers

راندرز را تعریف می کنیم و ساختار آن را توصیف می کنیم و در فصل دوم به معرفی فضاهای همگن می پردازیم و سپس مفهوم ناوردا بودن متر ها را روی آن شرح می دهیم و خواص متر های ناوردا روی منیفلد های همگن را اثبات می کنیم. در نهایت در فصل آخر متر های راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن را توصیف می کنیم و ژئودزیک و انحنای پرچمی آن را محاسبه می نماییم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۸۵۴ ریمان روی حالت های مختلف یک منیفلد n-بعدی مجهز به یک متر بحث کرد و اشاره ی ویژه ای به یک متر تعریف شده توسط ریشه ی دوم مثبت یک فرم دیفرانسیل درجه ی دوم داشت. در نتیجه اساس هندسه ی ریمانی پایه گذاری شد، با این وجود هم چنین پیشنهاد کرد ریشه ی چهارم مثبت یک فرم دیفرانسیلی مرتبه ی چهار می تواند به عنوان تابع متریک در نظر گرفته شود، این توابع سه خاصیت اساسی خواهند داشت: آن ها مثبت هستند، همگن از درجه ی ۱ در مشتقات هستند و محدب می باشند.

این تذکر و پیشنهاد راجع به منیفلد های مجهز به چنین متری بیش از ۶۰ سال به تاخیر افتاد و سرانجام فینسلر در سال ۱۹۱۸ این مطالعات را از سر گرفت و هندسه ی فینسلری را به عنوان طبیعی ترین تعمیم متر های ریمانی ، معرفی نمود.

یکی از بهترین مثال ها از متر فینسلری، متر های راندرز می باشند که در سایر علوم به ویژه در کاربرد های فیزیکی بسیار ظاهر می شود[۳]. متر های راندرز به طور طبیعی از مسئله ی ناوبری روی یک فضای ریمانی (M, g) تحت تاثیر میدان نیروی خارجی W ناشی می شود[۲].

در این فصل ابتدا متر ریمان را معرفی می نماییم و کمیت های هندسی التصاق، ژئودزیک و انحنای برشی را برای آن بیان می کنیم، سپس به تشریح متر فینسلری می پردازیم و این کمیت های هندسی را برای آن نیز در نظر می گیریم. در نهایت متر راندرز را تعریف نموده و وجود و چگونگی ساخت آن را توضیح می دهیم.

۲.۱ مترهای ریمانی

مهم ترین مثال ها از تانسورهای متقارن روی یک فضای برداری، ضرب های داخلی هستند. با استفاده از ضرب داخلی طول بردارها و زاویه ی بین آن ها را می توان تعریف کرد و در نتیجه هندسه اقلیدسی شکل می گیرد. انتقال این ایده ها به منیفلدها، یکی از مهمترین کاربردهای تانسور ها روی منیفلدها می باشد.

تذکر: تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مرجع [۱۱] باز می گردد.

تعریف ۱.۲.۱. یک متر ریمانی [۱] روی یک منیفلد هموار M یک میدان ۲-تانسور $g \in \mathcal{T}^{2}(M)$ می باشد که متقارن (یعنی $g(X,Y)=g(Y,X)$) و مثبت معین ($g(X,X)>0, \forall X\neq 0$) است.

$$g : M \longrightarrow T^{2}M = \bigcup_{x\in M} T^{2}(T_xM)$$

$$x \longmapsto g_x : T_xM \times T_xM \to R$$

$$(X,Y) \mapsto \langle X,Y\rangle$$

این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی T_xM تعریف می کند که توسط $\langle X,Y\rangle_g$ یا تانسور $g_x(X,Y)$ نمایش می دهیم.

یک منیفلد هموار M را به همراه متر ریمانی g یک منیفلد ریمانی می نامیم.

به عبارت دیگر یک متر ریمانی g یک خانواده $\{g_x\}_{x\in M}$ از ضرب های داخلی است که برای هر فضای مماس T_xM، $g_{ij}(x) := g_x(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$ توابع هموار هستند.

اگر (x,U) یک چارت در همسایگی نقطه ی p از منیفلد M ، $x(p)=(x^1,...,x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی T_pM باشد داریم:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$$

آن گاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود:

[1] Riemannian metric

$$g_p(X,Y)=g_{ij}(p)dx^i\otimes dx^j(X,Y)$$

چون gمتقارن است رابطه ی فوق را می توان به صورت $g=g_{ij}dx^idx^j$ نوشت.

تذکر: در سراسر این پایان نامه از نماد جمع بندی انیشتین استفاده می کنیم

$$a_ib^i:=\sum_i a_ib^i.$$

اگر $X,Y\in T_pM$، آن گاه متر ریمانی $g(X,Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$<X,Y>=<X^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}>=X^iY^j<\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}>$$

$$g(X,Y)=<X,Y>=g_{ij}X^iY^j.$$

مثال. یک مثال آشکار برای منیفلد ریمانی، $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی $\bar{g}$ است به طوری که همان ضرب داخلی معمولی روی هر فضای مماس T_xR^nمی باشد

$$\bar{g}=dx^idx^i=(dx^i)^۲=\delta_{ij}dx^idx^j$$

در حقیقت $\bar{g}_{ij}=\delta_{ij}$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض می کنیم (M,g) و $(\bar{M},\bar{g})$ دو منیفلد ریمانی بوده و $f:M\longrightarrow\bar{M}$ یک دیفئومورفیسم (یعنی f دو سویی، f و $f^{-۱}$ هموار) بین آن ها باشد، نگاشت f را یک ایزومتری [۲] گوییم اگر $g=f^*\bar{g}$ باشد، به طور معادل برای هر $p\in M$ و برای هر $X,Y\in T_pM$ داشته باشیم:

$$g_p(X,Y)=\bar{g}_{f(p)}((f_*)_pX,(f_*)_pY)),$$

در این صورت گوئیم دو منیفلد M و $\bar{M}$ با هم ایزومتر هستند.

گزاره ۳.۲.۱. روی هر منیفلد هموار M (هاسدورف و با پایه ی شمارا) می توان یک متر ریمانی تعریف نمود.

[۲] Isometry

برای استفاده از خاصیت شتاب صفر برای خط های راست روی منیفلد ها احتیاج به مقدماتی از جمله تعریف یک نوع مشتق گیری موسوم به عمل مشتق گیری هموردا داریم. مشتق گیری هموردا تعمیمی از مشتق سویی یا اثر یک میدان برداری X روی یک تابع f است.

برای تعمیم یک تعریف از فضای $\mathbb{R}^n$ به روی منیفلد ها باید به دو موضوع توجه داشت اول خاصیت خوش تعریف بودن به این معنی که آن مفهوم روی منیفلدها قابل بیان باشد، دوم آن که این تعریف به دستگاه مختصات موضعی یعنی چارت ها بستگی نداشته باشد. برای روشن شدن مورد اول فرض می کنیم $C(t)$ یک منحنی روی منیفلد M باشد، اگر شتاب این منحنی یعنی $C''(t)$ را با رابطه ی

$$\lim_{\triangle t \to \circ} \frac{C'(t+\triangle t) - C'(t)}{\triangle t}$$

تعریف کنیم آن گاه این تعریف بی معنی است زیرا صورت کسر از تفاضل دو بردار در دو فضای برداری متفاوت یعنی T_tM و $T_{t+\triangle t}M$ تشکیل شده است، در صورتی که این اشکال به دلیل یکی گیری $T_t\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^n$ در $\mathbb{R}^n$ پدید نمی آید. لذا لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم، به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یک دیگر مقایسه کنیم یا به عبارتی دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یک دیگر التصاق [۳] نماییم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض می کنیم M یک منیفلد هموار و $\mathcal{T}(M)$ مجموعه ی میدان های برداری هموار روی آن باشد. التصاق خطی یا التصاق آفین [۴] روی M نگاشت

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$$

$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

[۳] connection
[۴] Affin or Linear connection

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف)

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

(ب)

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$$

(ج)

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

که در آن $f, g \in C^\infty(M)$ ، $a, b \in \mathbb{R}$ و $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید (E, π, M) یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد و $\mathcal{E}(M)$ نماد فضای برش های هموار E باشد. یک التصاق در E یک نگاشت به صورت

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) ∇ روی $C^\infty(M)$ نسبت به X خطی است:

$$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

(ب) $\nabla_X Y$ روی R نسبت به Y خطی است:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad \forall a, b \in R$$

(ج) ∇ در قاعده لایب - نیتزی زیر صدق کند:

$$\nabla_X (fY) = (Xf)\, Y + f\nabla_X Y$$

$\nabla_X Y$ مشتق هموردای Y در جهت X نامیده می شود. یک التصاق خطی (آفین) را اغلب یک التصاق روی M می نامند.

لم زیر طریقه ی محاسبه ی یک التصاق خطی در حالت مختصاتی را بیان می کند:

لم ۶.۲.۱. فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی M، $\{E_i\}$ یک کنج موضعی برای M روی یک زیر مجموعه ی باز $U \subset M$ و $X, Y \in \mathcal{T}(U)$ که در مختصات موضعی $X = X^i E_i$ و $Y = Y^j E_j$، در این صورت

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E_k$$

که در آن $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k$ و $n^۳$ تابع حقیقی Γ^k_{ij} روی M، نماد های کریستوفل ∇ نسبت به این کنج موضعی نامیده می شوند.

اثبات. با استفاده از قانون ضرب برای التصاق ها داریم:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) \\
&= (XY^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\
&= (XY^j) E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\
&= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} E_k
\end{aligned}$$

با تغییر اندیس در جمله اول حکم بدست می آید. □

حال با استفاده از التصاق خطی، مشتق هموردا به مفهوم مشتق سویی یک میدان برداری در جهت یک منحنی، به صورت زیر قابل تعریف است:

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی M باشد. برای هر منحنی $\gamma : I \longrightarrow M$، ∇ یک عملگر منحصر به فرد

$$D_t : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

تعریف می کند به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

- خطی بودن روی $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- قانون ضرب:

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV \qquad \forall f \in C^\infty(I)$$

- اگر V قابل گسترش باشد، آن گاه برای هر گسترش $\tilde{V}$ برای V داریم:

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V},$$

برای هر $V \in \mathcal{T}(\gamma)$، D_tV را مشتق هموردای [۵] V در امتداد γ می نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد با التصاق خطی ∇ باشد، یک میدان برداری V در امتداد γ، موازی [۶] نامیده می شود هرگاه $D_tV \equiv ۰$. در حالت کلی یک میدان برداری V روی M موازی نامیده می شود هرگاه آن در امتداد هر منحنی موازی باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد با التصاق خطی ∇ و γ یک منحنی در M باشد، شتاب γ میدان برداری $D_t\dot{\gamma}$ در امتداد γ می باشد. یک منحنی γ ژئودزیک [۷] نامیده می شود اگر شتاب آن صفر باشد یعنی $D_t\dot{\gamma} \equiv ۰$.

[۵] covariant derivatives
[۶] parallel
[۷] geodesics

برای استفاده از مشتق های هموردا و ژئودزیک ها به عنوان ابزار هایی برای مطالعه ی هندسه ی ریمانی، واضح است که باید یک التصاق خاص روی منیفلد ریمانی تعریف کنیم که خاصیت های متر ریمانی را منعکس کند. ابتدا دو خاصیتی که یک التصاق منحصر به فرد را روی هر منیفلد ریمانی تعریف می کنند، توصیف می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنید g یک متر (شبه) ریمانی روی منیفلد M باشد، یک التصاق خطی ∇ را سازگار با g [۸] نامیم هرگاه برای همه ی میدان های برداری X, Y, Z، ∇ در قانون ضرب صدق کند یعنی

$$\nabla_X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

لم ۱.۲.۱۱. برای یک التصاق خطی ∇ روی یک منیفلد ریمانی شرایط زیر معادل هستند:

- التصاق ∇ با g سازگار است.
- $\nabla g = 0$
- اگر V, W میدان های برداری در امتداد هر منحنی γ باشند،

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle$$

- اگر V, W میدان های برداری موازی در امتداد یک منحنی γ باشند، آن گاه $\langle V, W\rangle$ مقدار ثابت است.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی M باشد، میدان تانسور $\tau : \mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\longrightarrow\mathcal{T}(M)$ تعریف شده توسط

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

را تانسور تاب ∇ می نامیم.

تذکر:[۱۴] کروشه ی لی برای دو میدان برداری X, Y ، میدان برداری متناظر با مشتق زیر است:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = (X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)\partial_i f$$

[۸] compatible with g

تعریف ۱.۲.۱۳. یک التصاق خطی ∇ را متقارن [۹] نامیم هرگاه تاب آن صفر شود، یعنی

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y]$$

لم ۱.۲.۱۴. التصاق ∇ متقارن است اگر و فقط اگر نماد های کریستوفل آن نسبت به هر کنج مختصاتی متقارن باشد یعنی

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

اثبات.

$$\begin{aligned}
\tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \nabla_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j - \nabla_{Y^j\partial_j} X^i\partial_i - (X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - Y^i\partial_i(X^j)\partial_j) \\
&= X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j) - Y^j\nabla_{\partial_j}(X^i\partial_i) - X^i\partial_i Y^j\partial_j + Y^i\partial_i X^j\partial_j \\
&= X^i\partial_i Y^j\partial_j + X^iY^j\Gamma_{ij}^k\partial_k - Y^j\partial_j X^i\partial_i + Y^jX^i\Gamma_{ji}^k\partial_k - X^i\partial_i Y^j\partial_j + Y^i\partial_i X^j\partial_j \\
&= X^iY^j\Gamma_{ij}^k\partial_k - Y^jX^i\Gamma_{ji}^k\partial_k \\
&= X^iY^j(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k,
\end{aligned}$$

از طرفی طبق تعریف متقارن بودن داریم $\tau(X, Y) = ۰$، بنابراین $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = ۰$، یعنی $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. □

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید(M, g) یک منیفلد ریمانی باشد، التصاق خطی (آفین) ∇ روی M را یک التصاق لویی - چوی ویتا [۱۰] (ریمانی) نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- ∇ سازگار با متر ریمانی g باشد.
- ∇ متقارن (بی تاب) باشد.

لم ۱.۲.۱۶. (لم اساسی هندسه ریمانی) فرض کنید (M, g)یک منیفلد ریمانی باشد، یک التصاق خطی منحصر به فرد ∇ روی M موجود است به طوری که متریک-سازگار و متقارن (بی تاب) است.

[۹] symmetric
[۱۰] Levi-Civita

اثبات. ابتدا با به دست آوردن فرمولی برای ∇، منحصر به فردی آن را ثابت می کنیم. فرض می کنیم ∇ التصاقی با خواص فوق باشد، و فرض می کنیم $Z, Y, X \in \mathcal{T}(M)$ میدان های برداری دلخواه باشند، با توجه به متریک سازگاری و با استفاده از جایگشت روی X, Y, Z داریم:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

حال با استفاده از شرط متقارن بودن برای عبارت آخر در هر سطر، می توان نوشت:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle,$$

با جمع کردن دو رابطه ی اول و کم کردن رابطه ی سوم از حاصل آن ها داریم:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{۱}{۲}\left(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle\right),$$

حال فرض می کنیم $\nabla^{۱}$ و $\nabla^{۲}$ دو التصاق باشند که متریک سازگار و متقارن هستند، چون طرف راست رابطه ی فوق به التصاق وابسته نیست بنابراین $\langle \nabla^{۱}_X Y - \nabla^{۲}_X Y, Z\rangle = ۰$ برای X, Y, Z های دلخواه، و با توجه به ناتباهیده بودن متر ریمان تنها زمانی این رابطه برقرار است که $\nabla^{۱}_X Y = \nabla^{۲}_X Y$ برای هر X, Y، لذا $\nabla^{۱} = \nabla^{۲}$.

برای اثبات وجود ∇، از مختصات موضعی در فرمول بدست آمده استفاده می کنیم:

فرض می کنیم $(U, (x^i))$ چارت مختصاتی دلخواه باشد، فرمول بدست آمده را برای میدان های برداری مختصاتی به کار می بریم، می دانیم کروشه لی آن ها صفر است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l\rangle = \frac{۱}{۲}(\partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_l, \partial_i\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle),$$

همچنین می دانیم $g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle$ و $\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^m\partial_m$

با جاگذاری این دو در رابطه ی قبل داریم:

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml}=\frac{۱}{۲}(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij}),$$

طرفین تساوی فوق را در ماتریس معکوس g^{lk} ضرب می کنیم و توجه داریم که $g_{ml}g^{lk}=\delta_m^k$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{۱}{۲}g^{kl}(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij}),$$

این فرمول یک التصاق در هر چارتی تعریف می کند. همچنین با توجه به این فرمول داریم $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$، بنابراین این التصاق متقارن است(طبق لم ۱۴.۲.۱). در نتیجه کافی است متریک سازگاری آن را اثبات کنیم که با توجه به لم ۱۱.۲.۱ کافی است نشان دهیم که $\nabla g=۰$، در حالت مختصاتی مولفه های ∇g به صورت

$$g_{ij;k}=\partial_k g_{ij}-\Gamma_{ki}^l g_{lj}-\Gamma_{kj}^l g_{il},$$

با استفاده از فرمول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ki}^l g_{lj}+\Gamma_{kj}^l g_{il} &= \frac{۱}{۲}(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{kj}-\partial_j g_{ki})+\frac{۱}{۲}(\partial_k g_{ji}+\partial_j g_{ki}-\partial_i g_{kj})\\ &= \partial_k g_{ij},\end{aligned}$$

که نشان می دهد $g_{ij;k}=۰$. □

تذکر: ژئودزیک های نسبت به التصاق ریمانی را ژئودزیک های ریمانی می نامیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. انحنای R روی منیفلد ریمانی(M,g) با التصاق لویی - چوی ویتا ی∇، یک نگاشت به صورت زیر می باشد:

$$R:\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\longrightarrow\mathcal{T}(M)$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

تذکر ۱: انحنای ریمانی یک میدان $\binom{3}{1}$- تانسور می باشد، یعنی R روی توابع $C^\infty(M)$ نسبت به هر سه متغیر Z, Y, X، $C^\infty(M)$ است، یعنی در شرایط

$R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$ و $R(X+X',Y)Z = R(X,Y)Z + R(X',Y)Z$ صدق می کند.

تذکر ۲ : انحنای ریمانی R نسبت به دو متغیر اول پاد متقارن است.

تذکر ۳ : مولفه های انحنا در مختصات موضعی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

که در آن ضرایب R^l_{ijk} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l.$$

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید σ یک زیر صفحه ی دو بعدی از فضای مماس T_pM باشد و فرض کنید $X, Y \in \sigma$ دو بردار مستقل خطی باشند، انحنای برشی [11] σ در p را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K(\sigma) = K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}.$$

انحنای برشی دقیقا توسط انحنای ریمانی تعریف شده و از طرف دیگر انحنا می تواند به عنوان مجموع انحناهای برشی بیان شود[۱۴].

۳.۱ مترهای فینسلری

در این بخش به تعریف مترهای فینسلری می پردازیم. مترهای فینسلری طبیعی ترین تعمیم مترهای ریمانی هستند که استفاده ی زیادی در مسایل کاربردی داشته و اخیرا مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان محض و کاربردی قرار گرفته اند.

همان طور که در بخش قبل دیدیم برای محاسبه ی طول برداری مانند X در فضای اقلیدسی از ضرب داخلی دو بردار یعنی $\langle X, Y\rangle$ استفاده می کنیم، این ضرب داخلی یک متر موسوم به متر اقلیدسی در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می کند= $\langle X, X\rangle^{1/2}$

[11] sectional curvature

$\delta_{ij}X^iY^j$ که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. به همین صورت در منیفلد ریمانی (M, g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس T_pM محاسبه می گردد، این ضرب داخلی برخاسته از متر ریمانی g را توسط $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش دادیم که در آن $g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ها توابع حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه ی $x \in M$ دارند یعنی $g_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

حال می خواهیم یک ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه ی $x \in M$ به جهت آن نیز بستگی دارد، متر برخاسته از این ضرب داخلی را متر فینسلری می نامیم و با $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش می دهیم. در اینجا $g_{ij}(x, y)$ها توابعی حقیقی روی TM هستند، که علاوه بر نقطه ی $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_pM$ نیز بستگی دارند.

تذکر: تعریف زیر و مطالب مرتبط با آن از مرجع [۱] اقتباس شده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی هموار و $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ کلاف مماس و $\pi : TM \longrightarrow M$ تصویر طبیعی باشد که هر عضو (x, y) از TM که $x \in M$ و $y \in T_xM$ را روی x تصویر می کند. یک ساختار فینسلری برای M، یک تابع پیوسته ی

$$F : TM \longrightarrow [\circ, \infty)$$

می باشد به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

•منظم بودن [۱۲] : F روی تمام کلاف مماس سفته $TM_\circ$، هموار باشد.

• همگن مثبت [۱۳] : به ازای هر $\lambda > \circ$، $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$

• تحدب قوی [۱۴] : برای هر بردار مماس $y \in T_xM_\circ$، فرم متقارن دو خطی $g_y : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت باشد:

$$g_y(u, v) = \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲}{\partial s\partial t}[F^۲(x, y + su + tv)] \mid_{s=t=\circ}$$

[۱۲] regularity
[۱۳] positive homogenit
[۱۴] strong convexity

به این صورت که برای هر $V \neq 0$ داشته باشیم $g(V,V) > 0$.

(M,F) را منیفلد فینسلری می نامیم.

نکته: تحدید یک ساختار فینسلری F به هر فضای مماس خاص T_xM نرم مینکوفسکی روی T_xM را می دهد، به این ترتیب یک ساختار فینسلری از M به صورت یک خانواده ی با تغییر هموار از نرم های مینکوفسکی دیده می شود.

توجه: فرض کنید

$$g_{ij}(x,y) = (\frac{1}{2}F^2)_{y^iy^j}(x,y)$$

با استفاده از همگنی F داریم:

$$g_y(u,v) = g_{ij}(x,y)u^iv^j \qquad , \qquad F(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x,y)y^iy^j}.$$

در اینجا معین مثبت بودن به این معنی است که ماتریس (g_{ij}) نا تبهگون (یعنی با دترمینان مخالف صفر) بوده و برای هر بردار $y \neq 0$ داشته باشیم $g_{ij}(x,y)y^iy^j > 0$. تانسور متقارن و معین مثبت g با مولفه های (g_{ij}) را تانسور اساسی [۱۵] یا متریک فینسلر می نامیم.

تذکر ۱: شرط مثبت بودن F از آن جا مورد نیاز است که به توان با استفاده از آن یک تابع فاصله روی M تعریف کرد.

تذکر ۲: شرط همگن بودن F به دلیل فراهم آوردن یک شرط لازم و کافی است که بر آن اساس طول قوس یک منحنی که توسط انتگرال $\int F(x(t),y(t))dt$ داده می شود به پارامتر t بستگی نداشته باشد. این موضوع توسط ک. کاراتئودوری [۱۶] استاد پ. فینسلر [۱۷] ثابت شده است.

تذکر۳: شرط همگن مثبت در بعضی مراجع با شرط دیگری به نام شرط همگنی مطلق تعویض می شود در این حالت به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $F(x,\lambda y) = |\lambda| F(x,y)$. نظر به این که این شرط نسبتا سنگین بوده و موجب حذف برخی از مثال های جالب در فضای فینسلر مانند فضای راندرز می شود در این جا از آن استفاده نشده است.

[۱۵] foundamental tensor
[۱۶] K. Caratheodory
[۱۷] Paul Finsler

تذکر ۴: شرط تحدب قوی به این منظور آورده شده است که ماتریس g_{ij} معکوس پذیر بوده و مانند ماتریس متر ریمانی ضرایب معکوس آن یعنی g^{ij} نیز تعریف شود. مثبت معین بودن g_{ij} بستگی به انتخاب پایه در T_xM ندارد.

تذکر ۵: شرط هموار بودن F روی $TM_\circ$ را نمی توان با شرط هموار بودن F روی TM تعویض کرد، زیرا اگر F روی TM یعنی در $y = \circ$ F هموار باشد آن گاه چون همگن از درجه ی یک است، بنا بر قضیه ی حد صفر می توان آن را به صورت $F = a_iy^i$ نوشت لذا دترمینان g_{ij} به a_i بستگی پیدا می کند و ممکن است مقدارش صفر شود.

مثال. فضای ریمانی: ساده ترین مثال از یک متر فینسلری، متر ریمانی است. $\mathbb{R}^n$ را همراه با متر ریمانی a_{ij} در نظر می گیریم، در این صورت منیفلد ریمانی $(\mathbb{R}^n, a_{ij})$ را می توان به عنوان یک منیفلد فینسلری در نظر گرفت که تابع اساسی آن توسط $F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ تعریف می شود.

مثال. فضای راندرز: فرض کنیم $(M, a_{ij}(x))$ یک منیفلد ریمانی بوده و $w = w_i(x)dy^i$ یک میدان ۱-فرمی روی M باشد. همچنین فرض کنیم $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ و $\beta = w_i(x)y^i$. در این صورت می توان نشان داد که $F = \alpha + \beta$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند، در این صورت F را متر راندرز و (M, F) را یک فضای راندرز یا منیفلد راندرز می نامند. فضاهای راندرز کاربرد زیادی در ارائه مدل های هندسی برای نظریه ی نسبیت دارند.

مثال.فضای کروپینا [۱۸]: فرض کنیم α یک متر ریمانی و β یک ۱-فرمی روی منیفلد M باشد. زیر فضایی از $TM_\circ$ را در نظر می گیریم که در آن ۱-فرمی $\beta > \circ$ اکیدا مثبت باشد، می توان نشان داد که $F(x,y) = \frac{\alpha^2}{\beta}$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت آن را از نوع کروپینا گفته و فضای $(M, \frac{\alpha^2}{\beta})$ را فضای کروپینا می نامند.

مثال.فضای ماتسوموتو [۱۹]: فرض کنیم α یک متر ریمانی و β یک ۱-فرمی روی منیفلد M باشند، زیر فضایی از $TM_\circ$ را در نظر می گیریم که در آن تابع $F(x,y) = \frac{\alpha^2}{a\alpha - b\beta}$ تعریف شود. می توان نشان داد که $F(x,y)$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت $F(x,y)$ را از نوع ماتسوموتو گفته و فضای $(M, \frac{\alpha^2}{a\alpha - b\beta})$ را فضای ماتسوموتو می نامند.

توجه: برای هر متر فینسلری F تعریف می کنیم

[۱۸] Kropina space
[۱۹] Matsumoto space

$$C_{ijk} := \frac{۱}{۴}[F^{۲}]_{y^iy^jy^k}.$$

بنابراین برای هر $y \neq ۰$، می توانیم تانسور تاب کارتان [۲۰] را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$C_y(u,v,w) = C_{ijk}u^iv^jw^k.$$

تانسور تاب کارتان انحراف متر فینسلری را از متر ریمانی مشخص می کند، به عبارت معادل اگر $C_{ijk} = ۰$ باشد آن گاه (g_{ij}) به y بستگی نداشته و در نتیجه یک متر ریمانی است.

هرمتر فینسلری روی یک منیفلد، یک ساختار طولی روی منحنی های قطعه وار هموار تعریف می کند. یک منحنی قطعه وار هموار c از p تا q در (M,F) در نظر می گیریم به طوری که c یک منحنی نمایش داده شده توسط $c = c(t)$ با $c(a) = p$ و $c(b) = q$ باشد، طول c به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_F(c) = \int_a^b F(c(t),\dot{c}(t))dt$$

برای یک جفت از نقاط $p,q \in M$، تعریف می کنیم:

$$d_F(p,q) := inf L_F(c)$$

که inf روی همه ی منحنی های قطعه وار هموار c گذرنده از p به q گرفته می شود.

d_F یک تابع روی $M \times M$ می باشد که دارای خواص زیر است:

$(i) d_F(p,q) \geq ۰$

$(ii) d_F(p,q) = ۰ \Longleftrightarrow p = q$

$(iii) d_F(p,q) \leq d_F(p,r) + d_F(r,q)$

تابع d_F ، تابع فاصله ی F نامیده می شود [۵].

تذکر: در حالت کلی چون F فقط یک تابع همگن مثبت است، $d_F(p,q) \neq d_F(q,p)$، بنابراین (M,d_F) یک فضای متریک

[۲۰] Cartan torsion tensor

وارون ناپذیر است[۶].

تعریف ۲.۳.۱. [۸] فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری باشد، نگاشت ϕ از M بروی خودش یک ایزومتری نامیده می شود اگر ϕ یک دیفئومورفیسم باشد و برای هر $x \in M$ و $X \in T_xM$ داشته باشیم:

$$F(x, X) = F(\phi(x), d\phi_x(X))$$

قضیه ۳.۳.۱. (قضیه اویلر) [۲۱]: فرض کنید تابع حقیقی H در تمام نقاط $\mathbb{R}^n \setminus 0$ هموار باشد، آن گاه احکام زیر معادلند:

• H همگن مثبت از درجه ی r است یعنی

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y) \qquad \forall \lambda > 0$$

• مشتق کل H، r برابر H است، یعنی

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$$

اثبات. ابتدا فرض می کنیم H همگن مثبت از درجه ی r باشد، یعنی به ازای هر $\lambda > 0$ ،$H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$، با فرض ثابت بودن y از این رابطه نسبت به پارامتر λ مشتق می گیریم:

$$y^i H_{y^i}(\lambda y) = r\lambda^{r-1} H(y)$$

با قرار دادن $\lambda = 1$ نتیجه حاصل می شود.

برعکس، فرض می کنیم $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$ با ثابت در نظر گرفتن y و $\lambda > 0$ از قاعده ی زنجیره ای داریم:

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) = \frac{dH(\lambda y)}{d(\lambda y)} . \frac{d(\lambda y)}{d\lambda} = y^i H_{y^i}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} (\lambda y)^i H_{y^i}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} rH(\lambda y)$$

لذا معادله ی دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

---

[۲۱] Euler's theorem

$$\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda}H(\lambda y) = 0$$

که این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(\frac{d}{d\lambda})(\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r}) = 0$$

که جواب آن به صورت $H(\lambda y) = c\lambda^r$ است که در آن c یک مقدار ثابت است. با قرار دادن $\lambda = 1$ مقدار $H(y) = c$ به دست می آید، در نتیجه $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$. □

همان طور که دیدیم التصاق لویی - چوی ویتا یک التصاق خطی روی TM است، به عبارتی این التصاق روی برش های هموار TM (همان میدان های هموار روی M) تعریف می شود.

برخلاف التصاق لویی - چوی ویتا در هندسه ی ریمانی، التصاق طبیعی منحصر به فرد در حالت فینسلری وجود ندارد.

فرض کنیم (E, π, N) کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار باشد، می توان یک کلاف برداری روی M با همان تار کلاف برداری (E, π, N) را به صورت زیر تعریف کرد، این ساختار جدید کلاف برگشتی می نامیم.

تعریف ۱.۳.۴. اگر (E, π, N) یک کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشت هموار باشد، کلاف برگشتی E توسط f را با نماد f^*E نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

تارهای کلاف برگشتی f^*E یک کپی از تارهای E می باشند. f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $\pi_1 : f^*E \longrightarrow M$ که به صورت $(x, v) \in M \times E \longmapsto x \in M$ تعریف می شود، یک کلاف برداری روی M است. اگر نگاشت تصویر مولفه دوم $\pi_2 : f^*E \longrightarrow E$ باشد که به صورت $(x, v) \longmapsto v$ تعریف شود، آن گاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابه جایی است:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

و $E \cong f^*E$ می باشد .

اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر متعارف باشد، با توجه به تعریف فوق کلاف برگشتی π^*TM قابل تعریف بوده و تارهای آن در هر نقطه ی $(x,y) \in TM_\circ$ به صورت زیر است:

$$\pi^*TM \mid_{(x,y)} := \{(x,y,v) \mid v \in T_xM\} \cong T_xM$$

به عبارت دیگر تار روی یک نقطه ی (x,y) یک کپی از T_xM است.

π^*TM کلاف مماس برگشتی (کلاف برداری روی کلاف مماس $TM_\circ$) نامیده می شود.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}\}$ کنج موضعی طبیعی برای $T(TM_\circ)$ باشد، آن گاه $VTM := span\{\dfrac{\partial}{\partial y^i}\}$ زیر کلاف $T(TM_\circ)$ می باشد که کلاف مماس عمودی M نامیده می شود .

فرض کنید $\partial_i := (x, y\dfrac{\partial}{\partial x^i} \mid_x)$، در این صورت $\{\partial_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM می باشد. در این صورت کلاف برداری π^*TM برش متعارف $\mathcal{Y}$ را دارد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{Y}(x,y) := (x,y,y)$$

به ازای $y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} \mid_x \in T_xM$، $\mathcal{Y}$ به شکل زیر می تواند بیان شود:

$$\mathcal{Y} = y^i\partial_i$$

حال به بیان دو تانسور مهم در هندسه ی فینسلری می پردازیم:

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید F متر فینسلری روی M باشد و

$$g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y), \qquad C_{ijk} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}(x,y)$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{G} := g_{ij}dx^i \otimes dx^j, \qquad \mathcal{C} := C_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ تانسورهایی روی TM_0 می باشند که به ترتیب تانسور اساسی و تانسور کارتان نامیده می شوند.

همان طور که قبلا بیان شد در هندسه ی فینسلری بر خلاف هندسه ی ریمانی، التصاق طبیعی منحصر به فردی وجود ندارد، توجه داریم که یک التصاق فینسلری نمی تواند هم متقارن (بی تاب) و هم مانند التصاق لویی - چوی ویتا در قانون ضرب صدق کند زیرا در این صورت التصاق فینسلری با التصاق لویی - چوی ویتا یکی می شود و فضای فینسلری به ریمانی تبدیل می شود. از جمله این التصاق ها روی π^*TM، التصاق چرن را انتخاب می کنیم که ضرایب آن را با Γ^i_{jk} نمایش می دهند. این التصاق متقارن و تقریبا g-سازگار است.

قضیه ۷.۳.۱. (چرن [۲۲]) فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد، برای کنج موضعی دلخواه π^*TM یعنی $\{e_i\}$ و هم کنج دوگان آن برای π^*T^*M، یک مجموعه ی منحصر به فرد از ۱-فرمی های موضعی $\{w^i_j\}$ روی TM_0 موجود است به طوری که:

$$d(dx^i) - dx^i \wedge w^i_j = -dx^j \wedge w^i_j = 0 \qquad (*)$$

$$dg_{ij} = g_{kj}w^k_i + g_{ik}w^k_j + 2C_{ijk}w^{n+k} \qquad (**)$$

که در آن

$$w^{n+i} := dy^i + y^i w^i_j$$

و $\mathcal{Y} := y^ie_i$ و $C_{ijk} := \mathcal{C}(e_i,e_j,e_k)$ و $g_{ij} := \mathcal{G}(e_i,e_j)$.

التصاق چرن به صورت زیر بیان می شود[۱۲]:

---
[۲۲] Chern

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}(x,y)=\Gamma^i_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

که ضرایب التصاق چرن به صورت زیر می باشد:

$$\Gamma^l_{jk}=\gamma^l_{jk}-g^{li}(A_{ijs}\frac{N^s_k}{F}-A_{jks}\frac{N^s_i}{F}+A_{kis}\frac{N^s_j}{F})$$

که در آن $A_{ijk}:=\frac{F}{۲}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$ و داریم $C_{ijk}:=\frac{۱}{F}A_{ijk}$ و

$$N^i_j(x,y):=\gamma^i_{jk}y^k-C^i_{jk}\gamma^k_{rs}y^ry^s$$

و $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_xM_\circ$،

هم چنین در آن نماد های کریستوفل به صورت زیر می باشند:

$$\gamma^i_{jk}=\frac{g^{is}}{۲}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}+\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j})$$

و $C^i_{jk}=g^{is}C_{sjk}$.

تذکر ۱:[۵] می دانیم $w^i_j:=\Gamma^i_{jk}dx^k+\Pi^i_{jk}dy^k$، بنابراین رابطه ی $(*)$ معادل تساوی زیر است:

$$\circ=d^۲x^i=dx^i\wedge(\Gamma^i_{jk}dx^k+\Pi^i_{jk}dy^k)$$

و این ایجاب می کند که $\Pi^i_{jk}=\circ$ و $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$، و این معادل متقارن (بی تاب) بودن التصاق چرن می باشد.

تذکر ۲: رابطه ی $(**)$ بیان کننده ی تقریبا متریک سازگاری التصاق چرن می باشد.

تذکر ۳: در اینجا $g(x,y)=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j=(\frac{۱}{۲}F^۲)_{y^iy^j}dx^i\otimes dx^j$ متر ریمانی روی کلاف برگشتی π^*TM است.

تذکر ۴: با فرم های $\{w^i_j\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$، التصاق خطی چرن روی π^*TM به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\nabla X:=\{dX^i+X^jw^i_j\}\otimes e_i$$

که در آن $X=X^i(x,y)e_i\in\mathcal{T}(\pi^*TM)$.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی و $\pi : TM_0 \longrightarrow M$ تصویرطبیعی باشد، یک اسپری [۲۳] G روی منیفلد M، یک میدان برداری هموار خاص روی TM_0 به صورت زیر می باشد:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن ها $G^i = G^i(x, y)$ توابع موضعی با همگنی زیر هستند:

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \qquad \forall \lambda > 0$$

و G^i ها ضرایب اسپری نامیده می شوند.

هر متر فینسلری $F = F(x, y)$ روی یک منیفلد M یک اسپری $G = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ را توسط

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}\{[F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l}\}$$

القا می کند. همه ی اسپری ها می توانند توسط یک متر فینسلری القا شوند [۵].

تعریف ۹.۳.۱. متر فینسلری F روی منیفلد M، متر بروالد [۲۴] نامیده می شود هرگاه در سیستم مختصاتی استاندارد (x^i, y^i) در TM، ضرایب اسپری $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x) y^j y^k$ در $y \in T_x M$ درجه ی دوم باشند، به عبارتی کافیست ضرایب التصاق چرن یعنی Γ^i_{jk} ها توابعی بر حسب $x \in M$ باشند.

فرض کنید (M, F) یک فضای فینسلری باشد و $(x^1, ..., x^n)$ یک سیستم مختصات موضعی و Γ^i_{jk} ضرایب التصاق چرن باشند، تعریف می کنیم $w^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$. می خواهیم مفهوم انحنای پرچمی را توصیف کنیم، انحنای پرچمی گسترش (تعمیم) طبیعی از انحناهای برشی در هندسه ی ریمانی است. بر خلاف مورد ریمانی انحنای پرچمی فقط به انتخاب یک صفحه ی مماس ۲-بعدی بستگی ندارد بلکه به جهت در این صفحه نیز وابسته است.[۱۳]

---
[۲۳] spray
[۲۴] Berwald metric

تعریف ۱.۳.۱۰. انحنای پرچمی K [۲۵] برای یک متر فینسلری F روی یک منیفلد n-بعدی، یک تابع از پرچم $P = span(Y, u) \subset T_xM$ و میله ی پرچمی $Y \in T_xM$ در x می باشد که در آن $u = u^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ و $Y \in P$ می باشد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$K(P, Y) = \frac{u^i(y^j R_{jikl} y^l)u^k}{g_y(y, y)g_y(u, u) - [g_y(y, u)]^۲}$$

که در آن R_{jikl} مولفه های تانسور ریمان است که به صورت زیر می باشد:

$$R_{jikl} = g_{ml}R^m_{jik} = \langle R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle$$

در تعریف فوق Y و P به عنوان برش های کلاف برگشتی π^*TM در نظر گرفته می شوند [۱].

۴.۱ ساختار مترهای راندرز

مترهای راندرز حالت خاصی از متر فینسلری می باشند که در فیزیک نوین بسیار پر کاربرد هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی هموار باشد، یک متر راندرز [۲۶] روی M شامل یک متر ریمانی $\tilde{a} := \tilde{a}_{ij}dx^i \otimes dx^j$ روی M و ۱-فرمی $\tilde{b} := \tilde{b}_i dx^i$ می باشد، با $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ یک تابع F روی TM به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \qquad y \in T_xM, x \in M$$

که در آن

$$\alpha(x, y) = \sqrt{\tilde{a}_{ij}y^i y^j} \qquad , \qquad \beta(x, y) = \tilde{b}_i(x)y^i.$$

لم ۲.۴.۱. تابع F یک ساختار فینسلری است اگر و فقط اگر $\| \tilde{b} \| := \sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i} < ۱$ باشد که در آن $\tilde{b}^i = \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j$ و $(\tilde{a}^{ij})$ معکوس ماتریس $(\tilde{a}_{ij})$ است.

---
[۲۵] flag curvature
[۲۶] Randers metric

اثبات. برای این که F یک تابع فینسلری باشد باید در سه شرط تابع فینسلری صدق کند، یعنی F باید منظم باشد به عبارتی باید روی تمام کلاف مماس سفته $TM_\circ$ هموار باشد که با توجه به ضابطه ی F این شرط برقرار است.

F باید همگن مثبت باشد:

به دلیل وجود β، زمانی که $\tilde{b} \neq \circ$ متر راندرز در شرط $F(x,-y) = F(x,y)$ صدق نمی کند، در حقیقت تابع F همگن مطلق است اگر و فقط اگر ریمانی باشد، به عبارتی یک متر راندرز همگن مطلق از درجه ی ۱ است اگر و فقط اگر ۱-فرمی $\tilde{b}$ به طور یکسان صفر شود. بنابراین به جز مورد $\tilde{b} \equiv \circ$، بقیه ی متر های راندرز غیر ریمانی هستند و فقط همگن مثبت در y هستند. چون $\beta(x,y)$ در y خطی است نمی تواند یک علامت ثابت داشته باشد، برای مثبت بودن F روی $TM_\circ$، باید اندازه ی مولفه های $\tilde{b}_i$ کنترل شود.

با توجه به تعریف تابع F روی $TM_\circ$، مثبت بودن F یعنی

$$\sqrt{\tilde{a}_{ij}y^iy^j} > -\tilde{b}_iy^i \qquad \forall y \neq \circ \qquad (*)$$

بنابراین فرض می کنیم F مثبت باشد، اگر $\tilde{b} \neq \circ$، با جاگذاری رابطه ی $y^i = -\tilde{b}^i = -\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j$ در $(*)$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{\tilde{a}_{ij}(-\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j)(-\tilde{b}^j)} > -\tilde{b}_i(-\tilde{b}^i)$$

از طرفی داریم $\tilde{a}_{ij}\tilde{a}^{ij} = \delta^i_i = I$ ($\tilde{a}^{ij}$ ماتریس معکوس $\tilde{a}_{ij}$ است)،

بنابراین

$$\sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i} > \tilde{b}_i\tilde{b}^i$$

در نتیجه

$$\frac{\tilde{b}_i\tilde{b}^i}{\sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i}} < ۱$$

لذا

$$\parallel \tilde{b} \parallel < ۱.$$

حال فرض می کنیم شرط $\| \tilde{b} \| < ۱$ برقرار باشد، با استفاده از نا مساوی کشی شوارتز، اگر $y \neq ۰$ داریم:

$$\mid \tilde{b}_i y^i \mid < \sqrt{\tilde{a}_{ij} y^i y^j}$$

در نتیجه

$$-\tilde{b}_i y^i < \sqrt{\tilde{a}_{ij} y^i y^j}.$$

حال به بررسی شرط تحدب قوی بودن F می پردازیم:

موضوع تحدب قوی به معین مثبت بودن تانسور اساسی g_{ij} وابسته است. معین مثبت بودن تانسور اساسی g_{ij}، شرط $\| \tilde{b} \| < ۱$ را نتیجه می دهد که این شرط با محاسبه ی

$$det(g_{ij}) = (\frac{F}{\alpha})^{n+۱} det(\tilde{a}_{ij})$$

تضمین کننده ی مثبت بودن F است، همچنین تحدب قوی را نتیجه می دهد. □

در این جا یک روش کلی برای بیان یک متر راندرز روی منیفلد ریمانی معرفی می کنیم:

فرض می کنیم $x \in M$ و $\tilde{a}$ یک متر ریمانی روی منیفلد M باشد، متر ریمانی $\tilde{a}$ یک متر ریمانی دیگری روی فضای دوگان TM یعنی T^*M تولید می کند که آن را با $\tilde{a}^*$ نمایش می دهیم، $\tilde{a}^*$ تانسوری از نوع $\binom{۰}{۲}$ می باشد و به صورت $\tilde{a}^* = \tilde{a}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ بیان می شود، هم چنین داریم

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = \tilde{a}^{ij}$$

این ضرب داخلی یک ایزومورفیسم خطی بین T_xM و T_x^*M تعریف می کند.

لم ۳.۴.۱. متر راندرز روی منیفلد M شامل متر ریمانی $\tilde{a} = \tilde{a}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ به همراه یک میدان برداری $\tilde{b}^\sharp$ که برای هر $x \in M$، $\tilde{a}(x)(\tilde{b}^\sharp, \tilde{b}^\sharp) < ۱$، به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(x,y) = \sqrt{\tilde{a}(x)(y,y)} + \tilde{a}(x)(\tilde{b}^\sharp, y) \qquad x \in M, y \in T_xM$$

اثبات. فرض می کنیم میدان برداری $\tilde{b}^\sharp$ به صورت زیر باشد:

$$\tilde{b}^\sharp = (\tilde{b}^\sharp)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

با استفاده از تعریف عملگر شارپ داریم:

$$(\tilde{b}^\sharp)^i = \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j = \tilde{b}^i$$

که در آن $\tilde{b} = \tilde{b}_j dx^j$، ۱-فرمی متناظر با میدان برداری $\tilde{b}^\sharp$ است.

برای هر $y \in T_xM$ داریم:

$$\langle y, \tilde{b}^\sharp\rangle = \langle y^k \frac{\partial}{\partial x_k}, (\tilde{a}^{ij}(x)\tilde{b}_j)\frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = y^k\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = y^k\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\tilde{a}_{ki} = y^k\delta_k^j\tilde{b}_j = \tilde{b}_j y^j$$

بنابراین $\beta(x,y) = \langle y, \tilde{b}^\sharp\rangle$ و حکم ثابت می شود. □

تذکر: واضح است که $\| \tilde{b}^\sharp \| = \| \tilde{b} \|$، در نتیجه $1 > \| \tilde{b} \|$ برقرار است اگر و فقط اگر $1 > \| \tilde{b}^\sharp \|$.

گزاره ۴.۴.۱. متر راندرز تعریف شده توسط متر ریمانی $\tilde{a}$ و ۱-فرمی $\tilde{b}$ از نوع بروالد است اگر و فقط اگر $\tilde{b}$ نسبت به $\tilde{a}$ موازی باشد.

لم ۵.۴.۱. ۱-فرمی $\tilde{b}$ موازی است اگر و فقط اگر میدان برداری متناظر $\tilde{b}^\sharp$ نسبت به متر ریمان $\tilde{a}$ موازی باشد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم میدان برداری $\tilde{b}^\sharp = \tilde{b}^i\partial_i = \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\partial_i$ نسبت به التصاق لویی - چوی ویتا ی ∇ القایی از متر ریمان $\tilde{a}$ موازی باشد، داریم:

$$\nabla\tilde{b}^\sharp = 0$$

در نتیجه:

$$\tilde{b}^{\sharp}{}_{;j}{}^{i}\partial_i \otimes dx^j = 0$$

بنابراین $\tilde{b}^{\sharp}{}_{;j}{}^{i} = \partial_j \tilde{b}^i + \tilde{b}^k \Gamma^i_{jk} = ۰$

با جاگذاری فرمول $\tilde{b}^i$ خواهیم داشت:

$$\partial_j(\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j) + \tilde{a}^{kj}\tilde{b}_j\Gamma^i_{jk} = ۰$$

لذا داریم:

$$(\partial_j\tilde{a}^{ij})\tilde{b}_j + \tilde{a}^{ij}\partial_j\tilde{b}_j + \tilde{a}^{kj}\tilde{b}_j\Gamma^i_{jk} = ۰$$

حال به محاسبه ی فرمولی برای $\partial_l\tilde{a}^{ij}$ می پردازیم:

می دانیم $\tilde{a}^{ij}\tilde{a}_{jk} = \delta^i_k$، با مشتق گرفتن از طرفین این رابطه داریم $(\partial_l\tilde{a}^{ij})\tilde{a}_{jk} = -\tilde{a}^{ij}\partial_l(\tilde{a}_{jk})$، با ضرب طرفین این رابطه در ماتریس $\tilde{a}^{jk}$ و جاگذاری عبارت $\partial_l(\tilde{a}_{jk}) = (\Gamma^t_{lj}\tilde{a}_{tk} + \Gamma^t_{lk}\tilde{a}_{jt})$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\partial_l\tilde{a}^{ij} &= -\tilde{a}^{jk}\tilde{a}^{ij}\tilde{a}_{tk}\Gamma^t_{lj} - \tilde{a}^{jk}\tilde{a}^{ij}\tilde{a}_{jt}\Gamma^t_{lk} \\
&= -\delta^j_t\tilde{a}^{ij}\Gamma^t_{lj} - \delta^i_t\tilde{a}^{jk}\Gamma^t_{lk} \\
&= -\tilde{a}^{ij}\Gamma^j_{lj} - \tilde{a}^{jk}\Gamma^i_{lk} \qquad (*)
\end{aligned}$$

حال با جاگذاری فرمول به دست آمده داریم:

$$(-\tilde{a}^{ij}\Gamma^j_{jj} - \tilde{a}^{jk}\Gamma^i_{jk})\tilde{b}_j + \tilde{a}^{ij}\partial_j\tilde{b}_j + \tilde{a}^{kj}\tilde{b}_j\Gamma^i_{jk}$$

بنابراین:

$$(\partial_j\tilde{b}_j)\tilde{a}^{ij} = \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\Gamma^j_{jj}$$

در نتیجه داریم:

$$\partial_j\tilde{b}_j = \tilde{b}_j\Gamma^j_{jj} \qquad (**)$$

حال نشان می دهیم ۱-فرمی متناظر با میدان برداری $\tilde{b}^\sharp$ که به صورت $\tilde{b} = \tilde{b}_j dx^j$ می باشد نسبت به التصاق لویی - چوی ویتا ی ∇ موازی است.

داریم $\nabla\tilde{b} = \nabla(\tilde{b}_j dx^j)$ و $\tilde{b}_{i;j} = \partial_j\tilde{b}_i - \tilde{b}_k\Gamma^k_{ij}$.

با جاگذاری رابطه ی $(**)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{b}_{i;j} = \tilde{b}_i\Gamma^i_{ii} - \tilde{b}_k\Gamma^k_{ij} = ۰$$

بنابراین $\nabla\tilde{b} = ۰$.

برعکس، حال فرض می کنیم ۱-فرمی $\tilde{b} = \tilde{b}_j dx^j$ نسبت به التصاق لویی - چوی ویتای ∇ القایی از متر ریمان $\tilde{a}$ موازی باشد، یعنی $\nabla\tilde{b} = \nabla(\tilde{b}_j dx^j) = ۰$،بنابراین

$$\tilde{b}_{i;j} = \partial_j\tilde{b}_i - \tilde{b}_k\Gamma^k_{ij} = ۰$$

در نتیجه

$$\partial_j\tilde{b}_i = \tilde{b}_k\Gamma^k_{ij} \qquad (***)$$

حال نشان می دهیم میدان برداری متناظر با آن یعنی $\tilde{b}^\sharp = \tilde{b}^{\sharp i}\partial_i = \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\partial_i$ نیز نسبت به التصاق لویی - چوی ویتا ی ∇ القایی از متر ریمان $\tilde{a}$ موازی است.

داریم $\nabla\tilde{b}^\sharp = \tilde{b}^\sharp{}_{;j}{}^{i}\partial_i \otimes dx^j$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}^\sharp{}_{;j}{}^{i} &= \partial_j\tilde{b}^{\sharp i} + \tilde{b}^{\sharp k}\Gamma^i_{jk} = \partial_j(\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j) + (\tilde{a}^{kj}\tilde{b}_j)\Gamma^i_{jk} \\
&= (\partial_j\tilde{a}^{ij})\tilde{b}_j + \tilde{a}^{ij}\partial_j\tilde{b}_j + \tilde{a}^{kj}\tilde{b}_j\Gamma^i_{jk}
\end{aligned}$$

حال با جاگذاری رابطه ی $(*)$ و $(***)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{b}^{\sharp}{}_{;j}{}^{i} = -\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j\Gamma^{j}_{jj} + \tilde{a}^{ij}\tilde{b}_k\Gamma^{k}_{ij} = ۰$$

در نتیجه $\nabla\tilde{b}^{\sharp} = ۰$. □

گروه ایزومتری های یک فضای راندرز (M, F) را در نظر می گیریم، این گروه را با $I(M, F)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۶.۴.۱. فرض کنید (M, F) یک فضای راندرز باشد که F توسط متر ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $\tilde{b}^{\sharp}$ تعریف شده است. آن گاه گروه ایزومتری های (M, F) یک زیر گروه بسته ی گروه ایزو متری های منیفلد ریمانی $(M, \tilde{a})$ می باشد.

اثبات. فرض می کنیم ϕ یک ایزومتری برای (M, F) باشد و فرض می کنیم $p \in M$ و قرار می دهیم $q = \phi(p)$. برای هر $y \in T_pM$ داریم:

$$\begin{aligned} F(p, y) &= \sqrt{\tilde{a}(p)(y, y)} + \tilde{a}(p)(\tilde{b}^{\sharp}, y) = F(q, d\phi_p(y)) \\ &= \sqrt{\tilde{a}(q)(d\phi_p(y), d\phi_p(y)} + \tilde{a}(q)(\tilde{b}^{\sharp}, d\phi_p(y)) \qquad (*) \end{aligned}$$

در رابطه ی $(*)$، y را با $-y$ عوض می کنیم، داریم:

$$\sqrt{\tilde{a}(p)(y, y)} - \tilde{a}(p)(\tilde{b}^{\sharp}, y) = \sqrt{\tilde{a}(q)(d\phi_p(y), d\phi_p(y))} - \tilde{a}(q)(\tilde{b}^{\sharp}, d\phi_p(y)) \qquad (**)$$

با جمع کردن دو رابطه ی $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\tilde{a}(p)(y, y) = \tilde{a}(q)(d\phi_p(y), d\phi_p(y))$$

و

$$\tilde{a}(p)(\tilde{b}^{\sharp}, y) = \tilde{a}(q)(\tilde{b}^{\sharp}, d\phi_p(y))$$

در نتیجه با توجه به رابطه ی فوق و تعریف ایزومتری ریمانی، ϕ یک ایزومتری نسبت به متر ریمان زمینه ی $\tilde{a}$ است و برای هر $p \in M$، $d\phi_p(\tilde{b}^{\sharp}\mid_p) = \tilde{b}^{\sharp}\mid_{\phi(p)}$. بنابراین $I(M, F)$ یک زیر گروه بسته ی $I(M, \tilde{a})$ است. □

فصل ۲

مترهای ناوردا روی منیفلدهای همگن

۱.۲ مقدمه

مطالعه ی ساختارهای ناوردا روی منیفلد های همگن یک مسئله ی مهم در هندسه می باشد. نمیزو [1] خاصیت های بسیار جالبی برای متر های ریمانی ناوردا روی فضای همگن G/H به دست آورده است، وی فضا های همگن تحویلی را معرفی نمود و متر های ریمانی ناوردا و وجود و ساخت التصاق های آفین ناوردا روی فضا های همگن تحویلی را مطالعه کرد.

هم چنین برخی از خواص انحنای متر های ریمانی ناوردا روی گروه های لی توسط میلنور [2] و سملسن [3] در [۱۶] و [۱۷] مطالعه شده اند. بنابراین مطالعه ی متر های فینسلری ناوردا به عنوان تعمیمی از متر های ریمانی ناوردا بسیار مهم می باشد.

در این فصل ابتدا فضا های همگن و همگن تحویلی را توصیف می کنیم، سپس مترهای ریمانی ناوردا روی منیفلد های همگن را تعریف نموده و وجود و خواص آن ها را روی منیفلد های همگن بررسی می کنیم. مفهوم به طور طبیعی تحویلی را برای منیفلد های همگن ریمانی توضیح می دهیم.

متر های فینسلری ناوردا روی فضا های همگن را که تعمیمی از متر های ریمانی ناوردا هستند، معرفی می نماییم و یک شرط لازم و کافی برای منیفلد های همگن برای پذیرفتن متر های فینسلری ناوردا ارائه می دهیم.

مفهوم منیفلد همگن به طور طبیعی تحویلی فینسلری را به دو صورت بیان می کنیم و ارتباط بین این دو تعریف را اثبات می نماییم. سپس تانسور انحنا و انحنای پرچمی را برای منیفلد های همگن به طور طبیعی تحویلی با یک متر فینسلری ناوردا محاسبه

[1] K. Nomizu
[2] J. Milnor
[3] H. Samelson

می کنیم.

۲.۲ فضاهای همگن

تذکر: تمام مطالب ارجاع داده نشده ی این بخش به مرجع [۱۰] بر می گردد.

تعریف ۱.۲.۲. یک منیفلد هموار G که در مفهوم جبری نیز گروه باشد را به همراه این خاصیت که نگاشت ضرب $m : G \times G \longrightarrow G$ و نگاشت معکوس $i : G \longrightarrow G$ داده شده توسط

$$m(g,h) = gh, \qquad i(g) = g^{-1}$$

هر دو هموار باشند، گروه لی [۴] می نامیم.

تذکر: به عبارت دیگر هرگاه G یک منیفلد هموار باشد که یک ساختار گروه نیز بر آن تعریف شده است، G را یک گروه لی نامیم هرگاه تابع $G \times G \longrightarrow G$: تعریف شده به صورت زیر

$$(g,h) \longmapsto gh^{-1}$$

هموار باشد.

تذکر: چون نگاشت های هموار پیوسته هستند، یک گروه لی یک گروه توپولوژیکی می باشد (یک فضای توپولوژیکی به همراه یک ساختار گروه به طوری که نگاشت های ضرب و معکوس پیوسته باشند، گروه توپولوژیکی نامیده می شود).

مثال. $\mathbb{R}^n$ با ساختار استاندارد گروه لی n بعدی است.

مثال. مجموعه ی ماتریس های $n \times n$ معکوس پذیر ($GL(n,\mathbb{R})$)، با عمل ترکیب توابع یک گروه لی n^2 بعدی است.

مثال. مجموعه ی اعداد حقیقی غیر صفر ($\mathbb{R}^*$) یک گروه لی ۱ بعدی است و مجموعه ی اعداد مختلط غیر صفر (C^*) یک گروه لی ۲ بعدی است.

مثال. دایره ی S^1 یک منیفلد هموار است و تحت عمل ضرب مختلط یک گروه است، بنابراین یک گروه لی ۱ بعدی است.

[۴] Lie Group

تذکر: هر حاصل ضرب گروه های لی ، با ساختار منیفلدی حاصل ضربی هموار و ساختار گروهی حاصل ضرب مستقیم، یک گروه لی است.

مثال. تیوپ $T^n = S^۱ \times ... \times S^۱$ یک گروه لی n بعدی است.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی باشد، زیر گروه H از G را به همراه یک توپولوژی و ساختار هموار که آن را به یک گروه لی و یک زیر منیفلد غوطه ور [۵] برای G تبدیل می کند را زیر گروه لی [۶] برای G می نامیم.

گزاره ۳.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی باشد و $H \subset G$ یک زیر گروه لی باشد که زیر منیفلد نشانده شده [۷] نیز باشد، آن گاه H زیر گروه لی بسته ی G است.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۰] مراجعه نمایید. □

مثال. زیر مجموعه ی $GL^+(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ یک زیر گروه لی $n^۲$ بعدی است.

مثال. دایره ی $S^۱$ یک زیر گروه لی برای C^* است.

تعریف ۴.۲.۲. اگر G و H گروه های لی باشند، یک هومومورفیسم گروه لی از G به H یک نگاشت هموار $F : G \longrightarrow H$ می باشد به طوری که هومومورفیسم گروه نیز باشد.

تعریف ۵.۲.۲. فرض می کنیم G یک گروه لی و $g \in G$های باشد، نگاشت $L_g, R_g : G \longrightarrow G$ که به صورت

$$L_g(h) = gh, \qquad R_g(h) = hg$$

تعریف می شوند را به ترتیب انتقال چپ [۸] و انتقال راست [۹] توسط g نامیده می شود.

از آن جا که عمل ضرب گروه لی G هموار است، می توان مشاهده کرد که نگاشت انتقال چپ و راست نیز هموار است. از طرفی

[۵] immersed submanifold
[۶] Lie Subgroup
[۷] embedded submanifold
[۸] left translation
[۹] right translation

اگر این انتقال ها را برای g^{-1} در نظر بگیریم به طریق مشابه $L_{g^{-1}}$ و $R_{g^{-1}}$ نیز هموار هستند، بنابراین برای هر $g \in G$، L_g و R_g دیفئومورفیسم هستند.

میدان برداری X روی G را ناوردای چپ [10] گوییم هرگاه تحت همه ی انتقال های چپ ناوردا باشد، به عبارتی برای هر $g \in G$، L_g-مرتبط با خودش باشد یعنی

$$(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'}, \qquad \forall g, g' \in G$$

چون L_g دیفئومورفیسم است، می توان آن را به صورت $(L_g)_* X = X$ برای هر $g \in G$، مختصر کرد.

تعریف ۶.۲.۲. فضای برداری $\mathfrak{g}$ را به همراه یک نگاشت به نام کروشه از $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ به $\mathfrak{g}$ که معمولا با $[X, Y] \mapsto (X, Y)$ نمایش داده می شود، را یک جبر لی [11] نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

- دو خطی: برای $a, b \in \mathbb{R}$،

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

- پادمتقارن:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

- اتحاد ژاکوبی:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = ۰$$

تذکر: اتحاد ژاکوبی در حالت کلی برای کروشه ها روی یک جبر لی برقرار نیست.

مثال. فضای $\mathcal{T}M$ از همه ی میدان های برداری هموار روی یک منیفلد هموار، یک جبر لی است.

مثال. فضای برداری $M(n, \mathbb{R})$ از ماتریس های حقیقی $n \times n$ با عمل کروشه جابه جایی:

[10] left-invariant
[11] Lie algebra

$$[A, B] = AB - BA$$

یک جبر لی n^2 بعدی است و آن را با $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ نمایش می دهند.

تعریف ۷.۲.۲. اگر $\mathfrak{g}$ یک جبر لی باشد، زیر فضای خطی $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ را زیر جبر لی [۱۲] برای $\mathfrak{g}$ نامیم هرگاه $\mathfrak{h}$ تحت عمل کروشه بسته باشد، در این صورت $\mathfrak{h}$ با تحدید همان عمل کروشه، خود یک جبر لی می باشد.

مثال. اگر G یک گروه لی باشد، مجموعه ی همه ی میدان های برداری ناوردای چپ هموار روی G یک زیر جبر لی از $\mathcal{T}G$ است و در نتیجه یک جبر لی است.

تعریف ۸.۲.۲. اگر $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ جبر های لی باشند، نگاشت خطی $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ یک هومومورفیسم جبر لی نامیده می شود هرگاه عمل کروشه را حفظ کند یعنی $A[X, Y] = [AX, AY]$.

اگر M یک منیفلد هموار باشد و $J \subset \mathbb{R}$ یک بازه ی باز باشد، منحنی هموار $\gamma : J \longrightarrow M$ یک بردار مماس $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ در هر نقطه ی منحنی تعریف می کند.

تعریف ۹.۲.۲. اگر V یک میدان برداری هموار روی M باشد، یک منحنی انتگرال برای V یک منحنی هموار $\gamma : J \longrightarrow M$ می باشد به طوری که

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}, \qquad \forall t \in J$$

به عبارت دیگر بردار مماس بر γ در هر نقطه با مقدار V در آن نقطه یکی است.

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی باشد، زیر گروه ۱-پارامتری [۱۳] برای G، یک هومومورفیسم گروه لی $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$ است.

[۱۲] Lie subalgebra
[۱۳] one- parameter subgroup

تذکر: طبق این تعریف زیر گروه ۱-پارامتری، زیر گروه لی G نیست اما یک همومورفیسم بتوی G است(تصویر یک زیر گروه ۱-پارامتری، یک زیر گروه لی است).

گزاره ۱۱.۲.۲. هر زیر گروه ۱-پارامتری برای گروه لی G، یک منحنی انتگرال آغازی از e برای یک میدان برداری ناوردای چپ است، در نتیجه تناظر یک به یک زیر را داریم:

$$\{G \text{ زیرگروه های ۱-پارامتری} \} \longleftrightarrow Lie(G) \longleftrightarrow T_eG$$

به خصوص، یک زیر گروه ۱-پارامتری به طور منحصر به فرد با بردار مماس آغازی در T_eG بیان می شود.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۰] مراجعه نمایید. $\square$

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی و $\mathfrak{g}$ جبر لی باشد، نگاشت $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ که توسط $\exp X = F(۱)$ داده می شود و در آن F زیر گروه ۱-پارامتری تولید شده توسط X، یا به طور معادل منحنی انتگرال X آغازی از e می باشد را نگاشت نمایی برای G می نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی باشد، برای هر $g \in G$ نگاشت مزدوج $C_g : G \longrightarrow G$ که توسط $C_g(h) = ghg^{-۱}$ داده می شود یک همومورفیسم گروه لی است.

همومورفیسم جبر لی القایی آن را با $Ad(g) = (C_g)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ نشان می دهیم. برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ داریم $C_{g_۱g_۲} = C_{g_۱} \circ C_{g_۲}$، بنابراین

$$Ad(g_۱g_۲) = Ad(g_۱) \circ Ad(g_۲)$$

و معکوس پذیر است با معکوس $Ad(g^{-۱})$، هم چنین $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ هموار می باشد در نتیجه یک نمایش است و نمایش الحاقی [۱۴] G نامیده می شود.

تذکر: اگر G یک گروه لی باشد، یک نمایش برای G یک همومورفیسم گروه لی $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ می باشد که در آن V یک فضای برداری است.

[۱۴] adjoint represention

تعریف ۱۴.۲.۲. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی باشد، برای هر $X \in \mathfrak{g}$ نگاشت $ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ که توسط $ad(X)Y = [X,Y]$ داده می شود، نمایش الحاقی X در $\mathfrak{g}$ نامیده می شود.

$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ یک نمایش است و نمایش الحاقی $\mathfrak{g}$ نامیده می شود.

گزاره ۱۵.۲.۲. فرض کنید G یک گروه لی و $\mathfrak{g}$ جبر لی آن باشد، و فرض کنید $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ نمایش الحاقی G باشد، در این صورت نمایش جبر لی القایی $Ad_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ توسط $Ad_* = ad$ داده می شود.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۰] مراجعه نمایید. □

تعریف ۱۶.۲.۲. یکی از مهم ترین نوع از عمل گروه آن است که یک گروه به صورت متعدی [۱۵] عمل کند:

فرض کنید G یک گروه و M یک مجموعه ی نا تهی باشد، عمل G روی M را متعدی گوییم هرگاه برای هر دو نقطه ی $p, q \in M$، یک $g \in G$ موجود باشد به طوری که $g.p = q$، یا به طور معادل هرگاه مدار هر نقطه ی M تمام M باشد.

تذکر: برای هر $p \in M$، مدار [۱۶] p تحت عمل G مجموعه ی

$$G.p = \{g.p : g \in G\}$$

یعنی مجموعه ی همه ی تصویر های p تحت عمل اعضای G، می باشد.

تعریف ۱۷.۲.۲. یک منیفلد هموار مجهز به یک عمل هموار متعدی که توسط گروه لی G انجام می شود را یک G- همگن و اگر گروه لی خاص مهم نباشد یک فضای همگن یا منیفلد همگن [۱۷] می نامیم.

قضیه ۱۸.۲.۲. (ساخت فضای همگن). فرض کنید G گروه لی و H زیر گروه بسته ی آن باشد، همدسته های چپ فضای G/H یک ساختار منیفلدی هموار منحصر به فرد دارند به طوری که نگاشت خارج قسمتی $\pi : G \longrightarrow G/H$ یک سابمرشن هموار است.عمل چپ G روی G/H که به صورت زیر داده می شود

[۱۵] transitively
[۱۶] orbit
[۱۷] homogeneous manifold

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$g_۱.(g_۲H) = (g_۱g_۲)H$$

G/H را به یک G-فضای همگن تبدیل می کند.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۰] مراجعه نمایید. $\square$

تعریف ۱۹.۲.۲. منیفلد همگن G/H را تحویلی [۱۸] نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

در جبر لی $\mathfrak{g}$ برای G، یک زیر فضای $\mathfrak{m}$ موجود باشد به طوری که

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{h} = \mathfrak{g} \quad \text{(جمع مستقیم زیر فضاها)}$$

$$ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}, \qquad \forall h \in H$$

که $\mathfrak{h}$ زیرجبر $\mathfrak{g}$ می باشد و $ad(h)$ نماد نمایش الحاقی H در $\mathfrak{g}$ است.

۳.۲ مترهای ریمانی ناوردا روی منیفلدهای همگن

فرض کنید $M = G/H$ یک فضای همگن باشد که در آن G یک گروه لی و H زیر گروه بسته ی G باشد.

اغلب فضای مماس $T_۰M$ در مبدا صفر را با فضای خارج قسمتی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ یکی می گیریم.

اگر G/H تحویلی با یک تجزیه ی ad-ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد، آن گاه هر دوی $T_۰M$ و $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ با $\mathfrak{m}$ به روش طبیعی یکی گرفته می شوند.

چون برای هر $h \in H$، $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ زیر جبر $\mathfrak{h}$ را بتوی خودش می برد، یک تبدیل خطی برای $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ القا می کند به طوری که آن نیز با ad نمایش داده می شود.

در این بخش ما هر عضو $X \in \mathfrak{g}$ را با میدان برداری القا شده روی M توسط X، یکی می گیریم.

تعریف ۱.۳.۲. متر ریمان g را روی فضای همگن G/H ناوردا نامیم هرگاه برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم:

[۱۸] reductive

$$\langle X(g_2H), Y(g_2H)\rangle_{g_2H} = \langle \ell_{g_1*}X(g_2H), \ell_{g_1*}Y(g_2H)\rangle_{g_1g_2H}$$

که در آن ℓ_{g_1} انتقال چپ توسط g_1 روی G است.

برای بیان برخی از خواص اصلی یک متر ریمان ناوردا روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ابتدا گزاره ی زیر را ثابت می کنیم.

گزاره ۲.۳.۲. یک تناظر یک به یک بین متر های ریمانی G-ناوردای g روی $M = G/H$ و فرم های دو خطی متقارن ناتباهیده ی $ad(H)$-ناوردای $\langle , \rangle$ روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ وجود دارد.

این تناظر به صورت زیر داده می شود:

$$\langle \bar{X}, \bar{Y}\rangle = g(X, Y)_\circ, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

که $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ اعضای متناظر با X و Y در $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ هستند.

اثبات. فقط طریقه ی ساخت g از $\langle , \rangle$ را نشان می دهیم:

هر نقطه از M به شکل $f(\circ)$ است برای $f \in G$ و هر بردار در $f(\circ) \in M$ به شکل $f(X)$ می باشد برای $X \in \mathfrak{g}$. تساوی زیر یک متر ریمان G-ناوردا روی M تعریف می کند:

$$g(f(X_\circ), f(Y_\circ)) = \langle \bar{X}, \bar{Y}\rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

□

نتیجه ۳.۳.۲. اگر $M = G/H$ با یک تجزیه ی ad-ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تحویلی باشد، آن گاه یک تناظر یک به یک بین مترهای ریمانی G-ناوردای g و فرم های دو خطی متقارن $ad(H)$-ناوردای $\langle , \rangle$ روی $\mathfrak{m}$ موجود است. تناظر به صورت زیر داده می شود:

$$\langle X, Y\rangle = g(X, Y)_\circ, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

ناوردایی $\langle , \rangle$ توسط $ad(H)$، ایجاب می کند:

$$\langle [Z,X],Y\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle = ۰$$

برای هر $X, Y \in \mathfrak{m}$ و $Z \in \mathfrak{h}$.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $M = G/H$ یک فضای همگن تحویلی با تجزیه ی $ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد و $\langle , \rangle$ یک فرم دو خطی متقارن ناتباهیده ی $ad(H)$- ناوردا روی $\mathfrak{m}$ باشد. فرض کنید g متر ریمان G- ناوردای متناظر با $\langle , \rangle$ باشد، آن گاه التصاق ریمانی برای g به صورت زیر خواهد بود:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y = \frac{۱}{۲}[X,Y]_{\mathfrak{m}} + U(X,Y)$$

که در آن $U(X,Y)$ نگاشت دو خطی متقارن از $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ بتوی $\mathfrak{m}$ می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$۲\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle + \langle [Z,X]_{\mathfrak{m}},Y\rangle$$

برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

اثبات. با یکی گرفتن $\mathfrak{m}$ و $T_۰M$ داریم $\Lambda_{\mathfrak{m}}(X) = -(A_X)_۰$، چون A_X نسبت به g متقارن کج [۱۹] است، پس $\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)$ نسبت به $\langle , \rangle$ نیز متقارن کج است یعنی

$$\langle \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y,Z\rangle + \langle Y,\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Z\rangle = ۰$$

برای هر $Y, Z \in \mathfrak{m}$. هم چنین داریم:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$$

اگر قرار دهیم:

$$U(X,Y) = \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y - (\frac{۱}{۲})[X,Y]_{\mathfrak{m}}$$

آن گاه $U(X,Y)$ در X و Y متقارن است و در رابطه ی زیر صدق می کند:

[۱۹] skew-symmetric

$$\langle U(X,Y),Z\rangle+\langle Y,U(X,Y)\rangle=\frac{۱}{۲}\{\langle[Y,X]_{\mathfrak{m}},Z\rangle+\langle Y,[Z,X]_{\mathfrak{m}}\rangle\}$$

با استفاده از این رابطه و جایگشت های دوری X,Y,Z و تقارن U به دست می آوریم:

$$۲\langle U(X,Y),Z\rangle=\langle X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle+\langle[Z,X]_{\mathfrak{m}},Y\rangle$$

برای هر $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$. □

تعریف ۵.۳.۲. یک فضای همگن G/H با یک متر ریمانی G- ناوردای g را به طور طبیعی تحویلی [۲۰] می نامیم هرگاه یک تجزیه ی $ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ که در رابطه ی زیر صدق می کند بپذیرد:

$$\langle X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle+\langle[Z,X]_{\mathfrak{m}},Y\rangle=۰,\qquad\forall X,Y,Z\in\mathfrak{m}$$

گزاره ۶.۳.۲. فرض کنید $M=G/H$ یک فضای همگن به طور طبیعی تحویلی با یک تجزیه ی $ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ و یک متر ریمانی G- ناوردای g باشد، و فرض کنید $\langle,\rangle$ فرم دو خطی متناظر به g روی $\mathfrak{m}$ باشد، آن گاه تانسور انحنای R برای التصاق ریمانی در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$g(R(X,Y)Y,X)_{۰}=\frac{۱}{۴}\langle[X,Y]_{\mathfrak{m}},[X,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle-\langle[[X,Y]_{h},Y],X\rangle$$

برای $X,Y\in\mathfrak{m}$.

اثبات. می دانیم

$$(R(X,Y)Z)_{۰}=\frac{۱}{۴}[X,[Y,Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}-\frac{۱}{۴}[Y,[X,Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}-\frac{۱}{۲}[[X,Y]_{\mathfrak{m}},Z]_{\mathfrak{m}}-[[X,Y]_{\mathfrak{h}},Z]$$

برای $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$.

با استفاده از این فرمول و قضیه ی قبل، این گزاره به آسانی به دست می آید. □

قضیه ی بعدی یک مورد ساده از کاربرد قضیه و گزاره ی قبل را بیان می کند:

[۲۰] naturally reductive

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنید G/H یک فضای همگن باشد و فرض کنید جبر لی $\mathfrak{g}$ برای G، یک فرم متقارن ناتباهیده ی $ad(G)$-ناوردای $\langle\,,\rangle$ می پذیرد به طوری که تحدید $\langle\,,\rangle_{\mathfrak{h}}$ برای آن به $\mathfrak{h}$ ناتباهیده است. آن گاه:

(۱) تجزیه ی $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ تعریف شده توسط

$$\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g};\langle X,Y\rangle=0 \qquad \forall Y\in\mathfrak{h}\}$$

$ad(H)$- ناورداست و تحدید $\langle\,,\rangle_{\mathfrak{m}}$ از $\langle\,,\rangle$ به $\mathfrak{m}$ نیز ناتباهیده و $ad(H)$- ناوردا می باشد.

(۲) فضای همگن G/H با توجه به تجزیه ی $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ تعریف شده در بالا و متر ریمان G- ناوردای g تعریف شده توسط $\langle,\rangle_{\mathfrak{m}}$، به طور طبیعی تحویلی است.

(۳) تانسور انحنای R تعریف شده توسط متر ریمانی در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$g(R(X,Y)Y,X)_{\mathfrak{h}}=\frac{1}{4}\langle[X,Y]_{\mathfrak{m}},[X,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle_{\mathfrak{m}}+\langle[X,Y]_{\mathfrak{h}},[X,Y]_{\mathfrak{h}}\rangle_{\mathfrak{h}}$$

برای هر $X,Y\in\mathfrak{m}$.

اثبات. اثبات (۱) بدیهی است.

برای اثبات (۲) فرض می کنیم $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$، چون $\langle,\rangle$، $ad(H)$- ناوردا است داریم:

$$\langle[Z,X],Y\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle=0$$

چون $\mathfrak{h}$ و $\mathfrak{m}$ نسبت به $\langle\,,\rangle$ متعامد هستند، به دست می آوریم:

$$\langle[Z,X]_{\mathfrak{m}},Y\rangle+\langle X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle=0$$

در نتیجه (۲) ثابت می شود.

برای اثبات (۳) ، فرض می کنیم $X, Y \in \mathfrak{m}$، آن گاه

$$\begin{aligned}
\langle [[X,Y]_{\mathfrak{h}}, Y], X\rangle_{\mathfrak{m}} &= \langle [[X,Y]_{\mathfrak{h}}, Y], X\rangle \\
&= -\langle [X,Y]_{\mathfrak{h}}, [X,Y]\rangle \\
&= -\langle [X,Y]_{\mathfrak{h}}, [X,Y]_{\mathfrak{h}}\rangle \\
&= -\langle [X,Y]_{\mathfrak{h}}, [X,Y]_{\mathfrak{h}}\rangle_{\mathfrak{h}}
\end{aligned}$$

حال (۳) از گزاره ی قبل نتیجه می شود. $\square$

نتیجه ۸.۳.۲. فرض کنید G/H یک فضای همگن باشد به طوری که جبر لی $\mathfrak{g}$ برای G، یک فرم دو خطی متقارن می پذیرد. آن گاه G/H نسبت به تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ و متر ریمان G- ناوردای g تعریف شده در قضیه ی قبل، به طور طبیعی تحویلی می باشد و انحنای برشی برای g نامنفی است.

مثال. به عنوان یک مورد خاص از نتیجه ی قبل یک گروه لی فشرده ی G را به عنوان یک فضای همگن $G/\{e\}$ را در نظر می گیریم.

برای یک فرم متقارن دو خطی معین مثبت $ad(G)$- ناوردای $\langle , \rangle$ روی جبر لی $\mathfrak{g}$، یک متر ریمان ناوردای چپ g روی $\mathfrak{g}$ در نظرمی گیریم به طوری که ناوردای راست نیز باشد. تانسور انحنای آن به صورت

$$R(X,Y) = -\frac{۱}{۴} ad([X,Y])$$

داده می شود.

لم ۹.۳.۲. فرض کنید G/H یک فضای همگن تحویلی با تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد، فرض کنید $f_t = \exp(tX)$ زیر گروه ۱- پارامتری برای G باشد که توسط یک عضو دلخواه $X \in \mathfrak{m}$ تولید شده است و $x_t = f(۰)$ یک منحنی در G/H باشد به طوریکه تغییر مکان موازی برای بردارهای مماس در صفر در امتداد منحنی x_t، $۰ \leq t \leq s$، نقطه به نقطه با مشتق f_s

که روی G/H عمل می کند یکی باشد. آن گاه برای هر $X \in \mathfrak{m}$ منحنی x_t یک ژئودزیک است.

بر عکس، هر ژئودزیک آغازی از صفر به شکل $f_t(\circ)$ است برای $X \in \mathfrak{m}$ ایی.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۴] مراجعه نمایید.

۴.۲ مترهای فینسلری ناوردا روی منیفلد های همگن

تعریف ۱.۴.۲. متر فینسلری F را روی منیفلد همگن G/H ناوردا نامیم هرگاه:

$$F(X(g_۲H)) = F(\ell_{g_{۱*}}X(g_۲H)) \qquad \forall g_۱, g_۲ \in G$$

و به ویژه:

$$F(X(eH)) = F(\ell_{g_{۱*}}X(eH)).$$

گزاره ۲.۴.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H زیر گروه بسته ی G باشد و $LieG = \mathfrak{g}$ و $LieH = \mathfrak{h}$. آن گاه یک تناظر دو سویی بین متر های فینسلری G- ناوردا روی G/H و نرم مینکوفسکی روی فضای خارج قسمتی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ موجود است به طوری که

$$F(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(x)) = F(x) \qquad \forall h \in H, \qquad x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

که در آن $Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ نمایش H روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ القا شده توسط H روی $\mathfrak{g}$ است.

اثبات. اثبات مشابه حالت ریمانی است. □

نتیجه ۳.۴.۲. فرض کنید G/H یک منیفلد همگن تحویلی با تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد، آن گاه یک تناظر یک به یک بین متر های فینسلری G- ناوردا روی G/H و نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{m}$ موجود است به طوری که

$$F(Ad(h)x) = F(x), \qquad \forall h \in H, \qquad x \in \mathfrak{m}$$

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی حقیقی و $\mathfrak{h}$ یک زیر جبر آن باشد. اگر F یک نرم مینکوفسکی روی فضای خارج قسمتی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ باشد به طوری که

$$g_y(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)u,v)+g_y(u,ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)v)+۲C_y(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)(y),u,v)=۰$$

که در آن $y,u,v\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ و $y\neq ۰$ و $x\in\mathfrak{h}$ باشند و g_y ضرب داخلی (مثبت معین) تعریف شده توسط F در y می باشد و C_y تانسور کارتان F است، آن گاه $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ (یا به طور ساده تر $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$) را جفت لی مینکوفسکی [۲۱] می نامند. به خصوص اگر F یک نرم اقلیدسی باشد (این مورد اتفاق می افتد اگر و فقط اگر برای هر y، $C_y=۰$ باشد) آن گاه $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h}\}$ جفت لی اقلیدسی نامیده می شود.

قضیه ۵.۴.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته ی G باشد، $LieG=\mathfrak{g}$ و $LieH=\mathfrak{h}$. فرض کنید یک متر فینسلری ناوردا روی منیفلد همگن G/H وجود داشته باشد، آن گاه یک نرم مینکوفسکی F روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ موجود است به طوری که $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ یک جفت لی مینکوفسکی باشد.

از طرف دیگر، اگر H همبند باشد و یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ موجود باشد به طوری که $\{\mathfrak{g},\mathfrak{h},F\}$ یک جفت لی مینکوفسکی باشد، آن گاه یک متر فینسلری ناوردا روی G/H وجود دارد.

اثبات. فرض کنید F یک متر فینسلری ناوردا روی G/H باشد. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ را با $T_۰(G/H)$ که در آن ۰ مبدا G/H است یکی می گیریم، یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ اختیار می کنیم. چون F، G- ناورداست داریم

$$F(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u))=F(u),\qquad \forall h\in H,\qquad u\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

طبق تعریف g_y داریم:

$$g_y(u,v)=g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u),Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(v))\qquad \forall y,u,v\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\qquad y\neq ۰,\qquad h\in H$$

برای هر $x\in\mathfrak{h}$، زیر گروه ۱-پارامتری $\exp(tx)$ برای H می دهد:

[۲۱] Minkowski Lie pair

$$g_y(u,v) = g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(u), Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(v)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

با مشتق گرفتن نسبت به t به دست می آوریم:

$$g_y(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)u, v) + g_y(u, ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)v) + ۲C_y(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)(y), u, v) = ۰$$

بنابراین $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ یک جفت لی مینکوفسکی است.

از طرف دیگر، فرض کنید F یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ باشد به طوری که $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, F\}$ یک جفت لی مینکوفسکی است.

برای هر $x \in \mathfrak{h}$، $y, u, v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ و $y \neq ۰$، تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$\psi(t) = g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(u), Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(v))$$

آن گاه برای هر $t_۰ \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\psi'(t_۰) = g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰x))(y)}(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(t_۰x)(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰(x))(u)), Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰(x))(v)) +$$
$$g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰x))(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰(x))(u), ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰(x))(v)) +$$
$$۲C_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰x))(y)}(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(x)(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(t_۰x))(y)), u, y) = ۰$$

بنابراین ψ یک تابع ثابت است، در نتیجه

$$g_y(u,v) = g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(u), Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\exp(tx))(v)), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

چون H همبند است پس توسط اعضایی به شکل $\exp(tx)$، $x \in \mathfrak{h}$، $t \in \mathbb{R}$ تولید می شود، بنابراین برای هر $h \in H$ داریم:

$$g_y(u,v) = g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(y)}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u), Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(v))$$

برای کامل شدن اثبات، نیاز داریم محاسباتی را انجام دهیم:

فرض کنید $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ یک پایه برای فضای خطی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ باشد. برای $u \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} - \{۰\}$، تعریف می کنیم $g_{ij}(u) = g_u(\alpha_i, \alpha_j)$. آن گاه فرمول زیر را داریم:

$$F^{۲}(u) = g_{ij}(u)u^i u^j$$

که در آن $u = u^i \alpha_i$.

حال برای هر $h \in H$ داریم

$$F^{۲}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)) = g_{ij}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u))\bar{u}^i \bar{u}^j$$

که در آن $\bar{u}^i$، $(i = ۱, ۲, ..., n)$ توسط $Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)$ تعریف شده است. فرض کنید $(m_{ij})_{n\times n}$ ماتریس معکوس $Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)$ تحت پایه ی $\alpha_۱, ..., \alpha_n$ باشد و $(m^{ij})_{n\times n}$ معکوس (m_{ij}) باشد. آن گاه $\bar{u}^i = m_{ik}u^k$

حال

$$\begin{aligned} g_{ij}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)) &= g_{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)}(\alpha_i, \alpha_j) \\ &= g_u((Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h))^{-۱}\alpha_i, (Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h))^{-۱}\alpha_j) \\ &= g_u(m^{ik}\alpha_k, m^{jl}\alpha_l) \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به دو خطی بودن g_u داریم:

$$\begin{aligned} F^{۲}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)) &= g_u(m^{ik}\alpha_k, \alpha_l)(m_{is}u^s)(m_{jt}u^t) \\ &= g_u(\alpha_i, \alpha_j)u^i u^j \end{aligned}$$

در نتیجه

$$F^{۲}(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)) = F^{۲}(u)$$

چون $F \geq ۰$، داریم:

$$F(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)(u)) = F(u)$$

بنابراین با توجه به گزاره ی ۲.۴.۲ ، یک متر فینسلری ناوردا روی G/H وجود دارد. $\square$

قضیه ۶.۴.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H زیر گروه بسته ی G باشد. فرض کنید یک متر فینسلری ناوردا روی G/H موجود باشد، آن گاه یک متر ریمانی ناوردا روی G/H وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $H = ۰$ مبدا G/H باشد، فضای مماس $T_۰(G/H)$ را برای G/H در صفر در نظر می گیریم. آن گاه F یک نرم مینکوفسکی روی $T_۰(G/H)$ تعریف می کند.

تعریف کنید $I_۰ = \{x \in T_۰(G/H) \mid F(x) = ۱\}$

آن گاه گروه $Ad(H) = \{Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h) \mid h \in H\}$، $I_۰$ را ناوردا نگه می داردیعنی:

$$
\begin{aligned}
Ad(H)I_۰ &= \left\{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \mid h \in H, x \in I_۰\right\} \\
&= \left\{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \mid h \in H, x \in T_۰\frac{G}{H}, F(x) = ۱\right\} \\
&= \left\{Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x \in T_۰\frac{G}{H} \mid F(Ad_{\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}}(h)x) = F(x) = ۱\right\} \\
&= I_۰
\end{aligned}
$$

فرض کنید $G_۱$ زیر گروه گروه خطی $GL(T_۰(G/H))$ شامل اعضایی باشد که $I_۰$ را ناوردا نگه می دارند باشد، آن گاه $G_۱$ یک گروه لی فشرده است و $Ad(H)$ یک زیر گروه $G_۱$ است.

بنابراین می توانیم یک ضرب داخلی $G_۱$- ناوردای $\langle , \rangle$ روی $T_۰(G/H)$ انتخاب کنیم، آن گاه $\langle , \rangle$، $Ad(H)$- ناوردا است.

بنابراین با استفاده از $\langle , \rangle$ می توان یک متر ریمان G- ناوردای g روی G/H تعریف کرد. □

حال می توانیم یک شرط لازم و کافی برای یک منیفلد همگن برای داشتن متر های فینسلری ناوردا ارائه دهیم.

قضیه ۷.۴.۲. فرض کنید G یک گروه لی و H زیر گروه بسته ی G باشد به طوری که G به طور موثر روی G/H عمل می کند. فرض کنید مرکز ساز H در G ناگسسته باشد، آن گاه یک متر فینسلری روی G/H موجود است اگر و فقط اگر یک نرم مینکوفسکی F روی جبر لی $\mathfrak{g}$ برای G موجود باشد به طوری که

$$F(Ad(h)x) = F(x), \qquad \forall h \in H, \qquad x \in \mathfrak{g}$$

اثبات. شرط لازم واضح است زیرا اگر یک متر فینسلری ناوردا روی G/H وجود داشته باشد طبق قضیه ی قبل، یک متر ریمانی ناوردا نیز روی G/H وجود دارد. بنابراین یک ضرب داخلی $\langle , \rangle$ روی $\mathfrak{g}$ موجود است به طوری که

$$\langle Ad(h)x, Ad(h)y\rangle = \langle x, y\rangle$$

تعریف می کنیم $F(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$، بنابراین F شرط مورد نظر را برقرار می سازد.

حال شرط کافی را اثبات می کنیم:

فرض کنید یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ موجود باشد به طوری که

$$F(Ad(h)x) = F(x), \qquad h \in H, \qquad x \in \mathfrak{g}$$

آن گاه با استفاده از قضیه ی ۵.۴.۲ ، برای هر $y \in \mathfrak{g}$، $y \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} g_y(Ad(h)(x), Ad(h)(y)) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + sAd(h)x + tAd(h)y) \mid_{s=t=0} \\ &= g_{Ad(h^{-1}y)}(x, y) \end{aligned}$$

که در آن $h \in H$، $x, y \in \mathfrak{g}$. چون $C_H(G)$ نا گسسته است می توان یک $y \in \mathfrak{g}$ غیر صفر یافت به طوری که برای هر $h \in H, Ad(h)y = y$. آن گاه ضرب داخلی g_y در رابطه ی

$$g_y(Ad(h)x, Ad(h)y) = g_y(x, y)$$

صدق می کند. فرض کنید $\mathfrak{m}$ متمم متعامد $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ نسبت به g_y باشد، آن گاه

$$Ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

و

$$F(Ad(h)x) = F(x), \qquad \forall h \in H, \qquad x \in \mathfrak{m}$$

طبق نتیجه ی ۳.۴.۲، مترهای فینسلری ناوردا روی G/H وجود دارند. $\square$

تعریف ۸.۴.۲. یک منیفلد همگن G/H با یک متر فینسلری ناوردای F را به طور طبیعی تحویلی نامیم هرگاه یک متر ریمانی ناوردای g روی G/H وجود داشته باشد به طوری که $(G/H, g)$ به طور طبیعی تحویلی باشد و التصاق های g و F یکسان باشند.

در این تعریف فرض شده چنین متری باید برِوالد باشد.

قضیه ۹.۴.۲. یک فضای فینسلری همگن (M, F) به طور طبیعی تحویلی است اگر و فقط اگر یک زیر گروه از گروه کامل ایزومتری های G وجود داشته باشد به طوری که به طور متعدی روی M عمل کند که در آن $M = G/H$ و H زیر گروه ایزوتروپی برای G در نقطه ی $x \in M$ باشد ، و یک تجزیه ی $Ad(H)$- ناوردا برای جبر لی $\mathfrak{g}$ به شکل $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ موجود باشد به طوری که ژئودزیک های (M, F) آغازی از $x = eH$، به شکل $\exp(tX).x$ باشند برای $X \in \mathfrak{m}$.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم (M, F) به مفهوم تعریف ۸.۴.۲ به طور طبیعی تحویلی باشد، در این صورت یک متر ریمانی g موجود است که به طور طبیعی تحویلی است و التصاق های F و g یکسان هستند. این بدین معنی است که F یک متر برِوالد است. فرض کنید $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ تجزیه ی مورد نظر در تعریف ۸.۴.۲ باشد، آن گاه ژئودزیک های $(G/H, g)$ آغازی از مبدا $eH = \circ$ مطابق بخش قبل به صورت

$$\exp(tX).\circ, \qquad X \in \mathfrak{m}$$

می باشند. چون F یک متر برِوالد است با همان التصاق مشابه التصاق متر ریمان g، ژئودزیک های F و g نیز یکسان هستند. بنابراین ژئودزیک های $(G/H, F)$ آغازی از مبدا نیز به شکل

$$\exp(tX).\circ, \qquad X \in \mathfrak{m}$$

می باشند.

از طرف دیگر، فرض می کنیم یک گروه متعدی G از ایزومتری های موجود باشد که در شرایط قضیه صدق کند، ابتدا نشان می

دهیم F باید یک متر بروالد باشد. در حقیقت با استفاده از تناظر

$$X \in \mathfrak{m} \longmapsto \frac{d}{dt}\exp(tX).x \mid_{t=0}$$

می توان فضای مماس T_xM را با $\mathfrak{m}$ یکی گرفت. سپس به وسیله ی شرط روی ژئودزیک های (M, F) می توان مشاهده کرد نگاشت نمایی Exp_x برای (M, F) در x به صورت

$$Exp(X) = \pi(\exp(X)), \qquad X \in \mathfrak{m}$$

می باشد که در آن π تصویر طبیعی از G بروی G/H می باشد.

چون نگاشت های $\exp$ و π هموار هستند، Exp_x نیز یک نگاشت هموار است. چون (M, F) همگن است، نگاشت نمایی همه جا هموار است. بنابراین F باید یک متر بروالد باشد.

چون $(G/H, F)$ یک متر بروالد است، یک متر ریمانی G- ناوردای g روی G/H موجود است به طوری که التصاق های F و g یکسان هستند، لذا آن ها ژئودزیک های یکسان دارند. در نتیجه برای هر $X \in \mathfrak{m}$ منحنی $\exp(tX).0$ یک ژئودزیک همگن برای g است. بردار $X \in \mathfrak{m}$ یک بردار ژئودزیک است اگر و فقط اگر

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0 \qquad \forall Y \in \mathfrak{m}$$

که $\langle , \rangle$ ضرب داخلی القا شده توسط g روی $\mathfrak{m}$ است.

حال برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$، قرار می دهیم $X' = X + Y$ و $Y' = Y + Z$ آن گاه داریم:

$$0 = \langle [X', Y']_{\mathfrak{m}}, X' \rangle = \langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle + \langle [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle$$

این ایجاب می کند $(G/H, g)$ به طور طبیعی تحویلی باشد. $\square$

در ادامه تعریف دیگری برای به طور طبیعی تحویلی بودن منیفلد همگن فینسلری ارائه می دهیم، سپس رابطه ی این دو تعریف را بیان می کنیم.

تعریف ۱۰.۴.۲. یک منیفلد همگن G/H با یک متر فینسلری ناوردای F را به طور طبیعی تحویلی نامیم هرگاه یک تجزیه ی $Ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ موجود باشد به طوری که

$$g_Y([X,U]_{\mathfrak{m}}, V) + g_Y(U, [X,V]_{\mathfrak{m}}) + ۲C_Y([X,Y]_{\mathfrak{m}}, U, V) = ۰ \qquad (*)$$

که در آن $Y \neq ۰$ و $X, U, V \in \mathfrak{m}$.

قضیه ۱۱.۴.۲. اگر یک فضای فینسلری همگن $(G/H, F)$ در شرط $(*)$ صدق کند آن گاه باید در مفهوم تعریف ۸.۴.۲ نیز به طور طبیعی تحویلی باشد.

اثبات. فرض کنید $(G/H, F)$ در شرط $(*)$ صدق کند، آن گاه برای هر $X \in \mathfrak{m} \setminus ۰$ و $U \in \mathfrak{m}$ داریم:

$$g_X([X,U]_{\mathfrak{m}}, X) + g_X(U, [X,X]_{\mathfrak{m}}) + ۲C_X([X,X]_{\mathfrak{m}}, U, X) = ۰$$

یعنی

$$g_X([X,U]_{\mathfrak{m}}, X) = ۰ \qquad \forall U \in \mathfrak{m}$$

این ایجاب می کند منحنی $\exp(tX).۰$، که در آن ۰ مبدا فضای همدسته است، یک ژئودزیک باشد. آن گاه طبق قضیه ی ۹.۴.۲ ، $(G/H, F)$ به طور طبیعی تحویلی است. □

تذکر: طبق این قضیه جامع تر است که یک فضای همگن فینسلری را به طور طبیعی تحویلی نامیم هرگاه در تعریف ۸.۴.۲ صدق کند.

قضیه ۱۲.۴.۲. فرض کنید G/H یک منیفلد همگن با یک متر فینسلری ناوردای F باشد به طوری که $(G/H, F)$ با تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ به طور طبیعی تحویلی باشد، آن گاه

(۱) تانسور انحنای F به صورت زیر داده می شود:

$$(R(X,Y)Z)_۰ = \frac{۱}{۴}[X,[Y,Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۴}[Y,[X,Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{۱}{۲}[[X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} - [[X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z]$$

که در آن $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

(۲) فرض کنید $Y \in \mathfrak{m}$ ، P صفحه ی شامل Y در $\mathfrak{m}$ باشد، آن گاه انحنای پرچمی برای پرچم (P, Y) به صورت زیر می باشد:

$$K(P,Y) = -\frac{۱}{۴} g_Y([U,[V,U]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}, V) - \frac{۱}{۲} g_Y([[U,V]_{\mathfrak{m}}, U]_{\mathfrak{m}}, V) - g_Y([[V,U]_{\mathfrak{h}}, U]_{\mathfrak{m}}, V)$$

که در آن $U = \dfrac{Y}{\sqrt{g_Y(Y,Y)}}$ و U و V یک پایه ی متعامد یکه نسبت به g_Y برای P هستند.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۷] مراجعه نمایید. □

فصل ۳

ژئودزیک و انحنای پرچمی

۱.۳ مقدمه

از میان متر های همگن ریمانی بهترین نوع به طور طبیعی تحویلی ها هستند که خواص هندسی جالبی دارند و بسیار مورد توجه می باشند. فضاهای به طور طبیعی تحویلی توسط تعدادی از افراد به عنوان یک تعمیم طبیعی از فضای متقارن ریمانی بررسی می شوند. یک قضیه ی کلی با بسیاری از مثال ها توسط دی آتری [1] و زیلر [2] بسیار خوب تشریح شده است [۱۵]. آتری و زیلر گروه های لی فشرده ی به طور طبیعی تحویلی با متر های ناوردای چپ را در [۱۵] دسته بندی کرده اند.

بسیاری از ناوردا ها در هندسه ی فینسلری به طور دقیق برای اولین بار برای منیفلد های راندرز محاسبه شدند. در این جا می خواهیم فضاهای همگن به طور طبیعی تحویلی راندرز را بررسی کنیم. ابتدا وجود و ساخت متر های راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن را اثبات می کنیم، سپس یک شرط لازم و کافی برای آن که متر های راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن تحویلی از نوع بروالد باشند بیان نموده و در نهایت فضاهای همگن به طور طبیعی تحویلی راندرز را شرح داده و برای متر های راندرز ناوردا روی این فضا ها ژئودزیک و انحنای پرچمی را محاسبه می کنیم.

۲.۳ وجود و ساخت مترهای راندرز ناوردا روی منیفلدهای همگن

تذکر: تمام مطالب ارجاع داده نشده ی این بخش به مرجع [۹] بر می گردد.

[1] D' Atri
[2] W. Ziller

فرض می کنیم G/H یک منیفلد همگن تحویلی با تجزیه ی $Ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد که در آن $\mathfrak{m}$ یک زیر فضای $\mathfrak{g}$ است. فرض می کنیم $\mathfrak{g} = LieG$ و $\mathfrak{h} = LieH$.

با توجه به تعریف متر راندرز، برای ساخت متر راندرز ناوردا روی G/H، لازم است ابتدا میدان های برداری ناوردا روی G/H را پیدا می کنیم.

گزاره ی زیر توصیف کاملی برای میدان های برداری ناوردا ارائه می دهد:

گزاره ۱.۲.۳. یک تناظر دو سویی بین مجموعه ی میدان های برداری ناوردا روی G/H و زیر فضای

$$V = \{X \in \mathfrak{m} \mid Ad(h)X = X, \forall h \in H\}$$

وجود دارد.

اثبات. فرض می کنیم $\pi : G \longrightarrow G/H$ تصویر طبیعی باشد و L_g و R_g به ترتیب انتقال های چپ و راست روی G باشند برای هر $g \in G$. مشتق نگاشت π به صورت زیر می باشد:

$$d\pi = \pi_{*e} : T_eG \longrightarrow T_{eH}G/H$$

که $T_{eH}G/H$ فضای مماس بر G/H در مبدا $\{eH\} = \circ$ است.

داریم:

$$kerd\pi = \mathfrak{h}$$

انتقال $\tau(g) : G/H \longrightarrow G/H$ که برای هر $g \in G$ به صورت زیر می باشد را در نظر می گیریم:

$$xH \longmapsto gxH$$

داریم:

$$\pi \circ L_g = \tau(g) \circ \pi$$

برای هر $h \in H$ داریم:

$$\pi \circ R_h = \pi$$

و

$$Ad(g)X = dR_{g^{-1}} \circ dL_g(X)$$

بنابراین برای مشتقات داریم:

$$d\pi \circ Ad(h)X = d\tau(h)_0 \circ d\pi(X), \qquad X \in \mathfrak{g}$$

در نتیجه تحت یکریختی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_0(G/H)$ انتقال خطی $Ad(h)$ برای $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ با انتقال خطی $d\tau(h)_0$ برای $T_0(G/H)$ متناظر است.

حال تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ یکریختی طبیعی $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{m}$ را نتیجه می دهد.

تحت این یکریختی انتقال خطی $d\tau(h)_0$ برای $T_0(G/H)$ با انتقال خطی $Ad(h)$ برای $\mathfrak{m}$ متناظر می شود.

حال فرض می کنیم $X \in V$، فرض می کنیم $\tilde{X}_0$ تصویر آن تحت یکریختی $T_0(G/H) \simeq \mathfrak{m}$ باشد.

فرض می کنیم $g \in G$، یک بردار مماس در نقطه ی gH را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{X}_{gH} := d(\tau(g))_0(\tilde{X}_0)$$

نشان می دهیم $\tilde{X}$ یک میدان برداری خوش تعریف روی G/H می باشد: فرض می کنیم $g_1H = gH$ لذا $g^{-1}g_1 \in H$، از طرفی طبق خاصیت اعضای V داریم $Ad(h)X = X$.

حال طبق مطالب فوق داریم:

$$d\tau(g^{-1}g_1)_0 \tilde{X}_0 = \tilde{X}_0$$

در نتیجه

$$d\tau(g)_0 \tilde{X}_0 = d\tau(g_1)_0 \tilde{X}_0$$

سپس $\tilde{X}(gH) = \tilde{X}(g_1 H)$، بنابراین $\tilde{X}$ یک میدان برداری خوش تعریف روی G/H است.

حال ناوردا بودن $\tilde{X}$ را تحت عمل G بررسی می کنیم:

فرض می کنیم $g \in G$، می دانیم $\tau(g)_*(X)f = X(f\circ\tau(g))$، از طرفی داریم $X(f\circ\tau(g))(x) = X(f)(gx) =$ $X(f\circ L_g)(x) = L_{g*}(X)f$ بنابراین داریم:

$$\tau(g)_*(X) = L_{g*}(X)$$

با استفاده از این نکته خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(gH) &= d(\tau(g))_\circ(\tilde{X})_\circ) \\
&= d(L_g)_\circ(\tilde{X}_\circ) = L_{g*}(\tilde{X}_\circ) \\
&= L_{g*}(\tilde{X}(eH))
\end{aligned}$$

لذا $\tilde{X}$ تحت عمل G ناوردا است.

دو سویی بودن تناظر $\tilde{X} \longmapsto X$ به آسانی قابل بررسی است. $\square$

فرض کنید G/H یک منیفلد همگن تحویلی باشد، طبق گزاره ی ۶.۴.۱، متر ریمان زمینه ی یک متر راندرز ناوردا روی G/H باید ناوردا باشد.

بنابراین ابتدا یک متر ریمانی ناوردای $\tilde{a}$ را روی G/H ثابت فرض می کنیم و سپس متر های راندرز ناوردا با متر ریمان زمینه ی $\tilde{a}$ را روی G/H در نظر می گیریم.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید G/H یک منیفلد همگن باشد، متر ریمانی G- ناوردای $\tilde{a}$ یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{g}$ القا می کند به طوری که

$$\langle Ad(h)X, Ad(h)Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$

برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ و $h \in H$.

اثبات. می دانیم برای $C_h : G/H \longrightarrow G/H$ که $h \in H$ داریم

$$C_h(xH) = hxHh^{-۱} = L_h \circ R_{h^{-۱}}$$

بنابراین چون $h \in H$، لذا $C_h(xH) = L_h(xH)$.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Ad(h)X = (C_h)_* X = (L_h)_* X$$

لذا

$$\begin{aligned} \langle Ad(h)X, Ad(h)Y \rangle &= \langle L_{h*}X, L_{h*}Y \rangle \\ &= L_h^* \langle X, Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

□

تذکر: زیر فضای $\mathfrak{m}$ در تجزیه ی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ را متمم متعامد $\mathfrak{h}$ نسبت به این ضرب داخلی در نظر می گیریم.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $\tilde{a}$ یک متر ریمان ناوردا روی G/H باشد، و فرض کنید $\mathfrak{m}$ متمم متعامد $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ نسبت به ضرب داخلی القا شده توسط $\tilde{a}$ روی $\mathfrak{g}$ باشد، آن گاه یک تناظر دو سویی بین مجموعه ی همه ی متر های راندرز ناوردا روی G/H با متر ریمان زمینه ی $\tilde{a}$ و مجموعه ی

$$V_۱ = \{X \in \mathfrak{m} \mid Ad(h)X = X, \langle X, X \rangle < ۱, \forall h \in H\}$$

وجود دارد.

اثبات. فرض می کنیم $X \in V_1$، مطابق گزاره ی ۱.۲.۳ X با یک میدان برداری ناوردای $\tilde{X}$ روی G/H متناظر است.

چون $\tilde{X}$ تحت عمل G ناورداست داریم:

$$\tilde{a}(gH)(\tilde{X},\tilde{X}) = \tilde{a}(H)(\tilde{X},\tilde{X}) = \langle X, X\rangle < 1$$

با استفاده از لم ۳.۴.۱ می توانیم متر راندرز F_X را روی G/H به صورت زیر تعریف کنیم:

$$F_X(gH,y) = \sqrt{\tilde{a}(gH)(y,y)} + \tilde{a}(gH)(\tilde{X},y), \qquad y \in T_{gH}(G/H)$$

حال ناوردا بودن F_X تحت عمل G را بررسی می کنیم: با توجه به تعریف برای هر $g, g_1 \in G$ داریم:

$$F_X(gH, y(gH)) = \sqrt{\tilde{a}(gH)(y(gH), y(gH)} + \tilde{a}(gH)(\tilde{X}(gH), y(gH))$$

و

$$F_X(gH, (L_{g_1 *})_{gH} y(gH)) = \sqrt{\tilde{a}(gH)(L_{g_1 *}y(gH), L_{g_1 *}y(gH)} + \tilde{a}(gH)(\tilde{X}(gH), L_{g_1}y(gH))$$

با توجه به G- ناوردا بودن متر ریمان $\tilde{a}$ روی G/H نتیجه می گیریم F_X نیز G- ناورداست.

به آسانی دیده می شود تناظر $X \longrightarrow F_X$ دوسویی است. □

۳.۳ ژئودزیک ها و انحناهای پرچمی مترهای راندرز ناوردا روی منیفلد های همگن

قضیه ۱.۳.۳. با مفروضات قضیه ی قبل، برای هر $X \in V_1$ متر راندرز متناظر از نوع بروالد است اگر و فقط اگر X در شرط زیر صدق کند:

$$\langle [Y,X]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle + \langle Y, [Z,X]_{\mathfrak{m}}\rangle + \langle [Z,Y]_{\mathfrak{m}}, X\rangle = 0 \qquad (*)$$

برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم متر راندرز متناظر با $X \in V_1$ از نوع بروالد باشد، می دانیم یک متر راندرز از نوع بروالد است اگر و فقط اگر میدان برداری $\tilde{X}$ نسبت به متر ریمان $\tilde{a}$ موازی باشد، بنابراین داریم:

$$\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X} = 0$$

برای هر میدان برداری $\tilde{Y}$ روی G/H.

بنابراین و با توجه به شرط ناتباهیده بودن متر ریمان خواهیم داشت:

$$\tilde{a}(\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X}, \tilde{Z}) = 0$$

برای هر میدان برداری $\tilde{Y}$ و $\tilde{Z}$ روی G/H.

چون متر ریمان $\tilde{a}$، G- ناورداست داریم:

$$\langle \nabla_Y \tilde{X}, Z\rangle = 0 \qquad \forall Y, Z \in \mathfrak{m} = T_{0=eH}(G/H)$$

می دانیم فرمول التصاق لوی چویتا برای یک متر ریمانی G- ناوردا روی یک منیفلد همگن G/H به صورت زیر می باشد:

$$2\langle \nabla_Y \tilde{X}, Z\rangle = \langle Y, [Z, X]_{\mathfrak{m}}\rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}\rangle - \langle Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}\rangle$$

بنابراین داریم:

$$\langle Y, [Z, X]_{\mathfrak{m}}\rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}\rangle - \langle Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}\rangle = 0$$

و این یعنی X در شرط $(*)$ صدق می کند.

حال فرض می کنیم X در رابطه ی $(*)$ صدق می کند، با توجه به فرمول التصاق لوی چویتا برای متر ریمانی ناوردا روی منیفلد همگن داریم:

$$2\langle \nabla_Y \tilde{X}, Z\rangle = 0 \qquad \forall Z, Y \in \mathfrak{m}$$

در نتیجه با توجه به ناوردا بودن متر ریمان داریم:

$$\langle \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle = 0$$

برای هر میدان برداری Y و Z روی G/H.

و با توجه به ناتباهیده بودن متر ریمان و دلخواه بودن $\tilde{Z}$ داریم:

$$\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X} = 0 \qquad \forall \tilde{Y}$$

و این یعنی میدان برداری $\tilde{X}$ نسبت به متر ریمان $\tilde{a}$ موازی است، بنابراین متر راندرز از نوع بروالد است. □

همه ی متر های راندرز از نوع بروالد نیستند و محاسبه ی التصاق و ژئودزیک ها و انحنای پرچمی آن ها بسیار مشکل است. حتی اگر متر راندرز روی منیفلد همگن از نوع بروالد باشد محاسبه ی این موارد بسیار پیچیده است، بنابراین ما فرض می کنیم منیفلد همگن $(G/H, F)$ با تجزیه ی $Ad(H)$- ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ به طور طبیعی تحویلی باشد.

لم ۲.۳.۳. فرض کنید $(G/H, F)$ یک فضای راندرز همگن با متر راندرز F تعریف شده توسط متر ریمان $\tilde{a} = \tilde{a}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X باشد به طوری که این متر راندرز از نوع بروالد باشد. آن گاه $(G/H, F)$ به طور طبیعی تحویلی است اگر و فقط اگر متر ریمان زمینه $(G/H, \tilde{a})$ به طور طبیعی تحویلی باشد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم $(G/H, F)$ فضای همگن به طور طبیعی تحویلی راندرز باشد، چون F از نوع بروالد است لذا التصاق های F و $\tilde{a}$ یکسان هستند، بنابراین طبق تعریف ۸.۴.۲ یک متر ریمان ناوردای g روی G/H وجود دارد به طوری که $(G/H, g)$ به طور طبیعی تحویلی است، در حالت متر های راندرز این متر ریمانی دقیقا همان متر ریمان زمینه ی $\tilde{a}$ خواهد بود.

حال فرض می کنیم $(G/H, \tilde{a})$ به طور طبیعی تحویلی باشد، چون F از نوع بروالد است التصاق های F و $\tilde{a}$ یکسان هستند، لذا طبق تعریف ۸.۴.۲ $(G/H, F)$ به طور طبیعی تحویلی می باشد. □

با توجه به لم فوق خواهیم داشت:

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید $(G/H, \tilde{a})$ یک منیفلد همگن به طور طبیعی تحویلی ریمانی باشد و $X \in V_۱$ در شرط $(*)$ صدق کند. فرض کنید F متر راندرز متناظر روی G/H باشد. آن گاه داریم:

(۱) ژئودزیک های F آغازی از مبدا $eH = ۰$ به صورت زیر می باشد:

$$\gamma_Y : t \longmapsto \exp(tY).۰ \qquad (Y \in \mathfrak{m})$$

(۲) فرض کنید Y یک بردار غیر صفر در $\mathfrak{m}$ باشد و P یک صفحه ی شامل Y در $\mathfrak{m}$، آن گاه انحنای پرچمی برای پرچم (P, Y) در $T_۰(G/H)$ به صورت

$$K(P,Y) = g_l(\frac{۱}{۴}[[U,l]_\mathfrak{m}, l]_\mathfrak{m} + [[U,l]_\mathfrak{h}, l], U)$$

داده می شود که در آن $l = \dfrac{Y}{\sqrt{g_Y(Y,Y)}}$، U یک بردار در P است به طوری که U, l یک پایه ی متعامد یکه نسبت به g_l برای P باشد.

اثبات. چون $X \in V_۱$ در شرط $(*)$ صدق می کند، لذا طبق قضیه ی ۱.۳.۳ نتیجه می شود متر راندرز متناظرش یعنی F از نوع بروالد است،

هم چنین التصاق چرن برای F و التصاق ریمانی برای $\tilde{a}$ نقطه به نقطه یکسان هستند. (طبق تعریف بروالد بودن متر راندرز)، بنابر این ژئودزیک های آن نیز با ژئودزیک های یک منیفلد همگن به طور طبیعی تحویلی ریمانی یکی است که فرمول آن ها در بخش های قبل آمده است و می توان مستقیم از همان فرمول ها استفاده کرد. هم چنین داریم:

$$R^F(U,V)W = R^{\tilde{a}}(U,V)W$$

که در آن R^F و $R^{\tilde{a}}$ به ترتیب تانسورهای انحنای F و $\tilde{a}$ هستند.

حال فرض می کنیم:

$$R := R^F = R^{\tilde{a}}$$

چون $\tilde{a}$ به طور طبیعی تحویلی است لذا با استفاده از گزاره ی ۳.۶.۲ داریم:

$$(R(U,V)W)_0 = \frac{1}{4}[U,[V,W]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[V,[U,W]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[[U,V]_{\mathfrak{m}},W]_{\mathfrak{m}} - [[U,V]_{\mathfrak{h}},W]$$

برای هر $U,V,W \in \mathfrak{m}$، بنابراین:

$$(R(U,l)l)_0 = \frac{1}{4}[U,[l,l]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[l,[U,l]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[[U,l]_{\mathfrak{m}},l]_{\mathfrak{m}} - [[U,l]_{\mathfrak{h}},l] = \frac{1}{4}[[U,l]_{\mathfrak{m}},l]_{\mathfrak{m}} + [[U,l]_{\mathfrak{h}},l]$$

از طرف دیگر داریم:

$$K(P,l) = \frac{g_l(R(U,l)l,U)}{g_l(l,l).g_l(U,U) - g_l^2(l,U)}$$

که در آن

$$\begin{aligned} g_l(U,V) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\{F^2(l+sU+tV)\}\mid_{s=t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\{g(l+sU+tV, l+sU+tV) + g^2(X, l+sU+tV) \\ &\quad +2\sqrt{g(l+sU+tV, l+sU+tV)}g(X, l+sU+tV)\}\mid_{s=t=0} \end{aligned}$$

حال به محاسبه ی $g_l(U,V)$ می پردازیم:

با استفاده از خاصیت دو خطی بودن متر ریمان می توان نوشت:

$$\begin{aligned} &g(l+sU+tV, l+sU+tV) + g^2(X, l+sU+tV) + \\ &2\sqrt{g(l+sU+tV, l+sU+tV)}g(X, l+sU+tV) = g(l,l) + sg(l,U) + tg(l,V) + \\ &sg(U,l) + s^2g(U,U) + stg(U,V) + tg(V,l) + tsg(V,U) + t^2g(V,V) + g(X,l).g(X,l) + \\ &sg(X,l).g(X,U) + tg(X,l).g(X,V) + sg(X,U).g(X,l) + s^2g(X,U).g(X,U) + \\ &stg(X,U).g(X,V) + tg(X,V).g(X,l) + tsg(X,V).g(X,U) + t^2g(X,V).g(X,U) + \\ &2\sqrt{g(l,l) + sg(l,U) + tg(l,V) + sg(U,l) + s^2g(U,U) + stg(U,V) + tg(V,l) + tsg(V,U) + t^2g(V,V)} \\ &.(g(X,l) + sg(X,U) + tg(X,V)) \end{aligned}$$

حال از طرفین تساوی فوق نسبت به t مشتق می گیریم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(l+sU+tV,l+sU+tV)+g^{2}(X,l+sU+tV)+2\sqrt{g(l+sU+tV,l+sU+tV)}$$

$$.g(X,l+sU+tV)\}\mid_{t=0}=$$

$$2(g(l,V)+sg(U,V))+2(g(X,l).g(X,V)+sg(X,U).g(X,V))$$
$$+\frac{2(g(l,V).g(X,l)+sg(l,V).g(X,U)+sg(U,V).g(X,l)+s^{2}g(U,V).g(X,U)}{\sqrt{g(l,l)+2g(l,U)+s^{2}g(U,U)}}$$
$$+2g(X,V)\sqrt{g(l,l)+2sg(l,U)+s^{2}g(U,U)}$$

و به با مشتق گیری نسبت به s و جاگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g_l(U,V) \quad &= \quad g(U,V)+g(X,U)g(X,V)-\frac{g(X,l)g(l,V)g(l,U)}{g(l,l)^{3/2}} \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{g(l,l)}}\{g(X,U)g(l,V)+g(X,l)g(U,V)+g(X,V)g(l,U)\} \end{aligned}$$

و

$$g_l(R(U,l)l,U)=g_l(\alpha,U)$$

که در آن

$$\alpha=\frac{1}{4}[[U,l]_{\mathfrak{m}},l]_{\mathfrak{m}}+[[U,l]_{\mathfrak{h}},l]$$

با جاگذاری این رابطه در فرمول انحنای پرچمی و با توجه به اینکه U و l پایه های متعامد یکه نسبت به g_l هستند، خواهیم داشت:

$$K(P,Y)=g_l(\frac{1}{4}[[U,l]_{\mathfrak{m}},l]_{\mathfrak{m}}+[[U,l]_{\mathfrak{h}},l],U)$$

□

تذکر: در قضیه ی قبل $l=\dfrac{Y}{g_Y(Y,Y)}$، با محاسبه ی $g_Y(Y,Y)$ به روش فوق داریم:

$$g_Y(Y,Y)=g(Y,Y)+g(X,Y)(g(X,Y)+2\sqrt{g(Y,Y)})$$

بنابراین چون $g_Y(Y,Y)$ به s و t وابسته نیست لذا جاگذاری آن در محاسبات قبلی تاثیری نخواهد داشت.

مراجع

[1] D. Bao and S. S. chern and Z. shen. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Springer Verlag, New York, 2000.

[2] D. Bao and C.Roblers and Z. Shen. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom*, 66(3):377–435, 2004.

[3] G. Randers. On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. *J. Phys. Rev.*, 59:195–199, 1941.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foudations of Differential Geometry vol ll. *Interscience Publisher*, 1969.

[5] S. S. Chern and Z. Shen. Riemann-Finsler Geometry vol 6. *World Scientific Publisher*.

[6] D. Latifi. Homogeneous geodesics in homogeneous Finsler space. *J. Geom. Phys.*, 57:1421–1433, 2007.

[7] S. Deng, Z. Hou. Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds. *J. Phys. A: Math. Goem*, 37:8245–8253, 2004.

[8] S. Deng, Z. Hou. The group of isometries of a Finsler space. *Pacific. J. Math*, 207(1):149–155, 2002.

[9] S. Deng, Z. Hou. "Invariant Randers Metrics on Homogeneous Riemannian Manifold", J. Phy. A: Math. Gen. 37. 4353-60, (2004).

[10] John M. Lee. Introduction to smooth manifolds. *Springer-Verlag New York*.

[11] John M. Lee. Riemannian Manifolds: An Introduction to curvatur. *Springer-Verlag New York.Inc*.

[12] S. Deng. Some Applications of Lie Theory to Finsler Geometry.

[13] H. B. Rademacher. Non reversible Finsler Metrics of Positive Flag Curvature. *MSRI Publication*, 50, 2004.

[14] L. J. Astola. Multi-Scale Riemann-Finsler Geometry.

[15] J. E. D' Atri, W. Ziller. Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 215, 1979.

[16] J. Milnor. Curvature of left Invariant Metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, 21:293–329, 1976.

[17] H. Samelson. On curvatur and characteristic of homogeneous spaces. *Michigan Math. J.*, 5:13–18, 1958.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

از نوع بروالد .... Berwald type
التصاق .... connection
التصاق چرن .... chern connectin
التصاق لوی چویتا .... levi - civita connection
انتقال .... translation
انحنا .... curvature
انحنای برشی .... sectional curvature
انحنای پرچمی .... flag curvature
به طور طبیعی تحویلی .... naturally reductive
به طور متعدی .... transitively
پایه متعامد یکه .... orthonormal basis
تابع هموار .... smooth fuction
تانسور اساسی .... foundamental tensor
تحدب قوی .... strong convexity
تجزیه .... decomposition
تناظر دو سویی .... bijection
جبر لی .... Lie algebra
زیرگروه ۱-پارامتری .... one-parameter subgroup
ژئودزیک .... geodesics
سازگار با .... compatible with
ضرایب .... coefficients
عمل .... actin
غوطه ور .... immersed
کروشه لی .... Lie bracket
گروه لی .... Lie group
گسترش .... extension
مبدا .... origin
متقارن .... symmetric
متقارن کج .... skew-symmetric
مختصات موضعی .... local coordinate
مدار .... orbit
مشتق هموردا .... covariant derivative

منظم . . . . *regularity*
منیفلد . . . . *manifold*
منیفلد همگن تحویلی . . . . *reductive homogeneous manifold*
موازی . . . . *parallel*
ناوردا . . . . *invariant*
نشانده شده . . . . *embedded*
نمادهای کریستوفل . . . . *christoffel symbols*
نمایش الحاقی . . . . *adjoint represention*
همگن مثبت . . . . *positive homogenit*

Abstract

In this thesis, we study Randers on homogeneous manifolds. we first give a complete description of invariant Riemannian mertics and invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds, then we explain existence and construction of the invariant Randers metrics on homogeneous manifolds, finally we calculate the geodesics and flag curvatures.

Keywords: *Naturally reductive homogeneous, Invariant Randers metric, Geodesic, flag curvature.*

Shahrood University of Technology

Facualty Sciences

Department of Mathematics

M.S. Thesis

Invariant Randers metrics on homogeneous Riemannian manifolds

By:

Sakineh Marezloo

Supervisor:
Dr. Heydar Jafari
Dr. Hamid Reza Salimi Moghaddam

September 2012