



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۱۱/۱۱

وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس : سیدرضا موسوی

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس ریاضی ۲- فنی (گروه ۴)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

توجه :

مدت امتحان را ۹۰ دقیقه در نظر بگیرید. ۳۰ دقیقه برای تهیه و ارسال فایل اضافه شده است.

بر روی تمام برگه‌ها شماره سوال مربوطه و مشخصات خودتان را بنویسید. فقط یک فایل PDF با حجم کم ارسال کنید.

اگر لازم باشد من به جای شما فایل PDF درست کنم متناسب با وقتی که بگذارم از نمره شما کم خواهم کرد.

سوال ۱- انتگرال دوگانه $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\frac{x}{y}\right) e^{\left(\frac{x^2}{y^2}\right)} dy dx$ را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

سوال ۲- حجم جسم صلبی را بیابید که از پایین به کره $\rho = 2 \cos \varphi$ و از بالا به مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ محدود شده است. (۲۰ نمره)

سوال ۳- مساحت بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید که در یک هشتم اول محدود به صفحه $z = 2$ و سهمی $z = x^2 + y^2$ است. (۲۰ نمره)

سوال ۴- ابتدا نشان دهید که انتگرال $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,2)} \left(2x \ln y - \frac{1}{x^2 y z}\right) dx + \left(\frac{x^2}{y} - \frac{1}{xy^2 z}\right) dy - \frac{1}{xyz^2} dz$ مستقل از مسیر (پایستار) است و سپس آن را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

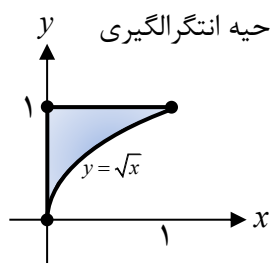
سوال ۵- انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ یعنی، کار حاصل از گردش میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + e^x \ln y)\vec{i} + \frac{e^x}{y}\vec{j}$ روی منحنی بسته C و در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را بیابید. منحنی C ، مرز ناحیه‌ای است که توسط منحنی $y = x^2 + 1$ و خط $y = 2x + 1$ محدود شده است. (۲۰ نمره)

سوال ۶- انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ یا شارّ برون‌سوی میدان برداری $\vec{F} = (6x^2 - 2xy)\vec{i} + (2y + x^2 z)\vec{j} + 4x^2 y^3 \vec{k}$ گذرنده از سطح S را محاسبه کنید.

S سطح خارجی ناحیه بسته $V = \{(x, y, z) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$ است. (۲۰ نمره)

موفق باشید

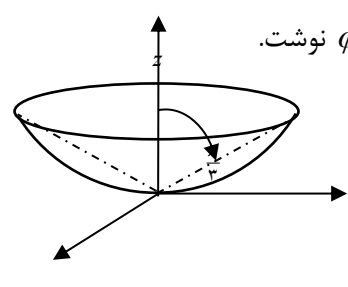
پاسخ سوال ۱: برای حل این انتگرال باید ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهیم. برای این کار بهتر است که ناحیه انتگرالگیری را رسم کنیم.



$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y^2}} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \left(\frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y^2}} dx dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{y}\right) e^{\frac{x}{y^2}} \right]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{y}\right) e^{y^2} - \frac{y}{y} \right] dy = \left[\frac{1}{4} e^{y^2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{e}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e-2}{4}$$

پاسخ سوال ۲: معادله مخروط در دستگاه کروی به صورت $\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi$ و یا $\varphi = \frac{\pi}{3}$ نوشت. می توان دید که مبدا مختصات یک نقطه اشتراک دو رویه است. بقیه نقاط اشتراک دو رویه به صورت نقاط $(1, \theta, \frac{\pi}{3}) = (\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3}, \theta, \frac{\pi}{3})$ در مختصات کروی هستند و یک دایره با شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می سازند.



حجم ناحیه مورد نظر برابر است با $V = \iiint_R dx dy dz$ و برای محاسبه آن از مختصات کروی استفاده می کنیم.

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/3} \int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/3} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \sin \varphi \right]_0^{\sqrt{3}} d\varphi d\theta$$

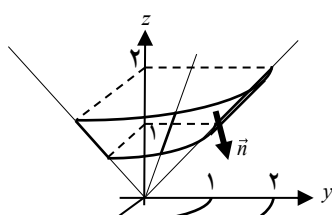
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/3} \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^3 \varphi d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[-\frac{1}{12} \cos^3 \varphi \right]_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{12} \pi$$

محاسبه حجم با استفاده از مختصات استوانه ای:

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{3}/2} \int_{z=1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{3}/2} r dz dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{r^2}{\sqrt{3}} - r + r\sqrt{1-r^2} \right) dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3\sqrt{3}} - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{3} (\sqrt{1-r^2})^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{12} \pi$$

پاسخ سوال ۳: اشتراک صفحه $z=2$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ یک دایره افقی با شعاع ۲ است که تصویر آن بر صفحه xy دایره $x^2+y^2=4$ است. همچنین، اشتراک سهمیگون $z=x^2+y^2$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ یک دایره افقی با شعاع ۱ است که تصویر آن بر صفحه xy دایره $x^2+y^2=1$ است.



سطح مورد نظر بر روی مخروط، یعنی قسمتی از مخروط که به سهمیگون $z=x^2+y^2$ ، صفحه $z=2$ و دو صفحه مختصات xz و yz محدود شده است را S می نامیم. آنگاه تصویر سطح S بر روی صفحه xy ناحیه محدود به دو ربع دایره با شعاع های برابر ۱ و ۲ است که آن را D می نامیم.

بردار یکه عمود بر سطح S را به کمک بردار گرادیان مخروط مخروط محاسبه می کنیم.

$$\text{grad } z = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) \rightarrow \vec{N} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) \rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right)$$

می خواهیم تصویر S بر صفحه xy را به عنوان ناحیه انتگرالگیری در نظر بگیریم، داریم:

$$d\sigma = \frac{1}{|\cos \gamma|} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

و در نتیجه:

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^2 \sqrt{2} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{\sqrt{2}} \right]_{r=1}^2 d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{3}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

پاسخ سوال ۴: برای بررسی پایستاری تابع برداری $\vec{F} = (2x \ln y - \frac{1}{x^2 y z})\vec{i} + (\frac{x}{y} - \frac{1}{xy^2 z})\vec{j} - \frac{1}{xyz^2}\vec{k}$ باید $\text{curl } \vec{F}$ را

محاسبه کنیم.

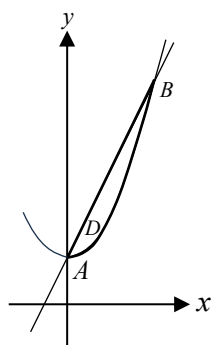
$$\text{curl } \vec{F} = (\frac{1}{xy^2 z^2} - \frac{1}{xy^2 z^2})\vec{i} + (\frac{1}{x^2 y z^2} - \frac{1}{x^2 y z^2})\vec{j} + (\frac{2x}{y} + \frac{1}{x^2 y^2 z} - \frac{2x}{y} - \frac{1}{x^2 y^2 z})\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان پایستار است و می‌توانیم ببینیم که اگر $f(x, y, z) = x^2 \ln y + \frac{1}{xyz}$ آنگاه داریم:

$$\vec{F} = \text{grad } f(x, y, z)$$

با توجه به $\text{curl } \vec{F} = 0$ ، انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ یک انتگرال مستقل از مسیر است و خواهیم داشت

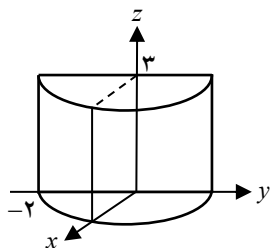
$$\int_{(1,2,1)}^{(2,1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(2,1,2) - f(1,2,1) = 2^2 \ln 1 + \frac{1}{2 \times 1 \times 2} - 1^2 \ln 2 - \frac{1}{1 \times 2 \times 1} = \frac{1}{4} - \ln 2 - \frac{1}{2} = -\ln 2 - \frac{1}{4}$$



پاسخ سوال ۵: ناحیه محدود به منحنی $y = x^2 + 1$ و خط $y = x + 1$ یک ناحیه بسته است که آن را D می‌نامیم. نقطه‌های برخورد سهمی و خط $A = (0, 1)$ و $B = (2, 5)$ هستند.

دو تابع $p(x, y) = y^2 + e^x \ln y$ و $q(x, y) = \frac{e^x}{y}$ در ناحیه D و مرز آن تعریف شده و مشتقپذیر هستند. پس شرایط استفاده از قضیه گرین وجود دارد.

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C (y^2 + e^x \ln y) dx + \frac{e^x}{y} dy = \iint_D (\frac{e^x}{y} - 2y - \frac{e^x}{y}) dx dy = - \iint_D 2y dx dy \\ &= - \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2+1}^{x+1} 2y dy dx = - \int_{x=0}^2 y^2 \Big|_{y=x^2+1}^{x+1} dx = - \int_{x=0}^2 [(x+1)^2 - (x^2+1)^2] dx \\ &= \int_{x=0}^2 (x^4 - 2x^3 - 4x) dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{4} x^4 - 2x^2 \Big|_{x=0}^2 = \frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 8 = \frac{-104}{15} \end{aligned}$$



پاسخ سوال ۶: ناحیه V درون یک نیم‌استوانه با شعاع ۲ و ارتفاع ۳ است.

برای محاسبه این انتگرال از قضیه واگرایی (دیورژانس) استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iiint_V (1 \cdot 2x - 2y + 2) dx dy dz$$

با توجه به ناحیه انتگرالگیری، از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{r=0}^2 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^3 (1 \cdot 2r \cos \theta - 2r \sin \theta + 2) r dz d\theta dr = 2 \int_{r=0}^2 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^3 (2r^2 \cos \theta - 2r^2 \sin \theta + r) dz d\theta dr \\ &= 2 \int_{r=0}^2 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2r^2 \sin \theta + r^2 \cos \theta + r\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta dr \\ &= 2 \int_{r=0}^2 (1 \cdot 2r^2 + \pi r) dr = 2 \left[\frac{2}{3} r^3 + \frac{\pi}{2} r^2 \right]_0^2 = 2 \left(\frac{16}{3} + 2\pi \right) = \frac{32}{3} + 4\pi \end{aligned}$$