نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۴/۶/۱۱**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی ۲ فنی** (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۴- ۱۴۰۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

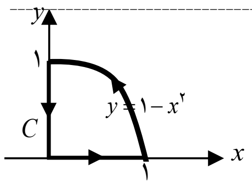
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- برای انتگرال دوگانه زیر، ابتدا ناحیه انتگرالگیری را رسم و سپس آن را محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\int_{y}^{\frac{۱}{۲}} \frac{\cos(\pi x)}{x}\,dxdy$$

سوال ۲- انتگرال سه‌گانه $\iiint_R (x^۲+y^۲+z^۲)dV$ را بر ناحیه D محدود به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و کره $x^۲+y^۲+z^۲=۸$ محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- مساحت بخشی از سهمی‌گون $z=۴-۲x^۲-۲y^۲$ که توسط $x^۲+y^۲=۱$ جدا می‌شود را بدست آورید. **(۱۵ نمره)**



سوال ۴- با استفاده از قضیه گرین، انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C \ln(y+۱)dx-\frac{xy}{y+۱}dy$ را روی مسیر شکل مقابل بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۵- پایستاری نیروی F را بررسی کنید و سپس انتگرال $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$ را روی مسیر C با معادله $r(t)=(t,۱-t^۲,t^۳)$ که $A=r(۰)$ و $B=r(۱)$ بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

$$\vec{F}=(۲xy^۳+۱)\vec{i}+(۳x^۲y^۲+۲yz)\vec{j}+(y^۲-\sin z)\vec{k}$$

سوال ۶- فرض کنید $\vec{F}=(۲x+y)\vec{i}+(۲y+z)\vec{j}+(۲z+x)\vec{k}$ و رویه S سطح ناحیه بسته محدود به $z=۸-x^۲-y^۲$ و $z=x^۲+y^۲$ باشد. به کمک قضیه واگرایی انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را روی رویه S بدست آورید که $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی سطح S است ($d\sigma=dS$). **(۲۰ نمره)**

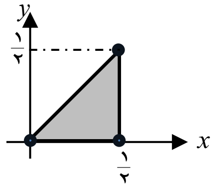
سوال ۷- با تغییر متغیر $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}$ مقدار انتگرال $\iint_R e^{(\frac{x-y}{x+y})}dxdy$ را روی ناحیه R محدود به خطوط $x+y=۱\,,\,x=۰\,,\,y=۰$ بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم درس ریاضی۲ (۱۶گروه)

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

پاسخ سوال۱ : ناحیه انتگرالگیری در شکل نشان داده شده است.



با تغییر ترتیب انتگرالگیری، انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi x)}{x}\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x}\frac{\cos(\pi x)}{x}\,dydx$$

$$=\int_0^{1}\frac{\cos(\pi x)}{x}\,y\,|_0^x\,dx=\int_0^{1}\cos dx=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$$

پاسخ سوال۲ : این انتگرال سه‌گانه را به کمک مختصات کروی حل می‌کنیم. معادله کره در مختصات کروی به صورت $\rho=2\sqrt{2}$ و معادله مخروط به صورت $\varphi=\frac{\pi}{4}$ نوشته می‌شود. ناحیه R شامل نقاطی است که در شرایط $0\le\rho\le 2\sqrt{2}$ و $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ صدق می‌کنند. اکنون داریم :

$$I_2=\iiint_R\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^3\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}r^4\,|_0^{2\sqrt{2}}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{31}{5}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta=16\int_0^{2\pi}-\cos\varphi\,|_0^{\frac{\pi}{4}}\,d\theta=16\int_0^{2\pi}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})d\theta=16(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(2\pi)=16(2-\sqrt{2})\pi$$

پاسخ سوال۳ : سطح مورد نظر را A می‌نامیم. از تقاطع استوانه با سهمی‌گون داریم $z=2$ یعنی $x^2+y^2=1$.
پس تصویر سطح A بر روی صفحه $z=0$ عبارت است از قرص دایره‌ای $x^2+y^2\le 1$ که آن را D می‌نامیم.
بردار گرادیان رویه برابر است با $grad\,f=(-4x,-4y,-1)$ و بردار یکه قائم سطح بیرونی سهمی‌گون به صورت $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{16x^2+16x^2+1}}(4x,4y,1)$ خواهد بود و داریم : $dS=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\sqrt{16x^2+16x^2+1}\,dxdy$
اکنون می‌توانیم مساحت ناحیه A را به کمک انتگرال روی سطح محاسبه کنیم. برای حل انتگرال دوگانه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_A dS=\iint_D\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\iint_D\sqrt{16x^2+16x^2+1}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}r\sqrt{16r^2+1}\,d\theta dr$$

$$=2\pi\int_0^1 r\sqrt{16r^2+1}\,dr=2\pi\times\frac{1}{48}(\sqrt{16r^2+1})^3\,|_0^1=(17\sqrt{17}-1)\frac{\pi}{24}$$

پاسخ سوال۴ : شرایط استفاده از قضیه گرین وجود دارد. ناحیه محدود به مسیر C را D می‌نامیم. اکنون داریم :

$$\oint_C\ln(y+1)dx-\frac{xy}{y+1}dy=\iint_D(-\frac{y}{y+1}-\frac{1}{y+1})dxdy=\iint_D(-1)dxdy$$

$$=-\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2}dydx=-\int_{x=0}^{1}(1-x^2)dx=-\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{2}{3}$$

پاسخ سوال۵ : چون $curl\,\vec{F}=(2y-2y,0-0,6xy^2-6xy^2)=(0,0,0)$ پس نیروی $\vec{F}$ پایستار و انتگرال مستقل از مسیر است. اکنون می‌دانیم که یک تابع $\varphi(x,y,z)$ وجود دارد بطوریکه $\vec{F}=grad\,\varphi$ یعنی :

$$(2xy^3+1,3x^3y^2+2yz,y^2-\sin z)=(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$$

با انتگرالگیری از مولفه‌های $\vec{F}$ خواهیم داشت $\varphi(x,y,z)=x^2y^3+x+y^2z+\cos z$ و اکنون می‌توانیم بنویسیم :

$$\int_a^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(x,y,z)\,|_A^B=\Big[x^2y^3+x+y^2z+\cos z\Big]_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}=1+\cos(1)-1=\cos(1)$$

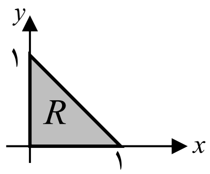
پاسخ سوال۶ : ناحیه محدود به دو سهمیگون را R می‌نامیم و محل برخورد دو سهمیگون را پیدا می‌کنیم.

$$8-x^2-y^2=x^2+y^2 \;\;\rightarrow\;\; x^2+y^2=4\;,\;\; z=4$$

تصویر ناحیه R بر روی صفحه $z=0$ قرص دایره‌ای $x^2+y^2\le 2$ است که آن را D می‌نامیم.
به کمک قضیه واگرایی(دیورژانس) و مختصات استوانه‌ای انتگرال را حل می‌کنیم.

$$divF=2+2+2=6 \;\;\rightarrow\;\; \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iiint_R 6dV=\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2}^{8-r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}6rd\theta dzdr$$

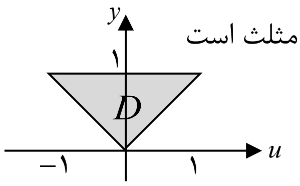
$$=12\pi\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2}^{8-r^2}rdzdr=12\pi\int_{r=0}^{2}(8r-2r^3)dr=12\pi\Big[4r^2-\frac{1}{2}r^4\Big]_0^2=96\pi$$



پاسخ سوال۷ : ناحیه انتگرالگیری در دستگاه مختصات دکارتی در شکل نشان داده شده است.

اگر $u=x-y$ و $v=x+y$ آنگاه $dudv=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}dxdy=2dxdy$ و همچنین داریم

$0\le v\le 1$ و $-v\le u\le v$ بنابراین، ناحیه انتگرالگیری در دستگاه مختصات با محورهای u و v یک مثلث است



که آن را D می‌نامیم. اکنون داریم :

$$\iint_R e^{(\frac{x-y}{x+y})}dxdy=\iint_D e^{(\frac{u}{v})}\frac{dudv}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{1}\int_{u=-v}^{v}e^{(\frac{u}{v})}dudv=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{1}ve^{(\frac{u}{v})}\,|_{-v}^{v}\,dv=\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})\int_{v=0}^{1}vdv=\frac{e^2-1}{4e}$$