



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۱۱/۵

وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس : سیدرضا موسوی

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل (گروه ۳)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

توجه :

پاسخنامه را باید در قالب یک فایل PDF ارسال نمایید.

بر روی تمام برگه‌ها شماره سوال مربوطه و مشخصات خودتان را بنویسید.

مدت واقعی آزمون ۹۰ دقیقه است و ۳۰ دقیقه برای تهیه فایل و ارسال آن اضافه شده است. ارسال فایل را به موقع انجام دهید.

سوال ۱- دستگاه معادلات دیفرانسیل مقابل را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} (D-1)x + 4y = 5t \\ 2x + (D-3)y = 3e^{-t} \end{cases}$$

سوال ۲- معادله دیفرانسیل $x''y'' + 4xy' + 2y = x^{-3}$ را حل کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۳- - جواب عمومی معادله $(2+x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0$ را حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید. (۱۵ نمره)

سوال ۴- تابع $y_1 = e^x$ یک جواب معادله $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ است. (۱۵ نمره)

جواب عمومی معادله $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$ را به دست آورید.

سوال ۵- الف) تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{2}{s^2+4}e^{\frac{-\pi}{4}s}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t e^{-3x}(x^2 + \sin x)dx$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

سوال ۶- معادله انتگرالی $x(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du = 3$ را حل کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۷- معادله زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' - 2y' + y = \begin{cases} 4e^t & t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: ابتدا مجهول y را حذف می‌کنیم.

$$(D-3) \begin{cases} (D-1)x + 4y = 5t \\ 2x + (D-3)y = 3e^{-t} \end{cases} \rightarrow (D^2 - 4D - 5)x = 5 - 15t - 12e^{-t}$$

اکنون به یک معادله یک مجهولی رسیده‌ایم و می‌توانیم جواب عمومی آن را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب همگن قرار می‌دهیم

$$D^2 - 4D - 5 = 0 \quad \text{که دو ریشه حقیقی ۵ و -۱ دارد و در نتیجه داریم}$$

$$\boxed{x_h = ae^{5t} + be^{-t}} \quad \text{و به کمک معادله اول نتیجه می‌گیریم که:}$$

جواب خصوصی معادله برابر است با

$$x_p = \frac{1}{D^2 - 4D - 5} (5 - 15t - 12e^{-t}) = \frac{1}{-5(1+D)(1-\frac{D}{5})} (5 - 15t) - \frac{12}{(D+1)(D-5)} e^{-t}$$

$$= (1-D)(1+\frac{D}{5})(3t-1) + \frac{2}{D+1} e^{-t} = (1-\frac{4D}{5})(3t-1) + 2e^{-t} \frac{1}{D}(1) \rightarrow \boxed{x_p = 3t - \frac{17}{5} + 2te^{-t}}$$

$$y_p = \frac{1}{4} [5t - (D-1)x_p] = \frac{1}{4} [5t - \frac{32}{5} + (4t-2)e^{-t}] \rightarrow \boxed{y_p = 2t - \frac{8}{5} + te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

اکنون دستگاه معادلات به‌طور کامل حل شده است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\begin{cases} x_g = ae^{5t} + be^{-t} + 3t - \frac{17}{5} + 2te^{-t} \\ y_g = -ae^{5t} + \frac{1}{2}be^{-t} + 2t - \frac{8}{5} + te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$$

پاسخ سوال ۲: این معادله را به دو روش می‌توان حل کرد.

روش اول (تغییر پارامتر): ابتدا معادله همگن نظیر آن یعنی $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ را حل می‌کنیم که یک معادله اویلر است.

معادله مشخصه آن $r^2 + 3r + 2 = 0$ است که دو ریشه حقیقی -۱ و -۲ دارد. پس جواب معادله همگن برابر است با:

$$\boxed{y_h = ax^{-1} + bx^{-2}}$$

جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می‌کنیم.

$$y_1 = x^{-1}, y_2 = x^{-2}, r(x) = x^{-5} \rightarrow w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -x^{-4}$$

$$y_p = x^{-1} \int \frac{-x^{-2} \times x^{-5}}{-x^{-4}} dx + x^{-2} \int \frac{x^{-1} \times x^{-5}}{-x^{-4}} dx$$

$$= x^{-1} \int x^{-3} dx + x^{-2} \int -x^{-2} dx = x^{-1} (\frac{-1}{2} x^{-2}) + x^{-2} (x^{-1}) = \frac{1}{2} x^{-3}$$

$$\boxed{y_g = ax^{-1} + bx^{-2} + \frac{1}{2}x^{-3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{1}{2x^3}}$$

جواب عمومی معادله عبارت است از:

روش دوم (تغییر متغیر): ابتدا با تغییر متغیر $x = e^t$ معادله را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم.

$$x = e^t \rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}, x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \rightarrow y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}$$

اکنون به کمک روش عملگر D داریم $(D^2 + 3D + 2)y = e^{-3t}$. معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از

$D^2 + 3D + 2 = 0$ که دو ریشه حقیقی ۱- و ۲- دارد. پس جواب همگن برابر است با: $y_h = ae^{-t} + be^{-2t}$

جواب خصوصی معادله هم برابر است با: $y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} e^{-3t} = \frac{1}{9 - 9 + 2} e^{-3t} = \frac{1}{2} e^{-3t}$

پس جواب عمومی معادله با ضرایب ثابت برابر $y_g = ae^{-t} + be^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$ و جواب معادله اصلی برابر است با:

$$y_g = ax^{-1} + bx^{-2} + \frac{1}{2} x^{-3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{1}{2x^3}$$

پاسخ سوال ۳: نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله است بنابر این، معادله دارای یک جواب به صورت سری توانی

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{است و داریم:}$$

$$(2+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{این جواب را در معادله قرار می دهیم:}$$

ضرایب پشت زیگماها را به داخل زیگما منتقل می کنیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n = 0$$

توان های x در تمام زیگماها را به توان n تبدیل می کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n + 5n a_n + 3a_n] x^n = 0$$

اکنون داریم

$$2(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+3)(n+1) a_n = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

که نتیجه می دهد

$$a_{n+2} = -\frac{n+3}{2(n+2)} a_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

و یا

با قرار دادن مقادیر مختلف n تعدادی از ضرایب را محاسبه می کنیم.

$$a_2 = -\frac{3}{4} a_0, \quad a_3 = -\frac{2}{3} a_1, \quad a_4 = -\frac{5}{8} a_2 = \frac{15}{32} a_0, \quad a_5 = -\frac{3}{5} a_3 = \frac{2}{5} a_1, \quad a_6 = -\frac{7}{12} a_4 = -\frac{35}{128} a_0, \quad a_7 = -\frac{4}{7} a_5 = -\frac{8}{35} a_1, \dots$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری جواب داریم:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{15}{32} x^4 - \frac{35}{128} x^6 + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 - \frac{8}{35} x^7 + \dots \right)$$

پاسخ سوال ۴: با معلوم بودن یک جواب معادله همگن خطی، می توانیم یک جواب مستقل دیگر را به کمک فرمول آبل پیدا کنیم.

$$y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{x+1}{x} dx} dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{x+\ln x} dx = e^x \int x e^{-x} dx = -(x+1)$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 (x+1)$$

جواب معادله همگن برابر است با:

جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می کنیم.

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x+1, \quad r(x) = x e^x \rightarrow w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = -x e^x$$

$$y_p = e^x \int \frac{-(x+1) \times x e^x}{-x e^x} dx + (x+1) \int \frac{e^x \times x e^x}{-x e^x} dx$$

$$= e^x \int (x+1) dx - (x+1) \int e^x dx = e^x \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) - (x+1) e^x = \left(\frac{1}{2} x^2 - 1 \right) e^x$$

$$y_g = a e^x + b(x+1) + \left(\frac{1}{2} x^2 - 1 \right) e^x = c e^x + b(x+1) + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از :

پاسخ سوال ۵: الف)

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + 4} e^{-\frac{\pi}{4}s} \right\} = u_{\frac{\pi}{4}}(t) \left[L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\} \right]_{t \rightarrow t - \frac{\pi}{4}}$$

$$= u_{\frac{\pi}{4}}(t) [\sin 2t]_{t \rightarrow t - \frac{\pi}{4}} = u_{\frac{\pi}{4}}(t) \sin 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -u_{\frac{\pi}{4}}(t) \cos 2t$$

ب)

$$L\{f(t)\} = L\left\{ \int_0^t e^{-3x} (x^2 + \sin x) dx \right\} = \frac{1}{s} L\{e^{-3x} (x^2 + \sin x)\}$$

$$= \frac{1}{s} \left[L\{x^2 + \sin x\} \right]_{s \rightarrow s+3} = \frac{1}{s} \left[\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2 + 1} \right]_{s \rightarrow s+3} = \frac{1}{s} \left(\frac{2}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)^2 + 1} \right)$$

پاسخ سوال ۶: روش اول (تبدیل لاپلاس): ساده‌ترین روش برای حل این معادله، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

$$L\{x(t) + \int_0^t \cos(t-u)x(u)du\} = L\{3\} \rightarrow L\{x\} + \frac{2s}{s^2 + 1} L\{x\} = \frac{3}{s} \rightarrow \left(1 + \frac{2s}{s^2 + 1}\right) L\{x\} = \frac{3}{s}$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{3(s^2 + 1)}{s(s^2 + 1)^2} = \frac{3}{s} - \frac{6}{(s+1)^2} \rightarrow x(t) = 3 - 6te^{-t}$$

روش دوم: معادله انتگرالی را به یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه تبدیل می‌کنیم.

$$\text{داریم } x(t) = 3 - 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du \text{ پس } x(0) = 3 \text{ و } x'(t) = -2x(t) + 2 \int_0^t \sin(t-u)x(u)du \text{ که نتیجه می‌دهد}$$

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 3 \text{ و } x''(t) = -2x'(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du$$

اکنون به یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت و با شرایط اولیه رسیده‌ایم.

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 3, \quad x(0) = 3, x'(0) = -6$$

جواب عمومی این معادله $y_g = (a + bt)e^{-t} + 3$ و با توجه به شرایط اولیه، جواب معادله عبارت است از :

$$y = 3 - 6te^{-t}$$

پاسخ سوال ۷- از فرمول‌های تبدیل لاپلاس با ترتیب مناسب استفاده می‌کنیم:

$$y'' - 2y' + y = 4e^t - 4e^t u_1(t) \rightarrow L\{y'' - 2y' + y\} = L\{4e^t - 4e^t u_1(t)\}$$

$$\rightarrow s^2 L\{y\} - 1 - 2sL\{y\} + L\{y\} = \frac{4}{s-1} - 4e^{-s} L\{e^{t+1}\}$$

$$(s^2 - 2s + 1)L\{y\} = 1 + \frac{4}{s-1} - \frac{4e^{-s+1}}{s-1} \rightarrow L\{y\} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{(s-1)^3} - \frac{4e^{-s+1}}{(s-1)^3}$$

$$\rightarrow L\{y\} = L\{te^t\} + L\{2t^2 e^t\} - L\{2t^2 e^t\} e^{-s+1} \rightarrow y = te^t + 2t^2 e^t - e u_1(t) [2t^2 e^t]_{t \rightarrow t-1}$$

$$y = \begin{cases} (2t^2 + t)e^t & t < 1 \\ (5t - 2)e^t & 1 \leq t \end{cases}$$

جواب معادله عبارت است از $y = te^t + 2t^2 e^t - 2u_1(t)(t-1)^2 e^t$ و یا :

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۱۱/۵

وقت : ۱۲۰ دقیقه



دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل (گروه ۴)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس : سیدرضا موسوی

توجه :

پاسخنامه را باید در قالب یک فایل PDF ارسال نمایید.

بر روی تمام برگه‌ها شماره سوال مربوطه و مشخصات خودتان را بنویسید.

مدت واقعی آزمون ۹۰ دقیقه است و ۳۰ دقیقه برای تهیه فایل و ارسال آن اضافه شده است. ارسال فایل را به موقع انجام دهید.

سوال ۱- دستگاه معادلات دیفرانسیل مقابل را حل کنید.
$$\begin{cases} (D-3)x + 2y = 5t \\ 4x + (D-1)y = 3e^{-t} \end{cases}$$
 (۲۰ نمره)

سوال ۲- معادله دیفرانسیل $x''y'' - 3xy' + 3y = 12x^{-3}$ را حل کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۳- - جواب عمومی معادله $(2+x^2)y'' + 6xy' + 4y = 0$ را حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید. (۱۵ نمره)

سوال ۴- تابع $y_1 = e^x$ یک جواب معادله $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ است.
جواب عمومی معادله $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$ را به دست آورید. (۱۵ نمره)

سوال ۵- الف) تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{s}{s^2+4} e^{\frac{-\pi}{4}s}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t e^{-2x}(x^2 + \sin x)dx$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

سوال ۶- معادله انتگرالی $x(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du = 5$ را حل کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۷- معادله زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 2y' + y = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 4e^t & 1 \leq t \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: ابتدا مجهول y را حذف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (D-1) \begin{cases} (D-3)x + 2y = 5t \\ 4x + (D-1)y = 3e^{-t} \end{cases} &\rightarrow (D^2 - 4D - 5)x = 5 - 5t - 2e^{-t} \\ -2 \end{aligned}$$

اکنون به یک معادله یک مجهولی رسیده‌ایم و می‌توانیم جواب عمومی آن را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب همگن قرار می‌دهیم

$$D^2 - 4D - 5 = 0 \quad \text{که دو ریشه حقیقی ۵ و -۱ دارد و در نتیجه داریم}$$

$$x_h = ae^{5t} + be^{-t} \quad \text{و به کمک معادله اول نتیجه می‌گیریم که:}$$

جواب خصوصی معادله برابر است با

$$x_p = \frac{1}{D^2 - 4D - 5} (5 - 5t - 2e^{-t}) = \frac{1}{-5(1+D)(1-\frac{D}{5})} (5 - 5t) - \frac{6}{(D+1)(D-5)} e^{-t}$$

$$= (1-D)(1+\frac{D}{5})(t-1) + \frac{1}{D+1} e^{-t} = (1-\frac{4D}{5})(t-1) + e^{-t} \frac{1}{D} (1) \rightarrow x_p = t - \frac{9}{5} + te^{-t}$$

$$y_p = \frac{1}{2} [5t - (D-3)x_p] = \frac{1}{2} [5t - \frac{32}{5} + (4t-1)e^{-t}] \rightarrow y_p = 4t - \frac{16}{5} + 2te^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

اکنون دستگاه معادلات به‌طور کامل حل شده است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\begin{cases} x_g = ae^{5t} + be^{-t} + t - \frac{9}{5} + te^{-t} \\ y_g = -ae^{5t} + 2be^{-t} + 4t - \frac{16}{5} + 2te^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t} \end{cases}$$

پاسخ سوال ۲: این معادله را به دو روش می‌توان حل کرد.

روش اول (تغییر پارامتر): ابتدا معادله همگن نظیر آن یعنی $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ را حل می‌کنیم که یک معادله اویلر است.

معادله مشخصه آن $r^2 - 4r + 3 = 0$ است که دو ریشه حقیقی ۱ و ۳ دارد. پس جواب معادله همگن برابر است با:

$$y_h = ax + bx^3$$

جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می‌کنیم.

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^3, \quad r(x) = 12x^{-5} \rightarrow w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$y_p = x \int \frac{-x^3 \times 12x^{-5}}{2x^3} dx + x^3 \int \frac{x \times 12x^{-5}}{2x^3} dx = x \int -6x^{-5} dx + x^3 \int 6x^{-7} dx = x(\frac{3}{2} x^{-4}) + x^3(-x^{-6}) = \frac{1}{2} x^{-3}$$

$$y_g = ax + bx^3 + \frac{1}{2} x^{-3} = ax + bx^3 + \frac{1}{2x^3} \quad \text{جواب عمومی معادله عبارت است از:}$$

روش دوم (تغییر متغیر): ابتدا با تغییر متغیر $x = e^t$ معادله را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم.

$$x = e^t \rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}, \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \rightarrow y'' - 4y' + 3y = 12e^{-3t}$$

اکنون به کمک روش عملگر D داریم $(D^2 - 4D + 3)y = 12e^{-3t}$. معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از

$$D^2 - 4D + 3 = 0 \quad \text{که دو ریشه حقیقی ۱ و ۳ دارد. پس جواب همگن برابر است با:}$$

$$y_p = \frac{12}{D^2 - 4D + 3} e^{-3t} = \frac{12}{9 + 12 + 3} e^{-3t} = \frac{1}{2} e^{-3t} \quad \text{جواب خصوصی معادله هم برابر است با:}$$

پس جواب عمومی معادله با ضرایب ثابت برابر $y_g = ae^t + be^{3t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$ و جواب معادله اصلی برابر است با:

$$y_g = ax + bx^3 + \frac{1}{4}x^{-3} = ax + bx^3 + \frac{1}{4x^3}$$

پاسخ سوال ۳: نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله است بنابراین این، معادله دارای یک جواب به صورت سری توانی

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{است و داریم:}$$

این جواب را در معادله قرار می دهیم:

$$(x^2 + x^3) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ضرایب پشت زیگماها را به داخل زیگما منتقل می کنیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

توان های x در تمام زیگماها را به توان n تبدیل می کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 6na_n + 4a_n] x^n = 0$$

اکنون داریم

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+4)(n+1)a_n = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

که نتیجه می دهد

$$a_{n+2} = -\frac{n+4}{2(n+2)} a_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

و یا

با قرار دادن مقادیر مختلف n تعدادی از ضرایب را محاسبه می کنیم.

$$a_2 = -a_0, \quad a_4 = -\frac{5}{6}a_2 = \frac{5}{6}a_0, \quad a_6 = -\frac{3}{4}a_4 = -\frac{3}{4}a_0, \quad a_8 = -\frac{7}{10}a_6 = \frac{7}{10}a_0, \quad a_{10} = -\frac{5}{12}a_8 = -\frac{5}{12}a_0, \quad a_{12} = -\frac{3}{14}a_{10} = \frac{3}{14}a_0, \dots$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری جواب داریم:

$$y = a_0(1 - x^2 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \dots) + a_1(x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^5 - \frac{3}{8}x^7 + \dots)$$

پاسخ سوال ۴: با معلوم بودن یک جواب معادله همگن خطی، می توانیم یک جواب مستقل دیگر را به کمک فرمول آبل پیدا کنیم.

$$y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{x+1}{x} dx} dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{x+\ln x} dx = e^x \int x e^{-x} dx = -(x+1)$$

$$y_h = ae^x + b(x+1)$$

جواب معادله همگن برابر است با:

جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می کنیم.

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x+1, \quad r(x) = xe^x \rightarrow w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = -xe^x$$

$$y_p = e^x \int \frac{-(x+1) \times xe^x}{-xe^x} dx + (x+1) \int \frac{e^x \times xe^x}{-xe^x} dx$$

$$= e^x \int (x+1) dx - (x+1) \int e^x dx = e^x(\frac{1}{2}x^2 + x) - (x+1)e^x = (\frac{1}{2}x^2 - 1)e^x$$

$$y_g = ae^x + b(x+1) + \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)e^x = ce^x + b(x+1) + \frac{1}{4}x^2e^x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از :

پاسخ سوال ۵ : الف)

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}e^{\frac{-\pi}{4}s}\right\} = u_{\frac{\pi}{4}}(t) \left[L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} \right]_{t \rightarrow t-\frac{\pi}{4}}$$

$$= u_{\frac{\pi}{4}}(t) [\cos 2t]_{t \rightarrow t-\frac{\pi}{4}} = u_{\frac{\pi}{4}}(t) \cos 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = u_{\frac{\pi}{4}}(t) \sin 2t$$

ب)

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t e^{-2x}(x^2 + \sin x)dx\right\} = \frac{1}{s} L\{e^{-2x}(x^2 + \sin x)\}$$

$$= \frac{1}{s} \left[L\{x^2 + \sin x\} \right]_{s \rightarrow s+2} = \frac{1}{s} \left[\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1} \right]_{s \rightarrow s+2} = \frac{1}{s} \left(\frac{2}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+2)^2+1} \right)$$

پاسخ سوال ۶ : روش اول (تبدیل لاپلاس): ساده ترین روش برای حل این معادله، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

$$L\{x(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du\} = L\{5\} \rightarrow L\{x\} + \frac{2s}{s^2+1} L\{x\} = \frac{5}{s} \rightarrow \left(1 + \frac{2s}{s^2+1}\right) L\{x\} = \frac{5}{s}$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{5(s^2+1)}{s(s+1)^2} = \frac{5}{s} - \frac{10}{(s+1)^2} \rightarrow x(t) = 5 - 10te^{-t}$$

روش دوم : معادله انتگرالی را به یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه تبدیل می کنیم.

داریم $x(t) = 5 - 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du$ پس $x(0) = 5$ و $x'(t) = -2x(t) + 2 \int_0^t \sin(t-u)x(u)du$ که نتیجه می دهد

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 1 \text{ و } x''(t) = -2x'(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)x(u)du \text{ و } x'(0) = -10$$

اکنون به یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت و با شرایط اولیه رسیده ایم.

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 5, \quad x(0) = 5, x'(0) = -10$$

جواب عمومی این معادله $y_g = (a+bt)e^{-t} + 5$ و با توجه به شرایط اولیه، جواب معادله عبارت است از :

$$y = 5 - 10te^{-t}$$

پاسخ سوال ۷ - از فرمول های تبدیل لاپلاس با ترتیب مناسب استفاده می کنیم :

$$y'' + 2y' + y = 4e^t u_1(t) \rightarrow L\{y'' + 2y' + y\} = L\{4e^t u_1(t)\} \rightarrow s^2 L\{y\} - 1 + 2s L\{y\} + L\{y\} = 4e^{-s} L\{e^{t+1}\}$$

$$\rightarrow (s^2 + 2s + 1)L\{y\} = 1 + \frac{4e^{-s+1}}{s-1} \rightarrow L\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4e^{-s+1}}{(s+1)^2(s-1)}$$

$$\rightarrow L\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2} + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s+1} \rightarrow L\{y\} = L\{te^{-t}\} + L\{e^t - 2te^{-t} - e^{-t}\}e^{-s+1}$$

$$\rightarrow y = te^{-t} + e u_1(t)(e^t - 2te^{-t} - e^{-t})_{t \rightarrow t-1}$$

$$y = te^{-t} + e u_1(t)(e^{t-1} - 2(t-1)e^{-t+1} - e^{-t+1})$$

جواب نهایی معادله برابر است با

$$y = \begin{cases} te^{-t} & t < 1 \\ e^t + [(1-2e^2)t + e^2]e^{-t} & 1 \leq t \end{cases}$$

و یا :