



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
، گرایش

بررسی نامساویهای احتمالی برای دنباله ای از داده های مستقل و وابسته و کاربردهای آنها

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

پژوهشگر

سعید حسن فینی زاده بیدکلی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: حسن فینی زاده بیدگلی

نام: سعید

عنوان: بررسی نامساویهای احتمالی برای دنباله ای از داده های مستقل و وابسته و کاربردهای آنها

استاد راهنما: دکتر احمد نزاکتی رضازاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته:

گرایش:

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱

تعداد صفحات: ۶۹

واژگان کلیدی: اندازه-نامساوی چبیشف-مارکف-گوس-کمپ میدل-تک مُده-تک متغیره-چند متغیره-جنگ-جنسن

چکیده

یکی از مباحث مطرح شده در ریاضیات مبحث اندازه (اندازه ریاضی) می باشد، که اولاً اندازه در ریاضیات مطرح می شود، ثانیاً احتمال را به عنوان اندازه ریاضی مطرح می نماییم؛ نامساویهای مختلف، مطرح شده در احتمال را بررسی می کنیم. هدف اصلی ما در این پایان نامه این است که، تعدادی از نامساویهای معروف در مورد اندازه ریاضی (که بالطبع برای اندازه احتمال نیز برقرار می باشند) را مطرح کرده و بهبود بعضی از آنها را در حالت های عمومی و خاص بررسی کنیم؛ با توجه به کاربردی بودن نامساوی چبیشف، تمرکز ما بیشتر روی این نامساوی و گسترش و بهبود آن می باشد.

تقدیم بہ ہمہ ی کسانى کہ

مى خوانند مثل ہیچ کس نباشند

سنت اوست نوآوری...^۱

چرا عاقلان را نصیحت کنیم	بیاید از عشق صحبت کنیم
تمام عبادات ما عادت است	به بی عادتگی کاش عادت کنیم
چه اشکال دارد پس از هر نماز	دو رکعت گلی را عبادت کنیم
به هنگام نیت برای نماز	به آلاله ما قصد قربت کنیم
چه اشکال دارد که در هر قنوت	دمی بشو از نی حکایت کنیم؟
چه اشکال دارد در آئینه ها	جمال خدا را زیارت کنیم؟
مگر موج دریا ز دریا جداست	چرا بر «یکی» حکم «کثرت» کنیم؟
پراکندگی حاصل کثرت است	بیاید تمرین وحدت کنیم

«وجود» تو چون عین «ماییت» است
 اگر عشق خود علت اصلی است
 بیایب احساس و اندیشه را
 پر از گلشن راز، از عقل سرخ
 بیاید تا عین عین القضاات
 اگر سنت اوست نوآوری
 مگو کهنه شد رسم عهد الست
 برادر چه شد رسم اخوانیه؟
 بگو قافیه سست یا نادرست
 خدایا دلی آفتابی بده

چرا باز بحث «اصالت» کنیم؟
 چرا بحث «معلول» و «علت» کنیم؟
 پر از نقل مهر و محبت کنیم
 پر از کیمیای سعادت کنیم
 میان دل و دین قضاوت کنیم
 نگاهی هم از نوبه سنت کنیم
 بیاید تجدید بیعت کنیم
 بیاید عهد اخوت کنیم
 همین بس که ماساده صحبت کنیم
 که از باغ گل حمایت کنیم

رعایت کن آن عاشقی را که گفت:

«بی‌عاشقی را رعایت نکنیم»

سپاسگزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نزاکتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر شفیع‌ی هولیقی که زحمت همکاری این مجموعه بدون داشتن هیچ چشمداشتی را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و نیز از آقای دکتر علی مس فروش و آقای مروج و خانم حسینیان به خاطر پاسخ‌گویی به سوالاتم در مورد $\text{\LaTeX}$ ، کمال قدردانی را داشته باشم. همچنین از دیگر اساتید دانشکده ریاضی یا حتی خارج از دانشکده ریاضی که برای بعضی سؤالات مجبور بودم مزاحمشان بشوم، مخصوصاً آقای موسوی مراتب سپاسگزاری داشته باشم و امیدوارم تمام اساتید دلخوری از من نداشته باشند و اگر موردی بوده که هست مرا حلال کنند. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از دیگر اعضای خانواده محترم که حمایت‌هایشان همیشه قوت قلبم بوده است، و تشکر ویژه از برادرم مهدی و خواهرم فاطمه که حمایت مالی و آموزشی ایشان در دوره ارشد بی‌دریغ بود.

سعید حسن فنی زاده بیدکلی
شهریور ۱۳۹۱

لیست جداول

۱۹	جدول مربوط به مقایسه ضریب کمپ-میدل و ثابت چیشف برای r های مختلف . . .	۱.۲
۲۱	پوشش شبیه سازی شده چند نمونه توزیع مقیاس به حجم ۱۵۰۰۰	۲.۲
۲۱	مقایسه کران بدست آمده برای r های مختلف و مقدار ۰.۴۵۵ /	۳.۲
۳۰	B_n و $C^*(n, 1)$ برای n های مختلف	۴.۲
۳۰	$C^*(n, \lambda)$ برای مقادیر مختلف n و λ	۵.۲
۴۰	$C^*(r)$ برای ابعاد مختلف نرمال آمیخته مقیاس	۱.۳
۴۱	$C^*(r)$ برای تک مده متقارن کروی	۲.۳
۴۱	مقدار احتمال (۱.۳) و مقایسه آن با کرانی که بوسیله نامساوی چیشف بدست آمده . .	۳.۳
۵۳	توزیع دوجمله ای منفی و ضریب $\alpha(r)$ برای پارامترهای $(m, 1/2)$	۱.۴
۵۳	توزیع دوجمله ای و ضریب $\alpha(r)$ برای پارامترهای $(n, 1/2)$	۲.۴

فهرست مطالب

ح	لیست جداول
۱	۱ سرآغاز
۲	۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۵	۲.۱ چند نامساوی مهم در مبحث اندازه
۷	۱.۲.۱ نامساوی ینسن
۸	۳.۱ تاریخچه
۱۰	۴.۱ کاربردهای نامساوی چیشف
۱۱	۱.۴.۱ کاربرد در آمار
۱۲	۲.۴.۱ کاربردهای ریاضی
۱۲	۳.۴.۱ کاربردهای دیگر
۱۳	۲ نامساوی چیشف در حالت یک متغیره
۱۵	۱.۲ بهترین مقدار ثابت برای نامساوی چیشف
۲۳	۲.۲ ارتباط تابع چگالی و تابع توزیع
	۲۳subsection.۲.۲.۱
	۲۶subsection.۲.۲.۲
	۲۷section.۲.۳
۳۰	۴.۲ کاربردهای ریاضی
	۳۱subsection.۲.۴.۱
۳۲	۲.۴.۲ سری نمایی بر روی اعداد اول

۳۵	نامساوی چبیشف در حالت چند متغیره	۳
۳۶	۱.۳ نامساوی چبیشف برای نرمال آمیخته مقیاس چند متغیره	
۴۲	۲.۳ نامساوی چبیشف برای حالت چند متغیره با متغیرهای اسکالر وابسته	
۴۵	۱.۲.۳ نامساوی جنج	
۴۷	۴ نامساوی ینسن، بحث ونتیجه گیری	
۵۰	۱.۴ نامساوی ینسن در احتمال	
۵۱	۱.۱.۴ بهبود نامساوی ینسن	
۵۳	۲.۴ نتیجه گیری کلی	
۵۴	۳.۴ ایده های قابل طرح	
۵۷	آ پیوست	
۶۷	مراجع	

فصل ۱

سرآغاز

یکی از علوم بشری که هر روز رو به گسترش و تعالیست، علم ریاضی می باشد؛ یکی از مباحثی که در ریاضیات مطرح است، مبحث اندازه^۱ با چند خاصیت مهم و اصلی می باشد. قبل از وارد شدن به بحث اصلی پایان نامه، لازم است تعاریف و مفاهیمی را که از آنها استفاده می کنیم، بیان کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. رده ای از مجموعه های $\mathcal{R}$ را حلقه می گوئیم که هرگاه مجموعه های E, F عضو $\mathcal{R}$ باشند، $E \cup F$ و $E - F$ نیز عضو $\mathcal{R}$ باشند.

تعریف ۲.۱.۱. عملگر عبارت است از تابعی که برتابع دیگر اعمال می شود.

تعریف ۳.۱.۱. در حلقه $\mathcal{R}$ ، عملگر μ را اندازه ریاضی می خوانیم (یا به عملگر μ اندازه می گوئیم). هرگاه: الف) برای هر A_i عضو فضای مجموعه ها، $\mu(A_i) \geq 0$ ،
ب) برای A_i های دوبدو مجزا، $\mu(\cup(A_i)) = \sum \mu(A_i)$ [۱].

یادآوری: سه تایی $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ ، فضای کل مجموعه هاست که $\mathcal{R}$ بر آن تعریف شده است. را فضای اندازه پذیر با اندازه μ می خوانیم.
یادآوری: در بسیاری از مواقع اندازه μ بر روی کل فضا متناهی یا محدود مقدار می باشد که اندازه احتمال حالت خاص آن است.

تعریف ۴.۱.۱. هرگاه اندازه μ بر روی کل فضا برابر یک شود ($\mu(\Omega) = 1$)، اندازه μ را اندازه احتمال می گوئیم و بنابر قرارداد با P نشان می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. هرگاه f حقیقی مقدار گسترش یافته تعریف شده بر مجموعه اندازه پذیر E باشد، پس f یک تابع اندازه پذیر است، اگر برای هر $\alpha \in R$ مجموعه $\{x, f(x) > \alpha\}$ مجموعه ای اندازه پذیر باشد.

تعریف ۶.۱.۱. متغیر تصادفی، یک تابع اندازه پذیر از فضای نمونه ای به اعداد حقیقی می باشد.

تعریف ۷.۱.۱. برای هر متغیر تصادفی ساده $X = \sum_{k=1}^n x_k I A_k$ مقدار امید ریاضی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

^۱Measure

تعریف ۸.۱.۱. هرگاه آزمون آماری را بخواهیم انجام دهیم باید مقدار، احتمالی را (که معمولاً کوچکتر مساوی ۰/۱ می باشد) تعیین کنیم، تا آزمون در سطح آن احتمال انجام شود به این احتمال تعیین شده سطح معنی داری یا P مقدار گفته می شود.

تعریف ۹.۱.۱. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت زیر باشد، گوییم X دارای توزیع پواسون، و با نماد $X \sim Poi(\lambda)$ نشان می دهیم.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

تعریف ۱۰.۱.۱. هرگاه در توزیع گاما $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\lambda = 2$ در نظر گرفته شود، گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع $\chi^2(n)$ (کای-دو) می باشد و تابع چگالی آن به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\lambda^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$x > 0$$

تعریف ۱۱.۱.۱. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد، گوییم X دارای توزیع t (تی-استیودنت) با n درجه آزادی می باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{\pi n} (1 + \frac{x^2}{n})^{(n+1)/2}}$$

$$x \in R$$

تعریف ۱۲.۱.۱. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد، گوییم X دارای توزیع F (فیشر) با درجات آزادی (m, n) می باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}) m^{m/2} n^{n/2} x^{(m-2)/2} (n+mx)^{-(m+n)/2}}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$x > 0$$

تعریف ۱۳.۱.۱. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد، گوییم X دارای توزیع β (بتا) می باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad 0 < x < 1$$

تعریف ۱۴.۱.۱. هرگاه متغیر تصادفی X بر بازه تعریف خود کاملاً همگن پخش شده باشد، گوییم متغیر بطور یکنواخت پخش شده است یا دارای توزیع یکنواخت است. (بازه تعریف می تواند فاصله (a, b) در R یا هرفضای دیگر مثل ابرکُره در R^p باشد).

تعریف ۱۵.۱.۱. هرگاه همگرایی تعریف شده، همگرایی در توزیع باشد، به این نوع همگرایی، همگرایی در قانون نیز می گوییم و با نماد $\mathcal{L}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. تابع مشخصه متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)$$

تعریف ۱۷.۱.۱. هرگاه در فضای p بُعدی گوی اقلیدسی مفروض باشد به مساحت رویه گوی اقلیدسی سطح رویه گوی اقلیدسی و به فضای داخل گوی اقلیدسی حجم گوی اقلیدسی گوییم که البته در ذهن نمی توان تصور کرد، فقط برای تقریب به ذهن در حالت سه بعدی (کُره) دارای مساحت $4\pi r^2$ و حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$ (شعاع کره است)

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر Y یک متغیر تصادفی پیوسته با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ باشد، تابع چگالی آمیخته مقیاس نرمال به صورت زیر تعریف می شود.

$$f(y|\mu, \sigma) = \int_0^{\infty} N(y|\mu, k(\lambda)\sigma^2) \pi(\lambda) d\lambda$$

که $N(y|., .)$ تابع چگالی نرمال، $k(.)$ تابعی مثبت و $\pi(\lambda)$ تابع چگالی آمیختگی روی فضای R^+ است. [۲]

تعریف ۱۹.۱.۱. برای تابع مفروض $f(x)$ تابع اولیه F برابر است با:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

تعریف ۲۰.۱.۱. هرگاه تابع مفروض f برای هر $t \in (0, 1)$ دارای شرط زیر باشد گوییم f تابع محدب است.

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(tx) + f((1-t)y) \quad (۱.۱)$$

۲.۱ چند نامساوی مهم در مبحث اندازه

با توجه به تعریف اندازه، نامساوی مهمی بنام نامساوی چیشف^۲ برای اندازه مطرح شده است^۳

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{\int g \circ f d\mu}{g(t)} \quad (۲.۱)$$

و تعریف گسترش یافته وکی تر نامساوی به صورت زیر بیان می شود:

$$\mu(g)\mu(h) \leq \mu(gh)$$

که در آن بطوریکه g, h دو تابع اندازه پذیر و نانزولی می باشند و:

$$\mu(f) = \frac{1}{\mu(X)} \int f d(\mu) \quad (۳.۱)$$

[۳].

لم ۱.۲.۱. نامساوی مارکف: هرگاه گشتاور مرتبه r ام قدر مطلق متغیر تصادفی موجود باشد، مقدار احتمال اینکه قدر مطلق متغیر تصادفی مزبور، که از مقدار معین مثبتی تجاوز کند، را بوسیله ضربی از گشتاور مرتبه r ام قدر مطلق متغیر تصادفی کرانبندی می کنیم که به این کرانبندی به صورت زیر، نامساوی مارکف می گوییم.

$$P(|X| > k) \leq \frac{E|X|^r}{k^r} \quad \forall k > 0 \quad (۴.۱)$$

برهان.

$$E|X|^r = \int_{\cdot}^{\infty} |x|^r f(|x|) d(|x|)$$

با تبدیل $|x|$ به y

$$\begin{aligned} E|X|^r &= \int_{\cdot}^{\infty} y^r f(y) dy = \int_{\cdot}^k y^r f(y) dy + \int_k^{\infty} y^r f(y) dy \geq \int_k^{\infty} y^r f(y) dy \\ &\geq k^r \int_k^{\infty} f(y) dy = k^r P(Y > k) = k^r P(|X| > k) \end{aligned}$$

□

^۲ Chebyshev

^۳ در حقیقت نامساوی، نامساوی مارکف است که بیشتر با نامساوی اصلی چیشف به یک نام خوانده می شود

نامساوی چبیشف (برای اندازه احتمال): اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 ، آنگاه نامساوی زیر، که حالت خاصی از نامساوی مارکف است، را نامساوی اصلی چبیشف می گویند:

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 1 \quad (5.1)$$

با توجه به بررسیهای انجام شده در (۴.۱)، واضح است که کران طرف راست نامساوی با مقدار واقعی طرف چپ نامساوی تفاوت نسبتاً زیادی دارد. برای روشن شدن این مفهوم مثالهای زیر را بررسی می کنیم.

مثال ۲.۲.۱. هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد نامساوی چبیشف به صورت زیر بدست می آید.

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{3k^2} \quad \forall k > 1 \quad (6.1)$$

که این کران $\frac{1}{3}$ کران نامساوی (۵.۱) می باشد [۵].

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{5}$ باشد در این صورت:

$$f(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \quad (7.1)$$

$$P(X > k) = \int_k^\infty \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} = e^{-\frac{k}{5}} \quad (8.1)$$

در صورتیکه با توجه به نامساوی چبیشف داریم:

$$P(|X| > k) = P(X > k) \leq \frac{EX^2}{k^2} = \frac{50}{k^2} \quad (9.1)$$

با توجه به روابط (۹.۱) و (۸.۱) می توان نتیجه گرفت:

$$e^{-\frac{k}{5}} \ll \frac{50}{k^2}$$

چنانچه مشاهده می شود تا مقدار $k = \sqrt{50}$ کران بدست آمده بزرگتر از یک و بوضوح کران نسبتاً بزرگ و ناکارآمدی می باشد.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $\chi^2(n)$ (کای-دو با n درجه آزادی) باشد پس

$$\begin{aligned} P(|X| > k) &= P(X > k) \leq \frac{EX^2}{k^2} = \frac{2^2 \frac{\Gamma(n/2 + 2)}{\Gamma(n/2)}}{k^2} \\ &= \frac{n(n+2)}{k^2} \end{aligned}$$

باز هم اگر مقدار بدست آمده را برای درجه آزادیهای مختلف n ، و k های متفاوت بدست آوریم و با مقدار احتمال در جدول توزیع χ^2 (با توجه به تعریف ۱۰.۱.۱) مقایسه کنیم به تفاوت فاحش احتمال و کران آن پی خواهیم برد؛ در این قسمت برای $n = 3$ و $k = 7/81$ مقدار احتمال (با استفاده از جدول توزیع) را با کران نامساوی مقایسه می کنیم:

$$0.05 = P(X > 7/81) \leq 0.2459$$

پس با توجه به آنچه گفته شد به دنبال کوچکتر ساختن کران نامساوی چبیشف می باشیم، قسمت اعظمی از مطالب پایان نامه به همین مبحث می پردازد. در ادامه مثالی آورده می شود تا دلیل کوچکتر ساختن کران (نامساوی چبیشف) را بطور کامل بیان کند.

مثال ۵.۲.۱. ممکن است فردی از چند نفر فاصله تهران تا شاهرود را بپرسد، اولی ممکن است بگوید کمتر از فاصله تهران تا مرز افغانستان است. (کاملاً بدیهی است) دیگری ممکن است بگوید کمتر از فاصله تهران تا نیشابور است الی آخر که فردی بگوید فاصله کمتر از تهران تا میامی^۴ است. معلوم است بعنوان فردی منطقی فاصله تهران تا میامی را اندازه گیری نموده و اعلام می کنیم تهران تا شاهرود مسافتی کمتر از ۴۵۰ کیلومتر (فاصله تهران تا میامی) دارد.

$$450 \leq |\text{تهران} - \text{شاهرود}|$$

پس همیشه به دنبال دقیق تر کردن کران می باشیم. قبل از اینکه وارد بحث اصلی شویم، تاریخچه نامساوی چبیشف را بررسی می کنیم، تا کسانی که در این زمینه قدمهای مفیدی برداشته اند را بشناسیم.

۱.۲.۱ نامساوی ینسن

نامساوی دیگری که در این پایان نامه مطرح می سازیم و می توان آنرا به نامساوی چبیشف مرتبط ساخت، نامساوی ینسن می باشد؛ طبق آنچه بیان می شود، این نامساوی نیز برای هر اندازه ریاضی قابل طرح است. اولین بار، نامساوی را ینسن [۳] مطرح نموده است؛ اگر رابطه (۳.۱) را برای تابع دلخواه $\mu(\cdot)$ تعریف کنیم رابطه زیر به شرط اینکه g تابع محدب باشد، برقرار است:

$$\mu(g \circ f) \geq g(\mu(f)) \quad (10.1)$$

^۴ شهرستانی بین شاهرود و سبزوار

یادآوری: ثابت می شود اگر تابع g مقعر باشد، جهت نامساوی عکس رابطه (۱۰.۱) خواهد شد. زیرا با در نظر گرفتن $g = k^{-1}$ ، k تابعی مقعر است بنابراین:

$$\mu(gof) \geq g(\mu(f)) \Rightarrow \mu(k^{-1}of) \geq k^{-1}(\mu(f)) \Rightarrow k(\mu(k^{-1}of)) \geq k(k^{-1}(\mu(f)))$$

با در نظر گرفتن $k^{-1}of = h$ داریم:

$$k(\mu(h)) \geq \mu(koh)$$

ارتباط نامساوی ینسن وچیشف

اگر f, g دو تابع صعودی و G تابع اولیه g محدب باشد (بنابرتعریف ۱۹.۱.۱ و ۲۰.۱.۱) آنگاه [۳]:

$$0 \leq \mu(Gof) - G(\mu(f)) \leq \mu(gf) - \mu(g)\mu(f) \quad (۱۱.۱)$$

رابطه (۱۱.۱) نیز برای اندازه احتمال با توابع $g(x) = x^r$ و $f(x) = |x|$ عبارتست از:

$$\frac{E|X|^{r+1} - E^{r+1}|X|}{r+1} \leq E|X|^r - x^r P(|X| > x) \quad (۱۲.۱)$$

نامساوی (۱۲.۱) نشان می دهد کرانی که برای نامساوی ینسن بدست می آید دارای اختلاف کمتری با مقدار واقعی (سمت چپ هر دو نامساوی) نسبت به نامساوی چیشف می باشد، پس اگر بتوانیم ارتباط نامساوی چیشف و ینسن را نزدیکتر سازیم به نتایج قابل توجهی دست خواهیم یافت. درباره این مورد در فصل ۴ بیشتر بحث خواهیم کرد؛ اکنون نامساوی چیشف را از نظر تاریخی مورد بررسی قرار می دهیم.

۳.۱ تاریخچه

نامساوی چیشف (اصلی) در سال ۱۸۶۷ توسط چیشف دانشمند روسی (۱۸۹۴-۱۸۲۱) مطرح گردید؛ اما افراد دیگری مثل گاوس^۵ و بینیم^۶ قبل از چیشف نامساوی را (شاید به نوعی دیگر) مطرح کرده اند. نامساوی گاوس: گاوس (دانشمند آلمانی) نامساوی زیر را در سال ۱۸۲۱ (سال تولد چیشف) مطرح نمود [۴].

$$P(|X - x_0| > \lambda\tau) \leq \frac{4}{9\lambda^2} \quad \lambda > 0$$

که در آن x_0 همان نما، $\tau^2 = E(X - x_0)^2$ می باشد. گاوس فرض کرده بود متغیر تصادفی دارای توزیع تک نمایه^۷ باشد (البته بعدا معلوم شد آنچه در ذهن گاوس و منظور اصلی او بوده، تک نمایه متقارن بوده

^۵Gauss

^۶Bienayme

^۷Unimodal

است.)

که در این حالت نما و میانگین با هم برابر و τ^2 همان واریانس می باشد پس گاوس، نامساوی (اصلی) چبیشف را با در نظر گرفتن شرایط خاص با کرانی بهتر ($\frac{4}{9}$ کران نامساوی چبیشف) بدست آورده بود. نامساوی بینیم: سالها بعد بینیم، دانشمند فرانسوی نامساوی خود را که دقیقا با نامساوی چبیشف یکسان بود مطرح نمود (۱۸۵۳) ولی ضعف کار او این بود که نامساوی را فقط برای متغیرهای تصادفی پیوسته مطرح نموده بود [۴].

چبیشف نامساوی معروف خویش را ۱۴ سال بعد (۱۸۶۷) ارائه نمود و بعد از چبیشف، مارکف شاگرد وی چنانچه گفته شد، نامساوی زیر را بدست آورد:

$$P(|X| > x) \leq \frac{E(|X|^r)}{x^r} \quad (۱۳.۱)$$

که این نامساوی تعمیم یافته نامساوی چبیشف می باشد. کمپ-میدل^۸ نیز در جهت گسترش نامساوی گاوس، نامساوی زیر را مطرح نمود [۵]:
نامساوی کمپ-میدل: اگر شرایط نامساوی گاوس برقرار باشد [۵]:

$$P(|X| > x) \leq \left(\frac{r}{r+1}\right)^r \frac{E(|X|^r)}{x^r} \quad r > 0$$

نکته: از بررسیهای انجام شده بر می آید که این نامساوی بعد از نامساوی مارکف مطرح شده باشد، ولی سالی که وی نامساوی را مطرح کرد دقیقا در دسترس نیست (نتوانستیم بیابیم).
بعد از دانشمندان معروفی که نام برده شد، افراد دیگری نیز در این زمینه کار کرده اند که معروفترین آنها عبارتند از "هسیبی و بوید"^۹، جنج، جنج و وودز^{۱۰}، مولینا^{۱۱}، کاستجلوس^{۱۲}، ماتئوس^{۱۳}، هرموسو^{۱۴}، سگال^{۱۵}، برگ^{۱۶}، لال^{۱۷}، الکین و پرت^{۱۸}.

برگ (۱۹۳۷) اولین فردی بود که نامساوی چبیشف را به فضای دو متغیره گسترش داد.

لال (۱۹۵۵) نیز بعد از وی در همین زمینه تلاشهایی کرده، نتایجی را نیز بدست آورده است

و الکین و پرت (۱۹۵۸) نیز نامساوی خود را در کلیترین حالت فضای چند متغیره مطرح نموده اند.

^۸ Camp-Meidell

^۹ Hassibi and Boyd

^{۱۰} Jenj and Woods

^{۱۱} Molina

^{۱۲} Kasteggelos

^{۱۳} Mateos

^{۱۴} Hermoso

^{۱۵} Segall

^{۱۶} Berge

^{۱۷} Lal

^{۱۸} Olkin and Pratt

نامساوی برگ: هرگاه X, Y متغیرهای تصادفی با ضریب همبستگی r ، میانگین هایشان برابر صفر و دارای واریانسهای محدود باشند، برای $k > 0$ داریم [۶]:

$$P(|X| > k\sigma_1 \vee |Y| > k\sigma_2) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{k^2} \quad (۱۴.۱)$$

برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۱ مراجعه شود.

نامساوی لال: با همان شرح نامساوی برگ با این تفاوت که k_1, k_2 اعداد مثبت و متفاوتی باشند: [۷]

$$P(|X| > k_1\sigma_1 \vee |Y| > k_2\sigma_2) \leq \frac{k_1^2 + k_2^2 + \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4r^2 k_1^2 k_2^2}}{2r^2 k_1^2 k_2^2} \quad (۱۵.۱)$$

برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۲ مراجعه شود

نامساوی الکین و پرت: اگر X بردار تصادفی p بعدی باشد، σ_i انحراف معیار مربوط به متغیر x_i, ρ_{ij} ، ضریب همبستگیها و میانگینهای تک، تک متغیرها برابر صفر و $t = \sum \frac{1}{k_i^2}$ و $u = \sum \frac{\rho_{ij}}{k_i k_j}$ ($k_i > 0$) باشند آنگاه [۸].

$$P(|X_i| > k_i \sigma_i) \leq \frac{p-1}{p} t - \frac{p-2}{p^2} u + \frac{2}{p^2} \sqrt{u(pt-u)(p-1)} \quad (۱۶.۱)$$

با توجه به آنچه در سمت راست نامساوی بالا آمده است، این نامساوی کاربردی نمی باشد (یعنی در بیشتر موارد مخصوصاً برای k_i نزدیک به یک طرف راست نامساوی از ۱ تجاوز می کند. (ولی از نظر ریاضی نامساوی الکین و پرت کاملاً معتبر است.)

در اینجا نامساوی دیگری که خیلی شبیه نامساوی چیشف می باشد را ارائه می کنیم
نامساوی کانتلی^{۱۹} (۱۹۳۲): هر گاه متغیر تصادفی X دارای میانگین صفر و $\mu_4 = EX^4$ [۹]:

$$P(|X| > k\sigma) \leq \begin{cases} \frac{1}{k^2} & k^2 < 1 \\ \frac{1}{k^2} & 1 \leq k^2 \leq \frac{\mu_4}{\sigma^4} \\ \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\mu_4 + k^4 \sigma^4 - 2k^2 \sigma^4} & k^2 \geq \frac{\mu_4}{\sigma^4} \end{cases} \quad (۱۷.۱)$$

۴.۱ کاربردهای نامساوی چیشف

قبل از اینکه وارد فصل دوم و سوم که مباحث اصلی در آن مطرح می شود، بشویم لازم است نیاز و انگیزه مطرح شدن این دو فصل را مورد بررسی قرار دهیم.

^{۱۹} Cantelli

شاید بعضی ها بگویند با داشتن نامساوی اصلی چیشف به خیلی از نیازهای خود پاسخ می دهیم و لزومی ندارد که وقت و هزینه بگذاریم تا نامساوی بهتری بدست آوریم! برای پاسخ به این باور کافی است بخشی از کاربردهای نامساوی را در علوم پایه و... بررسی کنیم.

۱.۴.۱ کاربرد در آمار

ممکن است فردی نمونه ای از جامعه داشته باشد که نمی داند آن جامعه چگونه توزیع شده است (در بیشتر مسائل کاربردی که در طبیعت و فضای واقعی اتفاق می افتد همین گونه می باشد). و می خواهد مثلاً میانگین جامعه را با توجه به نمونه بدست آمده تقریب بزند؛ مسلم است اول کاری که می تواند انجام دهد این است که میانگین نمونه را بدست آورد، در مرحله بعد برای اینکه برآورد فاصله ای میانگین را بدست آورد، می تواند از فاصله اطمینان ناپارامتری استفاده نماید. یکی از راههای نسبتاً ساده بدست آوردن چنین فاصله ای با استفاده از نامساوی اصلی چیشف به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| > k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &\leq \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow P(-k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &\geq 1 - \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow P(-k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &\geq 1 - \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

بنابراین با حداقل اطمینان $1 - \frac{1}{k^2}$ ، $\mu \in (\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ، با توجه به مطالب گفته شده اگر بتوانیم کران نامساوی چیشف را بهتر سازیم، در صد اطمینان در فاصله اطمینان افزایش می یابد و این اطمینان بالاتر مطلوب ماست.

از دیگر کاربردهای آماری این نامساوی (نامساوی بهبودیافته) این است که بتوانیم بین تابع توزیع و تابع چگالی رابطه ای برقرار سازیم و این رابطه موقعی مهم است که محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی به روشهای معمولی غیر ممکن یا دشوار باشد.

همچنین با استفاده از این رابطه (بین تابع چگالی و تابع توزیع) می توانیم کرانی برای p مقدار "ها بدست آوریم که شرح و توضیح بیشتر در فصل ۲ می آید.

۲.۴.۱ کاربردهای ریاضی

یکی از کاربردهای نامساوی چیشف در مسائل ریاضی بدست آوردن کرانی برای تابع ریمان-زتا (زتا-ریمان)، دیگری کرانی برای سری

$$\sum_{p \text{ is prime}} e^{-\lambda p}$$

می باشد که چگونگی بدست آوردن این کرانها با استفاده از نامساوی چیشف بهبودیافته در فصل ۲ خواهد آمد.

۳.۴.۱ کاربردهای دیگر

از دیگر کاربردهای این نامساوی مسائل مکانیابی می باشد، که امروزه نرم افزارهای توانمندی در این زمینه استفاده می شوند که در شاخه های زمین شناسی، اکتشاف معدن، ... بسیار کاربرد دارد. اساس کار بر پایه همین نامساوی می باشد، یعنی اگر بخواهیم برای تقریب به ذهن، مکانیابی را به صورت کاملاً آماتوری و بدون استفاده از هر گونه ابزار رایانه ای بدست آوریم ابتدا کل مکان مورد مطالعه را در نظر گرفته، نمونه گیرهای متعددی انجام می دهیم و شاخصه خاصی را اندازه گیری می کنیم (با توجه به آنکه ما وقت و هزینه آنرا نداریم که کل مکان را مورد بررسی قرار دهیم و سرشماری کنیم). با توجه به اطلاعات بدست آمده فاصله اطمینان ناپارامتری (با شرحی که گذشت) را بدست می آوریم و با توجه به سطح اطمینانی که انتخاب می کنیم بازه مطالعه که بوضوح فضای کمتری نسبت به کل مکان مطالعه دارد را بدست می آوریم؛ بنابراین مطالعه و بررسی خود را روی فضای محدود شده انجام می دهیم، که همانطور که گفته شد نرم افزارهای کاملاً پیشرفته این گونه محاسبات را انجام می دهند.

فصل ۲

نامساوی چبیشف در حالت یک متغیره

با توجه به مطالب گفته شده می خواهیم نامساوی را در حالت تک بعدی بررسی کنیم و تا حد ممکن بهبود دهیم و با استفاده از نامساوی بهبودیافته برخی از کاربردهای مختلف نامساوی را تا حد ممکن شرح دهیم.

برای بهبود نامساوی چیشف (کوچکتر ساختن کران بالای نامساوی) ایده های متفاوتی مطرح می شود:
(الف)

$$P(|X| > x) \leq \frac{E(|X|^r)}{x^r} - C^*(r) \quad \bullet \quad C^*(r) < \frac{E(|X|^r)}{x^r} \quad (1.2)$$

(ب)

$$P(|X| > x) \leq \left(\frac{E(|X|^r)}{x^r}\right)^{C^*(r)} \quad \bullet \quad 1 < C^*(r) \quad (2.2)$$

(ج)

$$P(|X| > x) \leq C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{x^r} \quad \bullet \quad C^*(r) < 1 \quad (3.2)$$

هرگاه بتوانیم کران نامساوی را بوسیله $C^*(r)$ (در سه حالت بالا) کوچکتر سازیم قدم مهمی را در بهبود نامساوی چیشف برداشته ایم؛ ولی باید بررسی کنیم کدام راه مفیدتر می باشد.
(الف) با جابجایی عبارات داریم:

$$C^*(r) \leq \frac{E(|X|^r)}{x^r} - P(|X| > x) \Rightarrow C^*(r) = \inf_{x>0} \underbrace{\left(\frac{E(|X|^r)}{x^r} - P(|X| > x)\right)}_{g(x)} \quad (4.2)$$

$$g'(x) = \frac{-rE(|X|^r)}{x^{r+1}} + f(x) + f(-x) \quad f \text{ تابع چگالی است} \quad (5.2)$$

$$\stackrel{g'=0}{\Rightarrow} f(-x) + f(x) = \frac{rE(|X|^r)}{x^{r+1}} \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow C^*(r) = \frac{x(f(x) + f(-x))}{r} - P(|X| > x) \quad \text{با جایگذاری داریم} \quad (7.2)$$

و اگر $|X|$ دارای تابع چگالی f ، بنابراین:

$$C^*(r) = \frac{xf(x)}{r} - P(X > x) \geq \inf_{x>0} \frac{xf(x)}{r} - P(X > x)$$

ملاحظه می شود که بدست آوردن $C^*(r)$ منوط به محاسبه $P(|X| > x)$ می باشد، که اگر این احتمال به سادگی محاسبه می شد، دیگر استفاده از نامساوی چیشف لزومی نداشت.
(ب) از دو طرف نامساوی لگاریتم می گیریم.

$$\ln P(|X| > x) \leq C^*(r) \ln \left(\frac{E(|X|^r)}{x^r} \right) = C^*(r) (\ln(E|X|^r) - r \ln x) \quad (۸.۲)$$

$$\ln P(|X| > x) \leq C^*(r) \frac{(\ln(E|X|^r) - r \ln x)}{\ln P(|X| > x)} \quad (۹.۲)$$

$$\frac{1}{C^*(r)} \geq \frac{\ln(E|X|^r) - r \ln x}{\ln P(|X| > x)} \quad (۱۰.۲)$$

$$C^*(r) = \inf_{x>0} \frac{\ln P(|X| > x)}{\ln(E|X|^r) - r \ln x} \quad (۱۱.۲)$$

باز هم با محاسبات دشواری روبرو می شویم (محاسبات لگاریتم در عبارت پیچیده و زمانبر است). در ضمن اگر محاسبات فوق را به گونه ای انجام دهیم باز هم نیاز به محاسبه $P(|X| > x)$ داریم. بنابراین تنها روش باقی مانده رابطه (۳.۲) می باشد که با استفاده از این رابطه به دنبال $C^*(r)$ می باشیم.

۱.۲ بهترین مقدار ثابت برای نامساوی چیشف

با توجه به رابطه (۳.۲) $C^*(r)$ را ثابت چیشف می نامیم. همانطور که در فصل قبل گفته شد ضریبی شبیه $C^*(r)$ ابتدا توسط گاوس، سپس کمپ میدل مطرح گردیده بود ولی نقص (نقطه ضعف) آن این بود که متغیر تصادفی را به متغیرهای تصادفی متقارن تک نمایه محدود شده بود؛ پس می خواهیم ضریبی را بدست آوریم که برای هر متغیر تصادفی دلخواه قابل استفاده بوده کاملاً کاربردی باشد.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد، آنگاه در نامساوی (۳.۲) ضریب $C^*(r)$ به یکی از صورتهای زیر می تواند در نظر گرفته شود:

(الف)

$$C^*(r) = \sup_{x>0} \frac{P(|X| > x)x^r}{E|X|^r}$$

(ب) اگر $|X|$ دارای تابع چگالی f باشد:

$$C^*(r) \leq \sup_{x>0} \frac{f(x)x^{r+1}}{rE|X|^r} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}(r)$$

(ج) اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع متقارن و $\psi(t)$ تابع مشخصه مربوطه (بنابراین تعریف ۱.۱.۱) باشد:

$$C^*(r) = \frac{2}{\pi E|X|^r} \sup_{x>0} \left\{ x^r \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t} (1 - \psi(t)) dt \right\}$$

(د)

$$C^*(r) \leq 1$$

برهان. الف) به سادگی با جابجا کردن $C^*(r)$ داریم:

$$C^*(r) \geq \frac{P(|X| > x)x^r}{E|X|^r} \Rightarrow C^*(r) = \frac{\sup_{x>\cdot} P(|X| > x)x^r}{E|X|^r}$$

ب) اگر $|X|$ دارای تابع چگالی f باشد:

$$C^*(r) = \frac{\sup_{x>\cdot} P(|X| > x)x^r}{E|X|^r} \Rightarrow C^*(r) = \frac{\sup_{x>\cdot} \overbrace{(1 - F(x))}^{g(x)} x^r}{E|X|^r}$$

حال برای بدست آوردن سوپریمم از $g(x)$ مشتق می گیریم

$$g(x) = (1 - F(x))x^r \quad (12.2)$$

$$g'(x) = rx^{r-1}(1 - F(x)) - x^r f(x) \quad (13.2)$$

$$\stackrel{g'(x)=\cdot}{\Rightarrow} x^{r-1}(r(1 - F(x)) - xf(x)) = \cdot \Rightarrow rP(|X| > x) = xf(x) \quad (14.2)$$

$$\stackrel{\text{با جایگذاری در الف}}{\Rightarrow} C^*(r) = \frac{1}{E|X|^r} \frac{x^r(xf(x))}{r} = \frac{x^{r+1}f(x)}{rE|X|^r} \quad (15.2)$$

$$\sup\{x^r P(|X| > x)\} = \frac{x^{r+1}f(x)}{r} \leq \sup_{x>\cdot} \frac{x^{r+1}f(x)}{r}$$

$$= \frac{\sup_{x>\cdot} (x^{r+1}f(x))}{r} = \frac{x_*^{r+1}f(x_*)}{r}$$

به دلیل اینکه سوپریمم در x_* اتفاق می افتد

$$\Rightarrow C^*(r) \leq \frac{x_*^{r+1}f(x_*)}{rE|X|^r} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}(r)$$

ج) می دانیم: (به پیوست شماره ۳ مراجعه شود)

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t} \psi(t) dt \quad (16.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi \quad (17.2)$$

با توجه به روابط (۱۶.۲) و (۱۷.۲)

$$\begin{aligned} P(|X| > x) &= 2(1 - F(x)) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} \psi(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} \psi(t) dt \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} (1 - \psi(t)) dt \\ &\Rightarrow C^*(r) = \frac{\sup_{x>\cdot} \{x^r \frac{2}{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t} (1 - \psi(t)) dt\}}{E|X|^r} \\ &= \frac{2}{\pi E|X|^r} \sup_{x>\cdot} \{x^r \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t} (1 - \psi(t)) dt\} \end{aligned}$$

(د) نامساوی اصلی به صورت زیر می باشد.

$$P(|X| > x) \leq \frac{E|X|^r}{x^r} \quad (۱۸.۲)$$

$$C^*(r) = \frac{\sup_{x>\cdot} P(|X| > x)x^r}{E|X|^r} \stackrel{\text{با توجه به رابطه ۱۸.۲}}{\leq} \frac{\sup_{x>\cdot} P(|X| > x)x^r}{E|X|^r} \leq 1 \quad (۱۹.۲)$$

$$\Rightarrow C^*(r) \leq 1 \quad (۲۰.۲)$$

□

برای پی بردن به اهمیت ضریب $C^*(r)$ قضیه ۱.۱.۲ در ادامه مثالی را برای مقایسه این ضریب و $(\frac{r}{r+1})^r$ (ضریب کمپ میدل) می آوریم.

مثال ۲.۱.۲. مقایسه ای بین ضریب کمپ-میدل و ثابت چیشف $C^*(r)$:

یادآوری می شود که ضریب کمپ-میدل فقط برای توزیع متقارن تک نمایی قابل محاسبه است ولی ضریب

$C^*(r)$ را برای هر توزیع دلخواه می توانیم محاسبه کنیم. (به شرط وجود $E|X|^r$)

فرض کنید $X \sim N(0, \sigma^2)$ ؛ بنابراین مقدار $C^*(r)$ را بدست می آوریم ثابت چیشف $C^*(r)$ به σ بستگی

ندارد زیرا:

$$X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \sigma Z \sim N(0, \sigma^2) \quad Z \text{ متغیر تصادفی نرمال استاندارد}$$

$$\Rightarrow E|X|^r = \sigma^r E|Z|^r$$

همچنین از طرف دیگر

$$P(|X| > x) = P(\sigma|Z| > x) = P(|Z| > \frac{x}{\sigma})$$

$$\Rightarrow C^*(r) = \frac{x^r P(|Z| > \frac{x}{\sigma})}{\sigma^r E|Z|^r}$$

$$\frac{(\sigma z)^r P(|Z| > z)}{\sigma^r E|Z|^r} = \frac{z^r P(|Z| > z)}{E|Z|^r} = C_Z^*(r)$$

بنابراین برای $\sigma = 1$ محاسبات را انجام می‌دهیم

بعد از محاسبات کوتاهی داریم (به پیوست ۴ مراجعه شود):

$$C^*(r) \leq \frac{\frac{2}{r} \left(\frac{r+2}{2}\right)^{\frac{r+2}{2}} \frac{e^{-\frac{r-1}{2}}}{2}}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)} = \bar{C}(r)$$

به ازای r های مختلف مقایسه را در جدولی به شکل زیر می آوریم:

r	$C^*(r)$	$(\frac{r}{r+1})^r$
۰/۵	۰/۵۳۲۵۵	۰/۵۷۷۳۵
۰/۶	۰/۵۰۳۷۲	۰/۵۵۵۱۶
۰/۷	۰/۴۷۹۷۳	۰/۵۳۷۳۴
۰/۸	۰/۴۵۹۳۰	۰/۵۲۷۷۰
۰/۹	۰/۴۴۱۶۰	۰/۵۱۰۴۳
۱	۰/۴۲۶۰۵	۰/۵۰۰۰۰
۱/۱	۰/۴۱۲۲۳	۰/۴۹۱۰۱
۱/۲	۰/۳۹۹۸۳	۰/۴۸۳۱۸
۱/۳	۰/۳۸۸۶۱	۰/۴۷۶۲۹
۱/۴	۰/۳۷۸۳۸	۰/۴۷۰۲۰
۱/۵	۰/۳۶۹۰۸	۰/۴۶۴۷۵
۱/۶	۰/۳۶۰۳۵	۰/۴۵۹۸۶
۱/۷	۰/۳۵۲۳۵	۰/۴۵۵۴۵
۱/۸	۰/۳۴۴۹۰	۰/۴۵۱۴۴
۱/۹	۰/۳۳۷۹۵	۰/۴۴۷۷۹
۲	۰/۳۳۱۴۳	۰/۴۴۴۴۴
۳	۰/۲۸۲۸۴	۰/۴۲۱۸۷
۴	۰/۲۵۱۴۹	۰/۴۰۹۶۰
۵	۰/۲۲۸۹۷	۰/۴۰۱۸۷
۶	۰/۲۱۱۷۳	۰/۳۹۶۵۶
۷	۰/۱۹۷۹۵	۰/۳۹۲۶۹
۸	۰/۱۸۶۵۹	۰/۳۸۹۷۴
۹	۰/۱۷۷۰۲	۰/۳۸۷۴۲
۱۰	۰/۱۶۸۸۰	۰/۳۸۵۵۴

جدول ۱.۲: جدول مربوط به مقایسه ضریب کمپ-میدل وثابت چیشف برای r های مختلف

چنانچه مشاهده می شود برای $r \geq 3$ از ضریب کمپ-میدل کوچکتر می باشد و با توجه به اینکه $\bar{C}(r)$ با استفاده از تابع چگالی قابل دسترس و محاسبه می باشد پس ضریب بدست آمده کاملاً مفید می باشد.
نکته: اگر

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

نامساوی اصلی بهبود یافته چیشف به این صورت در خواهد آمد:

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{3k^2}$$

در ادامه با توجه به کاربرد نامساوی چیشف در فاصله اطمینانهای پارامتری، و در نظر گرفتن گزاره ۳.۱.۲ می خواهیم چند نمونه فاصله اطمینان را بدست آوریم و تا حدودی با فواصل اطمینان پارامتری مقایسه کنیم.

گزاره ۳.۱.۲. هرگاه $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مشاهده از توزیعی در خانواده نرمال آمیخته مقیاس (بنابر تعریف ۱.۱.۱)، با $E(X_1) = \mu, V(X_1) = \sigma^2$ باشد، بنابراین: $\bar{X} \pm 1.82 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $\bar{X} \pm 1.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ به ترتیب پوششهای ۹۵٪ و ۹۰٪ برای میانگین جامعه می باشند [۵].

اگر فاصله های بدست آمده را با فواصل اطمینان نرمال (به عنوان مثالی از آمیخته مقیاس) مقایسه کنیم، فواصل اطمینان نسبتاً بازتر از فواصل اطمینان پارامتری است؛ ولی در برخی توزیعهای دیگر (از خانواده نرمال آمیخته مقیاس) تقریباً نزدیک به فواصل اطمینان پارامتری می باشد.
قسمت اول گزاره را برای ۵ چگالی (از خانواده نرمال آمیخته مقیاس وقتی $n = 10$ باشد) شبیه سازی کرده و s را به جای σ (معمولاً ناشناخته است) بکار می بریم.

پوشش شبیه سازی شده احتمال (با شبیه سازی به حجم ۱۵۰۰۰) به صورت زیر است:

تابع چگالی	لجستیک	نمایی دوطرفه	t(۳)	t(۵)	$.9N(0,1) + .1N(0,9)$
پوشش	۰/۹۷۵۲	۰/۹۷۲۱	۰/۹۷۳۲	۰/۹۷۱۲	۰/۹۷۷۴

جدول ۲.۲: پوشش شبیه سازی شده چند نمونه توزیع مقیاس به حجم ۱۵۰۰۰

پوشش همان احتمالهای بدست آمده، درصد اطمینان پوشش شبیه سازی شده می باشد.

با توجه به جدول قبل و تاثیر افزایش r بر $C^*(r)$ شاید به غلط تصور شود که باید تا حد ممکن r را افزایش دهیم، تا کران بهتری برای نامساوی بدست آوریم ولی با کمی دقت متوجه می شویم؛ که با کاهش $C^*(r)$ ممکن است افزایش نسبتاً بیشتری در عبارت $\frac{E(|X|^r)}{x^r}$ را داشته باشیم پس باید $\inf_{r>0} C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{x^r}$ را محاسبه کنیم، که برای بدست آوردن r بهینه به قضیه ۵.۱.۲ را بکار می بریم.

قبل از بیان قضیه مثال زیر را برای تفهیم بیشتر بیان می کنیم

مثال ۴.۱.۲. X متغیر تصادفی با توزیع $N(0, 1)$ می باشد با در نظر گرفتن $k = 2$ داریم $P(|X| > k) = 0.0455$ ، $C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r}$ را برای چندین r دلخواه محاسبه می کنیم.

r	۱	۲	۳	۴	۶
bound	۰/۱۶۹۹۷	۰/۰۸۲۸۶	۰/۰۵۶۴۲	۰/۰۴۷۱۵	۰/۰۴۹۶۲

جدول ۳.۲: مقایسه کران بدست آمده برای r های مختلف و مقدار ۰/۰۴۵۵

مشاهده می شود برای $r = 4$ کران بدست آمده به مقدار واقعی احتمال خیلی نزدیک پس اگر r انتخاب شده مناسب باشد کران بدست آمده می تواند تقریب مناسبی برای احتمال واقعی باشد.

قضیه ۵.۱.۲. اگر برای بعضی $r > 0$ ها $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r P(|X| > k) = 0$ باشد و $B(k, r) = C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r}$ در نظر گرفته شود آنگاه [۵]:

$$\inf_{r>0} C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r} = P(|X| > k)$$

برهان. بر اساس نظریه بازیها، یک بازی! با بازه تغییر پذیری پارامتر (فضای طبیعی عمل) $\Theta = [0, \infty)$ و بازه تغییر پذیری عمل آماری $\mathcal{A} = (0, \infty)$ و تابع زیان $L(\theta, a) = (\frac{\theta}{k})^a P(|X| > \theta)$ را در نظر بگیرید، این تابع زیان نیمه پیوسته است که بر اساس عمل مشخص a' نسبت به θ از بالا پیوسته می باشد پس تابع زیان دارای مقدار محدود می باشد بنابراین می خواهیم تابع زیان را کمینه کنیم و با توجه به فرض قضیه وجایگذاریها:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^r \cdot P(|X| > k) = 0 &\Rightarrow \inf B(k, r) = \inf \frac{\sup x^r P(|X| > x)}{k^r} \\ &= \inf_{r > 0} (\sup_{x > 0} L(x, r)) \\ &= \sup_{x > 0} (\inf_{r > 0} L(x, r)) \\ &= \max \{ \sup_{x < k} (\inf_{r > 0} L(x, r)), \sup_{x \geq k} (\inf_{r > 0} L(x, r)) \} \\ &= \max \{ 0, \sup_{x \geq k} P(|X| > x) \} = P(|X| > k) \end{aligned}$$

□

یادآوری: قضیه ۵.۱.۲ بیان می کند اگر r انتخاب شده، مناسب باشد، $P(|X| > k)$ همیشه بازتولید دقیقی با کران $B(k, r)$ می باشد، یعنی کران بدست آمده با مقدار واقعی احتمال تفاوت ناچیزی خواهد داشت.

این پرسش مطرح می شود که، آیا ملاکی برای انتخاب r وجود دارد؟ قضیه ۱۰.۱.۲ (ب) این ملاک را به ما می دهد؛ قضیه اینگونه ما را راهنمایی می کند، که در انتخاب r مقداری را بیابیم که $\sup_{x > 0} \frac{f(x)x^{r+1}}{rk^r}$ را کمینه کند. برای فهم بهتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۱.۲. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی دوطرفه استاندارد، باشد $(f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|))$

در این توزیع، کران $B(k, r) = \frac{r^r \exp(-r)}{k^r}$ ، وقتی کمینه می شود که $r = k$ باشد.

به عبارت دیگروقتی که $\log(r+1) - \frac{1}{r} = \log(k)$

عبارت $\frac{\sup f(x)x^{r+1}}{rk^r} = \frac{r+1}{2e} \frac{(r+1)^r e^{-r}}{rk^r}$ کمینه می شود؛ برای $k = 1, 2, 3, 4, 5$ بهینه با تقریب برابر $1/24, 2/17, 3/12, 4/1, 5/0.9$ بدست می آید.

بنابراین در این مثال تقریب r برای k بزرگ یا متعادل کاملاً بهینه می باشد.

۲.۲ ارتباط تابع چگالی و تابع توزیع

بعضی مواقع بدست آوردن گشتاور مرتبه r ام $|X|$ دشوار یا خسته کننده می باشد یا توزیع به گونه ای می باشد، که بدست آوردن تابع توزیع آن به صورت فرمول بندی شده (صریح) مشکل یا غیر قابل محاسبه می باشد؛ بنابراین می توان با استفاده از تابع چگالی کرانی برای $P(|X| > k)$ بدست آورد که هم ساده تر باشد، هم برای مقدار معلوم k از کرانی که با استفاده از گشتاور مرتبه r ام بدست می آید (برای بعضی از r ها) بهتر باشد؛ لازم به ذکر است که، کاربرد این کران بیشتر برای مواقعی است که بتوان تابع چگالی را در نقطه معین به سادگی محاسبه کرد.

۱.۲.۲ کران برای دنباله^۱

قضیه ۱.۲.۲. هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، می توانیم نامساوی زیر را برای دنباله احتمال بنویسیم.

$$P(|X| > k) \leq \frac{2\phi(k)}{k}, \quad \phi(k) \text{ تابع چگالی در نقطه } k \text{ می باشد} [10].$$

برهان. همانگونه که می دانیم توزیع نرمال استاندارد، متقارن است پس $P(|X| > k) = 2P(X > k)$ بنابراین کفایت کران را برای $P(X > k)$ محاسبه کنیم؛ داریم:

$$P(X > k) = \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$k < x < \infty$ با در نظر گرفتن

$$\begin{aligned} P(X > k) &\leq \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{x}{k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\leq \frac{1}{k\pi} [e^{-\frac{x^2}{2}}]_k^{\infty} = \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2}{2}} = \frac{\phi(k)}{k} \\ \Rightarrow 2P(X > k) &\leq \frac{2\phi(k)}{k} \Rightarrow P(|X| > k) \leq \frac{2\phi(k)}{k} \end{aligned}$$

□

البته با استفاده از قضیه ۱.۱.۲ (ب) نامساوی زیر (که شبیه نامساوی قبلی ولی با دقت کمتری است) نیز بدست می آید:

$$P(|X| > k) \leq \frac{2\phi(k)}{k-1}$$

^۱ A tail bound

زیرا:

$$B = \sup_{x>\cdot} \frac{x^{r+1} f(x)}{r E|X|^r} \frac{E|X|^r}{k^r} \quad f(x) = \gamma \phi(k), \text{ یعنی } |x| \text{ چگالی}$$

$$B = \sup_{x>\cdot} \frac{x^{r+1} f(x)}{r k^r} = \sup_{x>\cdot} \frac{x^{r+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} r k^r}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{r+1}} B = \frac{(r+1)^{\frac{r+1}{2}} e^{-\frac{r+1}{2}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} r k^r}$$

چون $r = k^2 - 1$ دلخواه مثبت می باشد، پس

$$B = \frac{k^{k^2} e^{-\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} (k^2 - 1) k^{k^2-1}} = \frac{\gamma \phi(k)}{k^2 - 1}$$

$$\Rightarrow B \leq \frac{\gamma \phi(k)}{k - 1}$$

با توجه به آنچه گفته شد می خواهیم اینگونه نامساوی ها را که تابع چگالی را به نوعی با تابع توزیع ارتباط می دهد، برای هر متغیر تصادفی دلخواه بدست آوریم .

گزاره ۲.۲.۲. متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(x)$ و $|X|$ با تابع چگالی $f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر f حداقل یک بار مشتق پذیر باشد و برای $x > 0$ $\psi(x) = \frac{-x f'(x)}{f(x)}$ صعودی باشد، آنگاه برای هر k بطوریکه $\psi(k) > 1$ [۵]:

$$P(|X| > k) \leq \frac{k}{\psi(k) - 1} f(k)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۱.۲ ب:

$$\begin{aligned} P(|X| > k) &\leq C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r} \leq \sup_{x>\cdot} \frac{f(x) x^{r+1}}{r E|X|^r} \frac{E|X|^r}{k^r} \\ &= \sup_{x>\cdot} \frac{f(x) x^{r+1}}{r k^r} \end{aligned}$$

پس با مشتق گیری:

$$\begin{aligned}(f(x)x^{r+1})' = 0 &\Rightarrow f(x)x^r(r+1+xf'(x)/f(x)) = 0 \\ \Rightarrow -xf'(x)/f(x) = \psi(x) = r+1\end{aligned}$$

با توجه به اینکه می خواهیم نقطه بدست آمده بیشینه باشد:

$$(f(x)x^{r+1})'' \leq 0 \Rightarrow f(x)x^{r-1}((r+1-\psi(x))(r-\psi(x)) - x\psi'(x)) \leq 0 \quad (21.2)$$

$$\Rightarrow \psi'(x) \geq \frac{(r+1-\psi(x))(r-\psi(x))}{x} \quad (22.2)$$

با جایگذاری جواب مشتق در رابطه (22.2) مشتق دوم منفی می شود. چون مقدار x مشخص است، $x = k$ جایگذاری شده، همچنین $r = \psi(k) - 1$ ، بنابراین:

$$P(|X| > k) \leq \frac{k^{r+1}f(k)}{rk^r} = \frac{kf(k)}{r} = \frac{kf(k)}{\psi(k) - 1}$$

□

برای تکمیل بحث، چند مثال می آوریم که نشان می دهد نامساوی بدست آمده نسبتاً خوب عمل می کند (کران مفیدی را می دهد).

مثال ۳.۲.۲. X دارای تابع چگالی t ، $f_\alpha(x)$ ، با α درجه آزادی باشد. (با توجه به تعریف ۱۱.۱.۱)

$$P(X > k) \leq \frac{k(\alpha + k^2)}{\alpha(k^2 - 1)} f_{\alpha}(k) \quad \forall k > 1$$

مثال ۴.۲.۲. X دارای تابع چگالی گاما به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}f_{\alpha,\lambda}(x) &= e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\ P(X > k) &\leq \frac{k}{k\lambda - \alpha} f_{\alpha,\lambda}(k) \quad \forall k > \frac{\alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

مثال ۵.۲.۲. X دارای تابع چگالی F (فیشر) با درجه آزادیهای α و β (با توجه به تعریف ۱۲.۱.۱) باشد:

$$P(X > k) \leq \frac{2k(\beta + \alpha k)}{\alpha\beta(k-1)} f_{\alpha,\beta}(k) \quad \forall k > 1$$

مثال ۶.۲.۲. X دارای تابع چگالی بتا باشد (با توجه به تعریف ۱۳.۱.۱):

$$P(X > k) \leq \frac{k(1-k)}{k(\alpha + \beta - 1) - \alpha} f_{\alpha,\beta}(k) \quad \beta > 1, \forall k > \frac{\alpha}{\alpha + \beta - 1}$$

همانگونه که در ابتدای این بخش گفته شد، کرانی که با استفاده از گزاره ۱.۲.۲ بدست می آید، برای بعضی از گشتاورها از کرانی که با استفاده از قضیه ۱.۱.۲ بدست می آید کاراتر می باشد، برای فهم بهتر این مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷.۲.۲. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $N(0, 1)$ باشد، می خواهیم برای k معلوم کرانی برای $P(|X| > k)$ با دوروش گزاره ۱.۲.۲ و قضیه ۱.۱.۲ بدست آوریم:

$$P(|X| > k) \leq \frac{k f(k)}{\psi(k) - 1}$$

برای $k = 3$ بر اساس گزاره ۱.۲.۲ کران زیر بدست می آید :

$$P(|X| > k) \leq 0.0033$$

حال با استفاده از قضیه ۱.۱.۲ برای r های مختلف داریم

$$P(|X| > k) \leq C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r}$$

$$P(|X| > 3) \leq C^*(1) \frac{E(|X|^1)}{3^1} = 0.426 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.113$$

$$P(|X| > 3) \leq C^*(2) \frac{E(|X|^2)}{3^2} = 0.331 \frac{1}{9} = 0.036$$

$$P(|X| > 3) \leq C^*(4) \frac{E(|X|^4)}{3^4} = 0.009296$$

$$P(|X| > 3) \leq C^*(6) \frac{E(|X|^6)}{3^6} = 0.00436$$

$$P(|X| > 3) \leq C^*(8) \frac{E(|X|^8)}{3^8} = 0.002$$

همانطور که ملاحظه می شود مقدار بدست آمده با استفاده از تابع چگالی در بیشتر مواقع (به غیر از گشتاور مرتبه هشتم) بهتر از کرانی است که با استفاده از گشتاور های مرتبه r ام بدست می آید.

۲.۲.۲ کران برای P مقدارها^۲

با توجه به مطالبی که در بخش قبل گفته شد، می توان با استفاده از نامساویهای بدست آمده، کرانی برای p مقدارهای (بنابر تعریف ۸.۱.۱) بعضی از توزیعهای مهم مانند F, χ^2, t را بدست آورد؛ شاید این سؤال مطرح شود که آیا نمی توان با استفاده از جدول یا نرم افزار این مقادیر را با دقت لازم محاسبه نمود؟ در پاسخ، این بحث مطرح است که بعضی از توزیعها مانند توزیع بتا معمولا جدول قابل دسترسی ندارند،

^۲Bound on P-values

همچنین ممکن است در مواقع اضطراری به جدولهای معروف نیز دسترسی نداشته باشیم؛ پس این نامساوی مفید می باشد.^۳

با کمی دقت متوجه می شویم، مثالهایی که در این قسمت آورده ایم یا بازه تعریف آنها زیر مجموعه ای از R^+ بوده است، یا دارای توزیع متقارن بوده اند که توانسته ایم توزیع $|X|$ را بدست آوریم.

۳.۲ توزیع پواسون و نامساوی چبیشف بهبودیافته^۴

بیشتر بحثهایی که تا کنون صورت گرفته برای متغیر تصادفی پیوسته بوده با توجه به اینکه تقریبهایی در مورد توزیع پواسون بکار می رود شایسته است که بررسی نامساوی بهبود یافته چبیشف برای متغیر تصادفی، با توزیع پواسون به عنوان یکی از توزیعهای گسسته نیز انجام شود؛ برای محاسبه $C^*(r)$ خواهیم داشت.

$$C^*(r) = \sup_{k \in Z^+} \frac{k^r P(X > k)}{EX^r}$$

Z^+ همان مجموعه اعداد صحیح مثبت در نظر گرفته می شود برای یافتن $\sup_{k \in Z^+} k^r P(X > k)$ باید سه مرحله زیر را پشت سر بگذاریم.

مرحله اول: بدلیل اینکه متغیر k گسسته است بنابراین نمی توانیم از مشتق برای بدست آوردن بیشینه استفاده کنیم؛ معادل پیدا کردن بزرگترین k ای که در رابطه زیر صدق کند عمل می کنیم:

$$\frac{k^r P(X > k)}{(k-1)^r P(X > k-1)} \geq 1 \iff \frac{P(X = k)}{P(X > k)} \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^r - 1 \quad r > 1$$

زیرا:

$$\begin{aligned} \frac{k^r P(X > k)}{(k-1)^r P(X > k-1)} \geq 1 &\iff \frac{P(X = k) + P(X > k)}{P(X > k)} \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^r \\ &\iff \frac{P(X = k)}{P(X > k)} + 1 \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^r \iff \frac{P(X = k)}{P(X > k)} \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^r - 1 \end{aligned}$$

در رابطه بالا باید $k \geq 2$ در نظر گرفته شود.

مرحله دوم: با توجه به نمایش انتگرال معروف $P(X > k) = \frac{\int_0^\lambda e^{-t} t^k dt}{k!}$ (برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۵ مراجعه شود):

^۳ لازم به ذکر است که بعضی نرم افزارها مانند سس مقادیر زیر ۰.۰۱ / را برابر ۰.۰۱ در نظر می گیرد.

^۴ Poisson

$$\begin{aligned} \frac{P(X=k)}{P(X>k)} &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{\int_0^\lambda e^{-t}t^k dt} \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^r - 1 \\ &\iff \frac{1}{\int_0^\lambda e^{-t}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k dt} \leq e^\lambda \left\{ \left(\frac{k}{k-1}\right)^r - 1 \right\} \\ &\iff \left[\int_0^1 e^{-\lambda u} u^k du \right]^{-1} \leq \lambda e^\lambda \left\{ \left(\frac{k}{k-1}\right)^r - 1 \right\} \end{aligned}$$

مرحله سوم: از قبل می دانیم، $\int_0^1 e^{-\lambda u} u^x du$ و $\left(\frac{x}{x-1}\right)^r$ نسبت به x برای $r > 0$ نزولی می باشند. زیرا اگر $f(x) = \int_0^1 e^{-\lambda u} u^x du$ ، در نظر گرفته شود؛ فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} x_2 &< x_1 \\ ' \leq u \leq ' &\Rightarrow u^{x_1} < u^{x_2} \Rightarrow e^{-\lambda u} u^{x_1} < e^{-\lambda u} u^{x_2} \\ &\Rightarrow \int_0^1 e^{-\lambda u} u^{x_1} du < \int_0^1 e^{-\lambda u} u^{x_2} du \quad \text{زیرا تابع زیر انتگرال نامنفی است} \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0. \end{aligned}$$

بنابراین تابع f نزولی است، همچنین با استفاده مشتق گیری نتیجه می شود، $\left(\frac{x}{x-1}\right)^r$ نیز نسبت به x نزولی است. بنابراین ریشه یکتای $x^*(r, \lambda) > 2$ برای معادله زیر وجود دارد.

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^r - \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\int_0^\lambda e^{-t}t^x dt} - 1 = 0.$$

همچنین

$$\arg \sup \{k^r P(X > k)\} = [x^*(r, \lambda)]$$

نکته: در روابط بالا [.] نشانه جزء صحیح می باشد.

قضیه ۱.۳.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ را در نظر بگیرید. پس برای هر $n \geq 1$ داریم [۵].

$$\begin{aligned} P(X > k) &\leq C^*(n, \lambda) \frac{\sum S_r(n, i) \lambda^i}{k^n} \\ C^*(n, \lambda) &= \frac{[x^*(n, \lambda)]^n P(X > x^*(n, \lambda))}{\sum S_r(n, i) \lambda^i} \end{aligned}$$

که در آن: $S_2(n, i)$ و B_n به ترتیب نشان دهنده عدد استرلینگ^۵ نوع دوم و عدد بل^۶، می باشند.

برهان. با توجه به اینکه $E(X^n) = \sum S_2(n, i) \lambda^i$ (به پیوست شماره ۶ مراجعه شود) داریم:

$$P(X > k) \leq C^*(n, \lambda) \frac{\sum S_2(n, i) \lambda^i}{k^n} \quad \text{با توجه به قضیه ۱.۱.۲}$$

□

مثال ۲.۳.۲. (نقاط تثبیت شده در یک ترتیب تصادفی اعداد): فرض کنید π_m نشان دهنده ترتیبی تصادفی از $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ و Z_m نمایش تعداد اعداد تثبیت شده در این ترتیب تصادفی باشند، یعنی

$$Z_m = \#\{i : \pi_m(i) = i\}$$

با توجه به مباحث جور شدن (منظور تعداد اعدادی است که در مکان اصلی خود قرار می گیرند مثلاً اگر ۴ در مکان چهارم قرار گیرد، در حقیقت جور شده است):

$$Z_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Poi(1) \quad \text{(با توجه به تعاریف ۹.۱.۱ و ۱۵.۱.۱)}$$

با رجوع به [۱۱]:

$$d_{Tv}(Z_m, Poi(1)) \leq \frac{2^m}{m!} \quad (23.2)$$

چنانچه مشاهده می شود وقتی که $m \rightarrow \infty$ اختلاف Z_m و $Poi(1)$ به صفر میل می کند. با استفاده از روابط بالا نتیجه گیری می شود:

$$P(Z_m > k) \leq C^*(n, 1) \frac{B_n}{k^n} + \frac{2^m}{m!} \quad \forall n \quad (24.2)$$

برای B_n و $C^*(n, 1)$ جدول زیر را داریم:

برای $n = 5$ داریم

$$P(Z_m > k) \leq \frac{4/628}{k^5} + \frac{2^m}{m!} \quad \text{برای هر } m \text{ دلخواه و } k \geq 1$$

^۵Stirling Number

^۶Bell Number

n	۲	۳	۴	۵	۱۰
B_n	۲	۵	۱۵	۵۲	۱۱۵۹۷۵
$C^*(n, 1)$	۰/۱۶۱	۰/۱۲۹	۰/۱۰۳	۰/۰۸۹	۰/۰۵

جدول ۴.۲: B_n و $C^*(n, 1)$ برای n های مختلف

n	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$
۱	۰/۲۶۴	۰/۳۲۳	۰/۳۸۵	۰/۴۲۵	۰/۴۴۸	۰/۵۴۶
۲	۰/۱۶۱	۰/۲۱۶	۰/۲۶۵	۰/۲۹۷	۰/۳۲۰	۰/۳۹۹
۳	۰/۱۲۹	۰/۱۷۵	۰/۲۰۷	۰/۲۳۲	۰/۲۵۱	۰/۳۱۸
۴	۰/۱۰۳	۰/۱۴۳	۰/۱۷۰	۰/۱۹۰	۰/۲۰۶	۰/۲۶۶
۵	۰/۰۸۹	۰/۱۱۹	۰/۱۴۱	۰/۱۵۹	۰/۱۷۴	۰/۲۲۹
۱۰	۰/۰۵۰	۰/۰۷۰	۰/۰۸۴	۰/۰۹۳	۰/۱۰۴	۰/۱۳۸

جدول ۵.۲: $C^*(n, \lambda)$ برای مقادیر مختلف n و λ

برای $m = 52$ و $k = 3$ و با توجه به روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲):

$$P(Z_m > k) \leq 0/01904$$

$$P(Z_m > k) = P(Z_m > 3) = 0/0189882 \quad \text{مقدار احتمال}$$

همانگونه که مشاهده می شود دو مقدار بدست آمده خیلی به یکدیگر نزدیک می باشند. (دارای اختلاف خیلی کمی می باشند)

۴.۲ کاربردهای ریاضی

۴.۲. کاربردهای ریاضی

با به آنچه در مورد نامساوی چیشف-مارکف گفتیم، دو مورد از کاربردهای بسیار مفید این نامساوی را در ریاضیات بیان می کنیم.

۱.۴.۲ کران تابع ریمان زتا^۷ (زتا ریمان)

تعریف ۱.۴.۲. تابع $\zeta(r) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^r}$ را برای $r > 1$ (که یک سری همگرا می باشد)^۸ تابع ریمان زتا (زتا ریمان) می نامیم.

با وجود اینکه می دانیم تابع ریمان زتا همگراست ولی نمی توان مقدار این تابع را (مخصوصا برای r های بزرگ یا غیر صحیح) بسادگی محاسبه نمود، پس بدست آوردن کرانی برای این تابع می تواند کاملاً مفید باشد.

در این قسمت از پایان نامه، کران بالای این تابع را به ازای r های مختلف بدست می آوریم. فرض می کنیم متغیر تصادفی X دارای توزیع هندسی $(P(x) = q^x p, x = 0, 1, 2, \dots)$ باشد، بنابراین:

$$q^{k+1} = P(X > k) \leq C^*(r) \frac{E(|X|^r)}{k^r} \quad (25.2)$$

$$C^*(r) = \sup_{x>0} \frac{P(X > x)x^r}{E|X|^r} = \frac{1}{EX^r} q^{1+\lceil \frac{-r}{\log(q)} \rceil} \left(\frac{-r}{\log(q)}\right)^r \quad (26.2)$$

در رابطه بالا [.] نشان دهنده جزء صحیح می باشد. $\frac{-r}{\log q}$ مقداری است که در آن سوپریمم (با مشتق گیری جواب بدست می آید.) رخ می دهد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow q^{k+1} = P(X > k) &\leq \frac{\left(\frac{-r}{\log q}\right)^r q^{1+\lceil \frac{-r}{\log q} \rceil}}{k^r} \\ \Rightarrow \frac{1}{k^r} &\geq \frac{q^{k+1}}{\left(\frac{-r}{\log q}\right)^r q^{(1+\lceil \frac{-r}{\log q} \rceil)}} \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

اگر $q = \exp(-\alpha)$ ($\alpha > 0$) در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^r} &\geq \frac{\exp(-(k+1)\alpha)}{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \exp(-\alpha(1+\lceil \frac{r}{\alpha} \rceil))} \\ \Rightarrow \sum \frac{1}{k^r} &\geq \frac{\sum (\exp(-(k+1)\alpha))}{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \exp(-\alpha(1+\lceil \frac{r}{\alpha} \rceil))} = \frac{\alpha^r e^{\alpha \lceil \frac{r}{\alpha} \rceil}}{(e^\alpha - 1)r^r} \end{aligned}$$

^۷Reimann Zeta

^۸طبق آنچه در آنالیز خوانده ایم $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^r}$ برای $r \leq 1$ واگراست.

حال اگر $r = \alpha$ در نظر گرفته شود پس کران ساده ای (از نظر محاسبات) برای $\zeta(\alpha)$ بدست می آید.

$$\alpha > 1 \quad \zeta(\alpha) = \sum \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)}$$

۲.۴.۲ سری نمایی بر روی اعداد اول

برای محاسبه $\sum e^{-\lambda p}$ (به شرط آنکه p عناصر مجموعه اعداد اول باشند، $\lambda > 0$) می توان با استفاده از نامساوی چیشف بهبود یافته وتابع ریمان زتا، کران بالایی آنرا بدست آورد. در این حالت تابع توزیع نمایی را به صورت زیر در نظر گرفته، نامساوی را برای آن می نویسیم.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \xrightarrow{\text{با استفاده از قضیه ۱.۱.۲}} C^*(r) \leq \sup_{x>0} \frac{f(x)x^{r+1}}{rE|X|^r} = \sup_{x>0} \frac{\overbrace{x^{r+1}\lambda e^{-\lambda x}}^{g(x)}}{rE|X|^r}$$

$$\Rightarrow g'(x) = x^r \lambda e^{-\lambda x} (r + 1 - \lambda x)$$

در نتیجه سوپریمم در $x = \frac{r+1}{\lambda}$ اتفاق می افتد، بنابراین

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} = P(|X| > x) &= P(X > x) \leq \frac{(\frac{r+1}{\lambda})^{r+1} \lambda e^{-r-1}}{EX^r} \frac{EX^r}{x^r} \\ \Rightarrow \frac{1}{x^r} &\geq \frac{r\lambda^r e^{r+1} e^{-\lambda x}}{(r+1)^{r+1}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^r} &\leq 1 - \frac{r\lambda^r e^{r+1} e^{-\lambda x}}{(r+1)^{r+1}} \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن A به عنوان مجموعه اعداد اول داریم:

اگر تساوی اقلیدسی^۹ را بکار ببریم $(\zeta(r) = \prod_{p \in A} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}})$ و $r > 1$

$$\zeta(r) \geq \prod_{p \in A} \frac{1}{1 - \frac{r\lambda^r e^{r+1} e^{-\lambda p}}{(r+1)^{r+1}}}$$

$$\geq \prod_{p \in A} \left(1 + \frac{r\lambda^r e^{r+1} e^{-\lambda p}}{(r+1)^{r+1}}\right)$$

$$(x < 1), \frac{1}{1-x} \geq 1+x \quad \text{با توجه به نامساوی}$$

$$\geq 1 + \frac{r\lambda^r e^{r+1}}{(r+1)^{r+1}} \sum_{p \in A} e^{-\lambda p} \quad \text{با توجه به نامساوی: } \prod_{i \in A} (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i \in A} x_i \quad \text{با شرط } x_i \geq 0$$

$$\xrightarrow{\forall r \geq 1} \sum_{p \in A} e^{-\lambda p} \leq \frac{(r+1)^{r+1}}{r\lambda^r e^{r+1}} (\zeta(r) - 1)$$

با انتخاب r مناسب کران نزدیک به مقدار واقعی را می توان بدست آورد.

^۹Euclid equation

برهان. برای تساوی اقلیدسی:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} &= \prod_{p \in A} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}} \quad \text{با طرفین، وسطین کردن خواهیم داشت} \\
 \prod_{p \in A} \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} &= 1 \quad \text{باید رابطه روبرو به اثبات برسد} \\
 \left(\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \dots\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} &= 1 \\
 \left(\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \dots\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^r}\right) &= 1 \\
 \left(\left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \dots\right) \left(\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^r}\right)\right) &= 1 \\
 \left(\left(1 - \frac{1}{3^r}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \dots\right) \left(\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(\sum_{k=1, k \neq 2n, k \neq 2n}^{\infty} \frac{1}{k^r}\right)\right) &= 1 \\
 \dots \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} &= 1 \Rightarrow 1 = 1
 \end{aligned}$$

□

در حقیقت در برهان بالا از این خاصیت که هر عدد طبیعی به غیر از یک را می توان به صورت

حاصلضرب اعداد اول نوشت، استفاده شده است.

فصل ۳

نامساوی چبیشف در حالت چند متغیره

همانگونه که در مقدمه گفته شد می توان نامساوی چبیشف-مارکف را به حالت p بعدی گسترش داد؛ ولی نامساوی های کاربردی و مفیدی (قابل استفاده در مبحث احتمال) بدست نمی آید، پس درحالت چند بعدی فقط برای توزیعهای خاصی که کاربردی و مفید می باشند نامساوی را بدست می آوریم. توزیعهایی که در نظر می گیریم به دو رده : نرمال آمیخته مقیاس p متغیره با متغیرهای ناهمبسته و نرمال p متغیره، با متغیرهای همبسته تقسیم می شوند.

۱.۳ نامساوی چبیشف برای نرمال آمیخته مقیاس چند متغیره

در این بخش فرض می کنیم بردار تصادفی $\tilde{X}$ ، دارای توزیع نرمال آمیخته مقیاس، که مخلوطی از توزیعهای $N_p(\mu, \sigma^2 I)$ است، باشد. برای ساده تر شدن محاسبات ابتدا میانگین برابر صفر فرض می شود، سپس می توان با تغییر متغیر برای $\mu \neq 0$ نیز نامساوی را بدست آورد.

پس با این تفاسیر قضیه ۱.۱.۲ می تواند دقیقاً به توابع یک متغیره از بردار تصادفی p متغیره گسترش یابد. (منظور تابع $f: R^p \rightarrow R$ میباشد).

رده مهم دیگری در مورد بردار تصادفی به غیر از آمیخته مقیاسها، تک نمایی متقارن کروی می باشد. ما بهترین مقدار ثابت $C^*(r)$ (ثابت چبیشف) در قضیه ۱.۱.۲ را برای هر یک از خانواده ها، وقتی که پیش آمد مفروض به صورت $A = \{\tilde{X} : \|\tilde{X}\| > k\}$ می باشد، $((\cdot, \cdot))$ نشان دهنده نرم^۱ در فضای L_2 است؛ و $\|\tilde{X}\| = (\sum x_i^2)^{1/2}$ بدست خواهیم آورد. به نظر می رسد که $C^*(r)$ برای توزیعهای نرمال آمیخته مقیاس بطور معنی داری کوچکتر از دیگر توزیعهای p متغیره باشد؛ که شرح بیشتر آن در ادامه می آید.

قبل از مطرح کردن قضیه اصلی این بخش لازم است لم زیر را بیان کنیم.

لم ۱.۱.۳. [۵]: فرض کنید برای بردار تصادفی p متغیره $\tilde{Z}_{p \times 1}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$P(\|\tilde{Z}\| > k) \leq C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{Z}\|^r}{k^r} \quad \forall k > 0$$

^۱Norm

که متغیر تصادفی اسکالر $\sigma \geq 0$ را مستقل از $\tilde{Z}$ در نظر می گیریم و $X = \sigma \tilde{Z}$ در این صورت:

$$P(\|\tilde{X}\| > k) \leq C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{X}\|^r}{k^r}$$

و بطور ویژه $C_{\tilde{X}}^*(r) \leq C_{\tilde{Z}}^*(r)$.

برهان.

$$\begin{aligned} P(\|\tilde{X}\| > k) &\stackrel{\sigma \geq 0}{=} P(\sigma \|\tilde{Z}\| > k) = \int_{\sigma} P(\|\tilde{Z}\| > \frac{k}{\sigma} | \sigma) dF_{\sigma} \quad F_{\sigma} \text{ نشان دهنده تابع توزیع } \sigma \text{ است.} \\ &\leq \int_{\sigma} C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{Z}\|^r}{(\frac{k}{\sigma})^r} dF(\sigma) = C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{Z}\|^r}{k^r} \int_{\sigma} \sigma^r dF(\sigma) \\ &= C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{Z}\|^r E \sigma^r}{k^r} = C_{\tilde{Z}}^*(r) \frac{E \|\tilde{X}\|^r}{k^r} \end{aligned}$$

چون بر اساس قضیه ۱.۱.۲ $C_{\tilde{X}}^*(r)$ بهترین مقدار ثابت برای نامساوی بالاست پس :

$$C_{\tilde{X}}^*(r) \leq C_{\tilde{Z}}^*(r)$$

□

قضیه ۲.۱.۳. اگر $\tilde{X}$ دارای توزیع نرمال آمیخته مقیاس p بُعدی باشد، یعنی $\tilde{X}$ دارای چگالی ای باشد، که مخلوطی از چگالیهای $N_p(\cdot, \sigma^2 I)$ هست، و $f_p(x)$ و $F_p(x)$ نشان دهنده تابع چگالی و تابع توزیع $\chi^2(p)$ باشند؛ همچنین $x_* = x_*(p, r)$ نشان دهنده ریشه یکتای $x f_p(x) = \frac{r}{p}(1 - F_p(x))$ باشد بنابراین [۵]:

$$C_{\tilde{X}}^*(r) \leq \frac{p}{r} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\frac{r}{2} \Gamma(\frac{r+p}{2})} x_*^{\frac{r}{2}+1} f_p(x_*) = C_{N(\cdot, I)}^*(r) \quad (\text{الف})$$

$$C_{N(\cdot, I)}^*(r) \leq \frac{p}{r} \left(\frac{r+p}{2}\right)^{\frac{r+p}{2}} \frac{e^{-\frac{r+p}{2}}}{\Gamma(\frac{r+p}{2})} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}(r)$$

$$C_{\tilde{X}}^*(r) = \left(\frac{r}{r+p}\right)^{\frac{r}{p}} \quad \text{ب) اگر متغیر تصادفی دارای توزیع تک نمایی متقارن گروی باشد}$$

برهان. الف) با توجه به تساوی $\tilde{X} = \sigma \tilde{Z}$ متغیر تصادفی نرمال استاندارد p بعدی می باشد. و با استفاده از لم قبل رابطه $C_{\tilde{X}}^*(r) \leq C_{\tilde{Z}}^*(r)$ برقرار است در نتیجه $C_{N(\cdot, I)}^*(r)$ را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} C_{\tilde{Z}}^*(r) &= \frac{\sup_{x>\cdot} P(\|\tilde{Z}\| > x) x^r}{E \|\tilde{Z}\|^r} \\ &= \sup \frac{P\left(\sqrt{\sum_1^p Z_i^2} > x\right) x^r}{E\left(\sqrt{\sum_1^p Z_i^2}\right)^r} \\ &= \sup \frac{P\left(\sum_1^p Z_i^2 > x^2\right) (x^2)^{\frac{r}{2}}}{E\left(\sum_1^p Z_i^2\right)^{\frac{r}{2}}} \end{aligned}$$

همانطور که گفته شد، $Z_i \sim N(\cdot, 1)$ پس $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$ برای هر i ، بنابراین $\sum_1^p Z_i^2 \sim \chi^2(p)$:

$$C_{\tilde{Z}}^*(r) = \sup \frac{\overbrace{\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r}{2}} (1 - F_p(x^2)) (x^2)^{\frac{r}{2}}}}{\frac{r}{2} \Gamma\left(\frac{r+p}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

بدلیل اینکه مخرج مستقل از x است، پس برای بیشینه کردن صورت:

$$\begin{aligned} g'(y) = 0 &\Rightarrow \frac{r}{2} y^{\frac{r}{2}-1} (1 - F_p(y)) - f_p(y) y^{\frac{r}{2}} = 0 \\ &\Rightarrow y^{\frac{r}{2}-1} \left(\frac{r}{2} (1 - F_p(y)) - y f_p(y)\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{r}{2} (1 - F_p(y)) = y f_p(y) \end{aligned}$$

که می توان y را به x_* تبدیل کرد.

در نتیجه بیشینه g در نقطه x_* اتفاق می افتد بنابراین:

$$\begin{aligned} C_{\tilde{Z}}^*(r) &= \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\frac{r}{2} \Gamma(\frac{r+p}{2})} \frac{2}{r} x_* f_p(x_*) x_*^{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{2}{r} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\frac{r}{2} \Gamma(\frac{r+p}{2})} x_*^{\frac{r}{2}+1} f_p(x_*) \end{aligned}$$

اکنون برای بدست آوردن $\bar{C}(r)$ مقدار x_* را با استفاده از مشتق گیری بدست آورده، جایگزین می کنیم.

$$(x_* = p + r)$$

$$\begin{aligned} C_{\tilde{Z}}^*(r) &\leq \bar{C}_{\tilde{Z}}(r) = \frac{2}{r} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\frac{r}{2} \Gamma(\frac{r+p}{2})} \frac{(r+p)^{\frac{r}{2}+1} (r+p)^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{r+p}{2}}}{\frac{p}{2} \Gamma(\frac{p}{2})} \\ &= \frac{2}{r} \frac{(r+p)^{\frac{r+p}{2}} e^{-\frac{r+p}{2}}}{\Gamma(\frac{r+p}{2})} \\ &= \frac{2}{r} \left(\frac{r+p}{2}\right)^{\frac{r+p}{2}} \frac{e^{-\frac{r+p}{2}}}{\Gamma(\frac{r+p}{2})} \end{aligned}$$

ب) قبل از برهان این قسمت لازم به ذکر است برای آشنایی بیشتر با تقارن کروی وبطور کلی تقارن در فضای چند بعدی به پیوست ۷ مراجعه کنید. $\tilde{X} = \sigma \tilde{Z}$ را در نظر می گیریم، وقتی که $\tilde{Z}$ دارای توزیع یکنواخت در گوی واحد (بنابرتعریف ۱۴.۱.۱ و ۱۷.۱.۱) $\{ \tilde{Z} : \| \tilde{Z} \| \leq 1 \}$ و σ از $\tilde{Z}$ مستقل باشد داریم:

$$P(\| \tilde{Z} \| > z) = \frac{\lambda_{p-1}(B)}{p\lambda_p(B)} (1 - z^p) = 1 - z^p$$

به دلیل رابطه بین حجم و سطح رویه، در گویهای p بعدی p حجم گوی B

$$\lambda_p(B)$$

سطح رویه گوی B

$$\lambda_{p-1}(B)$$

حجم گوی B

r	p=۲	p=۲	p=۳	p=۳	p=۴	p=۴	p=۵	p=۵	p=۶	p=۶
r	$C_{\tilde{Z}(r)}^*$	$\bar{c}(r)$	$C_{\tilde{Z}(r)}^*$	$\bar{c}(r)$	$C_{\tilde{Z}(r)}^*$	$\bar{c}(r)$	$C_{\tilde{Z}(r)}^*$	$\bar{c}(r)$	$C_{\tilde{Z}(r)}^*$	$\bar{c}(r)$
۲	۰/۳۶۸	۰/۵۴۱	۰/۳۹۶	۰/۶۱۰	۰/۴۲۰	۰/۶۷۲	۰/۴۴۰	۰/۷۲۹	۰/۴۵۷	۰/۷۸۱
۳	۰/۳۰۸	۰/۴۰۷	۰/۳۳۰	۰/۴۴۸	۰/۳۴۸	۰/۴۸۶	۰/۳۶۴	۰/۵۲۱	۰/۳۷۹	۰/۵۵۴
۴	۰/۲۷۱	۰/۳۳۶	۰/۲۸۷	۰/۳۶۴	۰/۳۰۲	۰/۳۹۱	۰/۳۱۵	۰/۴۱۵	۰/۳۲۸	۰/۴۳۹
۶	۰/۲۲۴	۰/۲۹۲	۰/۲۳۵	۰/۲۷۷	۰/۲۴۶	۰/۲۹۲	۰/۲۵۵	۰/۳۰۷	۰/۲۶۴	۰/۳۲۱
۸	۰/۱۹۵	۰/۲۱۹	۰/۲۰۴	۰/۲۳۰	۰/۲۱۱	۰/۲۴۱	۰/۲۱۸	۰/۲۵۱	۰/۲۲۵	۰/۲۶۱

جدول ۱.۳: برای ابعاد مختلف نرمال آمیخته مقیاس $C^*(r)$

$$\begin{aligned}
 E \| \tilde{Z} \|^r &= \frac{\lambda_{p-1}(B)}{(r+p)\lambda_p(B)} \\
 C^*(r) &= \frac{\sup_{z>\cdot} z^r P(\| \tilde{Z} \| > z)}{E \| \tilde{Z} \|^r} \\
 \Rightarrow C^*(r) &= \frac{\sup_{z>\cdot} z^r (1 - z^p) \frac{\lambda_{p-1}(B)}{p\lambda_p(B)}}{\frac{\lambda_{p-1}(B)}{(r+p)\lambda_p(B)}} \\
 &= \frac{r+p}{p} \sup_{z>\cdot} z^r (1 - z^p) \\
 \Rightarrow C^*(r) &= \frac{r+p}{p} \left(\left(\frac{r}{r+p} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^r \left(1 - \frac{r}{r+p} \right) \\
 &= \frac{r+p}{p} \left(\frac{r}{r+p} \right)^{\frac{r}{p}} \frac{p}{r+p} \\
 \Rightarrow C^*(r) &= \left(\frac{r}{r+p} \right)^{\frac{r}{p}}
 \end{aligned}$$

□

در $C^*(r)$ علاوه بر p, r هم نقش دارد؛ جدول ۱.۳ تغییرات $C^*(r)$ را با توجه به r و p نشان می دهد:

r	p=۲	p=۳	p=۴	p=۵	p=۶
۲	۰/۵۰۰	۰/۵۴۳	۰/۵۷۷	۰/۶۰۶	۰/۶۳۰
۳	۰/۴۶۵	۰/۵۰۰	۰/۵۳۰	۰/۵۵۵	۰/۵۷۷
۴	۰/۴۴۴	۰/۴۷۴	۰/۵۰۰	۰/۵۲۳	۰/۵۴۳
۶	۰/۴۲۲	۰/۴۴۴	۰/۴۶۵	۰/۴۸۳	۰/۵۰۰
۸	۰/۴۱۰	۰/۴۲۸	۰/۴۴۴	۰/۴۶۰	۰/۴۷۴

جدول ۲.۳: $C^*(r)$ برای تک مده متقارن کروی

r	p=۲	p=۴	p=۶
۲	۰/۰۷۳۶	۰/۱۶۸	۰/۲۷۴۲
۳	۰/۰۳۶۵	۰/۱۰۳۳	۰/۱۹۶
۴	۰/۰۲۱۷	۰/۰۷۲۵	۰/۱۵۷۴
۶	۰/۰۱۰۷	۰/۰۴۷۰	۰/۱۲۶۷۲
۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۴۰۵	۰/۱۲۹۶
bound	۰/۰۰۶۷	۰/۰۴۰۴	۰/۱۲۴۷

جدول ۳.۳: مقدار احتمال (۱.۳) و مقایسه آن با کرانی که بوسیله نامساوی چیشف بدست آمده

مثال ۳.۱.۳. برای مقایسه کران بدست آمده از نامساوی چیشف و مقدار بدست آمده از جدول (برای توزیع

نرمال آمیخته مقیاس) برای

$$P(\| \tilde{Z} \| > \sqrt{10}) \quad (۱.۳)$$

کران نامساوی چیشف را برای بُدهای مختلف و چند گشتاور محدود حساب کرده، با مقدار بدست آمده از جدول مقایسه می کنیم:

با توجه به آنچه گفته شد اگر متغیر تصادفی دارای میانگین μ باشد، با تغییر متغیر می توانیم مقادیر را

برای $C^*(r)$ بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \| \tilde{Y} \| &= \| \tilde{X} - \tilde{\mu} \| \\ \Rightarrow P(\| \tilde{Y} \| > x) &\leq C_Y^*(r) \frac{1}{x^r} E \| \tilde{Y} \|^r \end{aligned}$$

یعنی رابطه $(X_i - \mu_i)^2 \sim \chi^2(1)$ جایگزین رابطه $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ و تمام عملیات مشابه قبل انجام می شود.

در ادامه نامساوی چبیشف برای حالتی که متغیرهای x_i به یکدیگر وابسته باشند، را بدست می آوریم.

۲.۳ نامساوی چبیشف برای حالت چند متغیره با متغیرهای اسکالر وابسته

قبل از بیان قضیه اصلی این بخش لازم است لم زیر (که در اثبات قضیه بکار می آید) را بیان کنیم.

لم ۱.۲.۳. A را ماتریس $p \times p$ و I را ماتریس واحد (همانی) از همان مرتبه در نظر بگیرید، همچنین اگر $\varphi(t, A) = |I + tA|$ در نظر گرفته شود، آنگاه:

$$d(\varphi(t, A))/dt|_{t=0} = \frac{d}{dt}(|I + tA|)|_{t=0} = \text{tr}(A)$$

□

برهان. به [۴] مراجعه شود.

قضیه ۲.۲.۳. بردار تصادفی X که دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $\tilde{m}$ و ماتریس کوواریانس Σ^{-1} می باشد را در نظر بگیرید.^۲ و همچنین $B(m, r)$ نشان دهنده گوی اقلیدسی به مرکز $\tilde{m}$ و شعاع r می باشد؛ بنابراین [۴]:

$$P(X \in B(m, r)) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^p v(x_i)}{r^2} \quad \forall r > 0$$

برهان. $f(\tilde{x})$ را تابع چگالی احتمال نرمال p متغیره در نظر گرفته، پس از ساده کردن عبارت:

$$f(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x} - \tilde{m})\Sigma(\tilde{x} - \tilde{m})^T\right\}$$

با توجه به اینکه Σ ماتریس متقارن معین مثبت با ابعاد p می باشد واضح است که برای $t > 0$ نیز $\Sigma + tI$ متقارن معین مثبت می باشد، در نتیجه $\Sigma + tI$ (با توجه به شرایط توزیع نرمال چند متغیره) می تواند به عنوان معکوس ماتریس کوواریانس توزیع نرمال p متغیره در نظر گرفته شود.

^۲ماتریس کوواریانس برای سادگی محاسبات Σ^{-1} در نظر گرفته شده است

بنابراین طبق آنچه از قبل خوانده ایم:

$$\frac{\sqrt{|\Sigma + tI|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)(\Sigma + tI)(x - m)^T\right\} dx = 1 \quad (2.3)$$

با کمی تغییر جبری :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{|\Sigma|} \sqrt{|I + t\Sigma^{-1}|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)(\Sigma + tI)(x - m)^T\right\} dx = 1 \\ \Rightarrow & \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)(\Sigma + tI)(x - m)^T\right\} dx = (\sqrt{|I + t\Sigma^{-1}|})^{-1} \end{aligned}$$

با مشتق گیری از رابطه اخیر (نسبت به t)

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \left(\sum (x_i - m_i)^2\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)(\Sigma + tI)(x - m)^T\right\} dx \quad (3.3)$$

$$= -\frac{1}{2} (|I + t\Sigma^{-1}|)^{-\frac{p}{2}} d(\varphi(t, \Sigma^{-1}))/dt \quad (4.3)$$

با استفاده از لم قبلی و با بکار بردن رابطه زیر و با توجه به اینکه در رابطه قبل $\bullet \searrow t$:

$$\frac{d\varphi(t, \Sigma^{-1})}{dt} \Big|_{t=\bullet} = tr(\Sigma^{-1}) = \sum_{i=1}^p v(x_i)$$

بنابراین:

$$\frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} dx = \frac{\sum_{i=1}^p v(x_i)}{r^2}$$

از طرف دیگر:

$$P(\tilde{X} \in B(m, r)) = 1 - \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{B^c(m, r)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} d\tilde{x} \quad (5.3)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} I_{B^c(m, r)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} d\tilde{x} \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow P(\tilde{x} \in B(m, r)) \geq 1 - \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} d\tilde{x} \quad (7.3)$$

$$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^p v(x_i)}{r^2} \quad (8.3)$$

$$\Rightarrow P(\tilde{x} \in B(m, r)) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^p v(x_i)}{r^2} \quad (9.3)$$

□

برهان. نامساوی (۷.۳)

اگر نقطه ای خارج از گوی اقلیدسی B باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum (x_i - m_i)^2 &\geq r^2 \Rightarrow \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} \geq 1 \\ \Rightarrow \int_{B^c(m, r)} \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x} &\geq \int_{B^c(m, r)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \Rightarrow \int_{R^p} \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x} &\geq \int_{B^c(m, r)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

دو طرف را در منفی ضرب و با یک جمع می کنیم.

$$\begin{aligned} 1 - \int_{R^p} \frac{\sum (x_i - m_i)^2}{r^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x} &\leq 1 - \int_{B^c(m, r)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} I_{B^c(m, r)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} d\tilde{x} \\ &\geq 1 - \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{(\sqrt{\pi})^{\frac{p}{2}}} \int_{R^p} \frac{(x_i - m_i)^2}{r^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m)\Sigma(x - m)^T\right\} d\tilde{x} \end{aligned}$$

□

با توجه به قضیه ۲.۲.۳ می توان نتیجه گیری کرد که نامساوی چیشف در حالت p بعدی کاملاً شبیه حالت تک بعدی می باشد به عبارت دیگر حالت p بعدی، گسترش یافته حالت تک بُعدیست. در ادامه نامساوی مهم دیگری را با شرایط متفاوتی را بررسی می نماییم.

۱.۲.۳ نامساوی جنج

قضیه ۳.۲.۳. نامساوی جنج: فرض کنید $\tilde{X}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره و B ماتریس معین مثبت p بعدی، با مقادیر ویژه $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_p > 0$ و $B = J^T D J$ ، که D ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه ماتریس B می باشد در نظر بگیرید آنگاه به ازای هر $r > 0$ [۱۲]:

$$P(\tilde{X} \notin B(m, r)) = \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p |B|}} \int_{B^c(m, r)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x} - \tilde{m})^T B^{-1}(\tilde{x} - \tilde{m})\right\} d\tilde{x} \\ \geq q \left(\frac{r}{\sqrt{\rho_p}}\right)^{p-2} \exp\left\{\frac{-r^2}{2\rho_p}\right\}$$

q مقدار ثابتی است که به r بستگی ندارد.

برهان. قبل از برهان یاد آوری می کنیم، $(\tilde{x} - \tilde{m})$ بردارسطری است که برای راحتی، تغییر متغیر $\tilde{y}^T \rightarrow (\tilde{x} - \tilde{m})$ را در نظر می گیریم.

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p |B|}} \int_{\|\tilde{y}\| > r} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{y})^T B^{-1} \tilde{y}\right\} d\tilde{y} \\ = \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p \rho_1 \rho_2 \dots \rho_p}} \int_{\|\tilde{y}\| > r} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{y})^T J^{-1} D^{-1} (J^T)^{-1} \tilde{y}\right\} d\tilde{y}$$

با تغییر متغیر $y_1 = J y \Rightarrow dy_1 = J dy$ (ماتریسی است که ترانهاده اش بامعکوسش برابر باشد.)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p \rho_1 \rho_2 \dots \rho_p}} \int_{\|y\| > r} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} y_1^T D^{-1} y_1\right\} dy_1 \\
 y_{2i} &= \frac{y_{1i}}{\sqrt{\rho_i}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p}} \int_{\sum |\rho_i y_{2i}| > r^2} \exp\left\{-\frac{\sum y_{2i}^2}{\pi}\right\} dy_2 \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p}} \int_{\rho_p \sum |y_{2i}| > r^2} \exp\left\{-\frac{\sum y_{2i}^2}{\pi}\right\} dy_2
 \end{aligned}$$

نامساوی آخر به این دلیل است که ρ_p کوچکترین مقدار ویژه است. (طبق صورت قضیه)

مختصات دکارتی را به مختصات کروی (آبر کروی) تغییر می دهیم:

$$\begin{aligned}
 A &= q \int_{R > \frac{r}{\sqrt{\rho_p}}} R^{p-1} \exp\left\{-\frac{R^2}{\pi}\right\} dR \\
 &= -q \left[R^{p-2} e^{-\frac{R^2}{\pi}} \right]_{R > \frac{r}{\sqrt{\rho_p}}} + q \int_{R > \frac{r}{\sqrt{\rho_p}}} (p-2) R^{p-3} \exp\left\{-\frac{R^2}{\pi}\right\} dR \\
 &\geq -q \left[R^{p-2} e^{-\frac{R^2}{\pi}} \right]_{R > \frac{r}{\sqrt{\rho_p}}} = q \left(\frac{r}{\sqrt{\rho_p}} \right)^{p-2} e^{-\frac{r^2}{\pi \rho_p}}
 \end{aligned}$$

که برهان مشروحتری در پیوست شماره ۸ آمده است. لازم به یادآوری است که نامساوی جنج (برخلاف

□

نامساوی چیشف) کران پایین را مطرح می کند.

فصل ۴

نامساوی ینسن، بحث و نتیجه گیری

همانگونه که در فصل ۱ گفته شد یکی از نامساویهای نسبتاً مهم در احتمال که ابتدا در مباحث کلی ریاضی مطرح شده است، نامساوی ینسن می باشد. قبل از مطرح کردن نامساوی در مبحث احتمال با در نظر گرفتن رابطه (۱۰.۱) چند نمونه از کاربردهای نامساوی ینسن را آورده بعد به بحث نامساوی در احتمال می پردازیم.

مثال ۴.۰.۴. هرگاه X_i ها نامنفی، $\bar{X}$ نشان دهنده میانگین حسابی و $\bar{H}$ نشان دهنده میانگین هندسی، نشان می دهیم رابطه زیر برقرار است [۳].

$$\bar{H} \leq \bar{X} \quad (1.4)$$

روش اول) فرض می کنیم رابطه (۱.۴) برقرار باشد، با این فرض باید به نتیجه درستی برسیم.

$$(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum x_i}{n} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \ln((\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}) \leq \ln(\frac{\sum x_i}{n}) \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum (\ln x_i) \leq \ln(\frac{\sum x_i}{n}) \quad (4.4)$$

از طرفی با توجه به تعریف $\mu(\cdot)$ (رابطه (۳.۱)) :

$$\mu(f) = \frac{1}{\sum \alpha_k} \sum \alpha_k f(x_k) \quad \sum \alpha_k = 1$$

با توجه به رابطه (۱۰.۱) و جایگزینی $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x$

$$\mu(fog) \leq f(\mu(g)) \quad (5.4)$$

بدلیل اینکه تابع f مقعر است، رابطه (۵.۴) برقرار است پس به رابطه صحیحی رسیدیم (۱.۴) برقرار است.

روش دوم) تابع h را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(x) = e^{x-1} - x \Rightarrow h'(x) = e^{x-1} - 1 \Rightarrow h'(1) = 0$$

بدلیل مثبت بودن مشتق دوم تابع در $x = 1$ کمینه می شود. بنابراین:

$$\begin{aligned} h(x) \geq h(1) &\Rightarrow e^{x-1} - x \geq 0 \Rightarrow e^{x-1} \geq x & x \rightarrow \frac{x_i}{\bar{x}} \\ e^{\frac{x_i}{\bar{x}}-1} &\geq \frac{x_i}{\bar{x}} \Rightarrow \Pi e^{\frac{x_i}{\bar{x}}-1} \geq \Pi \frac{x_i}{\bar{x}} \\ \Rightarrow e^{\frac{\sum x_i}{\bar{x}}-n} &\geq \frac{\Pi x_i}{(\bar{x})^n} \\ \Rightarrow e^{\frac{n\bar{x}}{\bar{x}}-n} &\geq \frac{\Pi x_i}{(\bar{x})^n} \\ \Rightarrow \bar{x}^n &\geq \Pi x_i \\ \Rightarrow \bar{x} &\geq (\Pi x_i)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

یاد آوری: اگر به جای x_i ها، i ها را قرار دهیم:

$$(\Pi x_i)^{1/n} \leq \bar{x} \Rightarrow (n!)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n(n+1)}{2n} \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (7.4)$$

نکته: رابطه (۷.۴) برای تقریب زدن $n!$ (مخصوصاً برای n های بزرگ) مفید می باشد ولی بررسیها نشان می دهد تقریب استرلینگ^۱ از تقریب بالا بهتر و دقیقتر است.

مثال ۵.۰.۴. هر گاه A_1, A_2, A_3 زوایای داخلی مثلث باشند، رابطه زیر برقرار است [۳].

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sum (\pi/3 - A_i) \cos A_i \leq \sum A_i \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به رابطه (۱۰.۱) و اینکه جهت نامساوی برای تابع مقعر $f(x) = \sin x$ (وقتی که زاویه کوچکتر از

^۱ $n! \cong (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

π رادیان باشد). عکس می شود رابطه را بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} \bullet &\geq \sum \alpha_k F(A_k) F(\sum \alpha_k A_k) \geq \sum \alpha_k A_k f(A_k) - \sum \alpha_k A_k \sum \alpha_k f(A_k) \\ \bullet &\geq \sum \frac{1}{3} \sin A_k - \sin(\sum \frac{1}{3} A_k) \geq \sum \frac{1}{3} A_k \cos A_k - (\sum \frac{1}{3} A_k) \sum \frac{1}{3} \cos A_k \\ \bullet &\geq \frac{1}{3} \sum \sin A_k - \sin(\sum \frac{A_k}{3}) \geq \frac{1}{3} \sum A_k \cos A_k - \frac{1}{3} \frac{\pi}{3} \sum \cos A_k \\ \bullet &\geq \frac{1}{3} \sum \sin A_k - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{3} \sum (A_k - \frac{\pi}{3}) \cos A_k \end{aligned}$$

دو طرف را در ۳ ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \bullet &\geq \sum \sin A_k - \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sum (A_k - \frac{\pi}{3}) \cos A_k \\ \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq \sum \sin A_k \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sum (A_k - \frac{\pi}{3}) \cos A_k \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq \sum \sin A_k \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sum (A_k - \frac{\pi}{3} - A_k) \cos A_k \end{aligned}$$

یکی از نتایج واضحی که از رابطه بالا بدست می آید این است که مجموع سینوس زوایای داخلی مثلث کوچکتر یا مساوی $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ می باشد.

۱.۴ نامساوی ینسن در احتمال

در شاخه احتمال نیز با جایگذاری مناسب $\mu(\cdot)$ می توانیم نامساوی را به صورت زیر بنویسیم:

$$E(g \circ f(X)) - g(Ef(X)) \geq 0$$

همانطور که قبلاً گفته شد، f تابع محدب می باشد.

و اگر $g(x) = x^r$ و $f(x) = |x|$ در نتیجه:

$$E(|X|^r) \geq (E|X|)^r \quad (۱.۴)$$

نکته: یکی از کاربردهای بسیار رایج نامساوی ینسن در اثبات مثبت بودن واریانس می باشد.

۱.۱.۴ بهبود نامساوی ینسن

اکنون می خواهیم با استفاده از نامساوی چیشف بهبودیافته، نامساوی (۸.۴) را بهبود ببخشیم. قبل از اینکه بهبود یافته نامساوی (۸.۴) را بیان کنیم، نامساوی بهبود یافته را برای حالت زیر بیان می کنیم سپس برای حالت $\mu = 0$ نیز جواب را بدست می آوریم:

$$(\alpha(r))^r E(|X - \mu|^r) \geq (E|X - \mu|)^r \quad (9.4)$$

نکته: $\alpha(r)$ ضریبی برای بدست آوردن نامساوی بهبودیافته می باشد، بدیهی است که $\alpha(r) < 1$ مفید می باشد در غیر این صورت باید $\alpha(r) = 1$ در نظر گرفته شود.

قضیه ۱.۱.۴. هرگاه متغیر تصادفی X دارای میانگین μ باشد، رابطه زیر برقرار است [۵]:

$$E|X - \mu| \leq \alpha(r) E(|X - \mu|^r)^{\frac{1}{r}}$$

قبل از برهان، پیش فرضهای زیر را در نظر می گیریم:

$$P(|X - \mu| > k) \leq C^*(r) E(|X - \mu|^r) / k^r \quad (10.4)$$

$$\Rightarrow C^*(r) = \sup \frac{k^r P(|X - \mu| > k)}{E(|X - \mu|^r)} \quad (11.4)$$

$$P = P(X = \mu) = 0 \quad (12.4)$$

برهان. با توجه به اینکه $|X - \mu| \geq 0$ پس:

$$\begin{aligned} E|X - \mu| &= \int_0^\infty P(|X - \mu| > x) dx \quad \text{برای ثابت } \delta > 0 \\ &\leq \int_0^\delta \frac{1}{x^{r_1}} C^*(r_1) E(|X - \mu|^{r_1}) dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{x^{r_2}} C^*(r_2) E(|X - \mu|^{r_2}) dx \end{aligned}$$

وقتی که $0 \leq r_1 < 1 < r_2 < \infty$

نکته: شرط بالا برای این است که انتگرالهای نوشته شده همگرا باشند، (در غیر این صورت باتوجه به توابع

زیر انتگرال، انتگرالها واگرا خواهند بود.) پس

$$E|X - \mu| \leq C^*(r_1) \frac{\delta^{1-r_1}}{1-r_1} E(|X - \mu|^{r_1}) + C^*(r_2) \frac{\delta^{1-r_2}}{r_2-1} E(|X - \mu|^{r_2})$$

بویژه برای هر $\delta > 0$ و $r_2 > 1$ و با در نظر گرفتن $r_1 = 0$:

$$E | X - \mu | \leq C^*(0)\delta + C^*(r_2) \frac{\delta^{1-r_2}}{r_2 - 1} E(|X - \mu|^{r_2}) \quad (13.4)$$

$$\stackrel{11.4 \text{ به رابطه}}{\Rightarrow} E | X - \mu | \leq \delta(1-p) + C^*(r_2) \frac{\delta^{1-r_2}}{r_2 - 1} E(|X - \mu|^{r_2}) \quad (14.4)$$

با توجه به اینکه δ اختیاری است، و ما به دنبال کران دقیقتر هستیم، باید عبارت (14.4) را بر حسب δ کمینه کنیم.

اگر (14.4) را به صورت $a\delta + b\delta^{1-r_2}$ در نظر بگیریم، که در آن $a = 1 - p$ و $b = C^*(r_2) \frac{1}{r_2 - 1} E(|X - \mu|^{r_2})$ تابع فوق در نقطه $\delta = (b(r_2 - 1)/a)^{1/r_2}$ کمینه می شود. زیرا:

$$m(\delta) = a\delta + b\delta^{1-r_2} \Rightarrow m'(\delta) = a + (1 - r_2)b\delta^{-r_2}$$

$$\stackrel{m'=0}{\Rightarrow} a\delta^{r_2} = (r_2 - 1)b \Rightarrow \delta = (b(r_2 - 1)/a)^{1/r_2}$$

بنابراین با جایگذاری a, b :

$$E | X - \mu | \leq \frac{(C^*(r_2) \frac{E(|X - \mu|^{r_2})}{r_2 - 1})^{1/r_2} (\frac{r_2}{r_2 - 1})(r_2 - 1)^{1/r_2}}{(1 - p)^{1/r_2 - 1}} \\ \Rightarrow E | X - \mu | \leq \frac{r_2}{r_2 - 1} (1 - p)^{1 - 1/r_2} (C^*(r_2) E(|X - \mu|^{r_2}))^{1/r_2}$$

با تبدیل $r \rightarrow r_2$ (چون $r_2 > 1$ می توانیم جایگزین کنیم ولی r_1 را نمی توانستیم جایگزین کنیم).

$$E | X - \mu | \leq \underbrace{\frac{r}{r - 1} (1 - p)^{1 - 1/r} (C^*(r))^{1/r}}_{\alpha(r)} E(|X - \mu|^r)^{1/r} \quad (15.4)$$

$$\Rightarrow E | X - \mu | \leq \alpha(r) (E(|X - \mu|^r))^{1/r} \quad (16.4)$$

□

نتیجه: با توجه به اینکه عدد ثابت به عنوان میانگین می باشد، پس برای $\mu = 0$ خواهیم داشت:

$$E | X | \leq \alpha_*(r) E(|X|^r)^{1/r} \equiv (E | X |)^r \leq (\alpha_*(r))^r E(|X|^r)$$

$$\alpha_*(r) = \frac{r}{r - 1} (1 - p_*)^{1 - 1/r} (C^*(r))$$

r	m = ۱	m = ۲	m = ۳	m = ۴
۲	۰/۸۶۶	۰/۷۱۳	۰/۶۲۲	۰/۵۶۰
۴	۰/۳۶۴	۰/۳۲۱	۰/۲۸۹	۰/۲۶۶
۶	۰/۲۳۱	۰/۲۱۰	۰/۴۳۰	۰/۴۴۳
۸	۰/۱۷۰	۰/۱۵۸	۰/۳۵۲	۰/۳۵۸

جدول ۱.۴: توزیع دوجمله ای منفی و ضریب $\alpha(r)$ برای پارامترهای $(m, 1/2)$

r	n = ۵	n = ۱۰	m = ۱۵
۴	۱/۱۰۲	۰/۶۰۷	۰/۷۰۰
۶	۰/۹۳۷	۰/۴۷۷	۱/۰۴۰
۸	۰/۸۴۹	۱۰/۰۵۵	۱۰/۰۱۱

جدول ۲.۴: توزیع دوجمله ای و ضریب $\alpha(r)$ برای پارامترهای $(n, 1/2)$

در حالت خاص اگر X پیوسته باشد:

$$P_{\cdot} = P_{\cdot}(X = \cdot) = \cdot$$

بنابراین: $\alpha_{\cdot}(r) = \frac{r}{r-1}(c^*(r))$ از کاربردهای نامساوی (۱۶.۴) بدست آوردن کرانی برای $E |X - \mu|$ می باشد.

در مواقعی که نتوانیم $E |X - \mu|$ را بطور صریح بدست آوریم ولی برای بعضی از r ها (مخصوصاً r زوج) $E(|X - \mu|^r)$ ساده تر محاسبه شود، این کران بسیار مفید می باشد.

برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر به [۱۳] مراجعه کنید. در جداول ۱.۱.۴ و ۱.۱.۴ ضرایب $\alpha(r)$ برای توزیع دوجمله ای منفی با پارامترهای $(m, 1/2)$ و دوجمله ای منفی با پارامترهای $(n, 1/2)$ آورده شده است. نابر این در اینجا نتیجه می گیریم که ارتباط خیلی نزدیکی بین نامساوی ینسن چبیشف وجود دارد.

۲.۴ نتیجه گیری کلی

نامساویهای احتمالی روز به روز دستخوش تغییرات در جهت بهبود کرانها می باشند و می توان روابطی را یافت که چند نامساوی احتمالی را به یکدیگر مرتبط می سازند، و این روابط در جهت هدف مشخصی می باشند. (زیرا هر گونه ارتباط نامساویها ممکن است مفید نباشند)

اگر دقت کنیم نامساوی چبیشف با اینکه نامساوی بسیار قدیمی می باشد (۱۸۶۷) ولی باز هم در علوم

مختلف کاربرد دارد و این نشان می دهد که در جهت بهبود این نامساوی تلاشهایی صورت گرفته و می گیرد؛ شاید اکنون که در پایان مطالب ارائه شده می باشیم؛ فردی در گوشه ای از جهان نامساوی دقیقتری نسبت به آنچه گفته شد بدست آورده باشد و این نشان میدهد که دامنه و گسترش علوم چقدر وسیع است و برای تحقیق پژوهش دست افرادی که می خواهند تلاش کنند باز است.

۳.۴ ایده های قابل طرح

با توجه به اندک تلاشی که در این پایان نامه به ثمر رسیده است، ایده های مختلفی (که ممکن است برای کسانی که بعداً بخواهند در این زمینه کار کنند مفید باشد) مطرح می شود؛ چندین مورد مهم و قابل طرح را در پایان این فصل می آوریم؛ که در مورد اول بحث بیشتری می شود و مابقی بصورت گذرا بیان می گردد. (۱) هر گاه در نامساوی مارکف به جای x^r تابع مثبت و محدب $g(x)$ را قرار دهیم نامساوی بهبود یافته به صورت زیر تغییر می کند.

$$P(|X| > x) \leq C_g^*(r) \frac{Eg(|X|)}{g(x)}$$

حالت خاص: اگر X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ باشد و تابع $g(x) = e^{rx}$ در نظر

گرفته شود، داریم:

$$P(|X| > x) = P(X > x) \leq C_e^*(r) \frac{Ee^{r|X|}}{e^{rx}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_e^*(r) = \sup_{x>0} \frac{e^{rx} P(X > x)}{Ee^{rX}} \\ C_e^*(r) \leq \sup_{x>0} \frac{e^{rx} f(x)}{rEe^{rX}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_e^*(r) = \lambda \sup_{x>0} \frac{e^{-\lambda x} e^{rx}}{Ee^{rX}}$$

$$\Rightarrow C_e^*(r) = \frac{\lambda}{Ee^{rX}} \sup_{x>0} e^{x(r-\lambda)}$$

با فرض $(r < \lambda)$ ، $e^{x(r-\lambda)}$ در نقطه صفر دارای سوپرمم می باشد و به دلیل اینکه $x > 0$ پس $x \searrow 0$ تا سوپرمم اتفاق بیفتد.

$$C_e^*(r) \simeq \frac{1}{Ee^{rX}}$$

اگر کران فوق را با کران بدست آمده (۳.۲) مقایسه کنیم، چون r دلخواه می باشد اگر $\lambda \nearrow r$ کران بهتری بدست می آید.

پیشنهاد می شود این نامساوی برای توابع چگالی دیگر نیز مورد بررسی قرار گیرد.

(۲) بررسی تاثیر حالت های مختلف توزیع کشیده و چوله بر ضریب $c^*(r)$.

(۳) بدست آوردن کرانی برای تابع توزیع بعضی از توزیع های گسسته، با استفاده از نامساوی چیشف بهبود یافته.

(۴) مقایسه تابع توزیع و تابع چگالی در نرمال مخلوطی مقیاس p متغیره.

(۵) با توجه به بند ۱ پیدا کردن تابع $g(x)$ بطوری که به جای r بهینه در نامساوی مارکف، تابع بهینه $g(x)$ را بدست آوریم

(۶) در مورد کران $\sum_{p \text{ is prime}} e^{-\lambda p}$ در صورت امکان r بهینه را بدست آوردیم

(۷) به نظر می رسد نامساوی چیشف را می توان (برای بعضی r ها) به صورت زیر تغییر داد؛ که مسلماً کران بهتری است.

$$P(|X| > x) \leq \left(\frac{E|X|}{x} \right)^r \left(\leq \frac{E|X|^r}{x^r} \right)$$

پیوست آ

پیوست

پیوست ۱

همانطور که می دانیم برای متغیر تصادفی دو بعدی برای اینکه احتمال خارج از محدوده ای باشد باید خارج

از مستطیل معرفی شده در زیر قرار بگیرد

همچنین تابع $\frac{1}{k^2(1-t^2)}[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2txy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}]$ (برای $t^2 \leq 1$) نامنفی می باشد.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2(1-t^2)} [\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2txy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}] f(x,y) dx dy \\ &= \frac{2(1-tr)}{k^2(1-t^2)} \geq 1 - \int \int_R f(x,y) dx dy = P(|X| > k\sigma_1 \vee |Y| > k\sigma_2) \end{aligned}$$

R ناحیه مستطیل مورد نظر می باشد.

r ضریب همبستگی می باشد.

حال باید عبارت سمت چپ نامساوی را کمینه کنیم.

$$2t(1-tr) = r(1-t^2) \Rightarrow t = \frac{1}{r}(1 \pm \sqrt{1-r^2})$$

$$t = \frac{1}{r}(1 - \sqrt{1-r^2})$$

با شرط $t^2 \leq 1$ پس برای t بدست آمده داریم:

$$P(|X| > k\sigma_1 \vee |Y| > k\sigma_2) \leq \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{k^2}$$

[۶].

پیوست ۲

نامساوی لال: باتوجه به ناحیه انتگرالگیری در خارج از ناحیه R (R مستطیلی است محدود به $\pm\sigma_1 k_1$

و $\pm\sigma_2 k_2$) و تابع $F(x_1, x_2)$ به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \frac{1}{1-t^2} \left(\frac{x_1^2}{k_1^2 \sigma_1^2} - \frac{2tx_1x_2}{k_1k_2\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{k_2^2 \sigma_2^2} \right) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \frac{1}{1-t^2} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{2tr}{k_1k_2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \\ &\geq 1 - \int \int_R \phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

هنگامی که r ضریب همبستگی باشد؛

$$1 - \int \int_R \phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \frac{1}{1-t^2} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{2tr}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2^2} \right)$$

$$\Rightarrow P(|X_1| > k_1 \sigma_1 \vee |X_2| > k_2 \sigma_2) \leq \frac{1}{1-t^2} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{2tr}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2^2} \right)$$

حال عبارت سمت راست نامساوی را نسبت به t کمینه می کنیم.

$$(rk_1 k_2)t^2 - (k_1^2 + k_2^2)t + rk_1 k_2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{(k_1^2 + k_2^2) \pm \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4r^2 k_1^2 k_2^2}}{2rk_1 k_2}$$

$$t_1 = \frac{(k_1^2 + k_2^2) - \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4r^2 k_1^2 k_2^2}}{2rk_1 k_2}$$

چون $t^2 \leq 1$

$$\Rightarrow P(|X_1| > k_1 \sigma_1 \vee |X_2| > k_2 \sigma_2) \leq \frac{(k_1^2 + k_2^2) + \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4r^2 k_1^2 k_2^2}}{2k_1^2 k_2^2}$$

یادآوری ۱: با جایگذاری $k_1 = k_2 = k$ نامساوی برگ بدست می آید.

یادآوری ۲: و با جایگذاری $r = 1$ نامساوی در حالت تک متغیره بدست می آید:

$$P(|X_1| > k_1 \sigma_1) \leq \frac{1}{k_1^2}$$

[۷].

پیوست ۳

برهان. قسمت ج) قضیه اول فصل ۲

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt \\
 F(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\cdot}^z \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt dx \quad \text{مقارن بودن توزیع} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \int_{\cdot}^z e^{-itx} dx dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \int_{\cdot}^z (\cos tx - i \sin tx) dx dt
 \end{aligned}$$

باز هم بدلیل مقارن بودن توزیع

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt \left[\frac{\sin tx}{t} \right]_{\cdot}^z \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tz}{t} \psi(t) dt \\
 \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} \psi(t) dt
 \end{aligned}$$

□

اما عبارت دیگری که در اثبات قسمت ج) قضیه اول فصل ۲ استفاده شده است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$$

از قبل می دانیم که $\frac{\sin u}{u}$ تابع مشخصه توزیع یکنواخت برفاصله $(-1, 1)$ می باشد بنابراین با توجه به رابطه

زیر داریم [۱۴]:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\sin t}{t} dt \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} = f(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \pi
 \end{aligned}$$

پیوست ۴

هرگاه $X \sim N(0, \sigma^2)$ داریم:

$$\bar{c}(r) = \frac{\left[\frac{1}{r} \left(\frac{r+2}{2} \right) \frac{r+2}{2} e^{-\frac{r-1}{2}} \right]}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}$$

برهان. بدلیل دلخواه بودن σ برای $\sigma = 1$ جواب را بدست می آوریم.

$$f(|x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.\bar{A})$$

$$\Rightarrow \bar{c}(r) = \sup_{x>0} \frac{x^{r+1} f(x)}{rE|X|^r} = \frac{\sup_{x>0} x^{r+1} f(x)}{rE|X|^r} = \frac{\sup_{x>0} x^{r+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi} r E|X|^r}{\sqrt{2}}} \quad (2.\bar{A})$$

$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 = |X|^2 \sim \chi^2(1) \quad (3.\bar{A})$$

$$\Rightarrow E(|X|^2)^{\frac{r}{2}} = \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (4.\bar{A})$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = (r+1)^{\frac{r}{2}} \quad (5.\bar{A})$$

با جایگذاری (۵.آ) و (۴.آ) در رابطه (۲.آ) داریم

$$\begin{aligned} \bar{c}(r) &= \frac{\left[2^{r/2} (r+2) \frac{r+2}{2} e^{-\frac{r-1}{2}} \right]}{\Gamma(1/2) \frac{r 2^{r/2} \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{r} \left(\frac{r+2}{2} \right) \frac{r+2}{2} e^{-\frac{r-1}{2}} \right]}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)} \end{aligned}$$

□

پیوست ۵

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد آنگاه:

$$1 - P(X \leq k) = \overbrace{\int_0^\lambda e^{-t} t^k dt / k!}^A \quad (۶.آ)$$

با در نظر گرفتن طرف راست رابطه (۶.آ) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\lambda e^{-t} t^k dt & t^k &= u, e^{-t} dt = dv \\ A &= [-e^{-t} t^k]_0^\lambda + \int_0^\lambda k e^{-t} t^{k-1} dt & k t^{k-1} &= u_1, \text{ همان قبلی تکرار می شود} \\ A &= [-e^{-t} t^k]_0^\lambda - [k e^{-t} t^{k-1}]_0^\lambda + \int_0^\lambda k(k-1) e^{-t} t^{k-2} dt & k(k-1) t^{k-2} &= u_2 \\ A &= [-e^{-t} t^k]_0^\lambda - [k e^{-t} t^{k-1}]_0^\lambda - [k(k-1) e^{-t} t^{k-2}]_0^\lambda \\ &+ \int_0^\lambda k(k-1)(k-2) e^{-t} t^{k-3} dt & k(k-1)(k-2) t^{k-3} &= u_3 \\ &\vdots \\ A &= -e^{-\lambda} \lambda^k - k e^{-\lambda} \lambda^{k-1} - k(k-1) e^{-\lambda} \lambda^{k-2} - k(k-1)(k-2) e^{-\lambda} \lambda^{k-3} \\ &- k(k-1)(k-2)(k-3) e^{-\lambda} \lambda^{k-4} - \dots - k!(e^{-\lambda} \lambda - 1 + e^{-\lambda}) \\ \Rightarrow A/k! &= 1 - e^{-\lambda} - \frac{k! e^{-\lambda} \lambda}{k!} - \frac{k! e^{-\lambda} \lambda^2}{2! k!} - \dots - \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1 - P(X \leq k) \\ \Rightarrow P(X > k) &= \frac{\int_0^\lambda e^{-t} t^k dt}{k!} \end{aligned}$$

پیوست ۶

در توزیع پواسون داریم:

$$E(X^n) = \sum_{i=0}^n S_{\mathfrak{r}}(n, i) \lambda^i \quad (۷.آ)$$

برهان. قبل از نوشتن برهان رابطه (۷.آ) باید مقداری درباره عدد استرلینگ نوع دوم و عدد بل بدانیم. عدد استرلینگ نوع دوم $(S_2(n, i))$: هرگاه مجموعه n عضوی را طوری افرازبندی کنیم که هیچ یک از اعضای افراز تهی نباشند و تعداد زیر مجموعه های بدست آمده " i " تا باشند؛ به تعداد (گوناگون) افرازهای بدست آمده، عدد استرلینگ نوع دوم " i " در مجموعه n عضوی گفته می شود و با نماد بالا نشان میدهند.

مثلا اگر مجموعه سه عضوی $\{1, 2, 3\}$ را داشته باشیم

$$S_2(3, 2) = 3 \quad [(\{3\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{1, 3\}), (\{1\}, \{2, 3\})]$$
 خواهد بود.

یادآوری: بنابر قرارداد $S_2(0, 0) = 1, S_2(n, 0) = 0$.

عدد بل (B_n) : هرگاه تعداد افراز " i " عضوی را از $i = 0$ تا $i = n$ برای یک مجموعه n عضوی

$$B_n = \sum_{i=0}^n S_2(n, i)$$
 جمع بزنیم عدد بل بدست می آید:

برای مثال قبلی عدد بل را بدست می آوریم:

$$B_3 = S_2(3, 0) + S_2(3, 1) + S_2(3, 2) + S_2(3, 3) = 5$$

گشتاور غیر مرکزی مرتبه n را در توزیع پواسون بدست آوریم؛ اکنون دو لم کمکی را نیز بیان می کنیم.

لم ۱.۰.۰. برای هر $n \geq 1$:

$$X^n = \sum_{i=1}^n S_2(n, i) \{\Pi_{k=1}^{i-1} (X - k)\}$$

لم ۲.۰.۰. هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون باشد، برای هر $i \geq 1$: [۱۵]

$$E(h(X) \{\Pi_{k=1}^{i-1} (X - k)\}) = \lambda^i E(h(X + i)) \quad (۸.آ)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
 E\{\Pi_{k=1}^{i-1}(X-k)\} &= \lambda^i & h(x) &= 1 \text{ با در نظر گرفتن } \\
 \Rightarrow E(X^n) &= E \sum_{i=1}^n S_{\mathbf{r}}(n, i) \{\Pi_{k=1}^{i-1}(X-k)\} \\
 &= \sum_{i=1}^n S_{\mathbf{r}}(n, i) E\{\Pi_{k=1}^{i-1}(X-k)\} \\
 &= \sum_{i=1}^n S_{\mathbf{r}}(n, i) \lambda^i \quad S_{\mathbf{r}}(n, \cdot) = \cdot \\
 &= \sum_{i=0}^n S_{\mathbf{r}}(n, i) \lambda^i \\
 \Rightarrow E(X^n) &= \sum_{i=0}^n S_{\mathbf{r}}(n, i) \lambda^i
 \end{aligned}$$

□

پیوست ۷

تقارن در مورد متغیرهای p بُعدی [۱۶]:

همانگونه که در مورد توزیعهای متقارن (در حالت تک بُعدی) می دانیم، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد، گوئیم X حول نقطه θ متقارن می باشد:

$$X - \theta \stackrel{d}{=} \theta - X \quad (9.A)$$

تقارن در حالت تک بُعدی فقط به صورت رابطه (۹.آ) تعریف می شود ولی در حالت p بُعدی تقارن، انواع مختلفی دارد.

انواع تقارن در حالت p متغیره که توانسته ایم تا کنون بشناسیم عبارتند از تقارنهای بیضوی-کروی-نیم فضایی وزاویه ای-مرکزی و علامت.

براساس تقارنهای گفته شده بالا، می توان چولگی را نیز محاسبه نمود، که به شرح بیشتر این مقوله نمی پردازیم؛ فقط برحسب نیاز این پایان نامه تقارن کروی را تعریف می کنیم.

تعریف ۳.۰.۳. هرگاه متغیر تصادفی p بُعدی X بگونه ای باشد که ماتریسی مثل $A_{p \times p}$ که شرایط ماتریس دوران را داشته باشد وجود داشته باشد بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد، گوییم بردار $\tilde{X}$ حول θ تقارن کروی دارد.

$$\tilde{X} - \theta \stackrel{d}{=} A(\tilde{\theta} - \tilde{X}) \quad (۱۰.آ)$$

پیوست ۸

برای تغییر متغیر مختصات دکارتی به مختصات کروی (ابر کروی) ابتدا حالت دو متغیره (تبدیل به مختصات قطبی) را با ژاکوبین تبدیل در نظر گرفته و آن را به مراتب بالاتر گسترش می دهیم.

$$(x_1, x_2) \rightarrow (\rho, \theta_1)$$

$$x_1 = \rho \cos \theta_1$$

$$x_2 = \rho \sin \theta_1$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial \rho & \partial x_1 / \partial \theta_1 \\ \partial x_2 / \partial \rho & \partial x_2 / \partial \theta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\rho \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \rho \cos \theta_1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = \rho \Rightarrow |J| = \rho$$

$$\Rightarrow \int dx dy = \int \rho d\rho d\theta_1$$

برای فهم بیشتر حالت سه متغیره را نیز بدست می آوریم:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\rho, \theta_1, \theta_2)$$

$$x_1 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$x_2 = \rho \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

$$x_3 = \rho \cos \theta_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial \rho & \partial x_1 / \partial \theta_1 & \partial x_1 / \partial \theta_2 \\ \partial x_2 / \partial \rho & \partial x_2 / \partial \theta_1 & \partial x_2 / \partial \theta_2 \\ \partial x_3 / \partial \rho & \partial x_3 / \partial \theta_1 & \partial x_3 / \partial \theta_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \rho \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \rho \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -\rho \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \rho \cos \theta_2 \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 & 0 & -\rho \sin \theta_2 \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta_2 \begin{vmatrix} \rho \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \rho \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ -\rho \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \rho \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{vmatrix} - \rho \sin \theta_2 \begin{vmatrix} \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \rho \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -\rho \sin \theta_2 \sin \theta_1 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \cos \theta_2 (\cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \\ &\quad - \rho^2 \sin \theta_2 (-\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1) \\ &= \rho^2 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 + \rho^2 \sin^2 \theta_2 = \rho^2 \sin \theta_2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) = \sin \theta_2 \\ \Rightarrow |J| &= \rho^2 \sin \theta_2 \\ \Rightarrow \int dx_1 dx_2 dx_3 &= \int \rho^2 \sin \theta_2 d\rho d\theta_2 d\theta_1 \\ &\vdots \\ \Rightarrow \int dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_p &= \\ &= \int \rho^{p-1} \sin \theta_2 \dots (\sin \theta_{p-3})^{p-4} (\sin \theta_{p-2})^{p-3} (\sin \theta_{p-1})^{p-2} d\rho d\theta_{p-1} \dots d\theta_2 d\theta_1 \end{aligned}$$

فقط یادآوری می شود که به غیر از θ_1 (که از ۰ تا 2π تغییر می کند) مابقی θ_i ها از ۰ تا π تغییر می کنند.

مراجع

- [1] G. De Barra, (1981) Measure theory and integration. India Tajpress New Delhi-110064.
- [۲] ر.شکل آبادی و ا.کاظمی، (۱۳۹۰) توزیع های آمیخته-مقیاس نرمال و کاربرد آنها در برازش مدل رگرسیونی پانلی. اندیشه آماری سال شانزدهم شماره اول.
- [3] C.P. Niculescu (2001) An extension of Chebyshev's inequality and its connection with Jensen's inequality. J of inequal. and Appl. v.6:451-462.
- [4] D. monhor(2007) A Chebyshev inequality for multivariate normal distribution. Probabiliuty in the Engineering and Information Sciences v.21:289-300.
- [5] A. Dasgupta(2000) Best constants in Chebyshev inequalities with various applications. Metrikka v.51/3:185-200.
- [6] P.O. Berge (1937) A note on aform of Tchebycheff's theorem for two variables. Biometrika v.29:405-406.
- [7] D.N. Lal (1955) A note a form of Tchebycheff's inequality for two variables. Sankhya v.15:317-320.
- [8] I. Olkin and J.W. Pratt (1958) A multivariate Tchebycheff's inequality. Annals of Mathe-matical Statistics v.29:226-234.
- [9] A.K.Basu (1999) Measure theory and probability,phindia. Third printing New Delhi.
- [10] John D.Cook (2009) Upper and lower bounds for the normal distribution func-tion. www.johndcook.com.
- [11] P.Diaconis (1987) Method of Moments in probability and statistics. AMS Short Course Lec-ture Notes v.37, AMS, Providence, Rhode Island
- [12] F.C. Jeng and J.W. Woods(1990) Simulated annealing compound Gauss-Markov random fields. IEEE Transactions on information theory v.36:94-107.
- [13] P.Diaconis and S.Zabell (1991) Closed form summation for classical distributions. Statistical Science, v.6:284-302
- [14] A.Gut (2005) Probability a graduate course. Springer New York.
- [15] A. Dasgupta(1998) On a differential equation and one step recursion for Poisson moments. Technikal Report 98-02, Department of Statistics, Purdue University.
- [16] R.J. Serfling (2006) Multivariate symmetry and asymmetry. In Enclopedia of statistical Sci-ences, second Edition(S.Kotz N.Balakrishnan, C.B.Readand B vidakovic, eds) v.8:5338-5345.

Surname: **Hassan Finizadeh Bidgoli**

Name: **Saeed**

Title: Study of inequalities of probability for independent or dependent of sequences and applications

Supervisor: **Dr.Ahmad Nezakati Rezazadeh**

Degree: Master of Science
Field:

Subject: Mathematics Statistical

Technology University of Shahrood
Date: 2012

Faculty Of Mathematical Sciences
Number of pages: 69

Keywords: measure, probability, Chebyshev inequality, Markov, Gauss, Camp-Meidel, unimodal, univariate, multivariate, Jenj, Jensen

Abstract

One of articles suggested in Mathematics is measure article, which first suggest measure in Mathematics. second suggest probability form of measure we seek various inequalities in probability theorem.

the main aim in this thesis is to suggesting some inequalities suggested in Mathematics (obviously for probability stable) and seek improvement in general and particular by attention applicable Chebyshev inequality, we zoom on this inequality (Chebyshev inequality) and its extension and its improvement.



Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Mathematics Statistical

Study of inequalities of probability for independent or dependent of sequences and applications

Supervisor

Dr.Ahmad Nezakati Rezazadeh

Saeed Hassan Finizadeh Bidgoli

2012