



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۹/۱۰

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۲-فنی (۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = (1, -1, 2)$ گذشته و موازی فصل مشترک دو صفحه زیر باشد.

۱۵ نمره

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 1$$

۱۰ نمره

سوال ۲- الف) نام و شکل تقریبی رویه $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 9 = 0$ را بنویسید.

۱۰ نمره

ب) معادله رویه $\rho = 5 \cos \varphi$ را در دستگاه مختصات دکارتی بنویسید.

سوال ۳- مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = x^2 y + x\sqrt{1+z}$ را در نقطه $A = (1, 2, 3)$ و در راستای بردار

۱۵ نمره

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$
 بدست آورید.

۱۵ نمره

سوال ۴- انحنا و بردار قائم دوم (بردار $\vec{B}$) را برای منحنی $\vec{R}(t) = (e^{-t}, \ln(t+2), t)$ در $t = -1$ بیابید.

سوال ۵- نقاط اکسترمم (بحرانی) تابع $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$ را بدست آورده و

۱۵ نمره

نوع هر یک را مشخص کنید.

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: بردار هادی خط مورد نظر باید موازی بردار هادی فصل مشترک دو صفحه باشد. فصل مشترک دو صفحه بر بردارهای قائم هر دو صفحه عمود است. پس موازی حاصل ضرب خارجی دو بردار قائم است.

بردارهای قائم دو صفحه داده شده عبارتند از $\vec{N}_1 = (1, 1, 1)$ و $\vec{N}_2 = (1, 2, 3)$ و بردار هادی فصل مشترک دو صفحه برابر است با:

$$\vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$$

معادله خط موازی فصل مشترک دو صفحه و گذرا از نقطه A به صورت $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ است.

پاسخ سوال ۲: الف) معادله رویه را به صورت $y = (x-3)^2 + 2z^2$ بازنویسی می‌کنیم. این رویه یک سهمیگون بیضوی است که راس آن در نقطه $(3, 0, 0)$ قرار دارد.

ب) معادله رویه در دستگاه مختصات کروی داده شده است. این معادله در دستگاه مختصات دکارتی به صورت

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{5z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 5z$$

نوشته می‌شود که معادله یک کره است.

پاسخ سوال ۳: ابتدا بردار گرادیان تابع را در نقطه A محاسبه می‌کنیم.

$$f_x = 2xy + \sqrt{1+z}, f_y = x^2, f_z = \frac{x}{2\sqrt{1+z}} \rightarrow f_x(A) = 6, f_y(A) = 1, f_z(A) = \frac{1}{4} \rightarrow \nabla f(A) = (6, 1, \frac{1}{4})$$

اکنون می‌توانیم مقدار مشتق سویی تابع f را در نقطه A و در جهت بردار $\vec{u}$ محاسبه کنیم:

$$D_{\vec{u}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (6, 1, \frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}) = 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 4\frac{1}{6}$$

پاسخ سوال ۴: برای محاسبه بردار قائم دوم و انحنای منحنی، به مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم تابع برداری $\vec{R}$ نیاز داریم.

$$\vec{R}' = (-e^{-t}, \frac{1}{t+2}, 1), \vec{R}'' = (e^{-t}, \frac{-1}{(t+2)^2}, 0) \rightarrow \vec{R}'(-1) = (-e, 1, 1), \vec{R}''(-1) = (e, -1, 0)$$

حاصل ضرب خارجی این دو بردار و طول آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{R}'(-1) \times \vec{R}''(-1) = (-e, 1, 1) \times (e, -1, 0) = (1, e, 0) \rightarrow |\vec{R}'(-1) \times \vec{R}''(-1)| = \sqrt{1+e^2}$$

$$\vec{B}(-1) = \frac{\vec{R}'(-1) \times \vec{R}''(-1)}{|\vec{R}'(-1) \times \vec{R}''(-1)|} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} (1, e, 0) \quad \text{بردار قائم دوم منحنی } \vec{R} \text{ در } t = -1 \text{ برابر است با:}$$

$$\kappa(-1) = \frac{|\vec{R}'(-1) \times \vec{R}''(-1)|}{|\vec{R}'(-1)|^3} = \frac{\sqrt{1+e^2}}{(\sqrt{2+e^2})^3} \quad \text{انحنای منحنی } \vec{R} \text{ در } t = -1 \text{ برابر است با:}$$

پاسخ سوال ۵: در نقاط اکسترمم، مقدار مشتقات مرتبه اول (در صورت وجود) باید برابر ۰ باشد.

$$f_x = 3x^2 - 6x = 0, f_y = 3y^2 - 3 = 0$$

از حل این دستگاه معادلات، چهار نقطه $A = (0, 1, -2), B = (0, -1, 2), C = (2, 1, -6), D = (2, -1, -2)$ به عنوان نقاط اکسترمم بدست می‌آیند. با توجه مشتقات مرتبه دوم f یعنی $f_{xx} = 6x - 6, f_{yy} = 6y, f_{xy} = f_{yx} = 0$ واقع بر رویه

به عنوان نقاط اکسترمم بدست می‌آیند. با توجه مشتقات مرتبه دوم f یعنی $f_{xx} = 6x - 6, f_{yy} = 6y, f_{xy} = f_{yx} = 0$



مشاهده می کنیم که $f_{xx}(A) \times f_{yy}(A) = 6 \times (-6) = -36$ و $f_{xx}(A) \times f_{yy}(A) = -6 \times 6 = -36$ که نشان می دهد دو نقطه A و D نقاط زینی رویه هستند.

همچنین، داریم $\begin{vmatrix} f_{xx}(C) & f_{xy}(C) \\ f_{yx}(C) & f_{yy}(C) \end{vmatrix} = 6 \times 6 - 0 \times 0 = 36 > 0$ و $\begin{vmatrix} f_{xx}(B) & f_{xy}(B) \\ f_{yx}(B) & f_{yy}(B) \end{vmatrix} = -6 \times (-6) = 0 \times 0 = 36 > 0$ بنابراین، نقطه B که $f_{xx}(B) = f_{yy}(B) = -6 < 0$ یک نقطه ماکزیمم نسبی و نقطه C که $f_{xx}(C) = f_{yy}(C) = 6 > 0$ یک نقطه مینیمم نسبی رویه است.