دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بهینه سازی تفاضل توابع همرادیانت صعودی (ICR)

نگارش

مجتبی بختو

استاد راهنما

دکتر مهدی ایران منش

استاد مشاور

دکتر علیرضا ناظمی

شهریور ۱۳۹۱

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مجتبی بختو رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان **بهینه سازی تفاضل توابع همرادیانت صعودی**

که در تاریخ ۹۱/۰۶/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۷۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵ـ نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر مهدی ایرانمنش	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	دانشیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر عباسپور	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر احمد زیره	استادیار	

رئیس دانشکده : دکتر احمد زیره

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

"ستایشگر معلمی هستم که اندیشیدن را به من بیاموزد نه اندیشه ها را."

استاد شهید مرتضی مطهری

قدردانی

به حکم ادب، از تمامی عزیزانی که در به سر انجام رسیدن این پایان نامه بنده را یاری داده اند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم خصوصاً:

خانواده بخاطر تشویق و دلگرمی،

جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش بخاطر راهنمایی،

جناب آقای دکتر علیرضا دعاگویی بخاطر کمک های بسیار مفید و بی دریغ،

دوستان بخاطر همراهی و ...

تعهد نامه

اینجانب **مجتبی بختو** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض گرایش آنالیز** دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بهینه سازی تفاضل توابع همرادیانت صعودی** تحت راهنمائی **دکتر مهدی ایرانمنش** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۱/۰۷/۱۸

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* **متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

در این پایان‌نامه به بیان تعاریف و قضایای مربوط به تحدب محض توابع همرادیانت صعودی و توابع بطور مثبت همگن صعودی می پردازیم، همچنین با معرفی چند تابع خاص بنام توابع اتصال خواصی از توابع همرادیانت صعودی و بطور مثبت همگن صعودی را به کمک آنها بررسی می کنیم و رابطه بین توابع همرادیانت صعودی و بطور مثبت همگن صعودی را مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس مسئله تفاضل دو تابع همرادیانت صعودی رابیان و شرایط بهینگی را برای مسئله دوگان آن بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: بهینه سازی سرتاسری، آنالیز همگن، تحدب محض، توابع همرادیانت صعودی،توابع بطور مثبت همگن صعودی، مجموعه محافظ، زیر دیفرانسیل

پیشگفتار

اخیرا محققین بسیاری گسترش نظری شرایط بهینگی را برای رده های خاصی از مسائل بهینه سازی سرتاسری [1] مورد بحث و بررسی قرار داده اند. (مراجع [۸] و [۹] و [۱۲] و [۲۰] را ببینید)
یکی از مسائل بسیار مهم بهینه سازی سرتاسری کمینه سازی یک تابع DC است (تفاضل دو تابع محدب) [2] یعنی:

$$minimize \quad f(x) \quad subject\, to\, x \in X \quad : \quad f(x) = q(x) - p(x)\ ,\ p, q\, are\, convex.$$

در حالت کلی توابع DC می توانند با توابع DAC (تفاضل دو تابع محدب محض) [3] و یا در حالت خاص تفاضل دو تابع صعودی و در امتداد شعاع ها محدب جایگزین شوند. (مراجع [۱۰] و [۱۱] را ببینید)
ما در اینجا p و q را با توابع همرادیانت صعودی (ICR) [4] جایگزین می کنیم که در اقتصاد ریاضی کاربرد دارد(مرجع [۱۳] را ببینید) و یک شرط لازم و کافی برای مینیمم سرتاسری تابع f ارائه می دهیم.
همچنین یک روش دوگان بررسی مسئله بهینه سازی سرتاسری برای این توابع را مطرح خواهیم کرد. روش ما بر اساس فرمول تولند - سینگر [5] و برخی نتایج بدست آمده در مرجع [۲] است.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی درباره توابع ICR اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. فصل دوم به بررسی تحدب محض نسبت به رده خاصی از توابع ICR و توصیفی از مجموعه های محافظ و مجموعه L - زیردیفرانسیل یک تابع ICR که روی یک فضای برداری توپولوژیک X تعریف شده و همچنین قطبیت توابع ICR و بعضی از مجموعه های همرادیانت پرداخته شده و یک قضیه جداسازی برای این مجموعه ها و نیز ارتباط بین توابع ICR و IPH بیان شده است و بالاخره در فصل سوم مسئله دوگان تفاضل توابع ICR را مطرح و بررسی می کنیم و شرایط لازم و کافی برای مینیمم سرتاسری تفاضل توابع ICR را بدست می آوریم.

[1] Global Optimization
[2] Difference of two convex functions
[3] Difference of two abstrac convex functions
[4] Increasing Co-Radiant Functions
[5] Toland - Singer

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، ابتدا به معرفی نمادها و اصطلاحات مورد استفاده در فصل های بعدی می پردازیم و همچنین برخی از مفاهیم مقدماتی مرتبط با بحث را مورد تعریف قرار می دهیم.

۱.۱ نماد گذاری

فرض کنیم $I_n = \{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ باشد. در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &= \{x = (x_i)_{i \in I_n} \,:\, x_i \in \mathbb{R}\,;\, \forall i = ۱, ۲, ۳, ..., n\} \\
\mathbb{R}^n_+ &= \{x = (x_i)_{i \in I_n} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \geq ۰,\, \forall i = ۱, ۲, ۳, ..., n\} \\
\mathbb{R}^n_{++} &= \{x = (x_i)_{i \in I_n} \,:\, x_i > ۰\,,\, \forall i = ۱, ۲, ۳, ..., n\} \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq ۰\} \\
\mathbb{R}_{++} &= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > ۰\} \\
\bar{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty] \\
\mathbb{R}_{+\infty} &= \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = (-\infty, +\infty]
\end{aligned}
$$

همچنین برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ این قرارداد را می پذیریم:

$$x \geq y \Longleftrightarrow x_i \geq y_i \quad \forall i \in I_n.$$

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری X به همراه توپولوژی τ روی آن را یک فضای برداری توپولوژیک[۱] می نامیم هرگاه:

۱. هر مجموعه تک عضوی از X بسته باشد.

۲. نگاشتهای جمع و ضرب اسکالر:

$$+ : X \times X \longrightarrow X \qquad , \qquad \cdot : F \times X \longrightarrow X$$

$$+(x, y) = x + y \qquad (\forall x, y \in X)$$

$$\cdot(\alpha, x) = \alpha x \qquad (\forall \alpha \in F\,,\ \forall x \in X)$$

نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند که در آن F یک میدان اسکالر است.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه $S \subset X$ را یک مجموعه مخروطی یا بطور خلاصه مخروط[۲] می نامیم هرگاه برای هر $\lambda > 0$ و هر $x \in S$ داشته باشیم:

$$\lambda x \in S.$$

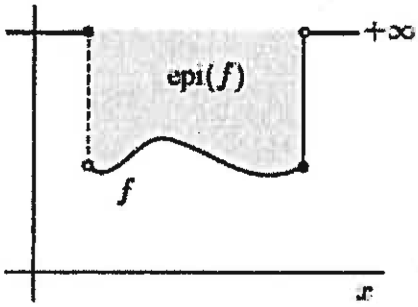
در این پایان نامه فرض می کنیم که X یک فضای برداری توپولوژیک و S یک مخروط نوک دار محدب بسته[۳] باشد یعنی: $[S \cap (-S)] = \{0\}$

همچنین: $x \le y$ یا $y \ge x$ اگر و تنها اگر: $x + y \in S \quad , \quad y - x \in S$.

تعریف ۳.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ صعودی[۴] نامیده می شود هرگاه:

$$x, y \in X\,,\ x \ge y \Longrightarrow f(x) \ge f(y)$$

[۱] Topological Vector Space
[۲] Cone
[۳] Closed convex point cone
[۴] Increasing



شکل ۱.۱: اپی گراف تابع f

تعریف ۱.۲.۴. زیر مجموعه غیر تهی A از X روبه پایین [۵] نامیده می شود هرگاه:

$$(x \in A, x' \in X, x' \leq x) \Longrightarrow x' \in A$$

تعریف ۱.۲.۵. زیر مجموعه غیر تهی B از X رو به بالا [۶] نامیده می شود هرگاه:

$$(x \in B, x' \in X, x \leq x') \Longrightarrow x' \in B$$

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنیم تابع f روی مجموعه X تعریف شده باشد. اپی گراف f [۷] را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$epi(f) = \{(x, c) \in X \times \mathbb{R} \quad : \quad c \geq f(x)\}.$$

در واقع اپی گراف یک تابع، مجموعه نقاطی است که بالای نمودار تابع قرار می گیرند. (شکل ۱.۱)

تعریف ۱.۲.۷. زیر مجموعه غیر تهی A از X رادیانت (تابشی) [۸] نامیده می شود هرگاه:

$$(x \in A, 0 < \lambda \leq 1) \Longrightarrow \lambda x \in A$$

[۵] Downward
[۶] Upward
[۷] epigraph
[۸] radiant

تعریف ۸.۲.۱. زیر مجموعه غیر تهی B از X همرادیانت (هم تابشی) [۹] نامیده می شود هرگاه:

$$x \in B, \lambda \geq ۱ \Longrightarrow \lambda x \in B$$

تعریف ۹.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow [۰, +\infty]$ همرادیانت [۱۰] (CR)نامیده می شود هرگاه:

$$f(\lambda x) \geq \lambda f(x) \qquad \forall x \in X, \forall \lambda \in (۰, ۱]$$

مثال ۱۰.۲.۱. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ یک تابع همرادیانت است زیرا برای هر $\lambda \in (۰, ۱]$ داریم:

$$f(\lambda x) = \sqrt{\lambda x} = \sqrt{\lambda}\sqrt{x} \geq \lambda\sqrt{x} = \lambda f(x).$$

تذکر ۱۱.۲.۱. به آسانی مشاهده می شود که تابع $f : X \longrightarrow [۰, +\infty]$ همرادیانت (CR) است هرگاه:

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x) \quad \forall x \in X \quad , \quad \forall \lambda \geq ۱$$

زیرا فرض کنیم $\lambda \geq ۱$ باشد. دو حالت $\lambda = ۱$ و $\lambda > ۱$ را بررسی می کنیم:

اگر $\lambda = ۱$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(۱ \times x) = ۱ \times f(x) \leq ۱ \times f(x) \\ &\Longrightarrow f(۱ \times x) \leq ۱ \times f(x) \end{aligned}$$

اگر $\lambda > ۱$ و y دلخواه باشد در اینصورت $\frac{۱}{\lambda} < ۱$ بوده و بنابر تعریف داریم:

$$f(\frac{۱}{\lambda}y) \geq \frac{۱}{\lambda}f(y)$$

حال با فرض $y = \lambda x$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(\frac{۱}{\lambda}(\lambda x) \geq \frac{۱}{\lambda}f(\lambda x) \;\; &\Rightarrow \;\; f(x) \geq \frac{۱}{\lambda}f(\lambda x) \\ &\Rightarrow \;\; f(\lambda x) \leq \lambda f(x) \end{aligned}$$

[۹] Co-radiant
[۱۰] Co-radiant Function

و بنابر این حکم ثابت است.

تعریف ۱.۲.۱۲. تابع همرادیانت $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ که صعودی نیز باشد را تابع همرادیانت صعودی [۱۱] (ICR) می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۳. تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را همگن مثبت از درجه δ ، [۱۲] (PH) می نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda > \circ$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x) = \lambda^{\delta} f(x).$$

مثلا تابع $f(x) = x^{2}$ تابعی همگن مثبت از درجه دو می باشد زیرا: $(\lambda x)^{2} = \lambda^{2} x^{2}$

تعریف ۱.۲.۱۴. تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ که همگن مثبت از درجه یک بوده و صعودی نیز باشد را تابع بطور مثبت همگن صعودی [۱۳] (IPH) می نامیم.

لم ۱.۲.۱۵. هر تابع بطور مثبت همگن صعودی و نامنفی f از درجه δ که $(\circ < \delta \leq 1)$ ، یک تابع ICR است.

برهان. تابع f همگن مثبت از درجه δ است لذا اگر $\lambda \in (\circ, 1]$ آنگاه $\lambda^{\delta} > \lambda$ و خواهیم داشت:

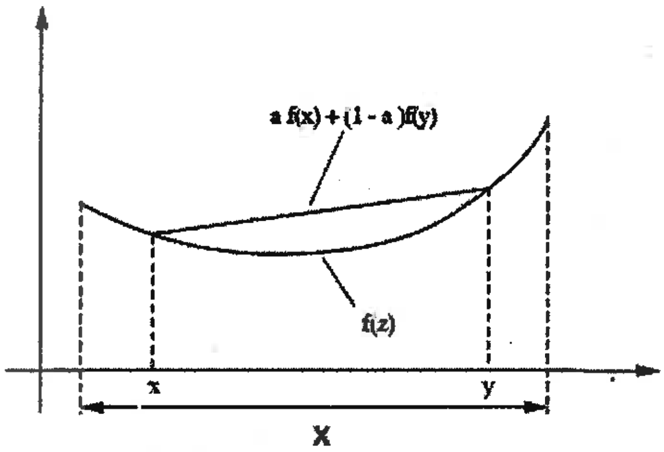
$$f(\lambda x) = \lambda^{\delta} f(x) \geq \lambda f(x) \Longrightarrow f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$$

و اگر $\lambda > 1$ آنگاه چون $\lambda^{\delta} < \lambda$ خواهیم داشت:

$$f(\lambda x) = \lambda^{\delta} f(x) \leq \lambda f(x) \Longrightarrow f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$$

بنابراین f یک تابع ICR است. ■

[۱۱] Increasing Co-Radiant
[۱۲] Positively Homogeneous
[۱۳] Increasing Positively Homogeneous



شکل ۱.۲: تابع محدب

تعریف ۱۶.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب [۱۴] می گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

همچنین تابع f را مقعر [۱۵] می نامیم هرگاه تابع $-f$ ، تابعی محدب باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در امتداد شعاع ها محدب [۱۶] (CAR) نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ تابع $f_x(\alpha) := f(\alpha x)$ برای هر $\alpha \in (\circ, +\infty)$ محدب باشد.

تعریف ۱۸.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در امتداد شعاع ها مقعر [۱۷] $(CAR(E))$ نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ تابع $f_x(\alpha) := f(\alpha x)$ برای هر $\alpha \in (\circ, +\infty)$ مقعر باشد.

[۱۴] Convex
[۱۵] Concave
[۱۶] Convex along rays
[۱۷] Concave along rays

تعریف ۱.۲.۱۹. تابع $f: X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ سره [۱۸] نامیده می شود هرگاه $domf \neq \emptyset$ که در آن $domf$ دامنه [۱۹] f بوده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$domf = \{x \in X: \ f(x) < +\infty\}$$

درواقع تابع f را سره می نامیم هرگاه برای حداقل یک $x \in X$ ، $f(x) < +\infty$ بوده و برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) > -\infty$.

تعریف ۱.۲.۲۰. تابع در امتداد شعاع ها مقعر صعودی را با $ICAR(E)$ نشان می دهیم.

مثال ۱.۲.۲۱. هر تابع $ICAR(E)$ که $f(\circ) \geq \circ$ یک تابع ICR است.

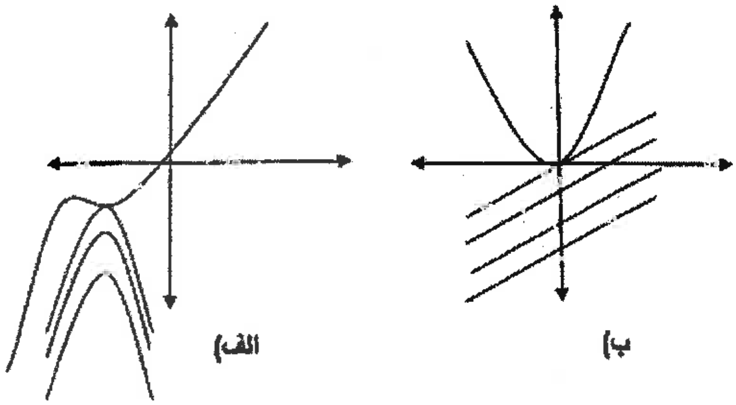
زیرا برای هر $x \in X$ و $\lambda \in (\circ, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f_x(\lambda) \\ &= f_x(\lambda \times 1 + (1 - \lambda) \times \circ) \\ &\geq \lambda f_x(1) + (1 - \lambda) f_x(\circ) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(\circ) \\ &\geq \lambda f(x) \\ &\Longrightarrow f(\lambda x) \geq \lambda f(x) \quad : \lambda \in (\circ, 1] \end{aligned}$$

بنابراین f یک تابع ICR است.

تذکر ۱.۲.۲۲. با توجه به مثال های (۱.۲.۱۵) و (۱.۲.۲۱) مشاهده می شود که رده تفاضل [۲۰] دو تابع ICR بسیار گسترده است.

---
[۱۸] Proper
[۱۹] Domain
[۲۰] Difference



شکل ۳.۱: توابع مقدماتی

تذکر ۲۳.۲.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع و H مجموعه ای از توابع تعریف شده روی X باشند که به اندازه کافی ساده بوده و نسبت به تابع f دارای رفتاری خاص هستند. دراینصورت H را یک مجموعه از توابع مقدماتی [۲۱] می نامیم.

مثلا در شکل (۳.۱) الف)، کلاس همه سهمی های رو به پایین، و ب) کلاس خطوط بعنوان مجموعه توابع مقدماتی درنظر گرفته می شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم L یک مجموعه از توابع خطی تعریف شده روی X باشد. انتقال قائم $h_{l,c}$ از l را روی ثابت c بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$h_{l,c}(x) := l(x) - c$$

دراینصورت هر تابع $h_{l,c}$ را یک تابع آفین [۲۲] (انتقالی از توابع خطی) می نامیم. همچنین مجموعه همه توابع آفینی بصورت $h_{l,c}$ را با H_L نشان می دهیم.

[۲۱] Elementry Functions
[۲۲] Affine Functions

تعریف ۲۵.۲.۱. مجموعه L مجموعه ای از توابع خطی محض [۲۳] نامیده می شود اگر تحت انتقال های قائم اش بسته نباشد یعنی برای هر $l \in L$ یک $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ موجود باشد که: $h_{l,c} \notin L.$

تذکر ۲۶.۲.۱. اگر در تعریف (۲۴.۲.۱)، L را مجموعه توابع خطی محض در نظر بگیریم آنگاه هر تابع $h_{l,c}$ را یک تابع آفین محض نسبت به مجموعه L (L - آفین) می نامیم. بنابراین مجموعه همه توابع L - آفین را نیز با H_L نشان می دهیم.

تذکر ۲۷.۲.۱. برای دو تابع داده شده f و g گوییم $g \leq f$ اگر و تنها اگر: $(\forall x \in X) \quad f(x) \leq g(x)$.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم H مجموعه ای از توابع خطی محض یا آفینی محض باشد.دراینصورت تابع f، H- محدب (محدب محض نسبت به H) نامیده می شود اگر:

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in H, h \leq f\} \quad ; x \in X.$$

تعریف ۲۹.۲.۱. مجموعه محافظ [۲۴] (ساپورت) یک تابع H - محدب f بصورت زیر تعریف می شود:

$$Supp(f, H) := \{h \in H : h(x) \leq f(x); \forall x \in X\}.$$

به بیان دیگر تابع f، H- محدب نامیده می شود اگر و تنها اگر:

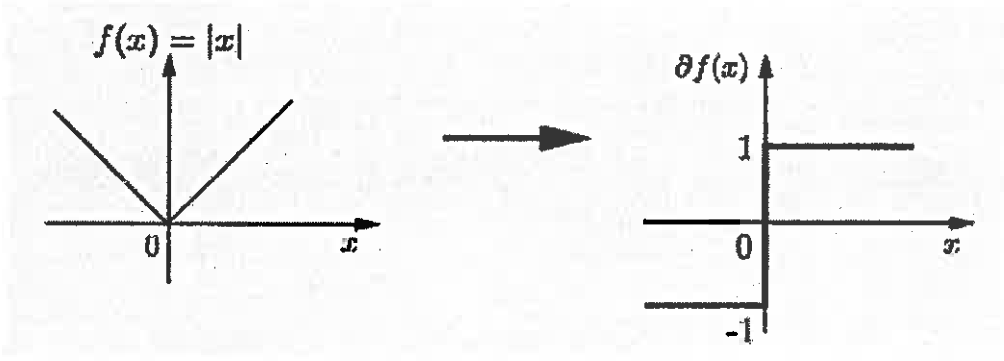
$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in Supp(f, H)\} \quad ; \forall x \in X.$$

مثلا در شکل (۳.۱ الف)، تمامی سهمی های رو به پایین که پایین تر از تابع داده شده قرار می گیرند مجموعه محافظ این تابع را تشکیل می دهند.

تعریف ۳۰.۲.۱. عنصر $h \in H$، H - زیر گرادیان [۲۵] یا زیر گرادیان محض تابع f در نقطه $x_\circ \in dom f$ است اگر:

$$f(x) \geq f(x_\circ) + h(x) - h(x_\circ) \quad , x \in X.$$

[۲۳] Abstract Linear Functions
[۲۴] Support set
[۲۵] Sub-gradiant



شکل ۴.۱: زیر دیفرانسیل تابع $|x|$

تعریف ۳۱.۲.۱. زیر دیفرانسیل محض [۲۶] یا H - زیر دیفرانسیل تابع f در نقطه $x_\circ$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\partial_H f(x_\circ) := \{h \in H : f(x) - f(x_\circ) \geq h(x) - h(x_\circ)\} \qquad ; x \in X$$

در واقع زیر دیفرانسیل محض تابع f در نقطه $x_\circ$ مجموعه همه زیرگرادیانهای تابع f در نقطه $x_\circ$ است.

مثال ۳۲.۲.۱. برای تابع $f(x) = |x|$ هر خط گذرنده از مبدا با شیب ζ که $-۱ \leq \zeta \leq ۱$ ، در رابطه زیر صدق می کند:

$$|x| \geq \zeta x = |\circ| + \zeta(x - \circ)$$

بنابراین هر ζ در بازه $[-۱, ۱]$ یک زیرگرادیان تابع $|x|$ در نقطه $x = \circ$ است. همچنین همانطور که در شکل (۴.۱) مشاهده می شود، زیر دیفرانسیل تابع $f(x) = |x|$ بصورت زیر است:

$$\partial_H f(x) = \begin{cases} \{+۱\} & : \quad x > \circ \\ [-۱, ۱] & : \quad x = \circ \\ \{-۱\} & : \quad x < \circ \end{cases}$$

گزاره ۳۳.۲.۱. زیر دیفرانسیل $\partial_L f(x_\circ)$ ناتهی است اگر و تنها اگر $x_\circ \in dom f$ بوده و داشته باشیم:

$$f(x_\circ) = \max\{h(x_\circ) : h \in Supp(f, H_L)\}.$$

---
[۲۶] Sub-dubdifferential

برهان. $\Leftarrow$) فرض کنیم که $l \in \partial_L f(x_\circ)$ و همچنین:

$$h_l(x) = l(x) - [l(x_\circ) - f(x_\circ)]$$

دراینصورت بنابر تعریف (۲۴.۲.۱) و تذکر (۲۶.۲.۱) داریم: $h_l \in H_L$

و چون قبلا داریم:

$$l \in \partial_L f(x_\circ) \Longleftrightarrow h_l \in Supp(f, H_L)$$

بنابر این: $h_l \leq f$

از طرفی میدانیم که:

$$\begin{aligned} h_l(x_\circ) &= l(x_\circ) - (l(x_\circ) - f(x_\circ)) \\ &\Longrightarrow h_l(x_\circ) = f(x_\circ) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$f(x_\circ) = \max\{h(x_\circ) : h \in Supp(f, H_L)\}$$

$\Rightarrow$) برعکس، فرض کنیم که یک تابع $h \in Supp(f, H_L)$ چنان موجود باشد که $h(x_\circ) = f(x_\circ)$

همچنین فرض کنیم که: $h(x) = l(x) - c$ که در آن $l \in L\ ,\ c \in \mathbb{R}$ است. دراینصورت داریم:

$$\begin{aligned} c &= l(x_\circ) - h(x_\circ) \\ &\Longrightarrow h(x) = l(x) - (l(x_\circ) - h(x_\circ)) \\ &\Longrightarrow l(x) - (l(x_\circ) - h(x_\circ)) \leq f(x) \\ &\Longrightarrow l(x) - (l(x_\circ) - f(x_\circ)) \leq f(x) \end{aligned}$$

لذا بنابرتعریف (۳۰.۲.۱)، تابع l یک زیرگرادیان تابع f بوده و بنابراین:

$$l \in \partial_L f(x_\circ).$$ ■

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنیم تابع اتصال [۲۷] $\langle .,. \rangle : X \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$\langle x, l \rangle := l(x) \quad \forall x \in X\,, \quad \forall l \in L.$$

که در آن L یک مجموعه از توابع خطی محض می باشد.

برای یک تابع $f \in \mathfrak{F}(X)$ ، L - مزدوج فنشل مورآ [۲۸] از f را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*(l) := \sup_{x \in X} [l(x) - f(x)]\;;\; l \in L.$$

که در آن $\mathfrak{F}(X)$ اجتماع همه توابع $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ و تابع $-\infty$ می باشد.

لم ۳۵.۲.۱. اگر L مجموعه ای از توابع خطی محض باشد در اینصورت:

۱. $h_{l,c} = h_{l_\circ, c_\circ} \Longleftrightarrow l = l_\circ\,,\; c = c_\circ$

۲. نگاشت $(l, c) \to h_{l,c}$ یک تناظر یک به یک است.

برهان.

۱. ما $h_{l,c}$ را با (l, c) یکی می گیریم. به عبارت دیگر یک عنصر $(l, c) \in L \times \mathbb{R}$ را بعنوان یک تابع تعریف شده روی X بصورت $x \to l(x) - c$ که $x \in X$ در نظر می گیریم.

فرض کنیم که $l = l_\circ$ لذا برای هر $x \in X$ داریم:

$$l(x) = l_\circ(x); \quad (\forall x \in X)$$

از طرفی چون $c = c_\circ$ لذا:

$$l(x) - c = l_\circ(x) - c_\circ \implies h_{l,c}(x) = h_{l_\circ, c_\circ}(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\implies h_{l,c} = h_{l_\circ, c_\circ}$$

برعکس، فرض کنیم که $h_{l,c} = h_{l_\circ, c_\circ}$ لذا برای هر $x \in X$ داریم:

[۲۷] Coupling function
[۲۸] Fenchel-Moreau

$$h_{l,c}(x) = h_{l_\circ,c_\circ}(x) \quad (\forall x \in X)$$

اکنون با فرض $x = \circ$ داریم:

$$\begin{aligned} l(x) - c = l_\circ(x) - c_\circ \quad &\Longrightarrow \quad l(\circ) - c = l_\circ(\circ) - c_\circ \\ &\Longrightarrow \quad -c = -c_\circ \end{aligned}$$

لذا:

$$c = c_\circ \tag{۱.۱}$$

حال بنابر رابطه (۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned} &l(x) = l_\circ(x) \quad (\forall x \in X) \\ &\Longrightarrow l = l_\circ \end{aligned}$$

۲. یک بیکی نگاشت $(l,c) \to h_{l,c}$ بنابر قسمت ۱ واضح است. ■

فصل ۲

آنالیز محدب روی فضاهای برداری توپولوژیکی مرتب شده

در این فصل، برخی نتایج تحدب محض را برای توابع همرادیانت صعودی و مشخصه مجموعه های زیردیفرانسیل و محافظ آنها بدست می آوریم. درواقع تحدب محض توابع ICR نامنفی را مورد بررسی قرار داده و همچنین توصیفی از زیردیفرانسیل و مجموعه های محافظ یک تابع ICR نامنفی که روی فضای برداری توپولوژیک X تعریف شده را بیان می کنیم. بعلاوه قطبیت توابع ICR و مجموعه های همرادیانت را معرفی کرده و زیر دیفرانسیل توابع ICR را به کمک توابع IPH مشخص می کنیم.

۱.۲ تحدب محض توابع ICR نامنفی

برخی تعاریف مرتبط با تحدب محض در مرجع [۱۷] معرفی شده اند. در این بخش ما روی تحدب محض نسبت به رده خاصی از توابع ICR بحث می کنیم. همچنین زیردیفرانسیل و نوع خاصی از قطبیت توابع ICR را مورد بررسی قرار می دهیم.

در ابتدا به منظور ارائه موارد دیگری از توابع ICR، تابع $l : X \times X \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow [0, +\infty]$ را بصورت زیر درنظر می گیریم:

$$l(x, y, \alpha) := \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha \ : \ \lambda y \leq x\} \tag{۱.۲}$$

با این قرارداد که: $\max\emptyset = 0$.

گزاره ۱.۱.۲. برای هر $x, y, x', y' \in X$ و $\gamma \in (0, 1]$ و $\mu, \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}_{++}$ داریم :

$$l(\mu x, y, \alpha) = \mu l(x, y, \frac{\alpha}{\mu}) \tag{۲.۲}$$

$$l(x, \mu y, \alpha) = \frac{1}{\mu} l(x, y, \mu\alpha) \tag{۳.۲}$$

$$x \leq x' \Longrightarrow l(x, y, \alpha) \leq l(x', y, \alpha) \tag{۴.۲}$$

$$y \leq y' \Longrightarrow l(x, y', \alpha) \leq l(x, y, \alpha) \tag{۵.۲}$$

$$\alpha \leq \alpha' \Longrightarrow l(x, y, \alpha) \leq l(x, y, \alpha') \tag{۶.۲}$$

$$l(\gamma x, y, \alpha) \geq \gamma l(x, y, \alpha) \tag{۷.۲}$$

$$l(x, \gamma y, \alpha) \leq \frac{1}{\gamma} l(x, y, \alpha) \tag{۸.۲}$$

$$l(x,y,\alpha)=\alpha \Longleftrightarrow \alpha y\leq x \qquad (۹.۲)$$

برهان. برای رابطه (۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(\mu x,y,\alpha) &:= \max\{0\leq\lambda\leq\alpha:\quad \lambda y\leq\mu x\}\\ &= \max\{0\leq\lambda\leq\alpha:\quad \frac{\lambda}{\mu}y\leq x\}\\ &= \max\{0\leq\mu\tilde{\lambda}\leq\alpha:\quad \tilde{\lambda}y\leq x\}\\ &= \mu\max\{0\leq\tilde{\lambda}\leq\frac{\alpha}{\mu}:\quad \tilde{\lambda}y\leq x\}\\ &= \mu l(x,y,\frac{\alpha}{\mu}). \end{aligned}$$

برای رابطه (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(x,\mu y,\alpha) &:= \max\{0\leq\lambda\leq\alpha:\quad \lambda(\mu y)\leq x\}\\ &= \max\{0\leq\lambda\leq\alpha:\quad (\lambda\mu)y\leq x\}\\ &= \frac{1}{\mu}\max\{0\leq\mu\lambda\leq\mu\alpha:\quad (\lambda\mu)y\leq x\}\\ &= \frac{1}{\mu}\max\{0\leq\tilde{\lambda}\leq\mu\alpha:\quad \tilde{\lambda}y\leq x\}\\ &= \frac{1}{\mu}l(x,y,\mu\alpha). \end{aligned}$$

برای رابطه (۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(x,y,\alpha) &:= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq x\} \\ &\leq \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq x'\} \\ &= l(x',y,\alpha). \end{aligned}$$

برای رابطه (۵.۲) چون داریم:

$$\lambda y' \leq x$$

لذا:

$$\lambda \leq \frac{x}{y'} \Longrightarrow \lambda \leq \frac{x}{y}$$

بنابر این:

$$\lambda y \leq x$$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} l(x,y',\alpha) &:= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y' \leq x\} \\ &\leq \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq \lambda y' \leq x\} \\ &= l(x,y,\alpha). \end{aligned}$$

برای رابطه (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(x,y,\alpha) &:= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq x\} \\ &= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha \leq \alpha' : \quad \lambda y \leq x\} \\ &\leq \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha' : \quad \lambda y \leq x\} \\ &= l(x,y,\alpha'). \end{aligned}$$

برای رابطه (۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(\gamma x, y, \alpha) &:= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq \gamma x\} \\ &= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \frac{\lambda}{\gamma} y \leq x\} \\ &= \gamma \max\{0 \leq \frac{\lambda}{\gamma} \leq \frac{\alpha}{\gamma} : \quad \frac{\lambda}{\gamma} y \leq x\} \\ &= \gamma l(x, y, \frac{\alpha}{\gamma}) \\ &\geq \gamma l(x, y, \alpha) \end{aligned}$$

لذا:

$$l(\gamma x, y, \alpha) \geq \gamma l(x, y, \alpha).$$

برای رابطه (۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l(x, \gamma y, \alpha) &:= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda(\gamma y) \leq x\} \\ &= \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad (\lambda\gamma) y \leq x\} \\ &= \frac{1}{\gamma} \max\{0 \leq \lambda\gamma \leq \alpha\gamma : \quad (\lambda\gamma) y \leq x\} \\ &= \frac{1}{\gamma} l(x, y, \alpha\gamma) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} l(x, y, \alpha) \end{aligned}$$

لذا:

$$l(x, \gamma y, \alpha) \leq \frac{1}{\gamma} l(x, y, \alpha).$$

برای رابطه (۹.۲) داریم:

$$
\begin{aligned}
l(x,y,\alpha)=\alpha &\iff \max\{0 \leq \lambda \leq \alpha : \quad \lambda y \leq x\}=\alpha \\
&\iff \alpha=\lambda \\
&\iff \alpha y \leq x.
\end{aligned}
$$

■

تعریف ۲.۱.۲. برای هر $y \in X$ و هر $\alpha > 0$ تابع $l_{(y,\alpha)} : X \longrightarrow [0,+\infty]$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) := l(x,y,\alpha) \quad (\forall x \in X)$$

همچنین:

$$L := \{l_{(y,\alpha)} : y \in X, \alpha > 0\}.$$

به آسانی می توان گزاره زیر را بررسی کرد:

گزاره ۳.۱.۲. L مجموعه ای از توابع ICR است.

برهان . فرض کنیم که $l_{(y,\alpha)} \in L$ بوده و $x \leq x'$ دراینصورت بنابر رابطه (۴.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x)=l(x,y,\alpha) \leq l(x',y,\alpha)$$

بنابر این $l_{(y,\alpha)}$ یک تابع صعودی است.

همچنین برای هر $\gamma \in (\circ, 1]$ بنابر رابطه (۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned} l_{(y,\alpha)}(\gamma x) &= l(\gamma x, y, \alpha) \\ &\geq \gamma l(x, y, \alpha) \\ &= \gamma l_{(y,\alpha)}(x) \\ \Longrightarrow\ & l_{(y,\alpha)}(\gamma x) \geq \gamma l_{(y,\alpha)}(x) \quad (\forall \gamma \in (\circ, 1]) \end{aligned}$$

لذا تابع $l_{(y,\alpha)}$ همرادیانت بوده و بنابر این ICR است . ■

مثال ۴.۱.۲. اگر $X = \mathbb{R}^n$ و S مخروط $\mathbb{R}^n_+$ شامل همه بردارهای نامنفی در $\mathbb{R}^n$ باشد و

$$I = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

دراینصورت هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه های اندیس زیر را تولید می کند:

$$I_+(x) = \{i \in I \ :\ x_i > \circ\} \quad , \quad I_\circ(x) = \{i \in I \ :\ x_i = \circ\} \quad , \quad I_-(x) = \{i \in I \ :\ x_i < \circ\}$$

فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$ باشد. دراینصورت بردار با مختصات زیر را با $\frac{c}{x}$ نشان می دهیم:

$$\left(\frac{c}{x}\right)_i := \begin{cases} \frac{c}{x_i} & : \quad i \notin I_\circ(x) \\ \circ & : \quad i \in I_\circ(x) \end{cases}$$

دراینصورت برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$l(x, y, \alpha) = \begin{cases} \min\{\min_{i \in I_+(y)} \frac{x_i}{y_i}, \alpha\} & : \quad x \in k_y^+ \\ \circ & : \quad x \notin k_y^+ \end{cases}$$

که در آن:

$$k_y^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \forall i \in I_+(y) \cup I_\circ(y),\ x_i \geq \circ\ ;\ \max_{i \in I_-(y)} \frac{x_i}{y_i} \leq \min_{i \in I_+(y)} \frac{x_i}{y_i}\right\}. \qquad (۱۰.۲)$$

همچنین می توانیم تابع $u : X \times X \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$u(x, y, \beta) := \min\{\lambda \geq \beta \; : \quad \lambda y \geq x\}. \tag{۱۱.۲}$$

با این قرارداد که:

$$\min \emptyset = +\infty.$$

توجه ۵.۱.۲. می توان نشان داد که تابع u تمامی ویژگیهای تابع l در گزاره (۱.۱.۲) را دارا می باشد.

گزاره زیر رابطه بین توابع l و u را نشان می دهد:

گزاره ۶.۱.۲. فرض کنیم l و u توابع معرفی شده در روابط (۱.۲) و (۱۱.۲) باشند در اینصورت برای هر $x, y \in X$ و هر $\mu > \circ$ داریم:

$$l(x, y, \mu) \times u(y, x, \frac{1}{\mu}) = 1 \tag{۱۲.۲}$$

با این قرار داد که:

$$[\circ \times (+\infty) = (+\infty) \times \circ = 1].$$

درواقع این گزاره نتیجه مستقیمی از تعریف توابع l و u است.

قضیه ۷.۱.۲. تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را در نظر می گیریم. دراینصورت عبارات زیر معادل اند:

۱. f یک تابع ICR است.

۲. به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in (\circ, 1]$ که $\lambda y \leq x$ داریم:

$$\lambda f(y) \leq f(x) \tag{۱۳.۲}$$

۳. به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ داریم:

$$l(x,y,\alpha)f(\alpha y) \leq \alpha f(x) \tag{۱۴.۲}$$

با این قرارداد که:

$$(\circ \times (+\infty) = \circ).$$

۴. به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ داریم:

$$u(x,y,\beta)f(\beta y) \geq \beta f(x) \tag{۱۵.۲}$$

با این قرارداد که:

$$(\circ \times (+\infty) = +\infty).$$

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) : فرض کنیم که f یک تابع ICR باشد در اینصورت داریم:

$$\forall\lambda \ : \ \circ < \lambda \leq ۱ \Longrightarrow f(\lambda y) \geq \lambda f(y)$$

حال چون f تابعی صعودی است لذا با فرض اینکه $\lambda y \leq x$ داریم: $f(\lambda y) \leq f(x)$

اما چون f یک تابع ICR است لذا:

$$\lambda f(y) \leq f(\lambda y)$$

بنابراین:

$$\lambda f(y) \leq f(\lambda y) \leq f(x) \Longrightarrow \lambda f(y) \leq f(x).$$

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) : داریم: $l(x,y,\alpha) := \max\{\circ \leq \lambda \leq \alpha \ : \quad \lambda y \leq x\}$

حال چون ماکزیمم هر مجموعه یکی از اعضای آن مجموعه است لذا $l(x,y,\alpha)$ خودش در

رابطه $\lambda y \leq x$ صدق می کند لذا اگر $l(x,y,\alpha) \neq ۰$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} l(x,y,\alpha)y \leq x \implies & \frac{l(x,y,\alpha)}{\alpha} \times (\alpha y) \leq x \\ \implies & \frac{l(x,y,\alpha)}{\alpha} f(\alpha y) \leq f(x) \\ \implies & l(x,y,\alpha) f(\alpha y) \leq \alpha f(x) \end{aligned}$$

و اگر $l(x,y,\alpha) = ۰$ و $f(\alpha y) = +\infty$ باشد آنگاه بطور بدیهی داریم: $\quad ۰ \leq \alpha f(x).$

$(۳) \Longleftarrow (۱)$: فرض کنیم $y \leq x$ باشد بنابراین: $\quad ۱y \leq x$

حال طبق رابطه (۹.۲) و با فرض $\alpha = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} l(x,y,۱) = ۱ \implies f(y) &= f(y) \times ۱ \\ &= f(y) l(x,y,۱) \\ &\leq ۱ \times f(x) = f(x) \\ &\implies f(y) \leq f(x) \end{aligned}$$

بنابراین f تابعی صعودی است. همچنین می دانیم که برای هر $۱ \leq \lambda > ۰$ و برای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} \lambda l(x,y,۱) \leq l(\lambda x,y,۱) \implies \lambda f(x) &= \lambda l(x,x,۱) f(x) \\ &\leq l(\lambda x,x,۱) f(x) = l(\lambda x,x,۱) f(۱x) \\ &\leq ۱ f(\lambda x) = f(\lambda x) \\ &\implies \lambda f(x) \leq f(\lambda x) \end{aligned}$$

یعنی f یک تابع همرادیانت است. بنابراین f یک تابع صعودی و همرادیانت و لذا ICR است.

$(۱) \Longleftarrow (۴)$: فرض کنیم که f یک تابع ICR باشد و همچنین: $\quad u(x,y,\beta) \neq +\infty$ دراینصورت چون:

$$u(x,y,\beta) := \min\{\lambda \geq \beta \quad : \ \lambda y \geq x\}$$

و اینکه مینیمم هر مجموعه عضوی از آن مجموعه است لذا $u(x,y,\beta)$ خودش در شرط مجموعه صدق می کند یعنی:

$$u(x,y,\beta) \geq \beta \quad , \quad \beta y \geq x$$

لذا:
$$\frac{u(x,y,\beta)}{\beta} \geq ۱$$

چون f تابعی ICR و لذا صعودی است پس: $f(\beta y) \geq f(x)$ حال چون:

$$\frac{u(x,y,\beta)}{\beta} \geq ۱$$

لذا طبق تعریف تابع همرادیانت داریم:

$$\frac{u(x,y,\beta)}{\beta} f(\beta y) \geq f(\frac{u(x,y,\beta)}{\beta} \times \beta y) \geq f(\beta y) \geq f(x)$$

بنابراین:

$$\frac{u(x,y,\beta)}{\beta} f(\beta y) \geq f(x) \Longrightarrow u(x,y,\beta) f(\beta y) \geq \beta f(y).$$

اگر $u(x,y,\beta) = +\infty$ باشد آنگاه چون طبق فرض $+\infty = (+\infty) \times ۰$ بنابراین حکم بوضوح برقرار است.

(۴) $\Longleftarrow$ (۱) : فرض کنیم که $\beta = ۱$ دراینصورت چون:

$$u(x,y,\beta) := \min\{\lambda \geq \beta \quad : \ \lambda y \geq x\}$$

بنابراین $x \geq ۱y$ یعنی $x \geq y$ حال طبق قسمت ۴ داریم:

$$u(x,y,۱) f(۱y) \geq ۱ f(x) \Longrightarrow ۱ f(۱y) \geq ۱ f(x) \Longrightarrow f(y) \geq f(x)$$

بنابراین f تابعی صعودی است. از طرفی چون $\lambda \geq \beta = ۱$ بنابراین: $\lambda \geq ۱$ لذا: $\frac{۱}{\lambda} \leq ۱$

حال طبق خواص تابع u داریم:

$$u(\lambda x, y, ۱) = \lambda u(x, y, \frac{۱}{\lambda}) \leq \lambda u(x, y. ۱) \Longrightarrow u(\lambda x, y, ۱) \leq \lambda u(x, y, ۱)$$

حال داریم:

$$u(\lambda x, y, 1)f(1x) \geq 1f(\lambda x) \Longrightarrow \lambda u(x, y, 1)f(x) \geq u(\lambda x, y, 1)f(x) \geq f(\lambda x)$$

$$\Longrightarrow \lambda u(x, y, 1)f(x) \geq f(\lambda x)$$

اما چون $u(x, y, 1) = 1$ داریم: $\lambda f(x) \geq f(\lambda x)$ بنابراین f همرادیانت است. لذا تابع f یک تابع ICR می باشد. ■

یادآوری ۸.۱.۲. طبق گزاره (۳.۱.۲) ، هر تابع $l_{(y,\alpha)}$ یک تابع ICR است.

فرض کنیم که تابع l و مجموعه L همان عبارات معرفی شده در تعریف (۲.۱.۲) باشند.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع باشد دراینصورت f تابع ICR است اگر و تنها اگر مجموعه ای مانند $A \subset L$ چنان موجود باشد که:

$$f(x) = \sup_{l_{(y,\alpha)} \in A} l_{(y,\alpha)}(x)$$

دراین حالت می توانیم فرض کنیم که:

$$A = \{l_{(y,\alpha)} \in L \; : \; f(\alpha y) \geq \alpha\}$$

بنابراین f یک تابع ICR است اگر و تنها اگر f یک تابع L - محدب باشد.

برهان. فرض کنیم که f یک تابع ICR باشد. بنابر رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x)f(\alpha y) \leq \alpha f(x)$$

بنابراین اگر $x \in X$ و $l_{(y,\alpha)} \in A$ دلخواه باشند آنگاه $f(\alpha y) \geq \alpha$ بوده و داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x)\,\alpha \leq l_{(y,\alpha)}(x)f(\alpha y) \leq \alpha f(x)$$

$$\Longrightarrow l_{(y,\alpha)}(x)\,\alpha \leq \alpha f(x)$$

و چون $\alpha \neq 0$ بنابراین:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \leq f(x)$$

حال اگر $0 < f(x) < +\infty$ دراینصورت داریم:

$$l_{(\frac{x}{f(x)},f(x))} \in A$$

و چون:

$$l_{(\frac{x}{f(x)},f(x))}(x) = l(x,\frac{x}{f(x)},f(x)) = \max\{0 \leq \lambda \leq f(x) \ : \ \lambda\left(\frac{x}{f(x)}\right) \leq x\} = f(x)$$

لذا:

$$f(x) = \max_{l_{(y,\alpha)}\in A} l_{(y,\alpha)}(x).$$

اکنون فرض کنیم که $f(x) = 0$ باشد دراینصورت خواهیم داشت: $l_{(y,\alpha)} = 0$ زیرا اگر $l_{(y,\alpha)} \in A$ چنان باشد که به خلف $l_{(y,\alpha)}(x) \neq 0$ باشد آنگاه طبق قضیه (۷.۱.۲) قسمت ۳ داریم:

$$l(x,y,\alpha)f(\alpha y) \leq \alpha f(x) = 0 \Longrightarrow l(x,y,\alpha)f(\alpha y) \leq 0$$

اما چون $l_{(y,\alpha)}(x) \geq 0$ و $f(\alpha y) \geq 0$ بنابراین بایستی:

$$l(x,y,\alpha)f(\alpha y) = 0$$

اما طبق فرض این قسمت $l_{(y,\alpha)}(x) \neq 0$ است بنابراین باید: $f(\alpha y) = 0$

اما $\alpha \leq f(\alpha y) = 0$ یعنی بایستی: $\alpha \leq 0$ و این یک تناقض است زیرا: $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$

لذا برای همه $l_{(y,\alpha)} \in A$ داریم: $l_{(y,\alpha)} = 0$

اکنون فرض کنیم که: $f(x) = +\infty$ و $\alpha > 1$ لذا: $\frac{1}{\alpha} < 1$ و بنابر ICR بودن تابع f داریم:

$$f(\frac{1}{\alpha}x) = f(\frac{x}{\alpha}) \geq \frac{1}{\alpha}f(x) = \frac{1}{\alpha}(+\infty) = +\infty \Longrightarrow f(\frac{x}{\alpha}) \geq +\infty$$

حال با فرض $y_\alpha = \frac{x}{\alpha}$ بطور بدیهی خواهیم داشت:

$$f(y_\alpha) = +\infty \geq \alpha \quad (\forall \alpha > 1) \Longrightarrow f(y_\alpha) \geq \alpha \Longrightarrow l_{(y,\alpha)} \in A$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = +\infty = \sup_{\alpha} l_{(y_\alpha,\alpha)}(x) \leq \sup_{l_{(y,\alpha)} \in A} l_{(y,\alpha)}(x) \leq f(x)$$

لذا بایستی داشته باشیم:

$$\sup_{l_{(y,\alpha)} \in A} l_{(y,\alpha)}(x) = f(x).$$

$\Leftarrow$) برعکس، چون بوضوح سوپریمم توابع صعودی و همرادیانت خود یک تابع صعودی و همرادیانت می باشد لذا حکم ثابت است. ■

بطور مشابه در قضیه زیر نشان می دهیم که هر تابع $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ که ICR باشد، بطور اینفیمال توسط رده خاصی از توابع ICR تولید می شود یعنی می توان تابع f بصورت اینفیمم یک دسته از توابع ICR که کمتر مساوی آن هستند نوشت.

تعریف ۲.۱.۱۰. برای هر $y \in X$ و هر $\beta \in \mathbb{R}_{++}$، تابع $u_{(y,\beta)} : X \longrightarrow [0, +\infty]$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_{(y,\beta)}(x) := u(x, y, \beta).$$

بعلاوه فرض می کنیم که:

$$U := \{u_{(y,\beta)} \ : \ y \in X \ , \ \beta \in \mathbb{R}_{++}\}.$$

مجموعه توابع مقدماتی باشد.

تذکر ۱۱.۱.۲. بنابر توجه (۵.۱.۲) و رابطه های (۴.۲) و (۷.۲)، تابع $u_{(y,\beta)}$ یک تابع ICR است.

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ یک تابع باشد دراینصورت f تابع ICR است اگر و تنها اگر یک مجموعه $B \subset U$ چنان موجود باشد که:

$$f(x) = \inf_{u_{(y,\beta)} \in B} u_{(y,\beta)}(x)$$

دراینحالت می توانیم فرض کنیم که:

$$B = \{u_{(y,\beta)} \in U \ : \ f(\beta y) \leq \beta\}.$$

بنابراین f یک تابع ICR است اگر و تنها اگر f یک تابع U - مقعر باشد.

برهان. فرض کنیم که $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ یک تابع ICR باشد. بنابر قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$u(x,y,\beta)f(\beta y) \geq \beta f(x) \qquad (\forall x, y \in X \ , \ \forall \beta \in \mathbb{R}_{++})$$

بنابراین:

$$u_{(y,\beta)}(x)f(\beta y) \geq \beta f(x) \qquad (۱۶.۲)$$

لذا اگر $u_{(y,\beta)} \in B$ و $x \in X$ دلخواه باشند دراینصورت:

$$u_{(y,\beta)}(x) \geq f(x)$$

زیرا اگر $\beta \geq ۱$ فرض شود آنگاه بنابر ICR بودن f و رابطه (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\beta f(y) \geq f(\beta y) \Longrightarrow u_{(y,\beta)}(x) \times \beta \times ۱ \quad &\geq \quad u_{(y,\beta)}(x) \times \beta \times f(y) \\ &\geq \quad u_{(y,\beta)}(x) \times f(\beta y) \geq \beta f(x) \\ &\Longrightarrow \quad u_{(y,\beta)}(x) \geq f(x).\end{aligned}$$

حال اگر $+\infty > f(x) > ۰$ باشد دراینصورت داریم:

$$u_{(\frac{x}{f(x)}, f(x))} \in B$$

زیرا:

$$f\left(f(x) \times \frac{x}{f(x)}\right) = f(x) \leq f(x)$$

و داریم:

$$u_{(\frac{x}{f(x)}, f(x))}(x) = u(x, \frac{x}{f(x)}, f(x)) = \min\{\lambda \geq f(x) \ : \ \lambda(\frac{x}{f(x)}) \geq x\} = f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \min_{u_{(y,\beta)} \in B} u_{(y,\beta)}(x).$$

اکنون فرض کنیم که $f(x) = +\infty$ ، دراینصورت خواهیم داشت: $u_{(y,\beta)} = +\infty$

زیرا اگر $u_{(y,\beta)} \in B$ چنان باشد که به خلف $u_{(y,\beta)}(x) \neq +\infty$ باشد آنگاه طبق قسمت ۴ از قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$u(x, y, \beta) f(\beta y) \geq \beta f(x) = +\infty \Longrightarrow u(x, y, \beta) f(\beta y) \geq +\infty$$

$$\Longrightarrow f(\beta y) = +\infty$$

لذا:

$$+\infty = f(\beta y) \leq \beta \Longrightarrow \beta = +\infty$$

که تناقض است زیرا: $\beta \in \mathbb{R}_{++}$.

اکنون فرض کنیم که: $f(x) = \circ$ ، دراینصورت $\beta < 1$ زیرا بنابر تعریف مجموعه B، $\beta = 1$ اتفاق نمی افتد.

لذا: $\frac{1}{\beta} > 1$ است و بنابر ICR بودن تابع f داریم:

$$f(\frac{1}{\beta}x) = f(\frac{x}{\beta}) \leq \frac{1}{\beta}f(x) = \frac{1}{\beta} \times \circ = \circ \Longrightarrow f(\frac{x}{\beta}) \leq \circ$$

حال با فرض $y_\beta = \frac{x}{\beta}$ بطور بدیهی خواهیم داشت:

$$f(y_\beta) \leq \circ \leq \beta \quad (\forall \beta < 1) \Longrightarrow f(y_\beta) \leq \beta \Longrightarrow u_{(y,\beta)} \in B$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = \circ = \inf_{\beta} u_{(y_\beta,\beta)}(x) \geq \inf_{u_{(y,\beta)} \in B} u_{(y,\beta)}(x) \geq f(x)$$

لذا:

$$\inf_{u_{(y,\beta)} \in B} u_{(y,\beta)}(x) = f(x).$$

برعکس، چون بوضوح اینفیمم توابع صعودی و همرادیانت، خود یک تابع صعودی و همرادیانت می باشد لذا حکم ثابت است. ■

تعریف ۱۳.۱.۲. تابع f ، اینف - محدب محض [1] است اگر:

$$f(x) = \inf_{\alpha} f_\alpha(x)$$

که در آن هر تابع f_α محدب محض است.

نتیجه ۱۴.۱.۲. اگر تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد دراینصورت f یک اینف - محدب محض است.

[1] inf-abstrac-convex

برهان. فرض کنیم که f یک تابع ICR باشد دراینصورت با توجه به قضیه (۱۲.۱.۲) داریم:

$$f(x) = \inf_{u_{(y,\beta)} \in B} u_{(y,\beta)}(x)$$

اما می دانیم که بنا بر تذکر (۱۱.۱.۲) هر تابع $u_{(y,\beta)}$ یک تابع ICR است لذا با استفاده از قضیه (۹.۱.۲) داریم:

$$u_{(y,\beta)}(x) = \sup_{l_{(y,\alpha)}} l_{(y,\alpha)}(x)$$

درواقع تابع u بصورت سوپریمم دسته ای از توابع مقدماتی بیان می شود و لذا محدب محض است و تابع f نیز اینفیمم چنین توابعی می باشد. ■

۲.۲ زیر دیفرانسیل و مجموعه های محافظ

در این بخش توصیفی از مجموعه های محافظ و مجموعه L - زیردیفرانسیل یک تابع ICR که روی یک فضای برداری توپولوژیک X تعریف شده را بیان می کنیم. همچنین برخی از ویژگیهای مجموعه محافظ در X را بررسی می کنیم.

یادآوری ۱.۲.۲. مجموعه محافظ [۲] یک تابع H - محدب f بصورت، زیر تعریف می شود:

$$Supp(f, H) := \{h \in H \; : \; h(x) \leq f(x) \; ; \; \forall x \in X\}$$

که در آن H مجموعه ای ازتوابع مقدماتی است.

فرض کنیم L مجموعه معرفی شده در تعریف (۲.۱.۲) باشد که مجموعه ای از توابع مقدماتی است.

گزاره ۲.۲.۲. فرض کنیم تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد دراینصورت داریم:

$$Supp(f, L) = \{l_{(y,\alpha)} \in L \; : \; f(\alpha y) \geq \alpha\}.$$

برهان. فرض کنیم:

$$A = \{l_{(y,\alpha)} \in L \; : \; f(\alpha y) \geq \alpha\} \qquad , \qquad l_{(y,\alpha)} \in Supp(f, L)$$

نشان می دهیم:

$$l_{(y,\alpha)} \in A$$

بنابر یادآوری (۱.۲.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \leq f(x) \quad (\forall x \in X)$$

[۲] Support set

حال با جایگذاری $x = \alpha y$ با توجه به تعریف (۲.۱.۲) داریم:

$$f(\alpha y) \geq l_{(y,\alpha)}(\alpha y) = l(\alpha y, y, \alpha) = \alpha l(y, y, ۱) = \alpha.۱ = \alpha \Longrightarrow f(\alpha y) \geq \alpha$$

لذا:

$$l_{(y,\alpha)} \in \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(\alpha y) \geq \alpha\} \Longrightarrow Supp(f, L) \subset \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(\alpha y) \geq \alpha\}$$

بر عکس، فرض کنیم:

$$(y, \alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++}$$

چنان باشد که:

$$l_{(y,\alpha)} \in L \qquad , \qquad f(\alpha y) \geq \alpha$$

چون f یک تابع ICR است لذا بنابر قسمت ۳ از قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$l(x, y, \alpha) f(\alpha y) \leq \alpha f(x) \qquad \forall x, y \in X \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_{++}$$

بنابراین چون $l_{(y,\alpha)} \in A$ بنابراین $f(\alpha y) \geq \alpha$ و لذا $f(y) \geq ۱$ پس:

$$l(x, y, \alpha) \leq f(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\Longrightarrow l_{(y,\alpha)} \in Supp(f, L).$$

بنابراین:

$$\{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(\alpha y) \geq \alpha\} \subseteq Supp(f, L).$$

و این حکم را ثابت می کند. ■

یادآوری ۳.۲.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [۰, +\infty]$ تابع L - محدب باشد. L - زیر دیفرانسیل تابع f در نقطه $x_۰ \in X$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\partial_L f(x_\circ) := \{l \in L : f(x) - f(x_\circ) \geq l(x) - l(x_\circ)\} \qquad (x \in X).$$

که در آن L مجموعه ای از توابع مقدماتی است.

گزاره ۴.۲.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد. همچنین فرض کنیم $x_\circ \in X$ چنان باشد که $f(x_\circ) \neq \circ, +\infty$ در اینصورت:

$$\{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(\alpha y) \geq \alpha \ , \ l_{(y,\alpha)}(x_\circ) = f(x_\circ)\} \subset \partial_L f(x_\circ).$$

بعلاوه:

$$\partial_L f(x_\circ) \neq \emptyset.$$

برهان. فرض کنیم که:

$$l_{(y,\alpha)} \in \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(\alpha y) \geq \alpha, \quad l_{(y,\alpha)}(x_\circ) = f(x_\circ)\}$$

بنابر این طبق یادآوری (۱.۲.۲) و گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$f(\alpha y) \geq \alpha \Longleftrightarrow l_{(y,\alpha)} \in Supp(f, L) \Longleftrightarrow l_{(y,\alpha)}(x) \leq f(x) \quad (\forall x \in X) \tag{۱۷.۲}$$

همچنین طبق فرض: $l_{(y,\alpha)}(x_\circ) = f(x_\circ)$

حال با کم کردن عبارت $l_{(y,\alpha)}(x_\circ) = f(x_\circ)$ از دو طرف نامساوی (۱۷.۲) داریم:

$$f(x) - f(x_\circ) \geq l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ)$$

بنابراین طبق یادآوری (۳.۲.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)} \in \partial_L f(x_\circ).$$

حال برای قسمت آخر فرض کنیم:

$$\alpha = f(x_\circ) \quad , \quad y = \frac{x_\circ}{f(x_\circ)}$$

دراین صورت:

$$f(\alpha y) = f(f(x_{\circ}) \times \frac{x_{\circ}}{f(x_{\circ})}) = f(x_{\circ}) = \alpha \Longrightarrow f(\alpha y) = \alpha$$

و همچنین:

$$l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) = l(x_{\circ}, y, \alpha) = l(x_{\circ}, \frac{x_{\circ}}{f(x_{\circ})}, f(x_{\circ})) = f(x_{\circ})l(x_{\circ}, x_{\circ}, 1) = f(x_{\circ})$$

$$\Longrightarrow \quad l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) = f(x_{\circ})$$

بنابراین:

$$l(\frac{x_{\circ}}{f(x_{\circ})}, f(x_{\circ})) \in \partial_L f(x_{\circ})$$

بوده و لذا:

$$\partial_L f(x_{\circ}) \neq \emptyset$$

■

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد. همچنین فرض کنیم $x_{\circ} \in X$ چنان باشد که $f(x_{\circ}) \neq +\infty$ در اینصورت:

$$\{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_{\circ}) \leq l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) \ , \ \alpha - l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) \leq f(\alpha y) - f(x_{\circ})\} \subset \partial_L f(x_{\circ}). \qquad (۱۸.۲)$$

بعلاوه در رابطه (۱۸.۲) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر:

$$\inf_{x \in X} f(x) = \circ$$

برهان. فرض کنیم که:

$$D = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_{\circ}) \leq l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) \ , \ \alpha - l_{(y,\alpha)}(x_{\circ}) \leq f(\alpha y) - f(x_{\circ})\}$$

و همچنین $l_{(y,\alpha)} \in D$ دلخواه باشد. بنابر رابطه (۱.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \leq \alpha \implies \frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{\alpha} \leq 1$$

همچنین چون $l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \geq f(x_\circ)$ بنابراین داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ) \geq 0$$

اما طبق فرض داریم:

$$\alpha - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(\alpha y) - f(x_\circ)$$

که با جابجایی جملات خواهیم داشت:

$$\alpha - f(\alpha y) \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ)$$

حال $\frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{\alpha}$ را در دو طرف ضرب می کنیم:

$$\frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{\alpha} \times [\alpha - f(\alpha y)] \leq \frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{\alpha} \times [l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ)]$$

لذا:

$$l_{(y,\alpha)}(x) - \frac{l_{(y,\alpha)}(x) f(\alpha y)}{\alpha} \leq \frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{\alpha} \times [l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ)] \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ)$$

اما بنابر قسمت ۳ از قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) f(\alpha y) \leq \alpha f(x)$$

بنابر این:

$$\frac{l_{(y,\alpha)}(x) f(\alpha y)}{\alpha} \leq f(x) \tag{۱۹.۲}$$

لذا داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) - f(x) \leq l_{(y,\alpha)}(x) - \frac{l_{(y,\alpha)}(x)f(\alpha y)}{\alpha} \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ)$$

$$\Longrightarrow \quad l_{(y,\alpha)}(x) - f(x) \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) - f(x_\circ) \quad (\forall x \in X)$$

بنابراین طبق یادآوری (۳.۲.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \in \partial_L f(x_\circ) \Longrightarrow \quad D \subset \partial_L f(x_\circ). \tag{۲۰.۲}$$

برای قسمت آخر: $\Leftarrow$) فرض کنیم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \in \partial_L f(x_\circ)$$

بوده و همچنین داشته باشیم:

$$\inf_{x \in X} f(x) = \circ$$

طبق یادآوری (۳.۲.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(x) - f(x_\circ) \quad (\forall x \in X) \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین چون $l_{(y,\alpha)}(x) \geq \circ$ لذا:

$$-l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(x) - f(x_\circ)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_\circ) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(x) \quad (\forall x \in X)$$

حال با گرفتن اینفیمم از دو طرف و با توجه به اینکه سمت چپ مقداری ثابت است داریم:

$$f(x_\circ) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq \inf_{x \in X} f(x) = \circ \Longrightarrow \quad f(x_\circ) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq \circ$$

بنابراین:

$$\Longrightarrow \quad f(x_\circ) \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \tag{۲۲.۲}$$

همچنین بنابر رابطه (۲۱.۲) و با فرض اینکه $x = \alpha y$ داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(\alpha y) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(\alpha y) - f(x_\circ)$$

$$\Longrightarrow \alpha - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(\alpha y) - f(x_\circ) \qquad (۲۳.۲)$$

اکنون از روابط (۲۲.۲) و (۲۳.۲) نتیجه می گیریم:

$$l_{(y,\alpha)} \in D \implies \partial_L f(x_\circ) \subset D \qquad (۲۴.۲)$$

لذا با توجه به روابط (۲۰.۲) و (۷.۲.۲) داریم: $\partial_L f(x_\circ) = D$

$\Leftarrow$) حال فرض کنیم که: $D = \partial_L f(x_\circ)$ نشان می دهیم که:

$$\inf_{x \in X} f(x) = \circ$$

فرض کنیم که $\alpha > f(\circ) - \inf_{x \in X} f(x)$ دلخواه باشد.

ادعا می کنیم:

$$l_{(\circ,\alpha)}(\circ) \in \partial_L f(\circ)$$

برای اینکار فرض کنیم S مخروط محدب نوکدار بسته روی X باشد. داریم:

$$l_{(\circ,\alpha)}(x) = \begin{cases} \alpha : & x \in S \\ \circ : & x \notin S \end{cases} \qquad (۲۵.۲)$$

اگر $x \in S$ باشد چون $x \geq \circ$ بوده و f تابعی ICR و لذا صعودی است بنابراین:

$$f(x) \geq f(\circ) \implies f(x) - f(\circ) \geq \circ$$

چون $\circ \in S$ بنابر رابطه (۲۵.۲) داریم:

$$l_{(\circ,\alpha)}(\circ) = \alpha$$

اگر $x \in S$ بنابر رابطه (۲۵.۲) داریم:

$$l_{(\circ,\alpha)}(x) = \alpha$$

بنابراین:

$$l_{(\circ,\alpha)}(x) - l_{(\circ,\alpha)}(\circ) = \alpha - \alpha = \circ \leq f(x) - f(\circ) \quad (\forall x \in S)$$
$$\Longrightarrow l_{(\circ,\alpha)}(x) - l_{(\circ,\alpha)}(\circ) \leq f(x) - f(\circ) \quad (\forall x \in S)$$

همچنین اگر $x \notin S$ آنگاه: $l_{(\circ,\alpha)}(x) = \circ$ و چون $\alpha > f(\circ) - \inf_{x\in X} f(x)$ لذا طبق رابطه (۲۵.۲) داریم:

$$l_{(\circ,\alpha)}(x) - l_{(\circ,\alpha)}(\circ) = \circ - \alpha \leq f(x) - f(\circ) \quad (\forall x \in X \setminus S)$$
$$\Longrightarrow l_{(\circ,\alpha)}(x) - l_{(\circ,\alpha)}(\circ) \leq f(x) - f(\circ) \quad (\forall x \in X \setminus S)$$

لذا با توجه به تعریف L - زیردیفرانسیل خواهیم داشت:

$$l_{(\circ,\alpha)}(\circ) \in \partial_L f(\circ) \qquad (\forall \alpha > f(\circ) - \inf_{x\in X} f(x)).$$

از طرفی چون $D = \partial_L f(\circ)$ بنابراین:

$$f(\circ) \leq l_{(\circ,\alpha)}(\circ) \leq \alpha$$

حال اگر α به $\left(f(\circ) - \inf_{x\in X} f(x)\right)$ میل کند خواهیم داشت:

$$f(\circ) \leq f(\circ) - \inf_{x\in X} f(x) \Longrightarrow \circ \leq \circ - \inf_{x\in X} f(x) \Longrightarrow \inf_{x\in X} f(x) \leq \circ$$

اما چون تابع f نامنفی و ICR فرض شده است لذا:

$$\inf_{x\in X} f(x) = \circ$$

و لذا حکم ثابت است. ■

نتیجه ۶.۲.۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد. تابع $g : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را بصورت: $g(x) := f(x) - \inf\limits_{x \in X} f(x)$ تعریف می کنیم. g یک تابع ICR است دراینصورت داریم:

$$\partial_L f(x_\circ) = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_\circ) \leq l_{(y,\alpha)}(x_\circ) + \inf_{x \in X} f(x) \ , \ \alpha - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(\alpha y) - f(x_\circ)\}$$

برهان. داریم:

$$g(x) := f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

حال با گرفتن اینفیمم از دو طرف داریم:

$$\inf_{x \in X} g(x) = \inf_{x \in X}(f(x) - \inf_{x \in X} f(x)) = \inf_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) = \circ \Longrightarrow \inf_{x \in X} g(x) = \circ$$

و همچنین:

$$\partial_L f(x_\circ) = \partial_L g(x_\circ)$$

زیرا:

$$\partial_L g(x_\circ) = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq g(x) - g(x_\circ)\} \qquad (\forall x \in X)$$

اما می دانیم که:

$$g(x) - g(x_\circ) = f(x) - \inf_{x \in X} f(x) - \left(f(x_\circ) - \inf_{x \in X} f(x)\right) = f(x) - f(x_\circ)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\partial_L g(x_\circ) = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq g(x) - g(x_\circ) = f(x) - f(x_\circ)\}$$

بنابراین:

$$\partial_L g(x_\circ) = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ l_{(y,\alpha)}(x) - l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \leq f(x) - f(x_\circ)\} = \partial_L f(x_\circ)$$

حال طبق قضیه (۵.۲.۲) نتیجه مورد نظر بدست می آید. ■

در ادامه این بخش به معرفی مجموعه های $X \times \mathbb{R}_{++}$ - محافظ برای یک تابع ICR می پردازیم که برای مشخصه مجموعه های قطبی اساسی اند.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع باشد. مجموعه $(X \times \mathbb{R}_{++})$ - محافظ پایینی [۳] تابع f که آن را با $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) := \{(y, \alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++} \; : \quad l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)} \leq f\}. \tag{۲۶.۲}$$

همچنین مجموعه $(X \times \mathbb{R}_{++})$ - محافظ بالایی [۴] تابع f که آن را با $Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) := \{(y, \beta) \in X \times \mathbb{R}_{++} \; : \quad u_{(\frac{y}{\beta}, \beta)} \geq f\}. \tag{۲۷.۲}$$

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنید $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. دراینصورت:

۱. α - مقطع W [۵] که آنرا با W^α نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$W^\alpha = \{y \in X \; : \; (y, \alpha) \in W\}.$$

۲. y - مقطع W [۶] یعنی W_y بصورت زیر تعریف می شود:

$$W_y = \{\alpha \in \mathbb{R}_{++} \; : \; (y, \alpha) \in W\}.$$

[۳] Lower $(X \times \mathbb{R}_{++})$ - Support set
[۴] Upper $(X \times \mathbb{R}_{++})$ - Support set
[۵] α - Section Of W
[۶] y - Section Of W

تعریف ۲.۲.۹. فرض کنیم $F \subset X$ باشد. مجموعه F ، نرمال[۷] نامیده می شود اگر:

$$x \in F\ ,\ y \in X\ ,\ y \leq x \Longrightarrow y \in F.$$

تذکر ۲.۲.۱۰. فرض کنید $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع باشد. مجموعه $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ رادیانت است و α - مقطع روبه بالا دارد. همچنین y - مقطع $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ یک مجموعه بسته و نرمال در $\mathbb{R}_{++}$ است.

برهان. ابتدا نشان می دهیم که $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ یک مجموعه رادیانت است.

فرض کنیم:

$$(y, \alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})\ ,\ \circ < \lambda \leq 1$$

دراینصورت: $\lambda(y, \alpha) = (\lambda y, \lambda\alpha)$ و داریم:

$$l_{(\frac{\lambda y}{\lambda\alpha}, \lambda\alpha)}(x) = l(x, \frac{\lambda y}{\lambda\alpha}, \lambda\alpha) = l(x, \tfrac{y}{\alpha}, \lambda\alpha) \leq l(x, \tfrac{y}{\alpha}, \alpha) = l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)}(x) \leq f(x)$$

بنابراین:

$$l_{(\lambda y, \lambda\alpha)}(x) \leq f(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\Longrightarrow (\lambda y, \lambda\alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

$$\Longrightarrow \lambda(y, \alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

بنابراین $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ رادیانت است.

اکنون نشان می دهیم که $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ ، α - مقطع رو به بالا دارد. برای اینکار فر ض کنیم:

$$y \in (Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}))^{\alpha}\ \ ,\ \ y' \geq y$$

[۷] Normal

بنابراین:

$$(y,\alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

لذا:

$$l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)} \leq f$$

حال به خلف اگر:

$$y' \notin (Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}))^{\alpha}$$

آنگاه:

$$(y', \alpha) \notin Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \Longrightarrow l_{(\frac{y'}{\alpha},\alpha)} > f$$

لذا طبق رابطه (۱.۲) داریم:

$$\max\{\circ \leq \lambda \leq \alpha \,:\, \lambda\frac{y'}{\alpha} \leq x\} > f(x) \quad (\forall x \in X)$$

اما چون طبق فرض:

$$y' \geq y$$

لذا:

$$\frac{y'}{\alpha} \geq \frac{y}{\alpha}$$

بنابراین:

$$f(x) < \max\{\circ \leq \lambda \leq \alpha \,:\, \lambda\frac{y'}{\alpha} \leq x\} \leq \max\{\circ \leq \lambda \leq \alpha \,:\, \lambda\frac{y}{\alpha} \leq x\} = l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x)$$

$$\Longrightarrow f < l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)} \Longrightarrow (y,\alpha) \notin Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

که تناقض است بنابراین:

$$y' \in (Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}))^{\alpha}$$

حال فرض کنیم $x \in X$ دلخواه بوده و همچنین α_n دنباله ای از عناصر y - مقطع $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ باشند که همگرا به α بوده و داشته باشیم:

$$l_{(\frac{y}{\alpha_n}, \alpha_n)}(x) y \leq x$$

چون S مجموعه ای بسته است لذا:

$$l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)}(x) y \leq x$$

بنابراین y - مقطع $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ مجموعه ای بسته است.

برای نرمال بودن نیز فرض کنیم $\alpha_2 > 0$ عنصری از $(Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}))_y$ و $\alpha_1 \in \mathbb{R}_{++}$ چنان باشند که:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2$$

دراینصورت بنابر رابطه های (۵.۲) و (۶.۲) و قسمت دوم از تعریف (۸.۲.۲) داریم:

$$l_{(\frac{y}{\alpha_1}, \alpha_1)} \leq l_{(\frac{y}{\alpha_2}, \alpha_2)} \leq f$$

لذا:

$$l_{(\frac{y}{\alpha_1}, \alpha_1)} \leq f \implies (y, \alpha_1) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$
$$\implies \alpha_1 \in (Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}))_y.$$

■

تعریف ۱۱.۲.۲. فرض کنیم $F \subset X$ باشد. مجموعه F ، همنرمال[۸] نامیده می شود اگر:

$$x \in F\,,\; y \in X\,,\; y \geq x \implies y \in F.$$

[۸] Co-Normal

تذکر ۱۲.۲.۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ یک تابع باشد. بنابر تذکر (۵.۱.۲) و رابطه (۲۷.۲)، مجموعه $Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ همرادیانت است و α - مقطع روبه پایین دارد. همچنین y - مقطع $Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++})$ یک مجموعه بسته و همنرمال در $\mathbb{R}_{++}$ است.

برهان. مشابه تذکر (۱۰.۲.۲) انجام می شود. ■

گزاره ۱۳.۲.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ و $W \neq \emptyset$ باشد. دراینصورت عبارات زیر معادل اند:

۱. W رادیانت است و مقطع W^α برای هر $\alpha > 0$ روبه بالاست و برای هر $y \in X$ مقطع W_y نرمال و بسته در $\mathbb{R}_{++}$ است.

۲. یک تابع ICR و یکتای $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ چنان موجود است که $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = W$.

۳. یک تابع یکتای $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ چنان موجود است که $Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = W$.

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) : تابع f را برای هر $y \in X$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(y) := \sup\{\alpha > 0 : (y, \alpha) \in W\}. \tag{۲۸.۲}$$

با این قرارداد که: $\sup \emptyset = 0$ در اینصورت نشان می دهیم که تابع f همان تابع یکتای ICR است.

برای این منظور فرض کنیم:

$$y_1 \leq y_2 \;, \; \alpha \in W_{y_1}$$

دراینصورت: $y_1 \in W^\alpha$. اما چون طبق فرض α - مقطع W رو به بالاست و $y_1 \leq y_2$ بنابراین: $y_2 \in W^\alpha$

لذا: $\alpha \in W_{y_2}$ پس:

$$W_{y_1} \subset W_{y_2} \Longrightarrow f(y_1) \leq f(y_2)$$

لذا f تابعی صعودی است.

اکنون فرض کنیم که $\circ < \lambda \leq ۱$ بوده و $y \in X$ دلخواه باشد. چون:

$$\{\alpha > \circ : (\lambda y, \alpha) \in W\} \supset \{\alpha > \circ : (y, \frac{\lambda}{\alpha}) \in W\}$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} f(\lambda y) &= \sup\{\alpha > \circ : (\lambda y, \alpha) \in W\} \\ &\geq \sup\{\alpha > \circ : (y, \frac{\alpha}{\lambda}) \in W\} \\ &= \sup\{\lambda\beta > \circ : (y, \beta) \in W\} \\ &= \lambda \sup\{\beta > \circ : (y, \beta) \in W\} \\ &= \lambda f(y) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$f(\lambda y) \geq \lambda f(y) \quad : \quad \lambda \in (\circ, ۱]$$

لذا f تابعی همرادیانت است. در ادامه نشان می دهیم:

$$W = Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

برای این هدف فرض کنیم:

$$(y, \alpha) \in W$$

دراینصورت بنابر تعریف تابع f داریم:

$$f(y) \geq \alpha$$

حال چون f تابعی ICR است بنابر گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$f(y) \geq \alpha \Longrightarrow f(\alpha(\frac{y}{\alpha})) \geq \alpha \Longrightarrow l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)} \in Supp(f, L) \Longrightarrow l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)} \leq f$$

$$\Longrightarrow (y,\alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

لذا:

$$W \subset Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \tag{۲۹.۲}$$

برعکس، فرض کنیم:

$$(y,\alpha) \in Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

دراینصورت:

$$l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)} \leq f \Longrightarrow l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)} \in Supp(f, L) \Longrightarrow f(\alpha(\frac{y}{\alpha})) \geq \alpha \Longrightarrow f(y) \geq \alpha$$

حال با توجه به رابطه (۲۸.۲)، چون مجموعه W_y برای هر $y \in X$ بسته و نرمال است لذا $\alpha \in W_y$ بوده و در نتیجه: $(y,\alpha) \in W$ لذا:

$$Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \subset W \tag{۳۰.۲}$$

اکنون از روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) نتیجه مورد نظر بدست می آید.

بعلاوه f یکتاست زیرا اگر به خلف فرض کنیم $h : X \longrightarrow [0, +\infty]$ تابع ICR دیگری باشد که:

$$W = Supp_l(h, X \times \mathbb{R}_{++})$$

با فرض $x \in X$ که $h(x) \neq 0$ بنابر گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)} \in Supp(h, L) \Longleftrightarrow h(\alpha y) \geq \alpha$$

لذا:

$$l_{(y,\alpha)} \leq h \Longleftrightarrow h(\alpha y) \geq \alpha$$

۱. Q همرادیانت است و مقطع Q^β برای هر $\beta > 0$ روبه پایین است و برای هر $x \in X$ مقطع Q_x همنرمال و بسته در $\mathbb{R}_{++}$ است.

۲. یک تابع ICR و یکتای $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ چنان موجود است که $Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = Q$.

۳. یک تابع یکتای $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ چنان موجود است که $Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = Q$.

بعلاوه تابع یکتای f در قسمت ۲ برای هر $x \in X$ و با این قرارداد که $\inf \emptyset = 0$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) := \inf\{\beta \;:\; (x, \beta) \in Q\}.$$

برهان. مشابه گزاره (۱۳.۲.۲) انجام می شود. ■

۳.۲ قطبیت توابع ICR و مجموعه های همرادیانت

در این بخش قطبیت توابع ICR و بعضی از مجموعه های همرادیانت را معرفی می کنیم و همچنین یک قضیه جداسازی برای این مجموعه ها ارائه می کنیم.

فرض کنیم L و U ، مجموعه هایی از توابع مقدماتی باشند که در تعاریف (۲.۱.۲) و (۱۰.۱.۲) معرفی شده اند.

تعریف ۱.۳.۲. تابع قطب پایینی [۹] از تابع $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ ، تابع $f_l^{\circ} : L \longrightarrow [0,+\infty]$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_l^{\circ}(l_{(y,\alpha)}) := \sup_{x\in X} \frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{f(x)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L). \tag{۳۱.۲}$$

با این قرارداد که $\frac{0}{0} = 0$ باشد.

گزاره ۲.۳.۲. اگر $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ یک تابع باشد دراینصورت داریم:

$$f_l^{\circ}(l_{(y,\alpha)}) \geq \frac{\alpha}{f(\alpha y)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L).$$

بعلاوه f یک تابع ICR است اگر و تنها اگر:

$$f_l^{\circ}(l_{(y,\alpha)}) = \frac{\alpha}{f(\alpha y)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L). \tag{۳۲.۲}$$

برهان. بنابر تعریف تابع قطب پایینی که بصورت سوپریمم بیان می شود داریم:

$$f_l^{\circ}(l_{(y,\alpha)}) \geq \frac{l_{(y,\alpha)(x)}}{f(x)} \quad (\forall\, x \in X)$$

[۹] lower polar function

از طرفی چون:

$$l_{(y,\alpha)}(\alpha y) = l_{(\alpha y,y,\alpha)} = \alpha l_{(y,y,\frac{\alpha}{\alpha})} = \alpha$$

بنابراین با فرض $x = \alpha y$ داریم:

$$\frac{\alpha}{f(\alpha y)} = \frac{l_{(y,\alpha)}(\alpha y)}{f(\alpha y)} \leq f_l^*(l_{(y,\alpha)}) \Longrightarrow f_l^*(l_{(y,\alpha)}) \geq \frac{\alpha}{f(\alpha y)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L).$$

برای قسمت دوم : $\Leftarrow$) فرض کنیم که f یک تابع ICR بوده و $\alpha > 0$ دلخواه و $x, y \in X$ باشند دراینصورت

بنابر قسمت ۳ از قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x)f(\alpha y) \leq \alpha f(x) \Longrightarrow \frac{l_{(y,\alpha)}(x)}{f(x)} \leq \frac{\alpha}{f(\alpha y)}$$

رابطه اخیر به همراه قرارداد $\frac{0}{0} = 0$ نتیجه می دهد که:

$$f_l^*(l_{(y,\alpha)}) \leq \frac{\alpha}{f(\alpha y)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L).$$

از طرفی با استفاده از قسمت اول همین قضیه داریم:

$$f_l^*(l_{(y,\alpha)}) \geq \frac{\alpha}{f(\alpha y)}$$

لذا خواهیم داشت:

$$f_l^*(l_{(y,\alpha)}) = \frac{\alpha}{f(\alpha y)} \qquad (\forall\, l_{(y,\alpha)} \in L).$$

$\Rightarrow$) برعکس، فرض کنیم که:

$$f_l^*(l_{(y,\alpha)}) = \frac{\alpha}{f(\alpha y)}$$

لذا:

$$\frac{\alpha}{f(\alpha y)} = \sup_{x\in X} \frac{l_{(y,\alpha)(x)}}{f(x)} \geq \frac{l_{(y,\alpha)(x)}}{f(x)} \Longrightarrow l_{(y,\alpha)}(x)f(\alpha y) \leq \alpha f(x)$$

اکنون مجدداً با توجه به قضیه (۷.۱.۲) ، تابع f تابعی ICR است. ∎

نتیجه ۳.۳.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد دراینصورت داریم:

$$Supp(f, L) = \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f_l^\circ(l_{(y,\alpha)}) \leq 1\}.$$

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} Supp(f, L) &= \{l_{(y,\alpha)} \ : \ l_{(y,\alpha)} \leq f(x) \quad (\forall\, x \in X)\} \\ &= \{l_{(y,\alpha)} \ : \ \frac{l_{(y,\alpha)}}{f(x)} \leq 1 \quad (\forall\, x \in X)\} \\ &= \{l_{(y,\alpha)} \ : \ \sup_{x \in X} \frac{l_{(y,\alpha)(x)}}{f(x)} \leq 1 \quad (\forall\, x \in X)\} \\ &= \{l_{(y,\alpha)} \ : \ f_l^\circ(l_{(y,\alpha)}) \leq 1\} \end{aligned}$$

■

تعریف ۴.۳.۲. تابع قطب بالایی [۱۰] از تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$، تابع $f_u^\circ : U \longrightarrow [\circ, +\infty]$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_u^\circ(l_{(y,\beta)}) = \inf_{x \in X} \frac{u_{(y,\beta)}(x)}{f(x)} \qquad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U). \tag{۳۳.۲}$$

با این قرارداد که $\frac{\circ}{\circ} = +\infty$ باشد.

گزاره ۵.۳.۲. اگر $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع باشد دراینصورت:

$$f_u^\circ(l_{(y,\beta)}) \leq \frac{\beta}{f(\beta y)} \qquad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U).$$

بعلاوه f یک تابع ICR است اگر و تنها اگر:

$$f_u^\circ(l_{(y,\beta)}) = \frac{\beta}{f(\beta y)} \quad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U). \tag{۳۴.۲}$$

[۱۰] upper polar function

برهان. بنابر تعریف تابع قطب بالایی که بصورت اینفیمم بیان می شود داریم:

$$f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) \leq \frac{u_{(y,\beta)(x)}}{f(x)} \quad (\forall\, x \in X)$$

از طرفی چون:

$$u_{(y,\beta)}(\beta y) = u_{(\beta y, y, \beta)} = \beta u_{(y,y,\frac{\beta}{\beta})} = \beta$$

بنابراین با فرض $x = \beta y$ داریم:

$$\frac{\beta}{f(\beta y)} = \frac{u_{(y,\beta)}(\beta y)}{f(\beta y)} \geq f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) \Longrightarrow f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) \leq \frac{\beta}{f(\beta y)} \qquad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U).$$

- برای قسمت دوم: $\Leftarrow$) فرض کنیم که f یک تابع ICR بوده و $\beta > \circ$ دلخواه و $x, y \in X$ باشند دراینصورت بنابر قسمت ۴ از قضیه (۷.۱.۲) داریم:

$$u_{(y,\beta)}(x) f(\beta y) \geq \beta f(x) \Longrightarrow \frac{u_{(y,\beta)}(x)}{f(x)} \geq \frac{\beta}{f(\beta y)}$$

رابطه اخیر به همراه قرارداد $\frac{\circ}{\circ} = +\infty$ نتیجه می دهد که:

$$f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) \geq \frac{\beta}{f(\beta y)} \qquad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U).$$

از طرفی با استفاده از قسمت اول همین قضیه داریم:

$$f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) \leq \frac{\beta}{f(\beta y)}$$

لذا خواهیم داشت:

$$f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) = \frac{\beta}{f(\beta y)} \qquad (\forall\, u_{(y,\beta)} \in U).$$

$\Leftarrow$) برعکس، فرض کنیم که:

$$f_u^{\circ}(u_{(y,\beta)}) = \frac{\beta}{f(\beta y)}$$

لذا:

$$\frac{\beta}{f(\beta y)} = \inf_{x\in X} \frac{u_{(y,\beta)}(x)}{f(x)} \le \frac{u_{(y,\beta)}(x)}{f(x)} \Longrightarrow u_{(y,\beta)}(x) f(\beta y) \ge \beta f(x)$$

اکنون مجدداً با توجه به قضیه (۷.۱.۲)، تابع f تابعی ICR است. ■

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. مجموعه قطب چپ [۱۱] W که آنرا بصورت W^l نشان می دهیم به شکل زیر تعریف می شود:

$$W^l := \{(x,\beta) \in X \times \mathbb{R}_{++} \,:\, l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x) \le \beta\,, \quad (\forall\, (y,\alpha) \in W)\}. \qquad (۳۵.۲)$$

گزاره ۷.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. در اینصورت:

$$W^l = Supp_u(h_W, X \times \mathbb{R}_{++}).$$

که در آن تابع $h_W : X \longrightarrow [۰, +\infty]$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$h_W(y) := \sup\{\alpha > ۰ : (y,\alpha) \in W\} \quad (\forall\, y \in X). \qquad (۳۶.۲)$$

با این قرارداد که $\sup \emptyset = ۰$ باشد.

[۱۱] left polar set

برهان. با توجه به روابط (۳۵.۲) و (۱۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
W^l &= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x)\le\beta\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, \frac{1}{u_{(x,\frac{1}{\alpha})}(\frac{y}{\alpha})}\le\beta\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, \beta u_{(x,\frac{1}{\alpha})}(\frac{y}{\alpha})\ge 1\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, \beta u_{(\frac{y}{\alpha},x,\frac{1}{\alpha})}\ge 1\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, u_{(\frac{y}{\alpha},\frac{x}{\beta},\frac{\beta}{\alpha})}\ge 1\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, \frac{1}{\alpha}u_{(y,\frac{x}{\beta},\beta)}\ge 1\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, u_{(\frac{x}{\beta},\beta)}(y)\ge\alpha\,,\quad (\forall\,(y,\alpha)\in W)\}\\
&= \{(x,\beta)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, u_{(\frac{x}{\beta},\beta)}(y)\ge h_W(y)\,,\quad (\forall\,y\in X)\}\\
&= Supp_u(h_W, X\times\mathbb{R}_{++}).
\end{aligned}$$

■

تعریف ۸.۳.۲. فرض کنیم $W\subset X\times\mathbb{R}_{++}$ باشد. مجموعه قطب راست[۱۲] W که آنرا بصورت W^r نشان می دهیم به شکل زیر تعریف می شود:

$$W^r := \{(y,\alpha)\in X\times\mathbb{R}_{++} \,:\, l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x)\le\beta\,,\quad (\forall\,(x,\beta)\in W)\}. \qquad (۳۷.۲)$$

اکنون شبیه گزاره (۷.۳.۲)، گزاره زیر را داریم:

گزاره ۹.۳.۲. فرض کنیم $W\subset X\times\mathbb{R}_{++}$ باشد. در اینصورت:

[۱۲] right polar set

$$W^r = Supp_l(e_W, X \times \mathbb{R}_{++}).$$

که در آن تابع $e_W : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$e_W(x) := \inf\{\beta > \circ : (x,\beta) \in W\} \quad (\forall\, x \in X). \tag{۳۸.۲}$$

با این قرارداد که $\inf \emptyset = +\infty$ باشد.

برهان. با توجه به روابط (۳۷.۲) و (۳۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W^r &:= \{(y,\alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++} \,:\, l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x) \le \beta\,, \quad (\forall\,(x,\beta) \in W)\} \\ &= \{(y,\alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++} \,:\, l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x) \le e_W(x)\,, \quad (\forall\, x \in X)\} \\ &= Supp_l(e_W, X \times \mathbb{R}_{++}). \end{aligned}$$

■

تذکر ۱۰.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ و $W \neq \emptyset$ باشد. بنابر روابط (۵.۲) و (۶.۲) و (۳۵.۲)، W^r یک مجموعه رادیانت است و همچنین α - مقطع W^r یعنی $(W^r)^\alpha$ برای هر $\alpha > \circ$ روبه بالاست و برای هر $y \in X$ ، y - مقطع W^r یعنی $(W^r)_y$ مجموعه ای بسته و نرمال در $\mathbb{R}_{++}$ است.

همچنین با توجه به روابط (۴.۲) و (۷.۲) و (۳۷.۲)، W^l مجموعه ای همرادیانت است و مقطع $(W^l)^\beta$ برای هر $\beta > \circ$ رو به پایین است و برای هر $x \in X$ مقطع $(W^l)_x$ مجموعه ای بسته و همنرمال در $\mathbb{R}_{++}$ است.

مجموعه هایی که تحت عملگرهای $W \longrightarrow W^{rl}$ و $W \longrightarrow W^{lr}$ بسته اند در قضیه زیر بررسی شده اند.

قضیه ۱۱.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. در اینصورت عبارت های زیر درست هستند:

۱. $W = W^{rl}$ اگر و تنها اگر W همرادیانت بوده وبرای هر $\beta > \circ$ ، β - مقطع رو به پایین و برای هر $x \in X$ ، x - مقطع همنرمال بسته دارد.

۲. $W = W^{lr}$ اگر و تنها اگر W رادیانت بوده وبرای هر $\alpha > \circ$ ، α - مقطع رو به بالا و برای هر $y \in X$ ، y - مقطع نرمال بسته دارد.

برهان. ۱. فرض کنیم $W = W^{rl}$ باشد. در اینصورت $W = (W^r)^l$ و طبق تذکر (۱۰.۳.۲) که قطب چپ هر مجموعه، همرادیانت بوده و برای هر $\beta > \circ$ ، β - مقطع رو به پایین و برای هر $x \in X$ ، x - مقطع همنرمال بسته دارد حکم برقرار است.

برعکس، فرض کنیم W مجموعه ای همرادیانت باشد که برای هر $\beta > \circ$ ، β - مقطع رو به پایین و برای هر $x \in X$ ، x - مقطع همنرمال بسته دارد، دراینصورت بنابر گزاره (۱۴.۲.۲) یک تابع ICR یکتای f چنان موجود است که:

$$W = Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \qquad , \qquad f = \inf\{\beta > \circ \ : \ (x, \beta) \in W\}$$

حال با توجه به گزاره (۱۴.۲.۲) و رابطه (۳۸.۲) نتیجه می گیریم: $f = e_W.$

همچنین با توجه به گزاره (۹.۳.۲) داریم:

$$W^r = Supp_l(e_W, X \times \mathbb{R}_{++}) = Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

از طرفی بنابر تذکر (۱۰.۳.۲)، W^r مجموعه ای رادیانت بوده که α - مقطع آن روبه بالاست و همچنین y - مقطع آن مجموعه ای نرمال و بسته است بنابراین طبق گزاره (۱۳.۲.۲) یک تابع یکتای g چنان موجود است که:

$$Supp_l(g, X \times \mathbb{R}_{++}) = W^r \qquad , \qquad g = \sup\{\alpha > \circ \ : \ (y, \alpha) \in W\}$$

حال با توجه به رابطه (۳۶.۲) و تعریف g داریم:

$$g = h_{W^r}$$

از طرفی چون g یکتاست و همچنین:

$$Supp_l(g, X \times \mathbb{R}_{++}) = W^r = Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

لذا:

$$f = g = h_{W^r}$$

اکنون با توجه به گزاره (۷.۳.۲) داریم:

$$(W^r)^l = W^{rl} = Supp_u(h_{W^r}, X \times \mathbb{R}_{++}) = Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = W$$
$$\Longrightarrow W^{rl} = W$$

و حکم ثابت است.

۲. فرض کنیم $W = W^{lr}$ باشد. بنابراین $W = (W^l)^r$ و طبق تذکر (۱۰.۳.۲) که قطب راست هر مجموعه، رادیانت بوده و α - مقطع آن برای هر $\alpha > 0$ رو به بالا و y - مقطع آن برای هر $y \in X$ نرمال بسته است حکم برقرار است.

برعکس، فرض کنیم W مجموعه ای رادیانت بوده و α - مقطع آن رو به بالا و y - مقطع نرمال بسته داشته باشد. نشان می دهیم که $W = W^{lr}$.

بنابر گزاره(۱۳.۲.۲) تابع ICR یکتای f چنان موجود است که:

$$W = Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \tag{۳۹.۲}$$

و

$$f(y) = \sup\{\alpha > 0 \ : \ (y, \alpha) \in W\} \qquad (\forall y \in X)$$

اکنون با توجه به گزاره (۱۳.۲.۲) و رابطه (۳۶.۲) نتیجه می گیریم: $f = h_w$

همچنین با توجه به گزاره (۷.۳.۲) داریم:

$$W^l = Supp_u(h_W, X \times \mathbb{R}_{++}) = Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

$$W^l = Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++}) \qquad (۴۰.۲)$$

از طرفی بنابر تذکر (۱۰.۳.۲) می دانیم که W^l مجموعه ای همرادیانت بوده و برای هر $\alpha > 0$ ، $(W^l)^\alpha$ رو به پایین و برای هر $x \in X$ ، $(W^l)_x$ همنرمال و بسته است لذا طبق گزاره (۱۴.۲.۲) تابع یکتای g چنان موجود است که:

$$W^l = Supp_u(g, X \times \mathbb{R}_{++}) \qquad , \qquad g(x) = \inf\{\beta > 0 \ : \ (x, \beta) \in W^l\}$$

حال با توجه به رابطه (۳۸.۲) و تعریف g داریم:

$$g = e_{W^l}$$

از طرفی بنابر رابطه (۴۰.۲) و اینکه g یکتاست داریم:

$$Supp_u(g, X \times \mathbb{R}_{++}) = W^l = Supp_u(f, X \times \mathbb{R}_{++})$$

لذا:

$$f = g = e_{W^l}$$

اکنون با توجه به گزاره (۹.۳.۲) و رابطه (۳۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned}(W^l)^r &= W^{lr} \\ &= Supp_l(e_{W^l}, X \times \mathbb{R}_{++}) \\ &= Supp_l(f, X \times \mathbb{R}_{++}) = W\end{aligned}$$

بنابراین:

$$W^{lr} = W.$$

■

بسیاری از کاربردهای تحدب بر پایه خاصیت جداسازی است. درواقع یکی از نتایج مهم در آنالیز محدب این است که هر نقطه خارج از یک مجموعه محدب بسته را می توان با یک تابعک خطی جدا کرد. بعضی از مفاهیم جداسازی مجموعه های رادیانت و همرادیانت در مرجع [۲۲] معرفی و مطالعه شده اند. در قضیه زیر نوعی از خاصیت جداسازی را برای رده مشخصی از مجموعه های همرادیانت بوسیله یک تابع ICR مقدماتی ارائه می دهیم.

قضیه ۱۲.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. در اینصورت عبارات زیر معادل اند:

۱. W یک مجموعه همرادیانت است که β - مقطع آن برای هر $\beta > ۰$ ، رو به پایین و x - مقطع آن برای هر $x \in X$ ، همنرمال بسته است.

۲. برای هر $(x_۰, \beta_۰) \notin W$ وجود دارد $(y, \alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++}$ بطوریکه:

$$\frac{۱}{\beta} l_{(y,\alpha)}(x) \leq ۱ < \frac{۱}{\beta_۰} l_{(y,\alpha)}(x_۰) \qquad (\forall (x, \beta) \in W)$$

برهان. ۱ به ۲): فرض کنیم که W مجموعه ای با شرایط ذکر شده در قسمت ۱ باشد و همچنین:

$$(x_\circ, \beta_\circ) \notin W$$

در اینصورت بنابر قضیه (۱۱.۳.۲) چون $W = W^{rl}$ بنابراین:

$$(x_\circ, \beta_\circ) \notin W^{rl} \Longrightarrow (x_\circ, \beta_\circ) \notin (W^r)^l$$

اما بنابر رابطه(۳۷.۲) نتیجه می گیریم که $(\bar{y}, \alpha) \in W^r$ چنان موجود است که:

$$l_{(\frac{\bar{y}}{\alpha},\alpha)}(x_\circ) > \beta_\circ \quad , \quad l_{(\frac{\bar{y}}{\alpha},\alpha)}(x) \leq \beta \qquad (\forall (x,\beta) \in W)$$

حال با فرض $y = \frac{\bar{y}}{\alpha}$ داریم:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \leq \beta \Longrightarrow \frac{1}{\beta} l_{(y,\alpha)}(x) \leq 1$$
$$l_{(y,\alpha)}(x_\circ) > \beta_\circ \Longrightarrow \frac{1}{\beta_\circ} l_{(y,\alpha)}(x_\circ) > 1$$

که از روابط اخیر نتیجه لازم بدست می آید و داریم:

$$\frac{1}{\beta} l_{(y,\alpha)}(x) \leq 1 < \frac{1}{\beta_\circ} l_{(y,\alpha)}(x_\circ).$$

۲ به ۱) فرض کنیم که شرایط قسمت ۲ برقرار باشد. بنابر قضیه (۱۱.۳.۲) کافی است نشان دهیم که:

$$W = W^{rl}$$

برای این منظور نشان می دهیم:

$$W \subset W^{rl} \quad , \quad W^{rl} \subset W.$$

اولا اگر به خلف $W^{rl} \not\subset W$ در اینصورت:

$$\exists (x_1, \beta_1) \in W^{rl} \ : \ (x_1, \beta_1) \notin W$$

و چون $(x_1,\beta_1) \not\in W$ بنابر فرض قسمت ۲ داریم:

$$\exists (y,\alpha) \in X \times \mathbb{R}_{++} \ : \ \frac{1}{\beta} l_{(y,\alpha)}(x) \leq 1 < \frac{1}{\beta_1} l_{(y,\alpha)}(x_1) \qquad (\forall (x,\beta) \in W) \qquad (۴۱.۲)$$

لذا :

$$\frac{1}{\beta} l_{(y,\alpha)}(x) \leq 1 \implies l_{(y,\alpha)}(x) \leq \beta$$

$$\implies l_{(\frac{\alpha y}{\alpha},\alpha)}(x) \leq \beta$$

$$\implies (\alpha y, \alpha) \in W^{r}$$

حال چون $(\alpha y, \alpha) \in W^{r}$ و $(x_1,\beta_1) \in W^{rl}$ بنابراین :

$$l_{(\frac{\alpha y}{\alpha},\alpha)}(x_1) \leq \beta_1 \qquad (\forall (y,\alpha) \in W^{r})$$

$$\implies l_{(y,\alpha)}(x_1) \leq \beta_1 \qquad (\forall (y,\alpha) \in W^{r})$$

$$\implies \frac{1}{\beta_1} l_{(y,\alpha)}(x_1) \leq 1$$

که متناقض با (۴۱.۲) است لذا فرض خلف باطل بوده و داریم:

$$W^{rl} \subset W.$$

اکنون نشان می دهیم که $W \subset W^{rl}$ است. برای اینکار فرض می کنیم $(x,\beta) \in W$ دلخواه باشد.

چون برای هر $(y,\alpha) \in W^{r}$ داریم:

$$l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(x) \leq \beta$$

لذا بنابر تعریف W^{rl} داریم:

$$(x,\beta) \in W^{rl}$$

بنابراین:

$$W \subset W^{rl}$$

و نهایتا نتیجه می شود:

$$W = W^{rl}$$

■

در قضیه زیر نوعی از خاصیت جداسازی را برای رده خاصی از مجموعه های رادیانت بوسیله یک تابع ICR مقدماتی ارائه می دهیم:

قضیه ۱۳.۳.۲. فرض کنیم $W \subset X \times \mathbb{R}_{++}$ باشد. در اینصورت عبارات زیر معادل اند:

۱. W یک مجموعه رادیانت است که α - مقطع آن برای هر $\alpha > ۰$، رو به بالا و y - مقطع آن برای هر $y \in X$، نرمال بسته است.

۲. برای هر $(y_۰, \alpha_۰) \notin W$ وجود دارد $(x, \beta) \in X \times \mathbb{R}_{++}$ بطوریکه:

$$\tfrac{۱}{\alpha_۰} u_{(x,\beta)}(y_۰) < ۱ \leq \tfrac{۱}{\alpha} u_{(x,\beta)}(y) \qquad (\forall (y, \alpha) \in W).$$

برهان . ۱ به ۲): فرض کنیم که W مجموعه ای با شرایط ذکر شده در قسمت ۱ باشد و همچنین $(y_۰, \alpha_۰) \notin W$ در اینصورت بنابر قضیه (۱۱.۳.۲) چون $W = W^{lr}$ بنابراین:

$$(y_۰, \alpha_۰) \notin W^{lr} \Longrightarrow (y_۰, \alpha_۰) \notin (W^l)^r$$

اما بنابر رابطه (۳۵.۲) نتیجه می گیریم که $(\tilde{x}, \beta) \in W^l$ چنان موجود است که:

$$l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(\tilde{x}) \leq \beta \qquad (\forall (y, \alpha) \in W) \quad , \quad l_{(\frac{y_۰}{\alpha_۰},\alpha_۰)}(\tilde{x}) > \beta$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} l_{(\frac{y}{\alpha},\alpha)}(\tilde{x}) \leq \beta &\implies l_{(\tilde{x},\frac{y}{\alpha},\alpha)} \leq \beta \\ &\implies \frac{۱}{\beta} \leq \frac{۱}{l_{(\tilde{x},\frac{y}{\alpha},\alpha)}} \\ &\implies \frac{۱}{\beta} \leq u(\frac{y}{\alpha},\tilde{x},\frac{۱}{\alpha}) = \frac{۱}{\alpha}u(y,\tilde{x},\frac{\alpha}{\alpha}) \\ &\implies ۱ \leq \frac{۱}{\alpha} \times \beta \times u(y,\tilde{x},۱) = \frac{۱}{\alpha}u(y,\frac{\tilde{x}}{\beta},\beta) \\ &\implies ۱ \leq \frac{۱}{\alpha}u(y,\frac{\tilde{x}}{\beta},\beta) \end{aligned}$$

حال با فرض $x = \frac{\tilde{x}}{\beta}$ داریم:

$$۱ \leq \tfrac{۱}{\alpha}u_{(x,\beta)}(y).$$

با روشی مشابه با آنچه انجام شد داریم:

$$\frac{۱}{\alpha_۰}u_{(x,\beta)}(y_۰) < ۱$$

لذا نتیجه لازم بدست می آید:

$$\frac{۱}{\alpha_۰}u_{(x,\beta)}(y_۰) < ۱ \leq \frac{۱}{\alpha}u_{(x,\beta)}(y).$$

۲ به ۱) فرض کنیم که شرایط قسمت ۲ برقرار باشد. بنابر قضیه (۱۱.۳.۲) کافی است نشان دهیم که $W = W^{lr}$. برای این منظور نشان می دهیم: $W \subset W^{lr}$ و $W^{lr} \subset W$.

اولا اگر به خلف $W^{lr} \not\subset W$ در اینصورت:

$$\exists (y_۱,\alpha_۱) \in W^{lr} \;:\; (y_۱,\alpha_۱) \notin W$$

و چون $(y_۱,\alpha_۱) \notin W$ بنابر فرض قسمت ۲ داریم:

$$\exists (x,\beta) \in X \times \mathbb{R}_{++} \;:\; \frac{۱}{\alpha_۱}u_{(x,\beta)}(y_۱) < ۱ \leq \frac{۱}{\alpha}u_{(x,\beta)}(y) \qquad (\forall (y,\alpha) \in W) \qquad (۴۲.۲)$$

لذا:

$$\begin{aligned}
۱ \leq \frac{۱}{\alpha} u_{(x,\beta)}(y) &\Longrightarrow \frac{۱}{\alpha} \geq \frac{۱}{u_{(x,\beta)}(y)} = l(x, y, \frac{۱}{\beta}) \\
&\Longrightarrow \frac{۱}{\alpha} \geq l(x, y, \frac{۱}{\beta}) = \frac{۱}{\beta} l(\beta x, y, ۱) \\
&\Longrightarrow \frac{۱}{\alpha} \geq \frac{۱}{\beta} l(\beta x, y, ۱) \\
&\Longrightarrow \beta \geq \alpha l(\beta x, y, ۱) = l(\beta x, \frac{y}{\alpha}, \alpha) \\
&\Longrightarrow l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)}(\beta x) \leq \beta \\
&\Longrightarrow (\beta x, \beta) \in W^l
\end{aligned}$$

حال چون $(\beta x, \beta) \in W^l$ و $(y_۱, \alpha_۱) \in W^{lr}$ بنابراین:

$$\begin{aligned}
l_{(\frac{y_۱}{\alpha_۱}, \alpha_۱)}(\beta x) \leq \beta &\Longrightarrow l(\beta x, \frac{y_۱}{\alpha_۱}, \alpha_۱) \leq \beta \\
&\Longrightarrow \alpha_۱ l(\beta x, y_۱, ۱) \leq \beta \\
&\Longrightarrow \frac{\alpha_۱}{u(y_۱, \beta x, ۱)} \leq \beta \\
&\Longrightarrow \alpha_۱ \leq \beta u(y_۱, \beta x, ۱) = u(y_۱, x, \beta) \\
&\Longrightarrow \frac{۱}{\alpha_۱} u(x, \beta)(y_۱) \geq ۱
\end{aligned}$$

که متناقض با (۴۲.۲) است لذا فرض خلف باطل بوده و داریم:

$$W^{lr} \subset W.$$

اکنون نشان می دهیم که $W \subset W^{lr}$ است. برای اینکار فرض می کنیم $(y, \alpha) \in W$ دلخواه باشد.

چون برای هر $(x, \beta) \in W^l$ داریم:

$$l_{(\frac{y}{\alpha}, \alpha)}(x) \leq \beta$$

لذا بنابر تعریف W^{lr} داریم:

$$(y, \alpha) \in W^{lr}$$

پس:

$$W \subset W^{lr}$$

و نهایتا نتیجه می شود که:

$$W = W^{lr}.$$

■

۴.۲ توابع ICR و توابع IPH

تحدب محض توابع IPH روی فضاهای برداری توپولوژیک در مرجع [۴] و [۱۵] مطالعه شده اند. اینکه توابع IPH و توابع ICR با هم ارتباط نزدیکی دارند آشناست. (مثلا مرجع [۱۸] را ببینید)

در این بخش زیردیفرانسیل توابع ICR را به کمک توابع IPH که ساده تر هستند مشخص می کنیم برای این منظور به تعریف زیر نیازمندیم:

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع باشد. دراینصورت تابع توسیع همگن مثبت [۱۳] از f که با $\hat{f}$ نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{f} : X \times \mathbb{R}_{++} \cup \{(\circ, \circ)\} \longrightarrow [\circ, +\infty]$$

$$\hat{f}(x, \lambda) := \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \quad : \quad x \in X \, , \, \lambda > \circ \, , \, \hat{f}(\circ, \circ) = \circ.$$

همچنین رابطه ترتیب طبیعی [۱۴] نسبت به $S \times \mathbb{R}_{++}$ روی فضای $X \times \mathbb{R}_{++}$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$(x_1, c_1) \le (x_2, c_2) \Longleftrightarrow (x_2 - x_1) \in S \, , \, c_1 \le c_2.$$

نتیجه زیر روی مخروط $\mathbb{R}^n_+$ در مرجع [۱] اثبات شده است و می تواند برای فضاهای برداری توپولوژیک با اثباتی مشابه توسیع داده شود.

قضیه ۲.۴.۲. تابع $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR است اگر و تنها اگر توسیع بطور مثبت همگن آن یعنی $\hat{f}(x, \lambda)$ روی هر دو متغیر x و λ صعودی باشد.

[۱۳] Positively Homogeneous extension function
[۱۴] Natural Order

برهان. فرض کنیم برای هر $x \in X$ ، $f(x) \geq 0$ تابعی ICR باشد. لذا:

$$\hat{f}(x, \lambda) = \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \geq 0$$

اکنون دو نقطه (x_1, λ_1) و (x_2, λ_2) که $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 \geq x_2$ و $\lambda_1 \geq \lambda_2$ را در نظر می گیریم.

داریم:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, \lambda_1) &= \lambda_1 f(\frac{x_1}{\lambda_1}) \\ &\geq \lambda_1 f(\frac{x_2}{\lambda_1}) \\ &= \lambda_1 f(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} . \frac{x_2}{\lambda_2}) \\ &\geq \lambda_2 f(\frac{x_2}{\lambda_2}) \\ &= \hat{f}(x_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

لذا $\hat{f}$ یک تابع صعودی است.

برعکس، فرض کنیم $\hat{f}$ تابعی صعودی باشد، دراینصورت داریم: $\hat{f}(x, \lambda) \geq \hat{f}(0, 0) = 0$

و در حالت خاص:

$$f(0) = \hat{f}(0, 1) \geq 0$$

حال اگر $x_1 \geq x_2$ باشد آنگاه:

$$f(x_1) = \hat{f}(x_1, 1) \geq \hat{f}(x_2, 1) = f(x_2)$$

بنابراین f صعودی است.

فرض کنیم $\lambda \in (0, 1)$ باشد دراینصورت داریم: $(\lambda x, \lambda) \leq (\lambda x, 1)$

بنابراین:

$$\lambda f(x) = \hat{f}(\lambda x, \lambda) \leq \hat{f}(\lambda x, 1) = f(\lambda x)$$

و اگر $\lambda = \circ$ باشد آنگاه:

$$\circ = \lambda f(x) \leq f(\circ) = f(\lambda x)$$

لذا f یک تابع ICR است. ■

تذکر ۳.۴.۲. فرض کنیم f یک تابع ICR و $\hat{f}$ توسیع بطور مثبت همگن آن باشد که روی $X \times \mathbb{R}_{++}$ تعریف شده است. دراینصورت $\hat{f}$ یک تابع IPH است.

برهان. اولا با توجه به قضیه (۲.۴.۲) تابع $\hat{f}$ صعودی است. دوما $\hat{f}$ همگن مثبت نیز می باشد زیرا برای هر $\alpha > \circ$ و هر $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}_{++}$ داریم:

$$\hat{f}(\alpha(x,\lambda)) = \hat{f}(\alpha x, \alpha\lambda) = \alpha\lambda f(\frac{\alpha x}{\alpha\lambda}) = \alpha\left(\lambda f(\tfrac{x}{\lambda})\right) = \alpha\hat{f}(x,\lambda)$$

بنابراین $\hat{f}$ یک تابع IPH است. ■

نتایج زیر نقش مهمی در رسیدن به هدف بازی می کنند.

قضیه ۴.۴.۲. فرض کنیم $p : X \longrightarrow [\circ, +\infty[$ یک تابع باشد. دراینصورت p یک تابع IPH است اگر و تنها اگر p تابعی Ω - محدب باشد که در آن:

$$\Omega := \{l_y \ : \ y \in X\} \qquad , \qquad l_y(x) = \max\{\lambda \geq \circ \ : \ \lambda y \leq x\}.$$

برهان. به قضیه (۳.۲) از مرجع [۱۵] مراجعه شود. ■

اکنون تعریف می کنیم:

$$\tilde{L} := \{\tilde{l}_{(y,\alpha)} \ : \ l_{(y,\alpha)} \in L\}$$

که در آن داریم:

$$\tilde{l}_{(y,\alpha)}(x,c) := l_{(y,\frac{c}{\alpha})}(x) \qquad (\forall (x,c) \in X \times \mathbb{R}^n_{++}).$$

تذکر ۵.۴.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty[$ یک تابع ICR باشد. دراینصورت $\hat{f}$ یعنی توسیع بطور مثبت همگن آن یک تابع $\tilde{L}$ - محدب است. دراینحالت Ω در قضیه (۴.۴.۲) دقیقا همان $\tilde{L}$ است.

از طرف دیگر داریم:

$$\hat{f}(x,c) = cf(\tfrac{x}{c}) = \sup_{L} cl_{(y,\alpha)}(\frac{x}{c}) = \sup_{\tilde{L}} \tilde{l}_{(y,\frac{1}{\alpha})}(x,c) \qquad (\forall x \in X \ , \ c > \circ).$$

قضیه ۶.۴.۲. فرض کنیم $p : X \longrightarrow [\circ, +\infty[$ یک تابع IPH باشد و $p(x) \neq \circ, +\infty$. دراینصورت:

$$\partial_{\Omega} p(x) = \{l_y \in \Omega \ : \ l_y(x) = p(y) \ , \ p(x) = 1\}.$$

برهان. به قضیه (۲.۵) از مرجع [۴] مراجعه شود. ■

اکنون توصیفی از زیردیفرانسیل $\partial_{\tilde{L}} f(y)$ را ارائه می دهیم:

قضیه ۷.۴.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow [\circ, +\infty[$ یک تابع ICR باشد و $x_\circ \in X$ چنان باشد که $f(x_\circ) \neq \circ, +\infty$. دراینصورت داریم:

$$\partial_{\tilde{L}} f(x_\circ) = \{\tilde{l}_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_\circ) = l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \ , \ f(\alpha y) = \alpha\}.$$

برهان. چون f یک تابع ICR است لذا بنابر تذکر (۳.۴.۲) تابع توسیع همگن مثبت آن یعنی $\tilde{f}$ یک تابع صعودی و لذا IPH است. از طرفی بنابر قضیه (۶.۴.۲) زیر دیفرانسیل یک تابع IPH که $p : X \longrightarrow [\circ, +\infty[$ باشد بصورت زیر است:

$$\partial_{\Omega} p(x) = \{l_y \in \Omega \ : \ l_y(x) = p(y) \ , \ p(x) = 1\}$$

$$, \ \Omega := \{l_y \ : \ y \in X\}$$

همچنین می دانیم که:

$$l_{(y,\alpha)}(x_\circ) = \tilde{l}_{(y,\frac{1}{\alpha})}(x_\circ, 1)$$

و

$$f(x_\circ) = 1.f(\frac{x_\circ}{1}) = \hat{f}(x_\circ, 1)$$

و بعلاوه اگر:

$$\hat{f}(y, \frac{1}{\alpha}) = 1$$

آنگاه:

$$\frac{1}{\alpha} f(\alpha y) = 1$$

و از آنجا:

$$f(\alpha y) = \alpha$$

لذا:

$$\partial_{\tilde{L}} \hat{f}(x_\circ, 1) = \{\tilde{l}_{(y,\alpha)} \ : \ \hat{f}(x_\circ, 1) = \tilde{l}_{(y,\frac{1}{\alpha})}(x_\circ, 1) \ , \ \hat{f}(y, \tfrac{1}{\alpha}) = 1\}$$

$$\Longrightarrow \partial_{\tilde{L}} f(x_\circ) = \{\tilde{L}_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_\circ) = l_{(y,\alpha)}(x_\circ) \ , \ f(\alpha y) = \alpha\}$$

بنابراین حکم ثابت است. ■

مثال ۸.۴.۲. فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ و S مخروط $\mathbb{R}^n_+$ یعنی همه بردارهای با مختصات نامنفی در $\mathbb{R}^n$ باشد.

بنابر مثال (۴.۱.۲) داریم:

$$l(x, y, \alpha) = \begin{cases} \min\{\min\limits_{i \in I_+(y)} \dfrac{x_i}{y_i}, \alpha\} & (x \in K_y^+) \\ \circ & (x \notin K_y^+) \end{cases}$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ که در آن K_y^+ بصورت زیر است:

$$k_y^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \forall i \in I_+(y) \cup I_\circ(y) \ , \ x_i \geq \circ \ ; \ \max_{i \in I_-(y)} \frac{x_i}{y_i} \leq \min_{i \in I_+(y)} \frac{x_i}{y_i} \right\}$$

اکنون فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک تابع ICR باشد و $x_\circ \in X$ چنان باشد که

$f(x_\circ) \neq \circ, +\infty$ دراینصورت:

$$\partial_{\tilde{L}} f(x_0) = \left\{ \tilde{l}_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_0) = \min\{ \min_{i \in I_+(y)} \frac{(x_0)_i}{y_i}, \alpha \} \, , \quad f(\alpha y) = \alpha \right\}$$

که در آن برای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$ و هر $c > 0$ داریم:

$$\tilde{l}_{(y,\alpha)}(x,c) = \begin{cases} \min \left\{ \min\limits_{i \in I_+(y)} \dfrac{x_i}{y_i} \, , \, \dfrac{c}{\alpha} \right\} & (x \in K_y^+) \\ 0 & (x \notin K_y^+) \end{cases}$$

برهان. چون f تابع ICR است لذا بنابر قضیه (۷.۴.۲) زیردیفرانسیل آن بصورت زیر است:

$$\partial_{\tilde{L}} f(x_0) = \{ \tilde{l}_{(y,\alpha)} \ : \ f(x_0) = l_{(y,\alpha)}(x_0) \, , \, f(\alpha y) = \alpha \}$$

اما:

$$l_{(y,\alpha)}(x_0) = l_{(x_0,y,\alpha)} = \min\{ \min_{i \in I_+(y)} \frac{(x_0)_i}{y_i}, \alpha \}$$

بنابراین حکم ثابت است. ■.

فصل ۳

بهینه سازی تفاضل توابع همرادیانت صعودی

در این فصل، ابتدا مساله تفاضل دو تابع همرادیانت صعودی و همچنین مساله دوگان آن را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین شرایط لازم و کافی را برای مینیمم کردن تفاضل توابع بطور اکید ICR ارائه می دهیم.

۱.۳ شرایط بهینگی دوگان برای تفاضل توابع ICR

در این بخش، مسئله مینیمم تفاضل دو تابع ICR و مسئله دوگان آن را ارائه می کنیم سپس قضایایی در ارتباط با این دو مسئله را بیان می کنیم.

فرض کنیم $p\,,\,q\;:X\longrightarrow[\circ,+\infty]$ توابع ICR سره ای باشند که:

$$dom\,p\supset dom\,q$$

فرض کنیم که:

$$(+\infty)-(+\infty)=+\infty$$

همچنین فرض کنیم که $f=q-p$ یعنی:

$$f(x)=\begin{cases}q(x)-p(x) : & x\in dom\,q\\ +\infty \quad : & x\notin dom\,q\end{cases}$$

مسئله اکسترمال[1] (نهایی) زیر را در نظر می گیریم:

$$\min f(x) \quad subject\ to\ x \in X. \tag{۱.۳}$$

اگر $dom\, q \not\supseteq dom\, p$ در اینصورت $y \in dom\, q$ چنان موجود است که $y \notin dom\, p$ لذا $p(y) = +\infty$ بنابراین:

$$\inf_{x \in X}[q(x) - p(x)] \le q(y) - p(y) = -\infty$$

لذا:

$$\inf_{x \in X}[q(x) - p(x)] = -\infty$$

و مسئله(۱.۳) بدیهی است. بنابر این فرض می کنیم:

$$\inf_{x \in X} f(x) > -\infty$$

که نتیجه می دهد:

$$dom\, q \subset dom\, p.$$

اکنون مسئله زیر را درنظر می گیریم:

$$\min\ (p^*(l) - q^*(l)) \quad subject\ to\ l \in dom\, q^*. \tag{۲.۳}$$

این مسئله، مسئله دوگان[2] نسبت به مسئله (۱.۳) نامیده می شود.

در زیر فرمول تولند- سینگر[3] را ارائه می دهیم که از مراجع [۱۹] و [۲۱] گرفته شده است:

---

[1] Extremal
[2] Dual problem
[3] Toland - Singer

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم Z یک مجموعه و U مجموعه همه توابع خطی محض حقیقی مقدار تعریف شده روی Z باشد. همچنین فرض کنیم:

$$g\,,\,h\,:Z\longrightarrow(-\infty,+\infty]$$

توابع H_U - محدب سره باشند چنان که:

$$\inf_{x\in X}[g(x)-h(x)]>-\infty$$

دراینصورت:

$$\inf\{g(x)-h(x)\ :\ x\in Z\}=\inf\{h^*(l)-g^*(l)\ :\ l\in U\}. \tag{۳.۳}$$

برهان. فرض کنیم:

$$\gamma^{'}:=\inf\{g(x)-h(x)\ :\ x\in Z\}\qquad,\qquad\gamma\leq\gamma^{'}$$

دراینصورت بنابر قضیه ۱۵.۸ از مرجع [۱۷] داریم:

$$Supp(g,H_U)\supset Supp(h,H_U)-(\circ,\gamma) \tag{۴.۳}$$

و چون:

$$Supp(g,H_U)=epi(g^*)\qquad,\qquad Supp(h,H_U)=epi(h^*)$$

نتیجه می گیریم که رابطه (۴.۳) با نامساوی:

$$g^*\leq(\tilde{h})^*=h^*-\gamma.۱$$

معادل است که:

$$\tilde{h}(x) = h(x) + \gamma$$

از طرفی چون: $\gamma' > -\infty$ لذا:

$$dom\, h^* \subset dom\, g^* \qquad , \qquad h^* - g^* \geq \gamma'.$$ ۱

بنابراین با فرض:

$$\gamma'' := \inf_{l \in U}\{h^*(l) - g^*(l)\}$$

داریم:

$$\gamma'' \geq \gamma'.$$

اکنون این نتیجه را برای توابع h^* و g^* بکار می بریم و چون $h^{**} = h$ و $g^{**} = g$ لذا: $\gamma' \geq \gamma''$

بنابراین: $\gamma' = \gamma''.$ ■

گزاره زیر مستقیما" از قضیه (۱.۱.۳) بدست می آید:

گزاره ۲.۱.۳. فرض کنیم $p\,,\, q \,:\, X \longrightarrow [0, +\infty[$ توابع ICR سره چنان باشند که:

$$\inf_{x \in X}[q(x) - p(x)] > -\infty$$

دراینصورت:

$$\inf\{\, q(x) - p(x) \;:\; x \in X\} = \inf\{p^*(l_{(y,\alpha)}) - q^*(l_{(y,\alpha)}) \;:\; l_{(y,\alpha)} \in L\}.$$

برهان . چون توابع ICR ، H - محدب می باشند و توابع اتصال $l_{(y,\alpha)}$ خطی محض اند لذا بنابر قضیه (۱.۱.۳) حکم ثابت است. ■

لم ۳.۱.۳. فرض کنیم $p\,,\,q\;:\;X\longrightarrow[0,+\infty]$ توابع ICR باشند و $x\in X$ چنان باشد که:

$$p(x)+q(x)<+\infty$$

و فرض کنیم که $\varepsilon,\delta>\max\{p(x),q(x)\}$ دلخواه باشند دراینصورت:

$$l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}\in[\partial_L p(x)\cap\partial_L q(x)].$$

بعلاوه داریم:

$$p^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)})-q^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)})=p^*(l_{(\frac{x}{\delta},\delta)})-q^*(l_{(\frac{x}{\delta},\delta)})=q(x)-p(x).$$

برهان. چون $p(x)<\varepsilon$ است و همچنین:

$$l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)=l(x,\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)=\varepsilon l(x,x,1)=\varepsilon$$

بنابر این طبق قضیه (۵.۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned}p(x)<\varepsilon\quad&=\quad l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)\\&\Longrightarrow\;p(x)<l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)\\&\Longrightarrow\;l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}\in\partial_L p(x).\end{aligned}$$

بطور مشابه چون:

$$q(x)<\varepsilon\qquad,\qquad l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)=\varepsilon$$

لذا:

$$q(x)<l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)\Longrightarrow l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}(x)\in\partial_L q(x)$$

بنابراین:

$$l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} \in [\partial_L p(x) \cap \partial_L q(x)].$$

حال چون:

$$l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} \in \partial_L p(x)$$

لذا بنابر تعریف (۳۴.۲.۱) داریم:

$$\begin{aligned} p^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}) &= l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} - p(x) \\ , q^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}) &= l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} - q(x) \end{aligned}$$

لذا:

$$p^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} - p(x) - [l_{(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)} - q(x)] = q(x) - p(x). \qquad (5.3)$$

روندی مشابه برای δ بجای ε نشان می دهد:

$$p^*(l_{(\frac{x}{\delta},\delta)}) - q^*(l_{(\frac{x}{\delta},\delta)}) = q(x) - p(x) \qquad (6.3)$$

حال با توجه به رابطه های (۵.۳) و (۶.۳) حکم ثابت است. ■

لم ۴.۱.۳. فرض کنیم $p\,,\,q : X \longrightarrow [0,+\infty]$ توابع ICR باشند. همچنین فرض کنیم که $x_1, x_2 \in X$ چنان باشند که:

$$p(x_1) = 0 = q(x_2)$$

همچنین فرض کنیم که $l(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)$ یک مینیمم کننده سرتاسری [۴] برای مسئله دوگان [۵] باشد که:

$$\varepsilon \leq \min\{p(x_0)\,,\,q(x_0)\}$$

[۴] global minimizer
[۵] dual problem

دراینصورت:

$$\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] = 0 = q(x_0)-p(x_0) \ : \quad x_0 \in X.$$

برهان. چون:

$$\varepsilon \leq \min\{p(x_0)\ ,\ q(x_0)\}$$

بنابراین:

$$\varepsilon \leq p(x_0) \Longrightarrow \varepsilon \leq p(\varepsilon \times \frac{x_0}{\varepsilon})$$
$$\varepsilon \leq q(x_0) \Longrightarrow \varepsilon \leq q(\varepsilon \times \frac{x_0}{\varepsilon})$$

حال با توجه به گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$l(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon) \in Supp(p,L) \quad , \quad l(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon) \in Supp(q,L)$$

بنابراین:

$$l(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon) \in [Supp(p,L)\cap Supp(q,L)]\,.$$

از طرفی چون:

$$p(x_1) = 0 = q(x_2)$$

لذا:

$$p^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_1) - p(x_1) \quad , \quad q^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_2) - q(x_2)$$

اما می دانیم که:

$$l(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon) \in Supp(p,L)$$

لذا:

$$l(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)(x_1) \leq p(x_1) = 0$$
$$\Longrightarrow \; l(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)(x_1) \leq 0$$

که باتوجه به نامنفی بودن تابع $l(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)(x_1)$ نتیجه می شود:

$$l(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)(x_1) = 0$$

لذا:

$$p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_1) - p(x_1) = 0 - 0 = 0$$

و به همین ترتیب:

$$q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_2) - q(x_2) = 0 - 0 = 0$$

بنابراین:

$$q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) = 0 = p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)})$$

از طرفی چون:

$$p(x_1) = 0 = q(x_2)$$

لذا بنابر گزاره (۲.۱.۳) داریم:

$$\inf_{x\in X}[q(x) - p(x)] = \inf[p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)})] = 0$$
$$\Longrightarrow \; \inf_{x\in X}[q(x) - p(x)] = 0$$

از طرفی بنابر لم (۳.۱.۳) داریم:

$$0 = p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) = q(x_\circ) - p(x_\circ)$$

بنابراین:

$$\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] = \circ = q(x_\circ)-p(x_\circ)$$

و حکم ثابت است. ■

قضیه ۵.۱.۳. اگر $p\,,\,q\;:X\longrightarrow[\circ,+\infty[$ توابع ICR باشند چنانکه:

$$\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)]\neq\circ$$

همچنین فرض کنیم که $x_1,x_2\in X$ چنان باشند که:

$$p(x_1)=\circ=q(x_2)$$

دراینصورت $x_\circ\in X$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۱.۳) است اگر و تنها اگر $l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}$ برای $\varepsilon>\circ$ ای یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۲.۳) باشد.

برهان. فرض کنیم $x_\circ\in X$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۱.۳) باشد.

قرار می دهیم:

$$\varepsilon>\max\{p(x_\circ),q(x_\circ)\}$$

حال با توجه به گزاره (۲.۱.۳) و لم (۳.۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)})-q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) &= q(x_\circ)-p(x_\circ)\\
&= \inf_{x\in X}[q(x)-p(x)]\\
&= \inf_{l\in L}[p^*(l)-q^*(l)]\\
&\Longrightarrow\; p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)})-q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)})=\inf_{l\in L}[p^*(l)-q^*(l)]
\end{aligned}$$

بنابراین $l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۲.۳) است.

برعکس، فرض کنیم $l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۲.۳) باشد آنگاه چون:

$$\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] \neq \circ$$

لذا طبق عکس نقیض لم (۴.۱.۳) داریم:

$$\varepsilon > \min\{p(x_\circ), q(x_\circ)\}$$

بنابراین حالتهای زیر را داریم:

(حالت ۱): $q(x_\circ) < \varepsilon \quad , \quad p(x_\circ) < \varepsilon$

در این حالت طبق گزاره (۲.۱.۳) و لم (۳.۱.۳) ، $x_\circ$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۱.۳) است زیرا:

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] &= \inf_{l\in L}[p^*(l)-q^*(l)] \\
&= p^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}) \\
&= q(x_\circ)-p(x_\circ) \\
&\Longrightarrow \inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] = q(x_\circ)-p(x_\circ).
\end{aligned}$$

(حالت ۲): $q(x_\circ) \geq \varepsilon \quad , \quad p(x_\circ) < \varepsilon$

در این حالت چون $q(x_\circ) \geq \varepsilon$ یعنی:

$$q(\varepsilon \times \frac{x_\circ}{\varepsilon}) \geq \varepsilon$$

لذا طبق گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)} \in Supp(q,L)$$

از طرفی چون $q(x_\circ) = \circ$ و $l_{(\frac{x_\circ}{\varepsilon},\varepsilon)}$ نامنفی است بنابراین:

$$0 \leq l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_2) \leq q(x_2) = 0$$

لذا:

$$l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_2) = 0 \tag{۷.۳}$$

همچنین:

$$q^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) = l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_2) - q(x_2) \tag{۸.۳}$$

اکنون از رابطه های (۸.۳) و (۷.۳) نتیجه می شود:

$$q^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) = 0.$$

بعلاوه چون:

$$p(x_0) < \varepsilon \quad , \quad l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_0) = \varepsilon$$

لذا:

$$p(x_0) < l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}(x_0)$$

بنابراین طبق قضیه (۵.۲.۲) و ICR بودن تابع p داریم:

$$l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)} \in \partial_L p(x_0)$$

لذا:

$$\begin{aligned}
p^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) &= [\varepsilon - p(x_0)] - 0 \\
&= \varepsilon - p(x_0) \\
&= \inf_{l\in L}[p^*(l) - q^*(l)] \\
&= \inf_{x\in X}[q(x) - p(x)] \leq q(x) - p(x) \quad (\forall x \in X) \\
\Longrightarrow \; & \varepsilon - p(x_0) \leq q(x) - p(x)
\end{aligned}$$

حال با قرار دادن $x = x_۲$ در رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon - p(x_{\circ}) &\leq q(x_۲) - p(x_۲) = \circ - p(x_۲) \\ &\Longrightarrow \varepsilon - p(x_{\circ}) \leq -p(x_۲) \\ &\Longrightarrow \varepsilon \leq p(x_{\circ}) - p(x_۲) \leq p(x_{\circ}) \\ &\Longrightarrow \varepsilon \leq p(x_{\circ}) \end{aligned}$$

که متناقض با فرض $p(x_{\circ}) < \varepsilon$ می باشد لذا این حالت نیز اتفاق نمی افتد.

(حالت ۳): $\quad q(x_{\circ}) < \varepsilon \quad , \quad p(x_{\circ}) \geq \varepsilon$

در این حالت مطابق حالت ۲ داریم:

$$q^*(l_{(\frac{x_{\circ}}{\varepsilon},\varepsilon)}) = q(x_{\circ}) - \varepsilon \leq q(x) - p(x) \quad (\forall x \in X)$$

حال با قراردادن $x = x_{\circ}$ داریم:

$$q(x_{\circ}) - \varepsilon \leq q(x_{\circ}) - p(x_{\circ}) \Longrightarrow p(x_{\circ}) \leq \varepsilon$$

بنابراین:

$$p(x_{\circ}) = \varepsilon.$$

لذا:

$$p(x_{\circ}) = \varepsilon \leq \varepsilon = l_{(\frac{x_{\circ}}{\varepsilon},\varepsilon)}$$

اکنون با بکاربردن قضیه (۵.۲.۲) داریم:

$$l_{(\frac{x_{\circ}}{\varepsilon},\varepsilon)} \in \partial_L p(x_{\circ})$$

وچون:

$$l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)} \in \partial_L q(x_0)$$

بنابر لم (۳.۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} p^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) - q^*(l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}) &= q(x_0) - p(x_0) \\ &= \inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] \\ &= \inf_{l\in L}[p^*(l)-q^*(l)] \end{aligned}$$

بنابر این $x_0 \in X$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۱.۳)است. ■

نتیجه ۶.۱.۳. اگر $p\,,\,q\;:\mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow [0,+\infty]$ توابع ICR باشند چنانکه: $\inf_{x\in X}[q(x)-p(x)] \neq 0$ دراینصورت $x_0 \in X$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۱.۳) است اگر و تنها اگر $l_{(\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon)}$ برای $\varepsilon > 0$ ای یک مینیمم کننده سرتاسری برای مسئله (۲.۳) باشد.

برهان. فرض کنیم $X=\mathbb{R}^n$ و $S=\mathbb{R}^n_{++}$ باشد. همچنین برای هر $x\in X\setminus S$ داشته باشیم:

$$p(x)=q(x)=0$$

اکنون با استفاده از قضیه (۵.۱.۳) حکم ثابت است. ■

مثال ۷.۱.۳. فرض کنیم $p\,,\,q\;:\mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty]$ بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & : x<0 \\ x^{\frac{1}{2}} & : x\geq 0 \end{cases} \qquad q(x)=\begin{cases} 0 & : x<0 \\ \frac{1}{3}x & : 0\leq x\leq 9 \\ 3 & : x>9 \end{cases}$$

یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع $q-p$ بیابید.

برهان. شرایط قضیه (۵.۱.۳) برقرار است و با فرض $x = \varepsilon y$ داریم:

$$\begin{aligned} q^*(l(y,\varepsilon)) &= l(y,\varepsilon)(\varepsilon y) - q(\varepsilon y) \\ &= l(\varepsilon y, y, \varepsilon) - \frac{\varepsilon y}{۳} \\ &= \varepsilon l(y, y, \varepsilon) - \frac{\varepsilon y}{۳} \\ &= \varepsilon - \frac{\varepsilon y}{۳} \end{aligned}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned} p^*(l(y,\varepsilon)) &= l(y,\varepsilon)(\varepsilon y) - p(\varepsilon y) \\ &= l(\varepsilon y, y, \varepsilon) - \sqrt{(\varepsilon y)} \\ &= \varepsilon - \sqrt{(\varepsilon y)} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} p^*(l(y,\varepsilon)) - q^*(l(y,\varepsilon)) &= \varepsilon - \sqrt{(\varepsilon y)} - \varepsilon + \frac{\varepsilon y}{۳} \\ &= \frac{\varepsilon y}{۳} - \sqrt{(\varepsilon y)} \end{aligned}$$

اگر $l(y,\varepsilon)$ یک مینیمم کننده برای مسئله دوگان باشد آنگاه با مشتق گیری داریم:

$$\begin{aligned} [\frac{\varepsilon y}{۳} - \sqrt{(\varepsilon y)}]' = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{۳} - \frac{\varepsilon}{۲\sqrt{(\varepsilon y)}} = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲\sqrt{(\varepsilon y)}} \\ &\Longrightarrow \quad \varepsilon y = \frac{۹}{۴} \end{aligned}$$

لذا $x_۰ = \varepsilon y = \frac{۹}{۴}$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع $q - p$ است. ■

۲.۳ شرایط لازم و کافی برای مینیمم کردن تفاضل توابع بطور اکید ICR

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای مینیمم کردن تفاضل توابع بطور اکید ICR و نامنفی را ارائه می دهیم.

همانند بخش قبل فرض کنیم که $f = q - p$ یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} q(x) - p(x) & : x \in dom\, q \\ +\infty & : x \notin dom\, q \end{cases}$$

که در آن:

$$p\,,\, q : X \longrightarrow [\cdot, +\infty]$$

توابع ICR سره هستند. همچنین فرض کنیم:

$$\eta := \inf_{x \in X} f(x) > -\infty \quad , \quad \gamma \leq \eta$$

که نتیجه می دهد:

$$\gamma \leq \inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} [q(x) - p(x)]$$
$$\Longrightarrow \gamma \leq [q(x) - p(x)]$$
$$\Longrightarrow q(x) \geq p(x) + \gamma.$$

حال فرض کنیم:

$$\tilde{p}(x) := p(x) + \gamma$$

براحتی می توان دید:

$$supp(\tilde{p}, L) \subset supp(q, L) \quad \Leftrightarrow \quad q(x) \geq p(x) + \gamma \quad (\forall x \in X)$$

از طرف دیگر چون داریم:

$$\begin{aligned} supp(\tilde{p}, L) &= \{l \in L \,:\, l \leq \tilde{p}\} \\ &= \{l \in L \,:\, l \leq p + \gamma\} \\ &= \{l \in L \,:\, l - \gamma \leq p\} \\ &= \{(l - \gamma + \gamma) \in L \,:\, l - \gamma \leq p\} \\ &= \{(\tilde{l} + \gamma) \in L \,:\, \tilde{l} \leq p\} \\ &= \{\tilde{l} \in L \,:\, \tilde{l} \leq p\} + \gamma \\ &= supp(p, L) + \gamma \\ &\Longrightarrow supp(\tilde{p}, L) = supp(p, L) + \gamma \end{aligned}$$

بنابراین:

$$supp(p, L) + \gamma \subset supp(q, L) \quad \Leftrightarrow \quad q(x) \geq p(x) + \gamma \quad (\forall x \in X).$$

اکنون مجموعه U از توابع تعریف شده بر Z را درنظر می گیریم و فرض می کنیم که U مجهز به رابطه ترتیب طبیعی (نقطه به نقطه) باشد یعنی: $f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \qquad (\forall x \in X).$

از مرجع [۱۷] بیاد داریم که تابع f یک عنصر ماکسیمال [۶] از مجموعه U نامیده می شود اگر:

$$f \in U \,,\; \bar{f} \in U \,,\; \bar{f}(x) \geq f(x) \quad (\forall x \in Z) \Longrightarrow \; \bar{f} = f.$$

اکنون روی مجموعه محافظ توابع ICR متمرکز می شویم و بعضی از نتایج را برای رسیدن به اهدافمان بدست می آوریم:

[۶] Maximal Element

گزاره ۳.۲.۱. فرض کنیم $p : X \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع ICR و $l_{(y,\alpha)} \in supp(p, L)$ باشد. فرض کنیم $l_{(y,\alpha)}$ یک عنصر ماکسیمال $supp(p, L)$ باشد در اینصورت: $p(\alpha y) = \alpha.$

برهان. چون $l_{(y,\alpha)} \in supp(p, L)$ است لذا بنابر گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$p(\alpha y) \geq \alpha$$

حال $l(\frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y))$ را درنظر می گیریم. چون:

$$\begin{aligned} l(\frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y))(\alpha y) &= l(\alpha y, \frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y)) \\ &= p(\alpha y) l(\alpha y, \alpha y, \frac{p(\alpha y)}{p(\alpha y)}) \\ &= p(\alpha y) l(\alpha y, \alpha y, 1) = p(\alpha y) \end{aligned}$$

و همچنین: $p(\alpha y) \geq \alpha$ لذا:

$$l_{(y,\alpha)}(x) \leq l(\frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y))(x) \quad (\forall x \in X) \tag{۹.۳}$$

بعلاوه بنابر گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$l(\frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y)) \in supp(p, L)$$

چون $l_{(y,\alpha)}$ عنصر ماکسیمال است لذا از رابطه (۹.۳) نتیجه می شود:

$$l_{(y,\alpha)}(x) = l(\frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y))(x) \quad (\forall x \in X) \tag{۱۰.۳}$$

حال با فرض $x = \alpha y$ در رابطه (۱۰.۳) خواهیم داشت:

$$l_{(y,\alpha)}(\alpha y) = l(\alpha y, y, \alpha) = \alpha l(y, y, \frac{\alpha}{\alpha}) = \alpha \times 1 = \alpha \quad , \quad l(\alpha y, \frac{\alpha y}{p(\alpha y)}, p(\alpha y)) = p(\alpha y)$$

لذا:

$$p(\alpha y) = \alpha$$

و بنابراین حکم ثابت است. ■

تذکر ۲.۲.۳. عبارت عکس گزاره (۱.۲.۳) برقرار نیست. یعنی اگر p یک تابع ICR باشد و داشته باشیم $p(\alpha y) = \alpha$ آنگاه لزوما" $l_{(y,\alpha)}$ عنصر ماکسیمال مجموعه محافظ p نمی باشد. برای این منظور فرض کنیم $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع ICR باشد که بصورت زیر تعریف شده است:

$$p(x) = x \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

چون :

$$p(\alpha \times ۱) = p(\alpha) = \alpha \geq \alpha \implies p(\alpha \times ۱) \geq \alpha$$

لذا بنابر گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$l_{(۱,\alpha)} \in supp(p, L) \quad (\forall \alpha > ۰)$$

اما عنصر ماکسیمال مجموعه محافظ p وجود ندارد زیرا برای هر $\alpha > ۰$ ، $l_{(۱,\alpha)}$ متعلق به مجموعه محافظ است. این یعنی بزرگترین وجود ندارد.

در زیر شرایط اضافی مورد نیاز که طبق آن عکس عبارت گزاره (۱.۲.۳) برقرار است را مشاهده می کنیم:

گزاره ۳.۲.۳. فرض کنیم که $p : X \longrightarrow [۰, +\infty]$ یک تابع اکیدا ICR باشد. $y \in X$ را چنان در نظر می گیریم که:

$$\varepsilon := \max\{\alpha \ : \ p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty$$

در اینصورت $l_{(y,\varepsilon)}$ عنصر ماکسیمال مجموعه محافظ p است اگر و تنها اگر : $p(\varepsilon y) = \varepsilon$.

برهان. اگر $l_{(y,\varepsilon)}$ عنصر ماکسیمال مجموعه محافظ p باشد آنگاه طبق گزاره (۱.۲.۳) داریم:

$$p(\varepsilon y) = \varepsilon.$$

برعکس، فرض کنیم:

$$p(\varepsilon y) = \varepsilon$$

نشان می دهیم که $l_{(y,\varepsilon)}$ عنصر ماکسیمال $supp(p, L)$ است. برای اینکار فرض کنیم: $x_{\circ} = \varepsilon y$

بنابر رابطه (۹.۲) و گزاره (۲.۲.۲) نتیجه می شود:

$$l_{(y,\varepsilon)} \in supp(p, L).$$

حال فرض کنیم:

$$l_{(y',\varepsilon')} \in supp(p, L) \qquad , \qquad l_{(y,\varepsilon)}(x) \leq l_{(y',\varepsilon')}(x) \quad (\forall x \in X)$$

نشان می دهیم:

$$l_{(y,\varepsilon)} = l_{(y',\varepsilon')}$$

برای این منظور داریم:

$$\varepsilon = l_{(y,\varepsilon)}(\varepsilon y) \leq l_{(y',\varepsilon')}(\varepsilon y) \leq \varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon \leq \varepsilon' \tag{۱۱.۳}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
p(\varepsilon y) = \varepsilon \Longrightarrow \varepsilon = p(x_{\circ}) \quad &= \quad l_{(y,\varepsilon)}(x_{\circ}) \\
&\leq \quad l_{(y',\varepsilon')}(x_{\circ}) \leq p(x_{\circ}) = \varepsilon \\
&\Longrightarrow \quad l_{(y',\varepsilon')}(x_{\circ}) = \varepsilon \\
&\Longrightarrow \quad \varepsilon y' \leq x_{\circ} = \varepsilon y \\
&\Longrightarrow \quad \varepsilon y' \leq \varepsilon y
\end{aligned}$$

حال چون p صعودی است لذا:

$$p(\varepsilon y') \leq p(\varepsilon y) = \varepsilon \Longrightarrow p(\varepsilon y') \leq \varepsilon \tag{۱۲.۳}$$

اکنون بنابر رابطه (۱۱.۳) و رابطه (۶.۲) داریم:

$$l_{(y',\varepsilon)} \leq l_{(y',\varepsilon')}$$

بنابر این:

$$l_{(y',\varepsilon)} \in supp(p, L)$$

لذا طبق گزاره (۲.۲.۲) داریم:

$$p(\varepsilon y') \geq \varepsilon \tag{۱۳.۳}$$

اکنون از رابطه (۱۲.۳) و رابطه (۱۳.۳) نتیجه می شود:

$$p(\varepsilon y') = \varepsilon = p(\varepsilon y)$$

اما چون $\varepsilon y' \leq \varepsilon y$ و p تابع اکیداً صعودی است لذا: $y = y'$

بعلاوه چون:

$$\varepsilon = \max\{\alpha \,:\, p(\alpha y) \geq \alpha\} \quad , \quad p(\varepsilon' y) \geq \varepsilon$$

بنابراین:

$$\varepsilon' \leq \varepsilon$$

لذا با توجه به رابطه (۶.۲) داریم:

$$l_{(y',\varepsilon')} \leq l_{(y,\varepsilon)} \tag{۱۴.۳}$$

اما طبق ماکسیمال بودن $l_{(y',\varepsilon')}$ داریم:

$$l_{(y,\varepsilon)} \leq l_{(y',\varepsilon')} \qquad (۱۵.۳)$$

حال از روابط (۱۴.۳) و (۱۵.۳) نتیجه می شود:

$$l_{y,\varepsilon} = l_{(y',\varepsilon')}$$

و این حکم را ثابت می کند. ■

نتیجه ۴.۲.۳. فرض کنیم که $p : X \longrightarrow [۰,+\infty[$ یک تابع اکیدا" ICR باشد بطوریکه:

$$\varepsilon_y := \max\{\alpha \ : \ p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty \quad (\forall y \in X)$$

در اینصورت برای هر $l_{(y,\alpha)} \in Supp(p,L)$ یک عنصر ماکسیمال $l_{(\bar{y},\bar{\alpha})}$ از $Supp(p,L)$ چنان موجود است که:

$$l_{(y,\alpha)} \leq l_{(\bar{y},\bar{\alpha})}$$

در اینحالت داریم:

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)} \quad , \quad \bar{\alpha} = p(\varepsilon_y y).$$

برهان. بوضوح داریم:

$$p(\bar{\alpha}\bar{y}) = \bar{\alpha}$$

زیرا:

$$p(\bar{\alpha}\bar{y}) = p(p(\varepsilon_y y).\frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)}) = p(\varepsilon_y y) = \bar{\alpha}$$

و چون $l_{(y,\alpha)} \in Supp(p,L)$ لذا:

$$p(\varepsilon_y y) \geq \varepsilon_y \Longrightarrow \frac{p(\varepsilon_y y)}{\varepsilon_y} \geq ۱$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})} &= l_{(\frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)},p(\varepsilon_y y))} \\ &= p(\varepsilon_y y) l_{(\varepsilon_y y,1)} \\ &= \frac{p(\varepsilon_y y)}{\varepsilon_y} l_{(y,\varepsilon_y)} \\ &\geq l_{(y,\varepsilon_y)} \geq l_{(y,\alpha)} \\ &\Longrightarrow l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})} \geq l_{(y,\alpha)}. \end{aligned}$$

اکنون نشان می دهیم که $l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})}$ عنصر ماکسیمال است. برای اینکار فرض کنیم $\delta > 0$ چنان باشد که: $p(\delta\tilde{y}) \geq \delta \geq \tilde{\alpha}$ یعنی به عبارت دیگر: $l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})} \leq l_{(\tilde{y},\delta)}$

چون:

$$\delta > \tilde{\alpha} = p(\varepsilon_y y)$$

لذا:

$$\begin{aligned} l_{(\frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)},\delta)} \geq l_{(\frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)},p(\varepsilon_y y))} &\Longrightarrow \frac{p(\varepsilon_y y)}{\varepsilon_y} l_{(y,\frac{\delta\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)})} \geq \frac{p(\varepsilon_y y)}{\varepsilon_y} l_{(y,\varepsilon_y)} \\ &\Longrightarrow l_{(y,\frac{\delta\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)})} \geq l_{(y,\varepsilon_y)} \end{aligned}$$

و چون:

$$p(\delta\tilde{y}) \geq \delta \quad \text{و} \quad p(\varepsilon_y y) \geq \varepsilon_y$$

لذا:

$$p(\delta\tilde{y}) \geq \delta \geq \frac{\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)}\delta$$

بنابراین:

$$p(\delta\tilde{y}) \geq \frac{\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)}\delta \implies p(\delta.\frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)}) \geq \frac{\delta\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)}$$
$$\implies \frac{\delta\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)} \in \{\alpha : p(\alpha y) \geq \alpha\}$$

و چون:

$$\varepsilon_y = \max\{\alpha : p(\alpha y) \geq \alpha\}$$

بنابراین:

$$\frac{\delta\varepsilon_y}{p(\varepsilon_y y)} \leq \varepsilon_y \implies \delta \leq p(\varepsilon_y y) = \tilde{\alpha}$$
$$\implies \delta \leq \tilde{\alpha}$$

اما طبق فرض: $\delta \geq \tilde{\alpha}$ لذا: $\delta = \tilde{\alpha}$

بنابراین:

$$\tilde{\alpha} = \max\{\delta : p(\delta\tilde{y}) \geq \delta\}$$

حال چون $p(\tilde{\alpha}\tilde{y}) = \tilde{\alpha}$ لذا بنابر گزاره (۳.۲.۳)، $l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})}$ عنصر ماکسیمال $Supp(p, L)$ است. ■

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنیم p یک تابع ICR باشد که $p : S \longrightarrow [\circ, +\infty[$ اکیداً" صعودی بوده و برای هر $x \in X \setminus S$ داشته باشیم: $p(x) = \circ$. همچنین فرض کنیم $y \in X$ چنان باشد که:

$$\varepsilon_y := \max\{\alpha \ : \ p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty$$

دراینصورت $l_{(y,\varepsilon)}$ یک عنصر ماکسیمال برای مجموعه محافظ P است اگر و تنها اگر $p(\varepsilon y) = \varepsilon$.

برهان. شبیه اثبات گزاره (۳.۲.۳) انجام می شود. ■

نتیجه ۶.۲.۳. فرض کنیم که $p : S \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع ICR باشد که اکیدا" صعودی بوده و برای هر $x \in X \setminus S$ داشته باشیم: $p(x) = 0$. همچنین فرض کنیم $y \in X$ چنان باشد که:

$$\varepsilon := \max\{\alpha \ : \ p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty$$

دراینصورت برای هر $l_{(y,\alpha)} \in Supp(p, L)$ یک عنصر ماکسیمال $l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})}$ از مجموعه محافظ p چنان موجود است که:

$$l_{(y,\alpha)} \leq l_{(\tilde{y},\tilde{\alpha})}$$

دراینحالت داریم:

$$\tilde{y} = \frac{\varepsilon_y y}{p(\varepsilon_y y)} \qquad , \qquad \tilde{\alpha} = p(\varepsilon_y y).$$

برهان. شبیه اثبات نتیجه (۴.۲.۳) انجام میشود. ■

تذکر ۷.۲.۳. نتایجی که در گزاره (۵.۲.۳) و نتیجه (۶.۲.۳) بدست آمدند در حالتی که توابع:

$$p, q : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow [0, +\infty]$$

توابع ICR باشند مفید می باشد. دراینحالت فرض می کنیم:

$$X = \mathbb{R}^n \quad , \quad S = \mathbb{R}^n_{++}.$$

گزاره ۸.۲.۳. فرض کنیم $p, q \ : X \longrightarrow [0, +\infty]$ توابع ICR اکید باشند که:

$$\varepsilon_y := \max\{\alpha \ : \ p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty \quad (\forall y \in X)$$

$$, \eta_y := \max\{\alpha \ : \ q(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty \quad (\forall y \in X)$$

دراینصورت عبارات زیر معادل اند:

$$Supp(p, L) \subset Supp(q, L). \qquad (i)$$

(ii) برای هر عنصر ماکسیمال l_1 از $Supp(p,L)$ یک عنصر ماکسیمال l_2 از $Supp(q,L)$ چنان موجود است که:
$$l_1(x) \leq l_2(x) \quad (\forall x \in X).$$

برهان . $(i) \Longleftarrow (ii)$: فرض کنیم $Supp(p,L) \subset Supp(q,L)$ و همچنین l_1 عنصر ماکسیمال $Supp(p,L)$ باشد در اینصورت:

$$l_1 \in Supp(p,L) \subset Supp(q,L)$$

لذا:

$$l_1 \in Supp(q,L)$$

حال بنابر نتیجه (۴.۲.۳) چون l_1 عنصر مجموعه محافظ q است لذا عنصر ماکسیمال l_2 از $Supp(q,L)$ چنان موجود است که:

$$l_1 \leq l_2.$$

$(ii) \Longleftarrow (i)$: فرض کنیم $l \in Supp(p,L)$ باشد. نشان می دهیم که $l \in Supp(q,L)$ است.
چون $l \in Supp(p,L)$ بنابراین طبق نتیجه (۴.۲.۳) عنصر ماکسیمال l_1 از مجموعه محافظ p چنان موجود است که:

$$l(x) \leq l_1(x) \quad (\forall x \in X)$$

حال فرض می کنیم که $l_2 \in Supp(q,L)$ باشد که طبق فرض داریم:

$$l_1(x) \leq l_2(x) \quad (\forall x \in X)$$

بنابراین:

$$l \leq l_1 \leq l_2 \Longrightarrow l \leq l_2$$

لذا:

$$l \in Supp(q, L).$$

■

در زیر شرایط لازم و کافی برای مینیمم کردن تفاضل دو تابع اکیدا" ICR را ارائه می دهیم:

قضیه ۹.۲.۳. فرض کنیم $p, q \ : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ توابع اکیدا ICR باشند بطوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $p(x) \leq q(x)$. در اینصورت $x_\circ$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع:

$$f(x) := \begin{cases} q(x) - p(x) & : x \in dom\, q \\ +\infty & : x \notin dom\, q \end{cases}$$

است اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$ که $\circ \neq \tilde{p}(\varepsilon_y y) = \varepsilon_y$ ، وجود داشته باشد $z \in X$ که $q(\eta_z z) = \eta_z$ بطوریکه:

$$l(y, \varepsilon_y) \leq l(z, \eta_z)$$

که در آن:

$$\tilde{p}(x) := p(x) + f(x_\circ) \quad (\forall x \in X)$$

و برای هر $y \in X$ داریم:

$$\varepsilon_y := \max\{\alpha : \tilde{p}(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty$$

$$, \ \eta_y := \max\{\alpha : q(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty.$$

برهان . چون $x_\circ$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع f است بنابراین داریم:

$$f(x_\circ) \leq q(x) - p(x) \quad (\forall x \in X)$$

بنابراین:

$$p(x) + f(x_\circ) \leq q(x) \quad (\forall x \in X)$$

حال با توجه به تعریف $\tilde{p}(x) := p(x) + f(x_\circ)$ داریم:

$$\tilde{p}(x) \leq q(x) \quad (\forall x \in X)$$

لذا بنابر تعریف (۲۹.۲.۱) داریم: $Supp(\tilde{p}, L) \subset Supp(q, L)$

از طرفی:

$$\tilde{p}(\varepsilon_y y) = \varepsilon_y$$

لذا بنابر گزاره (۳.۲.۳) داریم:

$$l(y, \varepsilon_y) \in Supp(\tilde{p}, L)$$

که $l(y, \varepsilon_y)$ عنصر ماکسیمال است.

حال بنابر گزاره (۸.۲.۳)، یک عنصر ماکسیمال $l(z, \eta_z)$ از $Supp(q, L)$ چنان موجود است که:

$$l(y, \varepsilon_y) \leq l(z, \eta_z)$$

همچنین چون $l(z, \eta_z)$ عنصر ماکسیمال $Supp(q, L)$ است لذا طبق گزاره (۳.۲.۳) داریم:

$$q(\eta_z z) = \eta_z$$

و حکم ثابت است. ■

توجه ۱۰.۲.۳. با توجه به تذکر (۷.۲.۳) نتیجه می گیریم که در قضیه (۹.۲.۳) می توانیم X را با $\mathbb{R}^n_+$ جایگزین کنیم. دراینحالت چون هر عنصر ماکسیمال از $Supp(\tilde{p}, L)$ دقیقا یک عنصر ماکسیمال از $Supp(q, L)$ است (زیرا هر عنصر ماکسیمال از نقطه $(x_\circ, f(x_\circ))$ می گذرد)، لذا:

$$y = z \quad , \quad \varepsilon_y = \eta_z$$

بنابراین نامساوی:

$$l_{(y,\varepsilon_y)} \leq l_{(z,\eta_z)}$$

در قضیه (۹.۲.۳) را می توانیم با تساوی:

$$l_{(y,\varepsilon_y)} = l_{(z,\eta_z)}$$

جایگزین کنیم. در حقیقت زمانی نقطه x. نقطه مینیمم است که هر دو توابع $l_{(z,\eta_z)}$ و $l_{(y,\varepsilon_y)}$ بر هم منطبق بشوند.

دراینصورت نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۱۱.۲.۳. فرض کنیم $p, q \, : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow [0, +\infty]$ توابع اکیدا ICR باشند بطوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $p(x) \leq q(x)$. در اینصورت $x.$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع:

$$f(x) := \begin{cases} q(x) - p(x) & : \, x \in dom\, q \\ +\infty & : \, x \notin dom\, q \end{cases}$$

است اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$ که $0 \neq \tilde{p}(\varepsilon_y y) = \varepsilon_y$ است تساوی $\varepsilon_y = \eta_y$ برقرار باشد که در آن:

$$\tilde{p}(x) := p(x) + f(x.) \quad (\forall x \in X)$$

و وجود داشته باشد $y \in X$ که:

$$\varepsilon_y := \max\{\alpha : p(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty$$

$$، \eta_y := \max\{\alpha : q(\alpha y) \geq \alpha\} < +\infty.$$

مثال ۱۲.۲.۳. فرض کنیم برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$q(x) := x^{\frac{2}{3}} + 1 \quad , \quad p(x) := x^{\frac{1}{2}}$$

همچنین فرض کنیم $x_\circ$ یک مینیمم کننده سرتاسری برای تابع $f = q - p$ باشد و $\tilde{p}(x) := p(x) + f(x_\circ)$.

در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \max\{\alpha : \tilde{p}(\alpha y) \geq \alpha\} \\ &= \max\{\alpha : \sqrt{\alpha y} + f(x_\circ) \geq \alpha\} \\ &= \max\{\alpha : \alpha y \geq \alpha^۲ - ۲\alpha f(x_\circ) + f(x_\circ)^۲\} \\ &= \max\{\alpha : \alpha^۲ - (۲f(x_\circ) + y)\alpha + f(x_\circ)^۲ \leq \circ\} \end{aligned}$$

در اینجا یک سهمی روبه بالا بر حسب α داریم که قرار است نامثبت باشد لذا صفر بوده و داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^۲ - ۴ac \\ &= (-(۲f(x_\circ) + y))^۲ - ۴(۱)(f(x_\circ)^۲) \\ &= ۴f(x_\circ)^۲ + ۴f(x_\circ)y + y^۲ - ۴f(x_\circ)^۲ \\ &= y^۲ + ۴f(x_\circ)y \\ \Longrightarrow \varepsilon_y &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \\ &= \frac{(۲f(x_\circ) + y)) + \sqrt{y^۲ + ۴f(x_\circ)y}}{۲} \\ &= \frac{y + \sqrt{y^۲ + ۴f(x_\circ)y}}{۲} + f(x_\circ) \end{aligned}$$

و همچنین:

$$\eta_y = (\eta_y y)^{\frac{۱}{۲}} + ۱$$

حال طبق نتیجه (۱۱.۲.۳) نتیجه می گیریم که $\varepsilon_y = \eta_y$.

از طرف دیگر برای هر $y \neq \circ$ یک η چنان موجود است که $\eta^۳ - (۳ + y^۲)\eta^۲ + ۳\eta + ۱ = \circ$

همچنین این (y,η) ، معادله:

$$\eta = \frac{y+\sqrt{y^{۲}+۴f(x_{\circ})y}}{۲}+f(x_{\circ})$$

را بدست می دهد. با حل این معادله، $f(x_{\circ}) = ۰/۸۹۴۵$ و $\eta = ۱/۳۱۶۳$ بدست می آید.

بنابراین ۰/۸۹۴۵ کمترین مقدار و $x_{\circ} = ۰/۱۷۷۸$ مینیمم کننده سرتاسری تابع f است.

نکته مهم این است که جواب بهینه این مساله نقطه $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۶}$ و مقدار خطا کمتر از $۱۰^{-۴}$ می باشد.

***

مراجع

[1] T.M Abasov , A.M Rubinov , Subdifferential of some classes of none-smooth functions . in: V.F Demyanov (ed) Mathematical Models of Analysis of none-smooth Models . St. Petersburg University Press , Russia (1996). 67

[2] A.R Doagooei , H. Mohebi , Monotonic Analysis over ordered topological vector spaces : IV , Journal of global Optimization (2009) 45: 355 - 369.

[3] A.R Doagooei , H. Mohebi , Optimization of the difference of ICR functions , Nonlinear Analysis 71 (2009) 4493 - 4499.

[4] A .R. Doagooei and H. Mohebi, "Abstract convexity of extended real valued increasing and positively homogeneous function", Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. B, Appl. Algorithms 17, No. 5, (2010) pages 659-674. 67, 70

[5] J. Dutta , J.E Martines-Legaz , A.M Rubinov , Monotonic Analysis over cones : I , Optimization 53 (2004 a) 165 - 177.

[6] J. Dutta , J.E Martines-Legaz , A.M Rubinov , Monotonic Analysis over cones : II , Optimization 53 (2004 b) 529 - 547.

[7] J. Dutta , J.E Martines-Legaz , A.M Rubinov , Monotonic Analysis over cones : III , Convexe Analysis 15 (2008) 581 - 592.

[8] B.M. Glover , V. Jeyakomar, Nonlinear extansions of Farkas' lemma with aplications to globai optimazation and least squares , Mathematics of Operations Research 20 (1995) 818 - 837.

[9] B.M. Glover , Y. Ishizuka , V. Jeyakomar , A.M Rubinov , Inequality systems and globai optimazation , Journal of Mathematical Analysis and aplications , 202 (1996) 900 - 919.

[10] B.M. Glover , A.M Rubinov , Increasing convex along rays function with applications to global optimazation , Journal of optimazation theory and applications 102 (1999) 615 - 642.

[11] B.M. Glover , A.M Rubinov , Toland-Singer formula cannot distinguisha global minimizer from a choice of stationary points , Numerical Functional analysis and optimazation 20 (1999) 99 - 119.

[12] J.B Hiriart , From convex to nonconvex Minimization : Necessary and sufficient conditions for global optimality , in : Nonsmooth optimazation and related topics , Plenum, NewYork, (1989), pp. 219 - 240.

[13] J.E Martines-Legaz , A.M Rubinov , S. Schaible : Increasing qusi-concave co-radiant functions with application in Mathematical economics . Math Methodes Operation research 61 (2005) 261 - 280.

[14] H. Mohebi , H. Sadeghi , Monotonic Analysis over NonConvexe cones . Nemer. funct. Anal. optim. 26 (7,8) (2005) 879 - 895.

[15] H. Mohebi , H. Sadeghi , Monotonic Analysis over ordered topological vector spaces : I . Optimization 56 (2007) 305 - 321. 67, 69

[16] D. Pallaschke , S. Rolewicz , Foundation of Mathematical Optimization (Convexe Analysis without Linearity) Kluwer Academic Publishers , Boston , Dordrecht , London , (1997).

[17] A.M Rubinov , Abstract Convexity and Global Optimization , Kluwer Academic Publishers , Boston , Dordrecht , London , (2000). 14, 75, 88

[18] R.T Rockafellar , Convexe Analysis . Princeton University Press , Princeton NJ (1970). 67

[19] I.Singer , Abstract Convexe Analysis , wiley - Intersience . NewYork , (1997). 74

[20] H. Tuy: 'Monotonic Optimization: Problems and Solution Approaches', SIAM Journal on Optimization, 11:2(2000), 464-494.

[21] J.F Toland , duality in NonConvexe Optimization , Journal of Mathematical Analysis and aplications 66 (1978) 399 - 415. 74

[22] A. Zaffaroni , Suplinear Separation of radiant and co-Radiant Sets . Optimization 56 (1,2) (2007) 267 - 285. 60

فهرست راهنما

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abstract	محض
Abstract Linear Functions	تابع خطی محض
Affine	آفین
Closed	بسته
Closed convex point cone	مخروط نوکدار محدب بسته
Concave function	تابع مقعر
Concave along rays	در امتداد شعاع ها مقعر
Cone	مخروط
Co-Normal	همنرمال
Convex along rays	در امتداد شعاع ها محدب
Convex function	تابع محدب
Co-radiant	هم رادیانت(هم تابشی)
Coupling function	تابع اتصال (مزدوج)
Difference	تفاضل
Domain	دامنه
Downward	رو به پایین
Duality	دوگان
Dual problem	مسئله دوگان
Elementry function	تابع مقدماتی
Epigraph	اپی گراف
Extremal	نهایی
Extension	توسیع
Global minimizer	مینیمم کننده کلی
Increasing	صعودی
Inf-abstrac-convex	اینف-محدب محض
ICR function	تابع همرادیانت صعودی
IPH function	تابع بطور مثبت همگن صعودی
Increasing co - radiant function	تابع همرادیانت صعودی
Left Polar	قطب چپ
Linear function	تابع خطی
Lower polar function	تابع قطب پایینی
Maximal Element	عنصر ماکسیمال

Monotonic .... همگن
Natural Order .... ترتیب طبیعی
Normal .... نرمال
Ordered .... مرتب شده
Pointed cone .... مخروط نوکدار
Polarity .... قطبیت
Positively Homogeneous .... همگن مثبت (بطور مثبت همگن)
Positively Homogeneous extension function .... تابع توسیع همگن مثبت
Proper .... سره
Radiant .... رآدیانت (تابشی)
Right Polar .... قطب راست
Support set .... مجموعه محافظ
Sub-differential .... زیر دیفرانسیل
Sub-gradiant .... زیر گرادیان
Topological vector space .... فضای برداری توپولوژیکی
Upper polar function .... تابع قطب بالایی
Upward .... رو به بالا

Abstract

In present thesis, the main discussion is "Optimization of the difference of ICR functions". We explain diffinitions and theorems about Abstract convexity of "Increasing co-radiant functions" and "Positively Homogeneous functions".
Also we study some properties of "Coupling function" which is defined by ICR and IPH functions. Then we introduce the relation between ICR functions and IPH functions and discusse about the Difference of two ICR functions and it's optimization.

Keywords: *Global optimization, Monotonic Analysis, Abstract Convexity, ICR function, IPH function, Support set, Sub-differential.*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics
Facualty of Mathematical Sciences

MS Thesis

Optimization of the Difference of ICR Functions

By:
Mojtaba Bakhtou

Supervisor:
Dr . Mehdi Iranmanesh

Advisor:
Dr . Alireza Nazemi

September 2012