



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۸/۲۶

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۳ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

۱۵ نمره

سوال ۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y' = \frac{x + 3y - 5}{x - y - 1}$$

۱۵ نمره

سوال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y^2 + 2xy^3)dx + (5xy + 6x^2y^2 + 4)dy = 0$$

۱۵ نمره

سوال ۳- جواب معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه زیر را تعیین کنید:

$$y' - y = 3e^x y^3, \quad y(0) = -1$$

۲۰ نمره

سوال ۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از ضرایب نامعین بدست آورید.

$$y'' + 7y' + 6y = xe^{6x} - e^{-x}$$

۱۵ نمره

سوال ۵- مسیرهای قائم بر دسته منحنی های زیر را بیابید.

$$y^2 = \frac{x}{x - c}$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: این معادله را می توان به کمک تغییر متغیر $x = X + a$, $y = Y + b$ به یک معادله همگن تبدیل کرد.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1} \rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y+(a+3b-5)}{X-Y+(a-b-1)} \rightarrow \begin{cases} a+3b-5=0 \\ a-b-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

اکنون با انجام تغییر متغیر $x = X + 2$, $y = Y + 1$ به یک معادله همگن می رسیم.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y}{X-Y}$$

از تغییر متغیر $Y = Xu$ استفاده می کنیم و به یک معادله جدایی پذیر می رسیم.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y}{X-Y} \rightarrow u + Xu' = \frac{X+3Xu}{X-Xu} = \frac{1+3u}{1-u} \rightarrow X \frac{du}{dX} = \frac{1+2u+u^2}{1-u} \rightarrow \frac{(1-u)}{(u+1)^2} du = \frac{dX}{X}$$

باید از دو طرف معادله انتگرال بگیریم.

$$\int \frac{(1-u)}{(u+1)^2} du = \int \frac{dX}{X} \rightarrow \int \left(\frac{2}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int \frac{dX}{X} \rightarrow -\frac{2}{u+1} - \ln(u+1) = \ln X + c$$

چون $Y = Xu$ جواب به صورت $\frac{2X}{Y+X} + \ln(Y+X) = c$ در می آید و با توجه به $x = X + 2$, $y = Y + 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{2x-4}{y+x-3} + \ln(y+x-3) = c.$$

پاسخ سوال ۲: داریم $M = y^2 + 2xy^2$, $N = 5xy + 6x^2y^2 + 4$ و در نتیجه $M_y = 2y + 6xy^2$, $N_x = 5y + 12xy^2$

چون $M_y \neq N_x$ پس این معادله یک معادله کامل نیست. اما چون $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{(5y + 12xy^2) - (2y + 6xy^2)}{y^2 + 2xy^2} = \frac{3}{y}$

فاقد x است. پس تابع $\mu = e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3 \ln y} = y^3$ یک عامل انتگرال ساز معادله است و با ضرب آن در معادله اصلی، معادله

$$(y^5 + 2xy^6)dx + (5xy^6 + 6x^2y^5 + 4y^3)dy = 0$$

یک معادله کامل است و داریم: $\int (y^5 + 2xy^6)dx = xy^5 + x^2y^6$, $\int (5xy^6 + 6x^2y^5 + 4y^3)dy = xy^5 + x^2y^6 + y^4$

جواب معادله عبارت است از: $xy^5 + x^2y^6 + y^4 = c$

پاسخ سوال ۳: این معادله، یک معادله برنولی است. آن را به صورت $\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = 3e^x$ می نویسیم.

از تغییر متغیر $u = \frac{1}{y^2}$ استفاده می کنیم و خواهیم داشت: $-\frac{1}{2}u' - u = 3e^x \rightarrow u' + 2u = -6e^x$

به یک معادله مرتبه اول خطی رسیده ایم. داریم $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ و در نتیجه:

$$u = e^{-2x} \left(c + \int e^{2x} (-6e^x) dx \right) = e^{-2x} \left(c - 6 \int e^{3x} dx \right) = e^{-2x} (c - 2e^{3x})$$

اکنون داریم $\frac{1}{y^2} = u = ce^{-2x} - 2e^x$ و جواب عمومی معادله عبارت است از: $(ce^{-2x} - 2e^x)y^2 = 1$

با توجه به مقدار اولیه داده شده، باید داشته باشیم $(ce^{-2 \times 0} - 2e^0) \times 1^2 = 1$ که نتیجه می دهد $c = 3$.

جواب نهایی مساله برابر است با: $(3e^{-2x} - 2e^x)y^2 = 1$

پاسخ سوال ۴: ابتدا معادله همگن نظیر معادله داده شده، یعنی $y'' + 7y' + 6y = 0$ را حل می کنیم.

معادله مشخصه آن عبارت است از $m^2 + 7m + 6 = 0$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1 = -1$ و $m_2 = -6$ دارد.

پس جواب معادله همگن برابر است با: $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-6x}$



برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیرهمگن به کمک روش ضرایب نامعین، با توجه به جواب همگن، جواب خصوصی را به صورت $y_p = (ax+b)e^{x^2} + cxe^{-x}$ حدس می‌زنیم.

$$y_p' = (2ax + a + 2b)e^{x^2} + (-cx + c)e^{-x}, \quad y_p'' = (4ax + 2a + 4b)e^{x^2} + (cx - 2c)e^{-x}$$

با جایگذاری در معادله غیر همگن داریم:

$$y_p'' + 7y_p' + 6y_p = (84ax + 19a + 84b)e^{x^2} + 5ce^{-x} = xe^{x^2} - xe^{-x}$$

پس باید داشته باشیم $5c = -1$, $19a + 84b = 0$, $84a = 1$ یعنی: $a = \frac{1}{84}$, $b = \frac{-19}{84^2}$, $c = \frac{-1}{5}$

جواب خصوصی برابر $y_p = \frac{1}{84^2}(84x - 19)e^{x^2} - \frac{1}{5}xe^{-x}$ و جواب عمومی برابر است با:

$$y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-x^2} + \frac{1}{84^2}(84x - 19)e^{x^2} - \frac{1}{5}xe^{-x}$$

پاسخ سوال ۵: ابتدا با حذف پارامتر c معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده شده را پیدا می‌کنیم.

$$y^2 = \frac{x}{x-c} \rightarrow x-c = \frac{x}{y^2} \rightarrow 1 = \frac{1}{y^2} - \frac{2xy'}{y^3} \rightarrow y^3 = y - 2xy' \rightarrow y' = \frac{y - y^3}{2x}$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های قائم بر منحنی‌های داده شده عبارت است از: $y' = \frac{2x}{y^3 - y}$

این معادله دیفرانسیل، یک معادله جدایی‌پذیر است.

$$(y^3 - y)dy = 2xdx \rightarrow \int (y^3 - y)dy = \int 2xdx \rightarrow \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 = x^2 + c_1$$

$$y^4 - 2y^2 - 4x^2 = c_2$$

جواب سوال برابر است با: