بسمه تعالی

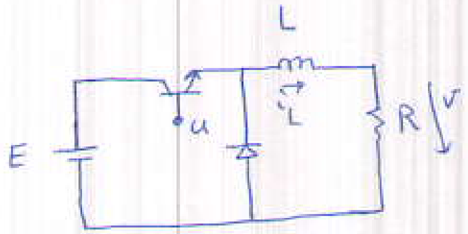
مدل‌سازی و کنترل مبدل‌های الکترونیک قدرت

۹۸/۱۱/۲۲

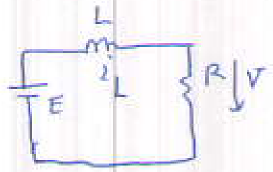
فرضیات

- سوئیچ‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ON-OFF
- المان‌های پسیو خطی و ثابت با زمان‌اند

مثال: مبدل باک Back



الف)



$$E = L\frac{di_L}{dt} + R i_L$$

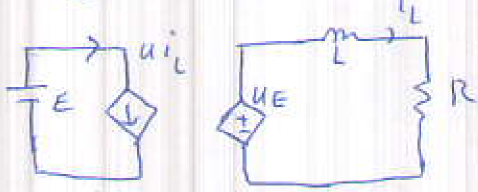
ب) E

$$L\frac{di_L}{dt} + R i_L = 0$$

مدل سوئیچی:

$$L\frac{di_L}{dt} + R i_L = uE$$

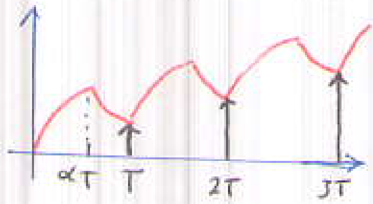
مدار معادل دقیق:



مدل نمونه‌برداری:

پیوسته (CCM)

ناپیوسته (DCM)



مدل میانگین:

$$\langle i_L \rangle_0 = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} i_L \, d\tau$$ میانگین لغزشی

$$\frac{d}{dt}\langle i_L \rangle_0 = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \frac{di_L}{dt}\, d\tau = \left\langle \frac{di_L}{dt} \right\rangle_0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\langle i_L \rangle_0 = -\frac{R}{L}\langle i_L \rangle_0 + \alpha\frac{E}{L}$$

مدل سیگنال بزرگ و سیگنال کوچک:

شکل کلی سیستم غیرخطی پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) \\ y = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

محاسبهٔ حالت ماندگار (dc)

نقطهٔ تعادل : با صفر قرار دادن u و مشتقات بدست می‌آید.

نقطهٔ کار : با صفر قرار دادن مشتقات برابر صفر و ورودی برابر مقدار ثابتی (دلخواه) بدست می‌آید.

$$y_e = g(u_e)$$

تشکیل مدل سیگنال کوچک :

$$\tilde{x} = x - x_e \qquad \tilde{u} = u - u_e \qquad \tilde{y} = y - y_e \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases} \qquad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e, u_e}, \ldots$$

مثال :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ y = x_1^2 + u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = x_{2e} = 0 \\ y = u_e \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_{1e} = u_e/2 \\ x_{2e} = -u_e/2 \\ y = 3u_e/4 \end{cases}$$

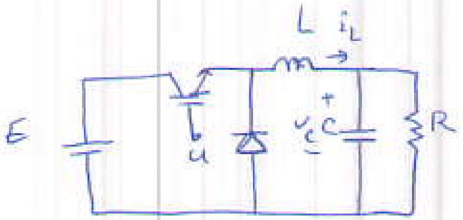
برای نقطهٔ تعادل (ب)(د)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -u_e \tilde{x}_1 + \frac{u_e}{2}\tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \\ \tilde{y} &= u_e \tilde{x}_1 + \tilde{u}_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{X}_1(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{u_e/2}{s + u_e} \qquad \frac{\tilde{X}_2(s)}{\tilde{X}_1(s)} = \frac{1}{s-1} \qquad \tilde{Y}(s) = u_e X_1(s) + \tilde{U}(s)$$

$\tilde{x}_2$ ناپایدار و $\tilde{x}_2$ مشاهده‌ناپذیر

مبدل کاهنده با تقریب مرتبهٔ ۲ :



$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = -Ri_L + E\,u(t) \\[2mm] C\dfrac{dv_C}{dt} = i_L - \dfrac{v_C}{R} \end{cases}$$

فصل ۲: مدل‌سازی سوئیچی

مدل‌سازی ریاضی : طبق مفروضات که قبلاً بیان شد مبدل الکترونیک قدرت بین N پیکره‌بندی جدا سوئیچ می‌کند.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \underset{n\times n}{A_i}\,x(t) + \underset{n\times p}{B_i}\,e(t) \qquad t_i \le t \le t_{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1}) = T$$

T پریود سوئیچینگ

t_i زمان‌های سوئیچینگ

توجه : u در این مدل‌سازی بصورت صریح ظاهر نمی‌شود

شکل فشرده‌تر :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{i=1}^{N}\left(A_i x(t) + B_i e(t)\right)h_i$$

h_i ها توابع اعتبار هستند و فقط یک h_i در هر لحظه برابر یک و بقیه صفرند.

برمبنای h ها سه کلاس مختلف وجود دارد

- h به زمان وابسته و به x وابسته نیست
- h 〃 x 〃 (زمان) 〃
- h به زمان و x وابسته است.

شکل دوخطی bilinear

$$\dot{x} = Ax + \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(B_k x + b_k)\cdot u_k}_{\text{بخش غیرخطی}} + d$$

یک نمایش فشرده‌تر از مدل سوئیچی است.

$$2^p \geq N$$

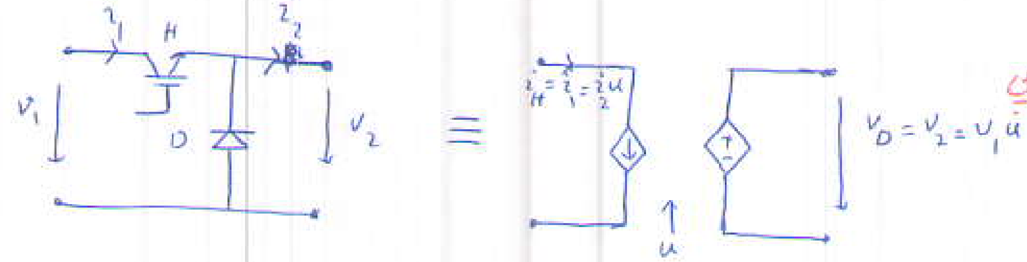
$$u = [u_1 \quad u_2 \cdots u_p]^T \xrightarrow{\text{خطی‌سازی}} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$$

$$\begin{cases} \tilde{A} = A + \sum_{k=1}^{p} B_k u_{ke} \\ \tilde{B} = \sum_{k=1}^{p} (B_k x_e + b_k) \end{cases}$$

نکته: درحالتی که فقط دو پیکره بندی وجود دارد، دو تابع اعتبار مکمل هم هستند.

$$h_1 = 1 - h_2$$

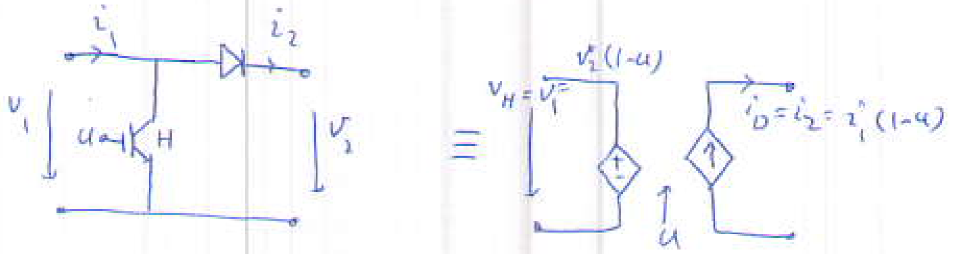
لذا نیز و برای مبدلهای DC/DC، $u = h_1 \in \{0, 1\}$ و برای مبدلهای DC/AC، $u = 2h_1 - 1 \in \{-1, 1\}$



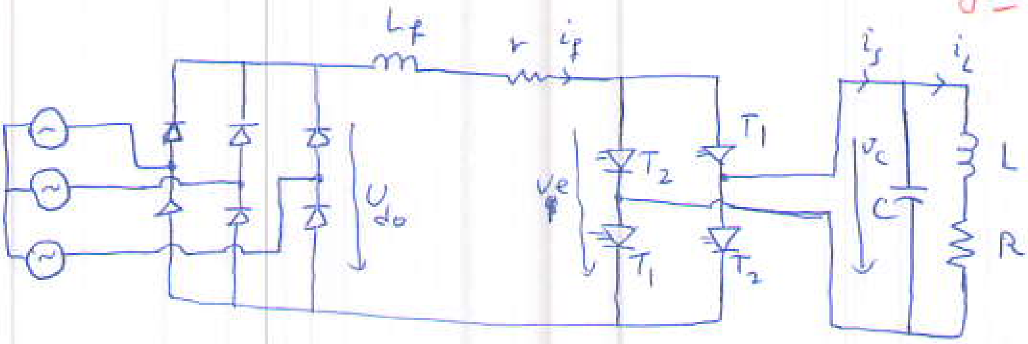
مکمیه کلید - تغیرهای سوئیچی

ولتاژ کلید

جریان دیود



مثال: کوره القایی یا گرمایش القایی (Induction Heating)



$$h_1 = \begin{cases} 1 & \text{اگر کلید } T_1 \text{ روشن باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad h_2 = \begin{cases} 1 & \text{اگر کلید } T_2 \text{ روشن باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$x = [i_f \quad v_c \quad i_L]^T \qquad U_{do} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V$$

(V ولتاژ فاز ورودی)

مکمل هم اند

$$\begin{cases} \dot{i}_f = \frac{1}{L_f}(U_{do} - v_e - r i_f) \\ \dot{v}_c = \frac{1}{c}(i_s - i_L) \\ \dot{i}_L = \frac{1}{L}(v_c - R i_L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_e = v_c \,,\ i_s = i_f & h_1 = 1 \,,\ h_2 = 0 \\ v_e = -v_c \,,\ i_s = -i_f & h_1 = 0 \,,\ h_2 = 1 \end{cases}$$

شکل سوئیچی مدل

$$\dot{x} = (A_1 x + B_1 E)\, h_1 + (A_2 x + B_2 E)\, h_2$$

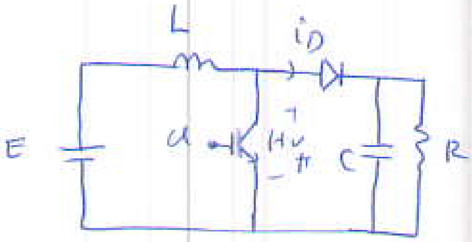
$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L_f} & -\frac{1}{L_f} & 0 \\ 1/c & 0 & -1/c \\ 0 & -1/L & -R/L \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -r/L_f & \frac{1}{L_f} & 0 \\ -1/c & 0 & 1/c \\ 0 & 1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = [\ 1/L_f \quad 0 \quad 0\ ] \qquad E = U_{do}$$

اگر تابع سوئیچینگ به صورت $u = 2h_1 - 1$ انتخاب شود فرم فشرده‌تر را داریم:

$$\dot{x} = Ax + Bxu + d \qquad A = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad B = \frac{A_1 - A_2}{2} \,,\ d = B_1 U_{do}$$

(ضرب $x.u$ دلیل غیرخطی بودن است.)



مثال: مبدل بوست (افزاینده Boost)

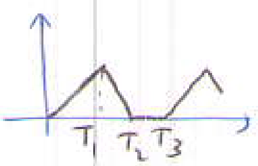
$$\begin{cases} \dot{i}_L = -(1-u)\, v_c/L + E/L \\ \dot{v}_c = (1-u)\, i_L/c - v_c/RC \end{cases} \qquad u = \begin{cases} 1 & H \text{ روشن} \\ 0 & H \text{ خاموش} \end{cases}$$

حل براساس متغیرهای سوئیچی:

$$v_H = \begin{cases} 0 & \text{اگر } H \text{ روشن باشد} \\ v_c & \text{〃 خاموش 〃} \end{cases} \qquad i_D = \begin{cases} 0 & H \text{ روشن} \\ i_L & H \text{ خاموش} \end{cases}$$

$$L\,\dot{i}_L = E - v_H$$
$$C\,\dot{v}_c = i_D - v_c/R \qquad \longrightarrow \dots$$

مدل‌سازی بوست در حالت ناپیوسته DCM



T_1
$$\begin{cases} \dot{i}_L = E/L \\ \dot{v}_c = -v_c/RC \end{cases}$$

T_2
$$\begin{cases} \dot{i}_L = E/L - v_c/L \\ \dot{v}_c = i_L/c - v_c/RC \end{cases}$$

T_3
$$\begin{cases} \dot{i}_L = i_L = 0 \\ \dot{v}_c = -v_c/RC \end{cases}$$

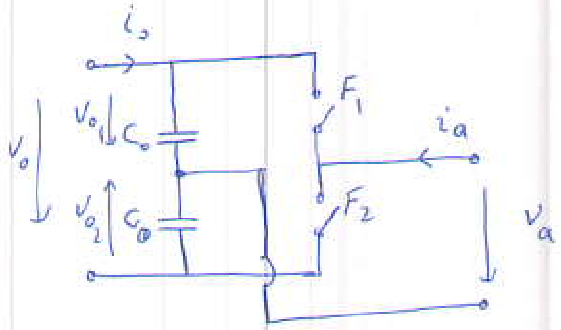
$$P > 1 \Leftarrow 2^P \geq N \Leftarrow N = 3$$

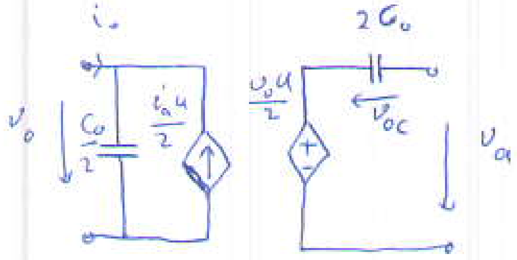
$$u_1 = \begin{cases} 1 & H \text{ روشن} \\ 0 & H \text{ خاموش} \end{cases} \qquad u_2 = \frac{1 + \mathrm{sgn}(i_L)}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{i}_L = u_2 \left(E/L - (1-u_1)\, v_c/L \right) \\ \dot{v}_c = u_2 (1-u_1) \dfrac{i_L}{C} - v_c/RC \end{cases}$$

مراجع از ص ۴۷ به بعد مطالعه شوند

اینورتر نیم پل





$$u = \begin{cases} 1 & F_1 \text{ روشن} \\ -1 & F_2 \text{ روشن} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_o \dot{v}_{o1} = i_o + \dfrac{1+u}{2} i_a \\ C_o \dot{v}_{o2} = -i_o + \dfrac{1-u}{2} i_a \end{cases}$$

$$v_a = \frac{1+u}{2} v_{o1} + \frac{1-u}{2} v_{o2}$$

$$v_o = v_{o1} - v_{o2} \qquad v_{oc} \triangleq \frac{v_{o1} + v_{o2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_a = v_{oc} + \dfrac{v_o}{2} u \\ 2C_o \dot{v}_{oc} = i_a \\ \dfrac{C_o}{2} \dot{v}_o = i_o + \dfrac{i_a}{2} u \end{cases}$$

فصل ۴
مدل میانگین

$$\dot{x} = Ax + \sum_{k=1}^{p} (B_k x + b_k)\, u_k + d$$ مدل سوئیچی

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_0 = A\langle x\rangle_0 + \sum_{k=1}^{p} (B_k \langle x\rangle_0 + b_k)\,\alpha_k + d$$ مدل میانگین

مثال: مدل افزاینده، قبل را در نظر بگیرید.

$$x_1 \triangleq \langle i_L\rangle_0 \qquad x_2 = \langle v_C\rangle_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(E - x_2(1-\alpha)\right) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 (1-\alpha) - \frac{x_2}{RC} \end{cases}$$

نقاط تعادل $\xrightarrow{\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0}$

$$\begin{cases} x_{1e} = \frac{E}{(1-\alpha_e)^2 R} \\ x_{2e} = \frac{E}{1-\alpha_e} \end{cases}$$

حول نقاط کار: $\rightarrow$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-\alpha_e}{L} \\ \frac{1-\alpha_e}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L(1-\alpha_e)} \\ -\frac{E}{(1-\alpha_e)^2 RC} \end{bmatrix} \tilde{\alpha}$$

$$\alpha'_e \triangleq 1 - \alpha_e$$

$$\Rightarrow H_{\alpha\to v_C}(s) = \frac{\langle \tilde{v}_C\rangle_0}{\tilde{\alpha}} = \frac{x_{2e}}{\alpha'_e}\,\frac{1 - s\frac{L\,x_{1e}}{x_{2e}\alpha'_e}}{s^2\frac{LC}{\alpha'^2_e} + s\frac{L}{R\alpha'^2_e} + 1}$$

wn^2/(s^2+2*xi*wn*s+wn^2)

1/((1/wn^2)s^2+(2*xi/wn)s+1)

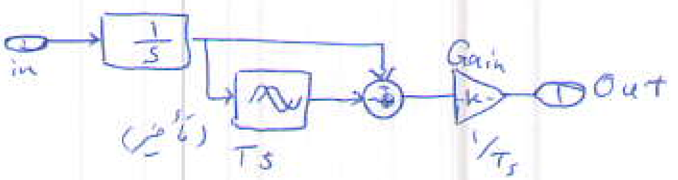
wn^2=alpha-p^2/(LC)

xi=?

نکات قابل توجه:

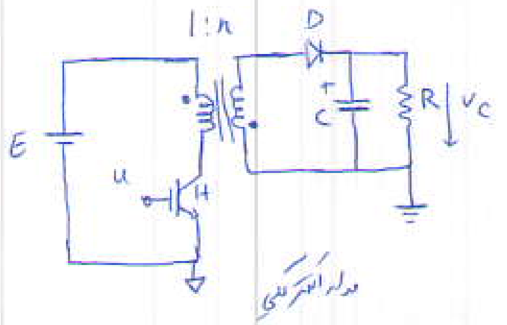
- بهره، ثابت زمانی، میرایی، فرکانس طبیعی و ... به نقطه کار بستگی دارد!!
- سیستم یک صفر سمت راست دارد!!

پیاده سازی بلوکی میانگین در سیمولینک

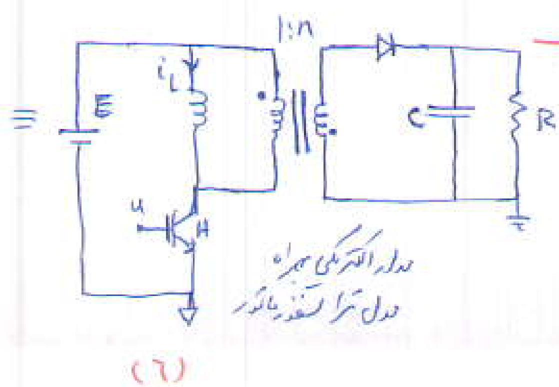


$$\langle f(t)\rangle_0 = \frac{1}{T_s}\int_{t-T_s}^{t} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T_s}\left(F(t) - F(t-T_s)\right)$$

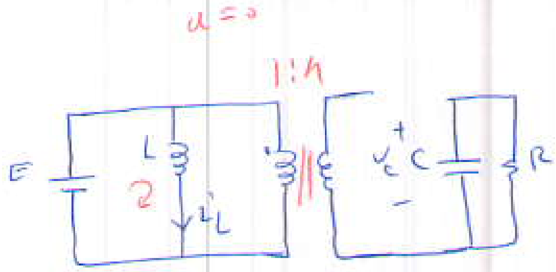
مثال: مدل فلای بک

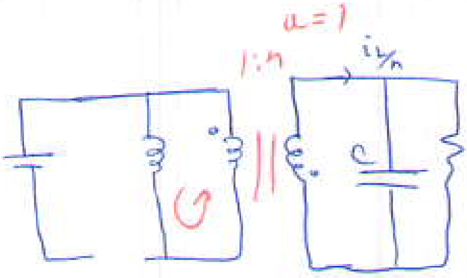


مدار الکتریکی



مدار الکتریکی همراه مدل ترانس ایده‌آل





$$u=1\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt}=E \\ C\dfrac{dv_c}{dt}=-\dfrac{v_c}{R}\end{cases} \qquad u=0\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}=-\dfrac{v_c}{n} \\ C\dfrac{dv_c}{dt}=\dfrac{i_L}{n}-\dfrac{v_c}{R}\end{cases}$$

مدل سوئیچی:

$$\begin{cases} L\dot{i}_L=-(1-u)\dfrac{v_c}{n}+uE \\ C\dfrac{dv_c}{dt}=(1-u)\dfrac{i_L}{n}-\dfrac{v_c}{R}\end{cases}$$

مدل میانگین: با قرار دادن $u=\alpha$ جایگزینی و متغیرهای حالت با مقدار میانگین آنها بدست می‌آید.

مدل غیرخطی است ($v_c\,u$ و $u\,i_L$ داریم) برای تحلیل و طراحی می‌توانیم حول نقطه کار خطی کنیم.

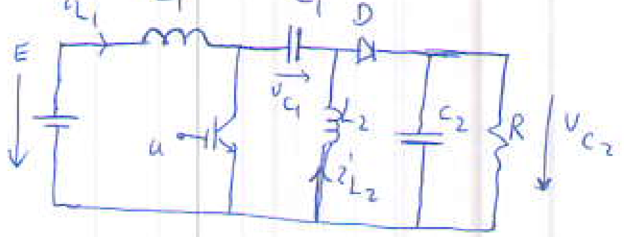
$$v_{ce}=n\frac{E_e\alpha_e}{1-\alpha_e}\quad,\quad i_{Le}=n^2\frac{\alpha_e}{(1-\alpha_e)^2}\frac{E_e}{R}$$

مدل خطی شده:

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{i}}_L\\ \dot{\tilde{v}}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1-\alpha_e}{nL}\\ \dfrac{1-\alpha_e}{nC} & -\dfrac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{i}_L\\ \tilde{v}_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{v_{ce}}{n}+E_e\right) & \dfrac{\alpha_e}{L}\\ -\dfrac{i_{Le}}{nC} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{E}\end{bmatrix}$$

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B \qquad \begin{bmatrix}H_{\alpha\to i_L} & H_{E\to i_L}\\ H_{\alpha\to v_c} & H_{E\to v_c}\end{bmatrix}$$

مثال: مبدل سپیک



$$\begin{cases} L_1\dot{i}_{L_1}=-(1-u)(v_{C_1}+v_{C_2})+E \\ C_1\dot{i}_{C_1}=(1-u)\,i_{L_1}-u\,i_{L_2} \\ L_2\dot{i}_{L_2}=u\,v_{C_1}-(1-u)\,v_{C_2} \\ C_2\dot{v}_{C_2}=(1-u)(i_{L_1}+i_2)-\dfrac{v_{C_2}}{R}\end{cases}$$

فصل ۵
مدل میانگین تعمیم یافته

برای مدل‌سازی مبدل‌های شامل بخش AC و نیز بررسی ریپل مبدل‌های DC نیاز به مدل هارمونیک‌های بالاتر از فرکانس صفر داریم.

اصل پایه

مدل‌سازی میانگین تعمیم یافته (GAM) بر پایه نمایش شکل موج با استفاده از سری فوریه مختلط است

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(t)\, e^{jk\omega t}$$

$$x_k(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\, e^{-jk\omega\tau}\, d\tau$$

ω فرکانس هارمونیک اصلی، x_k ضریب k امین هارمونیک

x_k میانگین لغزشی هارمونیک مرتبه k است.

$$x_k(t) \triangleq \langle x\rangle_k(t)$$

دو ویژگی اساسی:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_k(t) = \left\langle \frac{d}{dt}x\right\rangle_k(t) - jk\omega\langle x\rangle_k(t)$$

ضرب متغیرها

$$\langle x\cdot y\rangle_k(t) = \sum_i \langle x\rangle_{k-i}(t)\cdot\langle y\rangle_i(t)$$

اگر سیگنال شامل هارمونیک صفر و یک باشد:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_0(t) = \left\langle\frac{dx}{dt}\right\rangle_0(t)$$

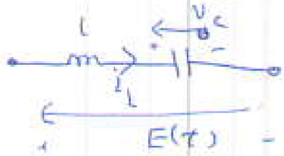
$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_1(t) = \left\langle\frac{dx}{dt}\right\rangle_1 - j\omega\langle x\rangle_k(t)$$

$$\langle x\cdot y\rangle_0(t) = \langle x\rangle_{-1}\langle y\rangle_1 + \langle x\rangle_1\langle y\rangle_{-1} + \langle x\rangle_0\langle y\rangle_0$$

$$\langle x\cdot y\rangle_1(t) = \langle x\rangle_1\langle y\rangle_0 + \langle x\rangle_0\langle y\rangle_1$$

مثال ۱:

$$\begin{cases}\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{E}{L} - \dfrac{v_c}{L}\\[2mm] \dfrac{d}{dt}v_c = \dfrac{i_L}{C}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{d}{dt}\langle i_L\rangle_1 = -j\omega\langle i_L\rangle_1 + \dfrac{\langle E\rangle_1}{L} - \dfrac{\langle v_c\rangle_1}{L}\\[2mm] \dfrac{d}{dt}\langle v_c\rangle_1 = -j\omega\langle v_c\rangle_1 + \dfrac{\langle i_L\rangle_1}{C}\end{cases}$$



در حالت ماندگار (ss)

$$\frac{d}{dt}\langle i_L\rangle_1 = \frac{d}{dt}\langle v_c\rangle_1 = 0$$

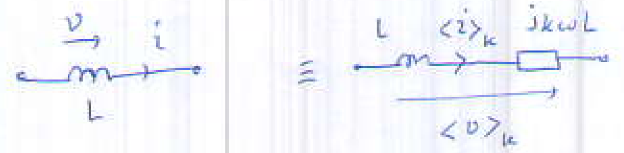
$$\langle E\rangle_1 = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\langle i_L\rangle_1$$

معادله فوق هم معادله فازوری است که یک حالت خاص GAM است.

سیگنال $x(t)$ را در نظر بگیرید. اگر فقط هارمونیک صفر و یک را در نظر بگیریم آنگاه

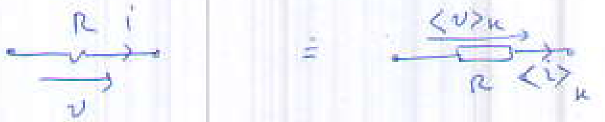
$$x(t) \approx \langle x\rangle_0 + 2\left[\mathrm{Re}(\langle x\rangle_1)\cos\omega t - \mathrm{Im}(\langle x\rangle_1)\sin\omega t\right]$$

مدل پیوسته:



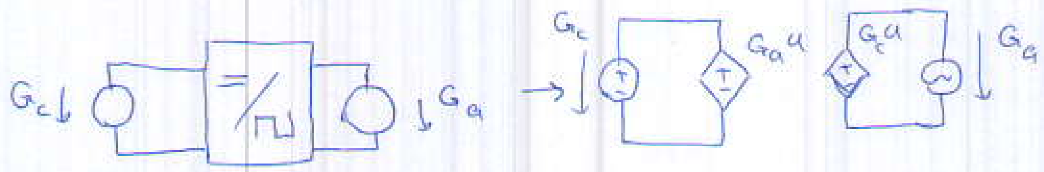
$$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \langle v\rangle_k = L\left\langle \frac{di}{dt}\right\rangle_k = jk\omega L\langle i\rangle_k + L\frac{d\langle i\rangle_k}{dt}$$

$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow \langle i\rangle_k = C\left\langle\frac{dv}{dt}\right\rangle_k = jk\omega C\langle v\rangle_k + C\frac{d\langle v\rangle_k}{dt}$$



$$\langle v\rangle_k = R\langle i\rangle_k$$

مبدل DC/AC



در بخش AC:

$$\langle G_a\rangle_1 \quad , \quad \langle G_c \cdot u\rangle_1$$

$$\langle G_c u\rangle_1 = \langle G_c\rangle_0 \langle u\rangle_1 + \langle G_c\rangle_1 \langle u\rangle_0$$

در بخش DC:

$$\langle G_c\rangle_0 \quad , \quad \langle G_a \cdot u\rangle_0$$

$$\langle G_a \cdot u\rangle_0 = \langle G_a\rangle_0 \langle u\rangle_0 + \langle G_a\rangle_1 \langle u\rangle_{-1} + \langle G_a\rangle_{-1}\langle u\rangle_1$$

معمولاً در مبدل‌های DC/AC، سیگنال u مؤلفه dc صفر دارد $\langle u\rangle_0 = 0$ بنابراین معادلات فوق ساده می‌شوند.

توابع سوئیچینگ

توابع سوئیچینگ معمولاً از نوع مربعی هستند

توابع سوئیچینگ وابسته به زمان

$$u(t) = \mathrm{Sgn}(\sin(\omega t))$$

$$\langle u\rangle_1 = \frac{2}{\pi j}$$

اگر نسبت به مبدأ جابجایی فاز داشته باشد آنگاه:

$$\langle u\rangle_1 = \frac{2}{\pi j} e^{j\delta}$$

توابع سوئیچینگ وابسته به متغیر حالت

یک مثال از توابع سوئیچینگ متعلق به این کلاس، دیود معمولی است.

$$u(t) = \mathrm{Sgn}(x(t))$$

اگر $x(t)$ نسبت به مبدأ به اندازه φ جابجا شده باشد:

$$\langle u\rangle_1 = \frac{2}{\pi j} e^{j\varphi}$$

توابع سوئیچینگ وابسته به متغیرهای حالت و زمان

یک مبدل تریستوری مثالی از این کلاس است.

$$u(t) = \mathrm{Sgn}(x(t)\cdot \underbrace{v(\delta)}_{\text{تابع تأخیر}})$$

جابجایی x

$$\langle u\rangle_1 = \frac{2}{\pi j} e^{j(\varphi-\delta)}$$

$$u(t) = 2u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

u_2: تأخیر $\pi/3$ — u_3: تقدم $\pi/3$

$$\langle u \rangle_1 = \frac{2}{\pi j}\left(2 + e^{-j\pi/3} + e^{+j\pi/3}\right) = \frac{6}{\pi j}$$

رویکرد تحلیلی (معادلات سوئیچی به میانگین)

ابتدا برای معادلات سوئیچی داشتیم

$$\dot{x} = Ax + \sum_{n=1}^{P} u_n (Bx + b) + d$$

(میانگین فازور مرتبه صفر و اول)

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\langle x\rangle_0 = A\langle x\rangle_0 + \sum_{n=1}^{P}(B\langle u_n x\rangle_0 + \langle u_n b\rangle_0) + \langle d\rangle_0 \\ \frac{d}{dt}\langle x\rangle_1 = -j\omega\langle x\rangle_1 + A\langle x\rangle_1 + \sum_{n=1}^{P}(B\langle u_n x\rangle_1 + \langle u_n b\rangle_1) + \langle d\rangle_1 \end{cases}$$

میانگین فازور مرتبه صفر حقیقی است ولی مرتبه اول شامل بخش حقیقی و موهومی است که باید از هم جدا شوند

رابطه مدل میانگین تعمیم یافته و شکل موج واقعی

فرض کنید $y(t)$ یک متغیر AC است که اطلاعات مورد نظر آن در هارمونیک اصلی می‌باشد

$$y(t) \approx \langle y\rangle_1 e^{j\omega t} + \langle y\rangle_{-1} e^{-j\omega t}$$

$$\Rightarrow y(t) \approx 2\left[Re\langle y\rangle_1 \cos\omega t - Im\langle y\rangle_1 \sin\omega t\right]$$

با قرار دادن $x_1 \triangleq Re\langle y\rangle_1$ و $x_2 = Im\langle y\rangle_1$ داریم:

$$y(t) \approx 2(x_1\cos\omega t - x_2\sin\omega t)$$

استخراج سیگنال متغیر با زمان حقیقی از مدل تعمیم یافته

می‌توان از رابطه فوق استفاده کرد

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{y} = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad \varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\frac{x_1}{x_2}\right) & x_2 < 0 \\ \pi + \tan^{-1}(-x_1/x_2) & x_2 > 0 \\ & x_2 \neq 0 \end{cases}$$

اگر $x_2 = 0 \Rightarrow y(t) \approx 2x_1\cos\omega t = 2x_1\sin(\omega t - \frac{3\pi}{2})$

استخراج مدل تعمیم یافته از سیگنال متغیر با زمان حقیقی

- بخش حقیقی

با ضرب $y(t)$ در $\cos\omega t$ و فیلتر آن x_1 بدست می‌آید

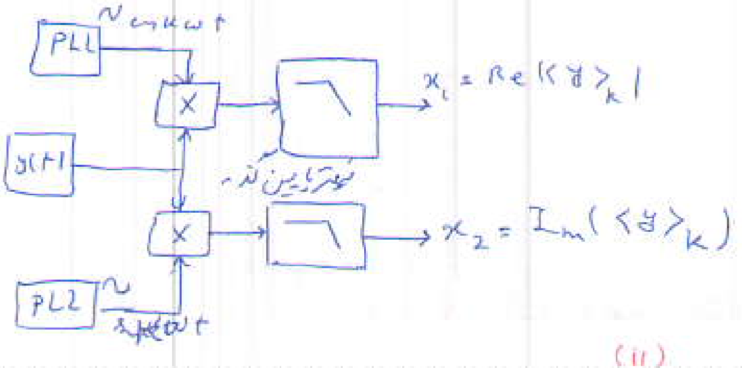
$$x_1 = Re\langle y\rangle_1$$

$$y(t)\cos\omega t = x_1 + x_1\cos 2\omega t \underbrace{-2x_2\sin\omega t\cos\omega t}_{-x_2\sin 2\omega t}$$

- بخش موهومی

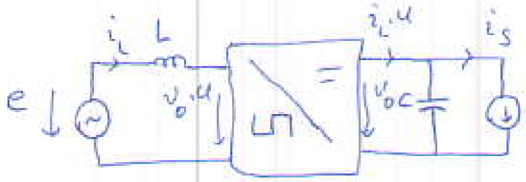
با ضرب $y(t)$ در $\sin\omega t$ و فیلتر بدست می‌آید.

$$x_2 = Im\langle y\rangle_1$$



محاسبه مدلهای الکترونیک قدرت متغیرهای AC با مدل تعمیم یافته

منظور از الکترونیک قدرت، تحقیق d و q متغیرات. با مثال زیر بحث را ادامه می‌دهیم.



مثال: مدار اینورتر شکل زیر را در نظر بگیرید:

$u \in \{-1, 1\}$

اگر u سیگنال مربعی با تاخیر فاز α نسبت به e باشد آنگاه:

$$\langle u\rangle_1 = \frac{2}{\pi j} e^{j\alpha}$$

معادلات دینامیکی

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = e - v_0\cdot u \\ C\dfrac{dv_0}{dt} = i_L\cdot u - i_s \end{cases}$$

اگر فقط هارمونیک اول متغیرهای AC و میانگین متغیر DC مورد نظر باشد از معادلات فوق میانگین هارمونیک می‌گیریم:

جملات تزویج

$$\begin{cases} \dfrac{d\langle i_L\rangle_1}{dt} = -j\omega\langle i_L\rangle_1 + \frac{1}{L}\left(\langle e\rangle_1 - \langle v_0\cdot u\rangle_1\right) \\ \dfrac{d\langle v_0\rangle_0}{dt} = \frac{1}{C}\left(\langle i_L\cdot u\rangle_0 - \langle i_s\rangle_0\right) \end{cases}$$

جملات تزویج

$x_1 \triangleq Re\langle i_L\rangle_1 \quad x_2 \triangleq Im\langle i_L\rangle_1 \quad \cancel{x_3 = \langle v_0\rangle_0}$

$\langle v_0 u\rangle_1 = \frac{2}{j\pi} e^{j\alpha}\langle v_0\rangle_0 \qquad \langle i_L\cdot u\rangle_0 = \frac{4}{\pi}\left(x_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha\right) = \langle i_L\rangle_{-1}\langle u\rangle_1 + \langle i_L\rangle_1\langle u\rangle_{-1}$

Ê دامنه موج سینوسی ورودی (e(t))

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \omega x_2 - \langle v_0\rangle_0\cdot\frac{2}{\pi L}\cos\alpha \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega x_1 - \dfrac{\hat{E}}{2L} + \langle v_0\rangle_0\frac{2}{\pi L}\cos\alpha \\ \dfrac{d\langle v_0\rangle_0}{dt} = \dfrac{4}{\pi C}\cdot\left(x_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha\right) - \dfrac{\langle i_s\rangle_0}{C} \end{cases}$$

که متغیر AC ، بردار جریان (فازور) با فرکانس ω است، مؤلفه‌های d,q در واقع تصویر این بردار روی محور جریان سنکرون با ω بدست می‌آیند.

$e(t) = \hat{E}\sin\omega t$

$i_L = I_L\sin(\omega t+\theta)$

$P = E\cdot I_L\cos\theta = E\cdot i_d$

$i_L = i_d\sin\omega t + i_q\sin(\omega t+\pi/2) = i_d\sin\omega t + i_q\cos\omega t$

$i_d = \bar{i}_L\cos\theta \qquad i_q = \bar{i}_L\sin\theta$

مقدار فازور

صحیح

$$\Rightarrow \begin{cases} i_d = -2x_2 \\ i_q = 2x_1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{i_q}{2} \\ x_2 = -\frac{i_d}{2} \end{cases}$$

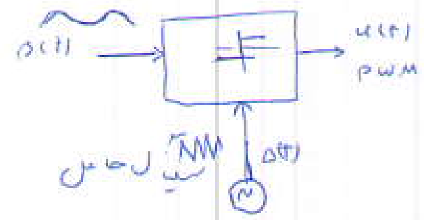
$i_d = 2(i_L\sin\omega t)_f$

فیلتر شده

$i_q = 2(i_L\cos\omega t)_f$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_d}{dt} = \omega i_q + \dfrac{\hat{E}}{L} - \langle v_0\rangle_0\dfrac{4}{\pi L}\cos\alpha \\ \dfrac{di_q}{dt} = -\omega i_d - \langle v_0\rangle\dfrac{4}{\pi L}\sin\alpha \\ \dfrac{d\langle v_0\rangle_0}{dt} = -\dfrac{2}{\pi C}\left(i_d\cos\alpha + i_q\sin\alpha\right) - \dfrac{\langle i_s\rangle_0}{C} \end{cases}$$

مبدل‌های کنترل شده با PWM



$$u(t) = \mathrm{sgn}(\beta(t) - \Delta(t)) = \begin{cases} 1 & \beta(t) > \Delta(t) \\ -1 & \beta(t) < \Delta(t) \end{cases}$$

مثال: مبدل تک فاز

$$\begin{cases} L \left\langle \frac{di_L}{dt} \right\rangle_1 = \langle e \rangle_1 - \langle v_0 u \rangle_1 \\ C \left\langle \frac{dv_0}{dt} \right\rangle_0 = \langle i_L u \rangle_0 - \langle i_s \rangle_0 \end{cases}$$

سیگنال $e(t)$ به عنوان مبدأ فاز انتخاب می‌شود

$$e(t) = E \sin \omega t \rightarrow \langle e \rangle_1 = -\frac{j}{2} E$$

$$\langle i_L \rangle_1 = x_1 + j x_2$$

$$\langle u \rangle_1 = u_1 + j u_2$$

$$\begin{cases} L \dot{x}_1 + jL \dot{x}_2 = -j\omega L (x_1 + j x_2) - j\frac{E}{2} - \langle v \rangle_0 (u_1 + j u_2) \\ C \langle \dot{v}_0 \rangle_0 = 2 x_1 u_1 + 2 x_2 u_2 - \langle i_s \rangle_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\dot{x}_1 = L\omega x_2 - \langle v_0 \rangle_0 u_1 \\ L\dot{x}_2 = -L\omega x_1 - \frac{E}{2} - \langle v_0 \rangle_0 u_2 \\ C \langle \dot{v}_0 \rangle_0 = 2 x_1 u_1 + 2 x_2 u_2 - \langle i_s \rangle_0 \end{cases}$$

واضح است که هارمونیک فرکانس مرتبه اول سیگنال u روی یک پریود سوئیچینگ

$$\langle u \rangle_1 = \beta(t)$$

(به لزوم علامت است)