

سایت اختصاصی مهندسی کنترل



<https://controlengineers.ir>



@controlengineers



کنترل مد لغزشی

فهرست عناوین

۳	مقدمه
۳	2-3- تئوری‌های کنترل غیرخطی برای سیستم‌های معین
۳	1-2-3- فیدبک خطی ساز
۴	2-2-3- طراحی کنترل‌کننده به روش لیاپانوف
۵	3-2-3- طراحی به روش گام به عقب
۵	3-3- طراحی کنترل مد لغزشی مرتبه اول برای سیستم‌های غیرخطی نامعین
۶	1-3-3- فاز رسیدن
۹	2-3-3- فاز لغزش
۱۰	3-3-3- کنترل مد لغزشی انتگرالی
۱۲	4-3-3- پدیده‌ی نوسانات ناخواسته
۱۵	4-3- مد لغزشی مرتبه بالا
۱۷	1-4-3- مد لغزشی مرتبه دوم
۲۱	2-4-3- الگوریتم فرایچه
۲۲	3-4-3- الگوریتم مد لغزشی مرتبه دوم هموار
۲۴	5-3- کنترل مد لغزشی نهایی
۲۷	8-3- روتگر غیرخطی
۲۸	1-8-3- بررسی رویت‌پذیری سیستم‌های غیرخطی
۲۹	2-8-3- طراحی روتگر غیرخطی با استفاده از اصول تئوری خطی‌سازی فیدبک
۳۰	3-8-3- طراحی روتگر غیرخطی با استفاده از اصول تئوری لیاپانوف
۳۱	4-8-3- طراحی روتگر غیرخطی با استفاده از تئوری مد لغزشی

مقدمه

در این فصل اصول طراحی کنترل کننده به روش مد لغزشی ارائه می شود. برای این منظور ابتدا تئوری های کنترل غیرخطی از جمله فیدبک خطی ساز و روش لیاپانوف به صورت اجمالی مرور گردیده و سپس طراحی به روش مد لغزشی ارائه می شود. در این راستا الگوریتم های مد لغزشی استاندارد مرتبه اول، مد لغزشی مرتبه دوم، مد لغزشی نهایی و بهینه تشریح می شوند. در انتها طراحی روی تگر مد لغزشی نیز ارائه می گردد.

3-2- تئوری های کنترل غیرخطی برای سیستم های معین

در این بخش تئوری های فیدبک خطی ساز و لیاپانوف برای کنترل سیستم های معین مرور می شوند. آشنایی با این روش ها لازمه ی ورود به بحث مد لغزشی می باشد. طراحی به روش مد لغزشی تلفیقی از این دو روش با یک رویکرد خاص برای سیستم های نامعین است.

3-2-1- فیدبک خطی ساز

برای تشریح کاربرد این روش برای تضمین پایداری سیستم های غیرخطی، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bw(x)[u - \varphi(x)] \quad (1-3)$$

هدف طراحی کنترل کننده به روش فیدبک خطی ساز این است که بخش های غیرخطی را حذف کرده و برای سیستم خطی شده کنترل کننده را از روش های غیرخطی طراحی کنیم. برای این منظور ابتدا برای حذف جملات غیرخطی کنترل کننده به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u = \varphi(x) + w^{-1}(x)v \quad (2-3)$$

با استفاده از این کنترل کننده سیستم حلقه بسته به فرم خطی زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (3-3)$$

حال می‌توان بخش v از کنترل کننده را با استفاده از روش‌های کنترل خطی برای کنترل سیستم حلقه بسته‌ی خطی شده طراحی نمود. تنها سؤال این است که اگر سیستم به فرم (1-3) نباشد چه باید کرد. در این حالت باید با استفاده از تکنیک‌های موجود تبدیلی را پیدا کرد تا سیستم به فرم (1-3) در آمده و طراحی را انجام داد [98].

3-2-2- طراحی کنترل کننده به روش لیاپانوف

اصول کنترل کننده از روش فیدبک خطی‌ساز دارای اشکالاتی می‌باشد. به عنوان مثال حذف تمام توابع غیرخطی کار درستی نیست، چونکه برخی از توابع غیرخطی نه تنها منجر به ناپایداری در سیستم نخواهند شد بلکه همگرایی سیستم را نیز سریعتر می‌نمایند. برای حل این مشکل از ایده‌ی پایداری لیاپانوف برای طراحی کنترل-کننده استفاده می‌گردد، برای فهم این روش سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4-3)$$

با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف ابتدا تابع مثبت معینی به عنوان تابع کاندید لیاپانوف برای این سیستم در نظر گرفته می‌شود برای یک سیستم تک بعدی این تابع را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$V = \frac{1}{2}x^2 \quad (5-3)$$

مشتق این تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(f(x) + g(x)u) \quad (6-3)$$

طبق تئوری پایداری لیاپانوف اگر مشتق این تابع منفی معین باشد سیستم پایدار مجانبی خواهد بود. بنابراین کنترل کننده‌ی u به نحوی طراحی می‌گردد که مشتق تابع لیاپانوف منفی معین شود. لذا نیاز به حذف توابعی که در منفی معین بودن مشتق تابع لیاپانوف اشکالی ایجاد نمی‌کنند نخواهد بود [98]. اصول طراحی لیاپانوف برای سیستم‌های مرتبه بالا مشکل خواهد بود. برای سهولت در طراحی این نوع سیستم‌ها می‌توان از روش‌های

گام به عقب و مد لغزشی استفاده نمود. روش مد لغزشی دارای برتری دیگری بوده که قادر به کنترل سیستم‌های نامعین نیز می‌باشد. این دو روش در ادامه تشریح می‌گردند.

3-2-3- طراحی به روش گام به عقب

ایده‌ی گام به عقب، اصول طراحی لیاپانوف را برای سیستم‌هایی با مرتبه‌ی بالا به کار می‌برد. برای تشریح این روش با سیستم مرتبه دوم زیر شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \xi \\ \dot{\xi} = f(x, \xi) + u \end{cases} \quad (7-3)$$

برای طراحی به روش گام به عقب ابتدا با معادله‌ی اول رابطه‌ی بالا شروع کرده و در این رابطه ξ به صورت ورودی مجازی در نظر گرفته می‌شود. سپس این ورودی مجازی طوری طراحی می‌شود که x را کنترل کند. بنابراین ورودی مجازی رابطه (8-3)، مقدار مطلوب متغیر دوم خواهد بود که منجر به کنترل x می‌شود:

$$\xi_d = u_v \quad (8-3)$$

حال در گام دوم ورودی کنترل اصلی طوری طراحی می‌شود که ξ به ξ_d برسد، هرچه مرتبه‌ی سیستم بالاتر رود تعداد گام‌های طراحی نیز افزایش خواهد یافت [98].

3-3- طراحی کنترل مد لغزشی مرتبه اول برای سیستم‌های غیر خطی نامعین

در مدل‌سازی اکثر سامانه‌ها به دلیل دینامیک‌های مدل نشده‌ی احتمالی و اثرات غیرخطی صرف‌نظر شده در خطی‌سازی معادلات سیستم و همچنین اغتشاش و نویز ممکن است نامعینی‌هایی بوجود آید. این نامعینی‌ها می‌توانند در اثر وجود اختلالات در سیستم با تغییر مقادیر پارامترهای سیستم نیز نمایان شوند. عدم قطعیت در مدل به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شود.

1- عدم قطعیت ساختاری یا پارامتری که ممکن است ناشی از عدم قطعیت‌های سیستم باشد و به عدم

دقت در جملاتی که در مدل هستند مربوط می‌شود، مثل پارامترهای نامعلوم سیستم.

2- عدم قطعیت غیرساختاری یا دینامیک های مدل نشده که می تواند به دلیل ساده کردن هدفدار دینامیک های سیستم باشد و به عدم دقت در مرتبه ی سیستم یا خطای تخمین مربوط می شود، مثلا در مدل سازی اصطکاک به صورت خطی در نظر گرفته شود.

عدم دقت در مدل سازی می تواند اثرات نامطلوبی بر سیستم های غیرخطی بگذارد. بنابراین در هر طراحی عملی باید آنها را صریحا مورد نظر قرار داد. برای کنترل سیستم های غیرقطعی نیاز به طراحی کنترل کننده ای است تا در حضور این نامعینی ها مقاوم باشد. چنین کنترل کننده ای را می توان از روش های کنترل مقاوم، تطبیقی و فازی طراحی کرد. روش دیگر برای کنترل این نوع سیستم ها استفاده از تئوری کنترل مد لغزشی می باشد که یکی از روش های کنترل غیرخطی و مقاوم برای کنترل سیستم های نامعین است. در این بخش به تشریح این روش کنترلی و انواع توسعه یافته آن پرداخته می شود.

کنترل مد لغزشی تلفیقی از روش های فیدبک خطی ساز و لیاپانوف با یک تغییر متغیر خاص می باشد. برای تشریح این روش، در یک حالت خاص مد نظر این رساله سیستم نرمال زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + u \quad (18-3)$$

که در آن $f(x) = f_{un} + f_{nom}$ تابع غیرخطی بوده که در آن f_{un} بخش معین و f_{un} بخش نامعین تابع است. طراحی کنترل کننده به روش مد لغزشی در دو فاز صورت می گیرد که در ادامه تشریح می گردند.

3-3-1- فاز رسیدن

در سیستم (18-3) ورودی کنترل در n امین مشتق x ظاهر شده و بنابراین درجه ی نسبی سیستم برابر با n خواهد بود. در کنترل مد لغزشی استاندارد ابتدا برای سهولت در طراحی با یک تغییر متغیر مجموع وزن دار خطا در متغیری به نام متغیر لغزش تعریف می شود. یک فرم خاص برای متغیر لغزش به صورت رابطه (19-3) می باشد:

$$S(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{x}^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}(\tilde{x})}{dt^{n-1}} + \dots + \lambda^{n-1} \tilde{x} = \tilde{x}^{(n-1)} + \dots + \lambda^{n-1} \tilde{x} \quad (19-3)$$

که در آن λ ضریب وزن دهی خطاهای متغیرهای حالت و $\tilde{x}$ خطای متغیر حالت x و بوده و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{x} = x - x_d \quad (20-3)$$

در ادامه، هدف کنترل پایدار کردن متغیر لغزش و همگرایی آن در صفر می باشد. برای این منظور با تشکیل دینامیک لغزش داریم:

$$\dot{S}(t) = \frac{d^n(\tilde{x})}{dt^n} + \dots + \lambda^n \tilde{x} = \tilde{x}^{(n)} + \dots + \lambda^n \tilde{x} \quad (21-3)$$

با قرار دادن روابط (18-3) و (19-3) در (21-3) خواهیم داشت:

$$\dot{S}(t) = x^{(n)} - x_d^{(n)} + \dots + \lambda^n (x - x_d) = f(x) + u - x_d^{(n)} + \dots + \lambda^n (x - x_d) \quad (22-3)$$

همانطور که مشاهده می شود، ورودی کنترل در اولین مشتق متغیر لغزش ظاهر گردیده و بنابراین درجه نسبی این سیستم برابر با 1 می باشد. لذا با تغییر متغیر و تعریف متغیر لغزش مسائل با درجه نسبی n به مسائلی با درجه نسبی 1 تبدیل می شود.

حال برای کنترل این سیستم مرتبه اول از تئوری پایداری لیپانوف استفاده می گردد. برای این منظور تابع کاندید لیپانوف به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$V = \frac{1}{2} S(t)^2 \quad (23-3)$$

که یک تابع مثبت معین است. طبق تئوری پایداری لیپانوف اگر مشتق این تابع منفی معین باشد، $\dot{S}(t) = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود. اما در تئوری کنترل مد لغزشی برای تضمین همگرایی زمان محدود متغیر لغزش، برقراری شرط (24-3) مد نظر قرار می گیرد که به شرط لغزش معروف است.

$$\dot{V} = S(t)\dot{S}(t) \leq -\eta|S(t)| \quad (24-3)$$

که در آن η یک ثابت مثبت می باشد. با انتگرال گیری از طرفین شرط لغزش داریم:

$$S(t) \frac{dS(t)}{dt} \leq -\eta |S(t)| \Rightarrow \int_{S(0)}^0 \frac{S(t)}{|S(t)|} dS(t) \leq \int_0^{t_r} -\eta dt \Rightarrow \begin{cases} t_r \leq \frac{S(0)}{\eta} & S(t) > 0 \\ t_r \leq \frac{-S(0)}{\eta} & S(t) < 0 \end{cases} \quad (25-3)$$

بنابراین مدت زمان همگرایی متغیر لغزش از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$t_r \leq \frac{|S(0)|}{\eta} \quad (26-3)$$

همانطور که در این رابطه مشاهده می‌شود، مدت زمان صفر شدن متغیر لغزش با تغییر مقدار پارامتر η قابل

تنظیم است. حال برای برقراری شرط (15-3) داریم:

$$\dot{V} = S(t) \left[f_{un} + f_{nom} + u - x_d^{(n)} + \dots + \lambda^n (x - x_d) \right] \leq -\eta |S(t)| \quad (27-3)$$

برای برقراری شرط بالا، کنترل کننده مد لغزشی از دو بخش تشکیل می‌گردد:

$$u = u_{equal} + u_{reaching} \quad (28-3)$$

که در آن u_{equal} کنترل معادل بوده برای حذف جملات معین در رابطه (29-3) به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$u_{eq} = -f_{nom} + x_d^{(n)} + \dots - \lambda^n (x - x_d) \quad (29-3)$$

با جایگذاری روابط (28-3) و (29-3) در (27-3) داریم:

$$f_{un} \frac{S(t)}{|S(t)|} + u_r \frac{S(t)}{|S(t)|} + \eta \leq 0 \quad (30-3)$$

با توجه به رابطه بالا یک انتخاب برای بخش رساننده‌ی کنترل مد لغزشی به صورت زیر خواهد بود:

$$u_r = -(\eta + \mu) \frac{S(t)}{|S(t)|} \quad (31-3)$$

که در آن μ بیشینه اندازه بخش نامعین تابع $f(x)$ می‌باشد.

با اعمال کنترل کننده رابطه (31-3) به سیستم (18-3) تضمین می‌گردد متغیر لغزش در مدت زمان محدودی که از رابطه (26-3) تعیین می‌شود، به صفر رسیده و باقی بماند. اما بررسی همگرایی متغیرهای لغزش در فاز لغزش بررسی می‌گردد.

3-3-2- فاز لغزش

فرض کنید هدف از کنترل سیستم (18-3) پایداری تک تک متغیرهای حالت باشد. کنترل مد لغزشی که در بخش قبل طراحی گردید تضمین کننده پایداری متغیر لغزش است. اما باید پایداری متغیرهای حالت بررسی گردد. برای مثال سیستم غیرخطی و نامعین مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + u\end{aligned}\quad (32-3)$$

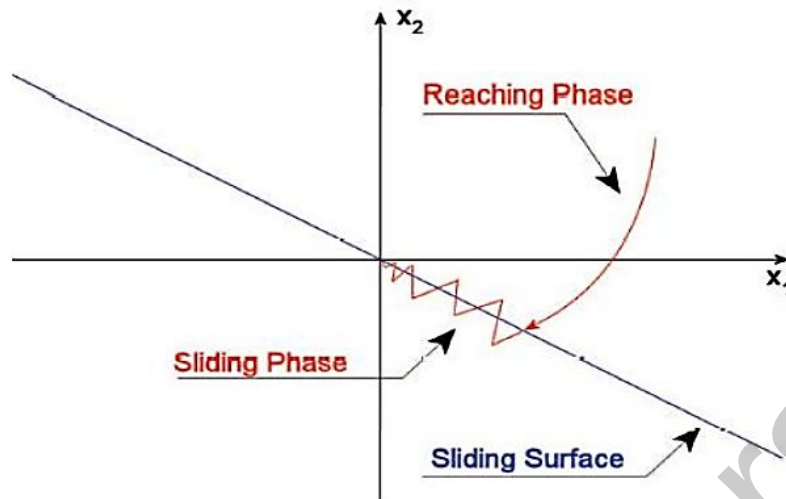
با توجه به رابطه (19-3) متغیر لغزش برای این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t) = x_2 + \lambda x_1 \quad (33-3)$$

با فرض اینکه در فاز رسیدن کنترل کننده مد لغزشی قادر به پایدار کردن زمان محدود این متغیر لغزش باشد، در فاز لغزش خواهیم داشت:

$$S(t) = x_2 + \lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\lambda x_1 \quad (34-3)$$

به عبارت دیگر $S(t) = 0$ در صفحه‌ی $x_2 - x_1$ یک خط با شیب $-\lambda$ و سطح لغزش نامیده می‌شود. بنابراین در فاز لغزش برای پایدار شدن تک تک متغیرهای حالت باید مسیر فاز سیستم بر روی این سطح لغزش حرکت کرده و به مبدا همگرا شود. این رفتار در شکل (1-3) مشاهده می‌گردد:



شکل 3-1 رفتار سیستم در فازهای رسیدن و لغزش

با جایگذاری رابطه (34-3) در رابطه اول (32-3) معادله دینامیکی متغیر حالت اول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 \quad (35-3)$$

با حل این معادله داریم:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\lambda t} \quad (36-3)$$

بنابراین متغیر حالت اول به صورت نمایی پایدار خواهد بود. همچنین با توجه به رابطه (25-3) متغیر حالت دوم نیز پایدار می‌باشد. لذا با تعریف متغیر لغزش به صورت رابطه (19-3)، در فاز لغزش همگرایی نمایی متغیرهای حالت تضمین می‌گردد.

3-3-3- کنترل مد لغزشی انتگرالی

سیستم مرتبه دوم رابطه (32-3) را در نظر بگیرید. با فرض اینکه در فاز لغزش بوده و بخش رساننده قادر به حذف اثر اغتشاش و نامعینی باشد، سیستم حلقه بسته را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 \end{aligned} \quad (37-3)$$

مقادیر ویژه این سیستم به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\det[SI - A] = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 0 & S + \lambda \end{vmatrix} = S(S + \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 0 \\ S = -\lambda \end{cases} \quad (38-3)$$

همانطور که مشاهده می گردد، سیستم حلقه بسته دارای یک مقدار ویژه بر روی محور موهومی بوده و دارای پایداری مرزی خواهد بود. برای حل این مشکل می توان از کنترل مد لغزشی انتگرالی استفاده نمود. در این روش متغیر لغزش برای پایداری متغیرهای حالت سیستم (32-3) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$S(t) = x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 \int x_1 dt \quad (39-3)$$

با تشکیل دینامیک لغزش داریم:

$$\dot{S}(t) = \dot{x}_2 + \lambda_2 \dot{x}_1 + \lambda_1 x_1 = f(x) + u + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_1 \quad (40-3)$$

با برقراری شرط لغزش ورودی کنترل به صورت زیر طراحی می گردد:

$$u = -f_{nom} - \lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1 - (\mu + \eta) Sgn(S(t)) \quad (30-3)$$

با فرض اینکه با استفاده از این ورودی کنترل سیستم در فاز لغزش بوده و بخش رساننده قادر به حذف اثر اغتشاش و نامعینی باشد، سیستم حلقه بسته را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \end{aligned} \quad (31-3)$$

مقادیر ویژه این سیستم به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\det[SI - A] = \begin{vmatrix} S & -1 \\ \lambda_1 & S + \lambda_2 \end{vmatrix} = S(S + \lambda_1) + \lambda_2 = 0 \Rightarrow S^2 + \lambda_1 S + \lambda_2 = 0 \quad (32-3)$$

همانطور که مشاهده می گردد، به ازای $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته دارای قسمت حقیقی منفی بوده و پایداری سیستم تضمین می گردد.

3-3-4- پدیده‌ی نوسانات ناخواسته

ورودی کنترل طراحی شده در روش مد لغزشی مرتبه اول شامل تابع علامت بوده و وجود این تابع در ورودی کنترل، محرک را به سوئیچ کردن لحظه‌ای وادار می‌کند. از آنجایی که پیاده‌سازی کنترل کننده‌ی مد لغزشی به صورت ایده‌آل صورت نمی‌گیرد و محرک‌ها نیز قادر به سوئیچ کردن لحظه‌ای نمی‌باشند و با تاخیر این کار را انجام می‌دهند و همچنین مقدار متغیر لغزش که مجموع وزن دار خطا می‌باشد با دقت بینهایت معلوم نیست، پدیده‌ی چترینگ¹ (لرزش یا نوسانات ناخواسته) اتفاق می‌افتد. نحوه‌ی رخ دادن این پدیده در شکل (2-3) نشان داده شده است. ابتدا مسیر حالت سیستم در ناحیه‌ی $S > 0$ به سمت سطح لغزش $S = 0$ حرکت کرده و برای بار اول در نقطه‌ی a به آن برخورد می‌کند. در کنترل مد لغزشی ایده‌آل مسیر باید لغزش خود را روی سطح از این نقطه شروع کند، در این لحظه تابع علامت تغییر علامت داده و کنترل باید سوئیچ کند. در عمل تاخیری بین تغییر علامت دادن تابع علامت و سوئیچ کردن کنترل وجود دارد. این تاخیر باعث می‌شود که مسیر از سطح لغزش عبور کرده و به ناحیه‌ی $S < 0$ برود حال کنترل سوئیچ کرده و مسیر تغییر جهت داده و به سمت سطح لغزشی حرکت می‌کند تا به آن برخورد می‌کند و تابع علامت تغییر علامت می‌دهد و دوباره تاخیر در سوئیچ کردن کنترل باعث عبور کردن مسیر از سطح لغزش می‌شود. با تکرار این عمل یک حرکت "zig-zag" بوجود می‌آید. این پدیده چترینگ یا نوسانات ناخواسته نام دارد.

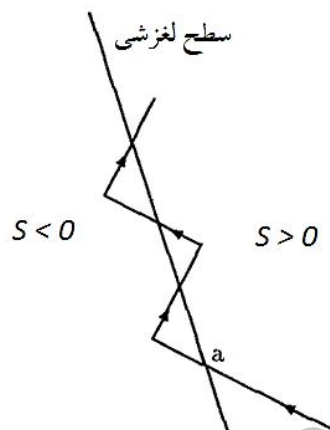
فقط در چند مورد استثنایی چترینگ قابل قبول بوده و قانون کنترل لغزشی بدست آمده می‌تواند عملکرد خوبی داشته باشد. اما در حالت کلی چترینگ بسیار نامطلوب بوده چون دارای معایب زیر است:

- باعث فعالیت کنترلی زیاد می‌شود.
- ممکن است دینامیک‌های مدل نشده‌ی فرکانس بالا را تحریک کند.
- دقت کنترل را کاهش می‌دهد.
- تلفات گرمایی را در مدارهای الکتریکی افزایش داده و مصرف انرژی الکتریکی را بالا می‌برد.

¹ Chattering

- در قسمت‌های مکانیکی و محرک‌ها باعث افزایش فرسودگی می‌شود.

این معایب کارایی سیستم را کاهش داده و ممکن است به ناپایداری منجر شود. پس لازم است که سیستم نسبت به دینامیک‌های مدل نشده‌ی فرکانس بالا نیز مقاوم باشد.



شکل 3-2 نحوه‌ی رخ دادن پدیده‌ی چترینگ

روش‌های مختلفی برای هموار کردن چترینگ وجود دارد. یکی از این روش‌ها هموار کردن ناپیوستگی کنترل در یک لایه‌ی مرزی² باریک در همسایگی سطح لغزش بوسیله‌ی تقریب پیوسته³ از کنترل کننده مد لغزشی ناپیوسته

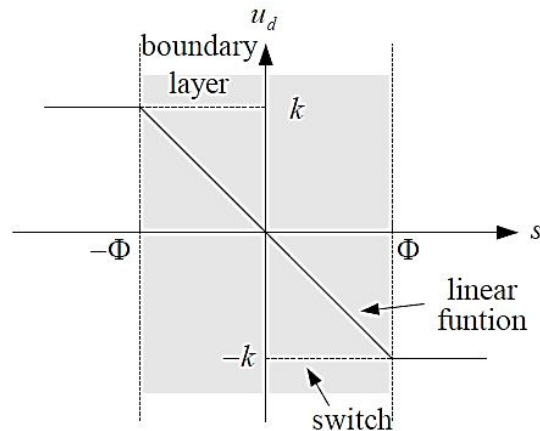
می‌باشد [12]. روش تقریب پیوسته یا لایه‌ی مرزی کاربرد بیشتری نسبت به روش‌های دیگر دارد که در آن تابع ناپیوسته‌ی علامت را با تابع اشباع جایگزین می‌کنند. در این روش بخش رساننده ورودی کنترل طراحی شده رابطه (3-30) در پیاده سازی به صورت رابطه زیر به کار برده می‌شود:

$$u_r = -(\eta + \mu) \text{Sat}\left(\frac{S(t)}{\phi}\right) \quad (33-3)$$

که در آن ϕ تعیین کننده‌ی پهنای لایه‌ی مرزی است. نمودار تابع اشباع مورد استفاده در روش تقریب پیوسته در شکل 3-3 نشان داده شده است.

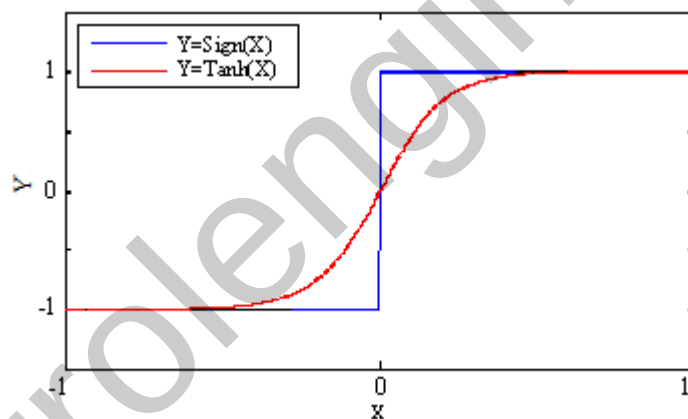
² Boundary Layer

³ Continuous Approximation



شکل 3-3 تابع اشباع مورد استفاده در روش تقریب پیوسته

علاوه بر تابع اشباع می‌توان از توابع دیگری همچون تابع پیوسته $\tanh(s)$ نیز برای حذف چترینگ بهره برد. در شکل (3-4) پاسخ این تابع به همراه تابع علامت رسم شده است.



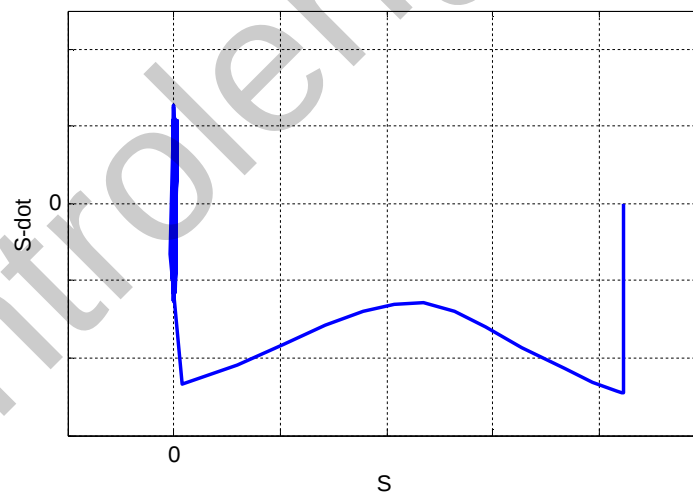
شکل 3-4 پاسخ تابع علامت به همراه تابع $\tanh(\cdot)$

همچنین می‌توان از تابع $\tanh(s/\varepsilon)$ استفاده نمود که در آن پارامتر ε تعیین کننده پهنای لایه مرزی خواهد بود. به دلیل تقریب صورت گرفته، استفاده از روش تقریب پیوسته در هر صورت منجر به کاهش دقت کنترلی می‌شود. اما می‌توان با تعریف پهنای لایه مرزی به صورت متغیر با زمان دقت کنترلی را افزایش داد. در یک حالت خاص شیب تابع اشباع در لایه مرزی را می‌توان متغیر در نظر گرفت که با افزایش این پارامتر،

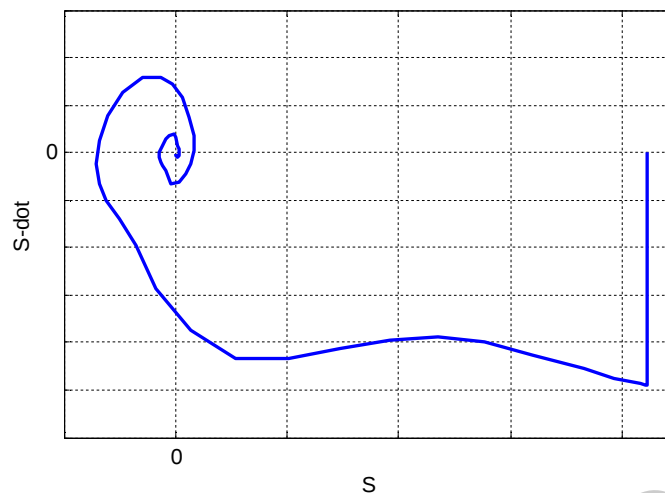
تابع مورد نظر به تابع علامت نزدیک خواهد شد. روش دیگر، هموار کردن نوسانات ناخواسته، استفاده از الگوریتم فازی برای طراحی بخش رساننده کنترل می‌باشد [5-10].

3-4- مد لغزشی مرتبه بالا

در کنترل مد لغزشی استاندارد هدف صفر کردن متغیر لغزش می‌باشد. در عمل رفتار مسیر سیستم در این روش در صفحه $\dot{S} - S$ به صورت شکل (3-5) خواهد بود. با توجه در این شکل می‌توان دریافت که مد لغزشی مرتبه اول تنها سعی در صفر کردن متغیر لغزش داشته اما مشتق این متغیر را مورد توجه قرار نمی‌دهد. از این رو تغییرات متغیر لغزش هرچند ناچیز وجود داشته و منجر به ایجاد چترینگ در سیگنال کنترلی می‌شود. حال فرض کنید سیگنال کنترلی قادر به صفر کردن مشتق اول این متغیر نیز باشد. بنابراین مسیر سیستم رفتاری مشابه با شکل (3-6) را در صفحه $\dot{S} - S$ خواهد داشت. بنابراین متغیر لغزش و مشتق آن به طور همزمان صفر شده و از رخ دادن چترینگ در سیگنال کنترلی جلوگیری خواهد شد.



شکل 3-5 رفتار سیستم در صفحه $\dot{S} - S$ با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه اول



شکل 3-6 رفتار سیستم در صفحه $S - \dot{S}$ با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه دوم

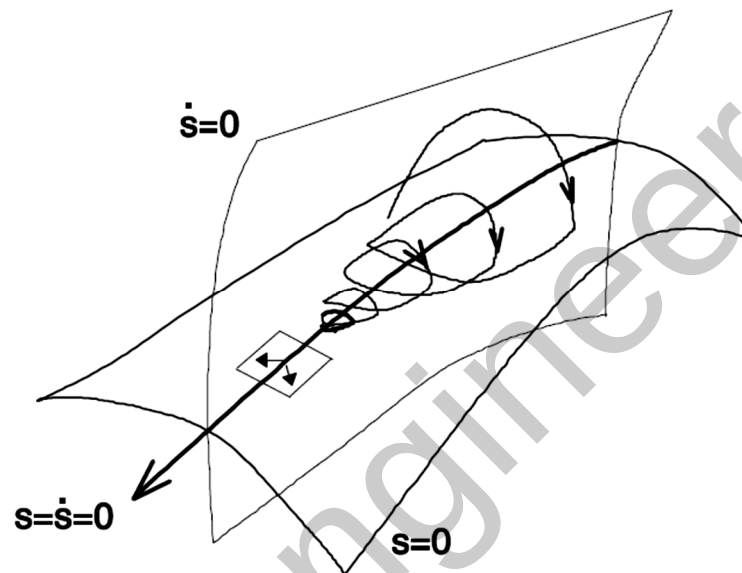
در سال‌های اخیر کنترل مد لغزشی مرتبه بالا با ایده‌ی مشابه پیشنهاد گردیده است. استفاده از مد لغزشی مرتبه بالا⁴ یکی از روش‌های کاهش نوسانات ناخواسته در کنترل مد لغزشی می‌باشد. این روش ایده‌ی اصلی مد لغزشی را برای مشتقات زمانی مراتب بالاتر بجای اولین مشتق زمانی متغیر لغزش به کار می‌برد. هدف کنترلی مانند قبل، رسیدن به حالت مطلوب است که با رساندن متغیر لغزش به سطح لغزش به دست می‌آید. مد لغزشی مرتبه r با برقراری رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$S(t) = \dot{S}(t) = \dots = S^{(r)}(t) = 0 \quad (46-3)$$

مشکل اصلی در اجرای مد لغزشی مرتبه بالا، افزایش تقاضای اطلاعات می‌باشد. به طور کلی، طراحی کنترل کننده‌ی مرتبه r نیاز دارد $S(t), \dot{S}(t), \dots, S^{(r-1)}(t)$ برای آن فراهم باشد. تنها استثنای موجود، الگوریتم Super Twisting از مد لغزشی مرتبه دوم است که فقط نیازمند به اندازه‌گیری S می‌باشد. از مشکلات دیگر مد لغزشی مرتبه بالا عدم اثبات همگرایی زمان محدود این روش‌ها می‌باشد.

3-4-1- مد لغزشی مرتبه دوم

ایده‌ی اصلی در کنترل مد لغزشی مرتبه 2 رساندن S و $\dot{S}$ به صفر می‌باشد و این یعنی علاوه بر صفر شدن متغیر لغزش، تغییرات متغیر لغزش نیز صفر شود. به عبارت دیگر مسیرهای سیستم در صفحه‌ی $S - \dot{S}$ به نقطه‌ی تعادل $S = \dot{S} = 0$ همگرا شوند. (شکل 3-5)



شکل 3-5 مسیر مد لغزشی مرتبه دوم

برای تشریح مد لغزشی مرتبه دوم سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(r)} &= f(x) + u \\ y &= x \end{aligned} \quad (47-3)$$

که در آن x خروجی سیستم و هدف کنترلی حفظ x در صفر می‌باشد. برای طراحی به روش مد لغزشی مرتبه بالا با هدف پایدار کردن خروجی، متغیر لغزش بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = x \quad (48-3)$$

با مشتق‌گیری از متغیر خروجی، مشتق‌های اول و دوم متغیر لغزش بدست آمده که این مشتقات بستگی به درجه‌ی نسبی⁵ سیستم دارند. دو حالت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Relative degree } r=1, i.e., \frac{\partial}{\partial u} S \neq 0 \quad (49-3)$$

$$\text{Relative degree } r \geq 2, i.e., \frac{\partial}{\partial u} S^{(i)} = 0, (i=1, 2, \dots, r-1), \frac{\partial}{\partial u} S^{(r)} \neq 0 \quad (50-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (49-3)، برای سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی 1 می‌توان کنترل مد لغزشی مرتبه 1 را طراحی نمود، با این وجود می‌توان به منظور جلوگیری از رخ دادن چترینگ از کنترل مد لغزش مرتبه 2 استفاده کرد. برای این منظور باید مشتق زمانی کنترل یعنی $\dot{u}$ را به عنوان متغیر کنترل واقعی در نظر گرفت و بعد از طراحی آن با انتگرال‌گیری به ورودی هموار u دست پیدا کرد. همچنین با توجه به رابطه‌ی (50-3) برای برقراری مد لغزش مرتبه r نیاز است تا درجه‌ی نسبی سیستم r باشد.

حال سیستم مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + u \quad (51-3)$$

مشتقات مرتبه اول و دوم متغیر لغزش (48-3) برای سیستم (51-3) بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= f(x) + u = f_{nom} + f_{un} + u \\ \ddot{S} &= \dot{f}(x) + \dot{u} = \dot{f}_{nom} + \dot{f}_{un} + \dot{u} \end{aligned} \quad (52-3)$$

کنترل مد لغزشی مرتبه دوم با برقراری S و $\dot{S}$ در صفر بدست می‌آید. در ساده‌ترین حالت برای دستیابی به مد لغزشی مرتبه دوم، هدف رسیدن به معادله دینامیکی زیر خواهد بود:

$$\dot{S} = -\alpha \text{Sgn}(S) - \beta \text{Sgn}(\dot{S}) \quad (53-3)$$

با فرض $S = \xi$ و $\dot{S} = \delta$ سیستم (53-3) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \xi &= \delta \\ \dot{\delta} &= -\alpha \text{Sgn}(\xi) - \beta \text{Sgn}(\delta) \end{aligned} \quad (54-3)$$

⁵ Relative Degree

برای بررسی پایداری سیستم (54-3) تابع کاندید لیپانوف به صورت رابطه (55-3) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \int_0^\xi \alpha \text{Sgn}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \delta^2 \quad (55-3)$$

مشتق این تابع لیپانوف به صورت زیر است:

$$\dot{V} = \alpha \text{Sgn}(\xi) \dot{\xi} + \delta \dot{\delta} = \alpha \text{Sgn}(\xi) \delta - \alpha \text{Sgn}(\xi) \delta - \beta \text{Sgn}(\delta) \delta = -\beta |\delta| \quad (56-3)$$

همانطور که مشاهده می‌گردد مشتق این تابع لیپانوف نیمه منفی معین بوده و سیستم (54-3) پایدار است.

برای بررسی پایداری مجانبی با استفاده از قضیه لاسال در سیستم (54-3) داریم:

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow \xi = 0 \quad (57-3)$$

بنابراین سیستم پایدار مجانبی خواهد بود و همگرایی $\xi = S$ و $\delta = \dot{S}$ تضمین خواهد شد.

با قرار دادن روابط (48-3) و (53-3) در (51-3) ورودی کنترل در این الگوریتم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\dot{u} = -\dot{f}_{nom} - \alpha \text{Sgn}(\xi) - \beta \text{Sgn}(\delta) \quad (58-3)$$

که در آن فرض شده است جملات $-\alpha \text{Sgn}(\xi) - \beta \text{Sgn}(\delta)$ اثر نامعینی را حذف نموده‌اند. اما برای اثبات این

موضوع باید پایداری زمان محدود معادلات زیر اثبات گردد که با قرار دادن ورودی کنترل (53-3) در رابطه (3-

52) بدست آمده است.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \delta \\ \dot{\delta} &= \dot{f}_{un} - \alpha \text{Sgn}(\xi) - \beta \text{Sgn}(\delta) \end{aligned} \quad (59-3)$$

این روش که اولین الگوریتم مد لغزشی مرتبه دوم می‌باشد، به الگوریتم چرخش⁶ معروف است. در برخی مراجع

برای همگرایی زمان محدود این روش کنترلی شرایط زیر مطرح گردیده است:

$$\begin{cases} \alpha > \beta > 0 \\ \beta > \frac{\Delta + 2\mu}{2} \\ \Delta > \mu \end{cases} \quad (60-3)$$

⁶ Twisting

که در آن μ کران بالای $\dot{f}_{un}$ می باشد.

در برخی مراجع دیگر ورودی کنترل در روش چرخش به صورت زیر ارائه شده است:

$$\dot{u} = \dot{u}_{eq} - k \text{Sgn}(S) \quad (61-3)$$

شرایط کافی برای همگرایی زمان محدود به سطح لغزشی در این الگوریتم به صورت زیر می باشند:

$$k > \mu \quad (62-3)$$

در صورتی که درجه‌ی نسبی 2 باشد، کنترل کننده‌ی متناظر به صورت زیر می باشد:

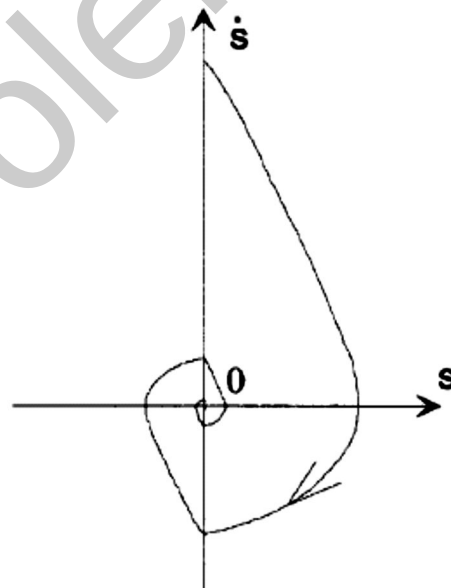
$$u = u_{eq} - k \text{Sgn}(S) \quad (63-3)$$

شرایط کافی برای همگرایی زمان محدود به سطح لغزشی در این الگوریتم به صورت زیر می باشند:

$$k > \mu$$

$$|\dot{f}_{un}| \leq \mu \quad (64-3)$$

شکل زیر رفتار سیستم با استفاده از الگوریتم چرخش در صفحه‌ی $S - \dot{S}$ می باشد. همانطور که در این شکل ملاحظه می گردد، مسیرهای سیستم تعداد نامحدودی دور زده و در زمان محدود به مرکز همگرا می شوند.



شکل 3-7 مسیر فاز الگوریتم چرخش

برای طراحی بخش رساننده با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه دوم از الگوریتم‌های دیگری از قبیل الگوریتم زیر بهینه⁷، Drift،⁸ PLV و الگوریتم فراپیش⁹ استفاده می‌شود. در بین این الگوریتم‌ها تنها الگوریتم فراپیش تنها به S نیاز داشته و به مشتقات آن برای کنترل سیستم نیازمند نمی‌باشد. بنابراین با توجه به مسئله مورد نظر در این رساله که هدایت موشک در فاز نهایی می‌باشد، اندازه‌گیری مشتقات متغیر خروجی سیستم امکانپذیر نبوده و از این رو الگوریتم فراپیش بررسی می‌گردد.

3-4-2- الگوریتم فراپیش

این الگوریتم اساساً برای کنترل سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی 1 و به منظور جلوگیری از چترینگ در ورودی کنترل توسعه داده شده است. در این الگوریتم، در فاز رسیدن برای در نظر گرفتن نامعینی‌های سیستم دینامیکی مرتبه 1، جملاتی بصورت زیر به کنترل معادل اضافه می‌شود:

$$u = u_{eq} - \alpha |S|^\rho \operatorname{Sgn}(S) - \beta \int \operatorname{Sgn}(S) dt \quad (65-3)$$

که در آن $0 < \rho < 1$ می‌باشد. با قرار دادن رابطه‌ی (65-3) در (52-3) داریم:

$$\dot{S} = f_{nom} + f_{un} + u_{eq} - \alpha |S|^\rho \operatorname{Sgn}(S) - \beta \int \operatorname{Sgn}(S) dt \quad (66-3)$$

با فرض $u_{eq} = -f_{nom}$ و بدون در نظر گرفتن نامعینی، رابطه (66-3) را می‌توان به فرم فضای حالت مرتبه دوم زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\alpha |\xi|^\rho \operatorname{Sgn}(\xi) + \delta \\ \dot{\delta} &= -\beta \operatorname{Sgn}(\xi) \end{aligned} \quad (67-3)$$

که در آن $\xi = S$ و $\delta = -\beta \int \operatorname{Sgn}(S) dt$ می‌باشند. برای بررسی پایداری سیستم (67-3) تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (68-3) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \beta \int_0^\xi \operatorname{Sgn}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \delta^2 \quad (68-3)$$

⁷ Sub Optimal

⁸ Prescribed Law of Variation

⁹ Super Twisting

مشتق این تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\dot{V} = \beta S \text{sgn}(\xi) \dot{\xi} + \delta \dot{\delta} = -\alpha \beta |\xi|^p - \beta S \text{sgn}(\xi) \delta - \beta S \text{sgn}(\xi) \delta = -\alpha \beta |\xi|^p \quad (69-3)$$

همانطور که مشاهده می‌گردد مشتق این تابع لیاپانوف به ازای $\alpha\beta > 0$ نیمه منفی معین بوده و سیستم (3-

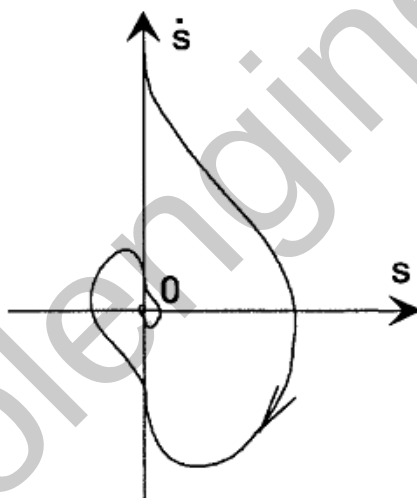
67) پایدار است. برای بررسی پایداری مجانبی با استفاده از قضیه لاسال در سیستم (3-67) داریم:

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow \delta = 0 \quad (70-3)$$

بنابراین سیستم پایدار مجانبی خواهد بود و همگرایی $\xi = S$ و $\delta = -\beta \int \text{sgn}(S) d\tau$ تضمین خواهد شد.

مزیت اصلی الگوریتم فراپیچش این است که هیچ اطلاعاتی از مشتق متغیر لغزش نیاز ندارد. در این الگوریتم،

مسیرها در صفحه‌ی دوبعدی حول مبدا می‌چرخند تا به مبدا همگرا شوند (شکل 3-8) [29-27, 21-17].



شکل 3-8 مسیر سیستم در الگوریتم فراپیچش

3-4-3- الگوریتم مد لغزشی مرتبه دوم هموار

در مراجع [36, 72] با اصلاح الگوریتم فراپیچش، الگوریتم جدیدی از مد لغزشی مرتبه دوم ارائه گردیده که

سیگنال کنترل هموارتری نسبت به الگوریتم فراپیچش تولید کرده و پایداری زمان محدود آن بدون در نظر

گرفتن

نامعینی‌های سیستم توسط تئوری سیستم‌های همگن به اثبات رسیده است. قانون کنترل در این الگوریتم بصورت زیر ارائه گردیده است:

$$u = u_{eq} - \alpha |S|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(S) - \beta \int |S|^{\frac{1}{3}} \text{Sgn}(S) dt \quad (71-3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (71-3) در (52-3) داریم:

$$\dot{S} = f_{nom} + f_{un} + u_{eq} - \alpha |S|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(S) - \beta \int |S|^{\frac{1}{3}} \text{Sgn}(S) dt \quad (72-3)$$

با فرض $u_{eq} = -f_{nom}$ و بدون در نظر گرفتن نامعینی، رابطه (72-3) را می‌توان به فرم فضای حالت مرتبه دوم زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha |\xi|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(\xi) + \delta \\ \dot{\delta} &= -\beta^{\frac{1}{3}} \text{Sgn}(\xi) \end{aligned} \quad (73-3)$$

که در آن $\xi = S$ و $\delta = -\beta \int |S|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(S) dt$ می‌باشند. برای بررسی پایداری سیستم (73-3) تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (74-3) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \beta \int_0^{\xi} |\tau|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \delta^2 \quad (74-3)$$

مشتق این تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\dot{V} = \beta |\xi|^{\frac{1}{2}} \text{Sgn}(\xi) \dot{\xi} + \delta \dot{\delta} = -\alpha \beta |\xi|^{\frac{5}{6}} - \beta \text{Sgn}(\xi) \delta - \beta \text{Sgn}(\xi) \delta = -\alpha \beta |\xi|^{\frac{5}{6}} \quad (75-3)$$

همانطور که مشاهده می‌گردد مشتق این تابع لیاپانوف نیز به ازای $\alpha\beta > 0$ نیمه منفی معین بوده و سیستم

(73-3) پایدار است. برای بررسی پایداری مجانبی با استفاده از قضیه لاسال در سیستم (73-3) داریم:

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow \delta = 0 \quad (76-3)$$

بنابراین سیستم پایدار مجانبی خواهد بود و همگرایی $\xi = S$ و $\delta = -\beta \int \text{Sgn}(S) d\tau$ تضمین خواهد شد. در

مرجع [72] ذکر گردیده که سیستم (73-3) به فرم سیستم‌های همگن بوده و پایداری مجانبی، معادل پایداری

زمان حدود این سیستم می‌باشد. اما در این مرجع رابطه‌ای برای محاسبه زمان رسیدن بر حسب بهره‌های

کنترلی و بیشینه اندازه نامعینی ارائه نگردیده است. در این الگوریتم همچنین محدوده‌ی بهره‌های کنترلی برای تضمین پایداری سیستم ارائه نشده و برای در نظر گرفتن اثر نامعینی از رویتر استفاده گردیده است.

3-5- کنترل مد لغزشی نهایی

همانطور که در بخش 3-3-2 بیان گردید، متغیر لغزش استاندارد برای پایداری یک سیستم مرتبه دوم به صورت $S(t) = x_2 + \lambda x_1$ تعریف می‌شود. با فرض اینکه در فاز رسیدن کنترل کننده مد لغزشی قادر به پایدار کردن زمان محدود این متغیر لغزش باشد، در فاز لغزش $x_2 = -\lambda x_1$ برقرار شده که بیانگر یک خط در صفحه‌ی $x_2 - x_1$ با شیب $-\lambda$ است و سطح لغزش نامیده می‌شود. در این صورت معادله دینامیکی متغیر حالت اول به صورت $\dot{x}_1 = -\lambda x_1$ است و حل آن $x_1(t) = x_1(0)e^{-\lambda t}$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین متغیر حالت اول به صورت نمایی پایدار بوده و به تبع آن متغیر حالت دوم نیز پایدار می‌باشد. لذا با تعریف متغیر لغزش به صورت رابطه (3-19)، در فاز لغزش همگرایی نمایی متغیرهای حالت تضمین می‌گردد.

برای تضمین پایداری زمان محدود متغیرهای حالت، ایده مد لغزشی نهایی مطرح گردیده که برای تعریف متغیر لغزش از جمع غیرخطی متغیرهای حالت به صورت زیر استفاده می‌کند.

$$S = x_2 + \lambda x_1^{p/q} \quad (95-3)$$

با فرض اینکه در فاز رسیدن کنترل کننده مد لغزشی قادر به پایدار کردن زمان محدود این متغیر لغزش باشد، در فاز لغزش خواهیم داشت:

$$x_2 = -\lambda x_1^{p/q} \quad (96-3)$$

این معادله بیانگر یک منحنی غیرخطی در صفحه‌ی $x_2 - x_1$ بوده و یک سطح لغزش غیرخطی خواهد بود. با قرار دادن (96-3) در رابطه (32-3) معادله دینامیکی متغیر حالت اول به صورت زیر است:

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1^{p/q} \quad (97-3)$$

با حل این معادله داریم:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1^{p/q} \Rightarrow \int_{x_1(t_r)}^0 x_1^{-p/q} dx_1 = \int_0^{t_s} -\lambda dt \Rightarrow \frac{x_1^{1-p/q}}{1-p/q} \Big|_{x_1(t_r)}^0 = -\lambda t \Big|_0^{t_s} \Rightarrow$$

$$t_s = \frac{x_1(t_r)^{1-p/q}}{\lambda(1-p/q)} \quad (98-3)$$

که در آن t_s مدت زمان فاز لغزش بوده که متغیر حالت اول از مقدار اولیه‌اش در فاز لغزش $(x_1(t_r))$ شروع شده و به صفر همگرا می‌شود. بنابراین متغیر حالت اول به صورت زمان محدود پایدار بوده و به دنبال آن متغیر حالت دوم نیز پایدار زمان محدود می‌باشد. لذا با تعریف متغیر لغزش به صورت رابطه (3-90)، در فاز لغزش همگرایی زمان محدود متغیرهای حالت تضمین می‌گردد.

با توجه به روابط (3-97) و (3-98) شرایط زیر برای پارامترهای p و q باید در نظر گرفته شود:

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < 1 \quad (99-3)$$

با در نظر گرفتن متغیر لغزش به صورت رابطه (3-90) ورودی کنترل با برقراری شرط لغزش (3-15) به صورت زیر طراحی می‌گردد:

$$\dot{V} = S\dot{S} = S \left[\dot{x}_2 + \lambda \frac{p}{q} x_1^{p/q-1} \dot{x}_1 \right] = S \left[f_{nom} + f_{un} + u + \lambda \frac{p}{q} x_1^{p/q-1} x_2 \right] \leq -\eta |S| \quad (100-3)$$

برای برقراری رابطه (3-100) ورودی کنترل به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u = -f_{nom} - \lambda \frac{p}{q} x_1^{p/q-1} x_2 - (\alpha + \eta) \text{Sgn}(x_2 + \lambda x_1^{p/q}) \quad (101-3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود این ورودی کنترل شامل جمله‌ی $x_1^{q/p-1} x_2$ بوده و x_1 در این جمله با توجه به شرایط (3-99) در مخرج قرار گرفته و به ازای $x_2 \neq 0$ و $x_1 = 0$ منجر به تکینگی در سیگنال کنترل خواهد شد. برای حل این مشکل کنترل مد لغزشی نهایی غیرسینگولار ارائه گردیده که در آن متغیر لغزش به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$S = x_1 + \lambda x_2^{p/q} \quad (102-3)$$

با فرض اینکه در فاز رسیدن کنترل کننده مد لغزشی قادر به پایدار کردن زمان محدود این متغیر لغزش باشد، در فاز لغزش خواهیم داشت:

$$x_1 = -\lambda x_2^{p/q} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{\lambda^{q/p}} x_1^{q/p} \quad (103-3)$$

این معادله نیز بیانگر یک منحنی غیرخطی در صفحه‌ی $x_2 - x_1$ بوده و یک سطح لغزش غیرخطی خواهد بود. با جایگذاری (3-97) در رابطه (3-32) معادله دینامیکی متغیر حالت اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\lambda^{q/p}} x_1^{q/p} \quad (104-3)$$

با حل این معادله داریم:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\lambda^{q/p}} x_1^{q/p} \Rightarrow \int_{x_1(t_r)}^0 x_1^{-q/p} dx_1 = \int_0^{t_s} -\frac{1}{\lambda^{q/p}} dt \Rightarrow \frac{x_1^{1-q/p}}{1-q/p} \Big|_{x_1(t_r)}^0 = -\frac{1}{\lambda^{q/p}} t \Big|_0^{t_s} \Rightarrow$$

$$t_s = \frac{x_1(t_r)^{1-q/p}}{\lambda^{q/p} (1-q/p)} \quad (105-3)$$

که در آن t_s مدت زمان فاز لغزش بوده که متغیر حالت اول از مقدار اولیه‌اش در فاز لغزش ($x_1(t_r)$) شروع شده و به صفر همگرا می‌شود. بنابراین متغیر حالت اول به صورت زمان محدود پایدار بوده و به دنبال آن متغیر حالت دوم نیز پایدار زمان محدود می‌باشد. لذا با تعریف متغیر لغزش به صورت رابطه (3-102)، در فاز لغزش همگرایی زمان محدود متغیرهای حالت تضمین می‌گردد.

با توجه به روابط (3-104) و (3-105) شرایط زیر برای پارامترهای p و q باید در نظر گرفته شود:

$$\frac{1}{2} < \frac{q}{p} < 1 \quad (106-3)$$

با در نظر گرفتن متغیر لغزش به صورت رابطه (3-102) ورودی کنترل با برقراری شرط لغزش (3-24) به صورت زیر طراحی می‌گردد:

$$\dot{V} = S\dot{S} = S \left[\dot{x}_1 + \lambda \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} \dot{x}_2 \right] = S \left[x_2 + \lambda \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (f_{nom} + f_{un} + u) \right] \leq -\eta |S| \quad (107-3)$$

برای برقراری رابطه (107-3) ورودی کنترل به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u = -f_{nom} - \frac{1}{\lambda} \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} - (\mu + \eta) Sgn(x_1 + \lambda x_2^{p/q}) \quad (108-3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود این ورودی کنترل شامل جمله‌ی $x_2^{2-p/q}$ بوده و به ازای $\frac{1}{2} < \frac{q}{p} < 1$ منجر به تکینگی نخواهد شد [42-37].

8-3- رویتگر غیرخطی

در بسیاری از روش‌های کنترل غیرخطی از قبیل فیدبک خطی‌ساز، همانند طراحی فیدبک حالت در کنترل خطی، به اکثر متغیرهای حالت برای تشکیل ورودی کنترل نیاز است. حال آن که تمامی متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری نبوده و یا فقط کمیت ریاضی می‌باشند. به عنوان مثال، در فیدبک خطی‌ساز، یا روش گام به عقب، فرض بر این است که بردار حالت اندازه‌گیری می‌شود و در دسترس است. متأسفانه، از آنجا که تمامی متغیرهای حالت به ندرت در دسترس می‌باشند، در موارد بسیار کمی می‌توان هر متغیر حالت را با یک سنسور اندازه‌گیری نمود. از این رو شکل‌هایی از بازسازی حالت از خروجی‌های اندازه‌گیری شده موجود در سیستم‌های غیرخطی نیز نیاز است. این بازسازی در صورتی که شرایط رویت‌پذیری برقرار باشد می‌تواند صورت پذیرد. در این حالت با استفاده از یک رویتگر می‌توان تخمین متغیرهای حالت را بدست آورد. در حالیکه برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان، طراحی رویتگر مسئله‌ای ساده با راه حل‌هایی متنوع است، اما در مورد مسئله غیرخطی، موضوع چالش برانگیزی بوده و راه حل کلی برای حل آن وجود ندارد. هدف این فصل ارائه راه حل‌هایی برای تعیین رویت‌پذیری سیستم‌های غیرخطی و طراحی رویتگر غیرخطی می‌باشد. در این فصل انواع روش‌های طراحی رویتگر غیرخطی ارائه شده در مراجع مرور می‌گردد. برای این منظور ابتدا از ایده فیدبک خطی‌ساز برای طراحی

رویتگر غیرخطی استفاده گردیده و سپس نحوه طراحی رویتگر با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته ارائه خواهد شد. در ادامه طراحی رویتگر غیرخطی با استفاده از روش بهره بالا و تئوری مد لغزشی ارائه می گردد.

3-8-1- بررسی رویت پذیری سیستم های غیرخطی

اگرچه روش های بسیار زیادی برای بررسی رویت پذیری سیستم های خطی وجود دارد، اما روش های بررسی رویت پذیری سیستم های غیرخطی محدود بوده و بطور کلی بررسی رویت پذیری در سیستم های غیرخطی بسیار پیچیده تر از سیستم های خطی است. در این بخش قضیه ای برای تعیین رویت پذیری سیستم های غیرخطی ارائه می شود [98].

قضیه 3-5:

سیستم غیرخطی بدون ورودی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi_{nl} \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (119-3)$$

تحقق فضای حالت بالا در یک همسایگی $U_0 \subset D$ شامل مبدا به طور محلی رویت پذیر است اگر:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla h \\ \vdots \\ \nabla L_f^{n-1} h \end{bmatrix} = n \quad \forall x \in U_0 \quad (120-3)$$

اثبات:

برای سیستم های خطی نامتغیر با زمان شرایط (3-110) با شرایط رویت پذیری خطی معادل است. برای مثال سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi_1 \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (121-3)$$

که در آن $h(x) = Cx$ و $f(x) = Ax$ می باشند. برای بررسی رویت پذیری این سیستم با استفاده از قضیه بالا داریم:

$$\nabla h(x) = C$$

$$\nabla L_f h = \nabla \left(\frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} \right) = \nabla (CAx) = CA$$

...

$$\nabla L_f^{n-1} h = CA^{n-1}$$

بنابراین ψ_1 رویت پذیر است اگر و تنها اگر $S = \{C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}\}$ مستقل خطی باشند یا بطور معادل $rank(O) = n$ باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که اگر خطی شده معادله حالت سیستم رویت پذیر باشد، آنگاه سیستم غیرخطی در اطراف مبدا بطور محلی رویت پذیر است.

3-8-2- طراحی رویتگر غیرخطی با استفاده از اصول تئوری خطی سازی فیدبک

ایده خطی سازی فیدبک می تواند در طراحی رویتگر حالت غیرخطی مورد استفاده قرار بگیرد. این روش را می توان در سه گام زیر خلاصه نمود:

(i) تبدیل همانندی معکوس پذیری را بیابید که تحقق فضای حالت را خطی کند.

(ii) برای سیستم خطی شده، یک رویتگر خطی طراحی کنید.

(iii) با استفاده از معکوس تبدیل همانندی، رویتگر غیرخطی را بازسازی کنید.

برای تشریح این سه گام سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (122-3)$$

تبدیل $T(\cdot)$ وجود دارد که رابطه زیر را ارضا می کند:

$$z = T(x) \quad (123-3)$$

طوری که پس از تبدیل همانندی تحقق جدید فضای حالت فرم زیر را خواهد داشت:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \gamma(y, u) \\ y = Cz \end{cases} \quad (124-3)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1(y, u) \\ \gamma_2(y, u) \\ \dots \\ \gamma_n(y, u) \end{bmatrix} \quad (125-3)$$

آنگاه تحت این شرایط یک رویتگر خطی طراحی می‌شود.

اگر یک تبدیل همانندی (122-3) را به (124-3) نگاشت کند آنگاه با تعریف:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \gamma(y, u) - L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{z} \end{aligned} \quad (126-3)$$

در اینصورت دینامیک خطای رویتگر با تعریف $e = z - \hat{z}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{e} = (A + LC)e \quad (127-3)$$

حال اگر مقادیر ویژه $A + LC$ در نیمه چپ صفحه مختلط واقع باشند آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ بوده و $\hat{z}$ به z میل

خواهد کرد. با توجه به این مساله، مقادیر بردار بهره L تعیین خواهند شد.

حال اگر از معکوس تبدیل همانندی استفاده گردد، می‌توان رویتگر خطی را به رویتگر حالت غیرخطی تبدیل نمود.

همان گونه که در خطی‌سازی فیدبک داشتیم این دیدگاه طراحی رویتگر نیز بر اساس حذف قسمت‌های غیرخطی و فرض "مدلسازی کامل" صورت می‌گیرد. در حالت کلی مدل کامل هیچگاه بدست نمی‌آید. زیرا پارامترهای سیستم نمی‌توانند با دقت دلخواه شناسایی شوند. پس در حالت کلی حذف "مورد انتظار" اتفاق نیفتاده و دینامیک خطا، خطی نخواهد بود. نتیجه اینکه این رویه طراحی رویتگر با توجه به نامعینی پارامترها و اینکه در حضور نامعینی همگرایی رویتگر تضمین شده نیست، مقاوم نیست.

3-8-3- طراحی رویتگر غیرخطی با استفاده از اصول تئوری لیاپانوف

رویتگر غیرخطی مورد بحث در قسمت قبل از ایده‌ی خطی‌سازی فیدبک الهام گرفته شده است. در این قسمت نشان می‌دهیم، طراحی رویتگر می‌تواند با استفاده از دیدگاه لیاپانوف مورد مطالعه قرار گیرد. سیستمی به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (128-3)$$

در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ می‌باشند. ساختار رویتگر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}, u) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (129-3)$$

در آن $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ است. قضیه زیر نشان می‌دهد، تحت این فرضیات، خطای تخمین وقتی $t \rightarrow \infty$ میل کند به صفر همگرا می‌شود.

قضیه 3-6:

سیستم (128-3) و رویتگر (129-3) مربوطه داده شده است. اگر معادله لیاپانوف

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q \quad (130-3)$$

که در آن $P = P^T > 0$ و $Q = Q^T > 0$ است، برقرار شود. آنگاه خطای رویتگر $e = x - \hat{x}$ به طور مجانبی پایدار است [98].

4-8-3- طراحی رویتگر غیرخطی با استفاده از تئوری مد لغزشی

در این بخش طراحی رویتگر غیرخطی با استفاده از تئوری مد لغزشی مرتبه اول برای تخمین متغیرهای حالت ارائه می‌گردد. برای این منظور سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f \\ y = x_1 \end{cases} \quad (131-3)$$

که در آن f تابعی غیرخطی و x_1, x_2 متغیرهای حالت می‌باشند. فرم فضای حالت برای این سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + w \\ y = x_1 \end{cases} \quad (132-3)$$

در این سیستم طراحی رویت‌گر با اندازه‌گیری x_1 مد نظر است. برای این سیستم ساختار زیر به عنوان رویت‌گر غیرخطی مدل‌گزینی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1 S \operatorname{gn}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{f} + k_2 S \operatorname{gn}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{x}_1 \end{cases} \quad (133-3)$$

که در آن $\hat{f}$ تخمین تابع f می‌باشد. بنابراین دینامیک خطا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} e_1 &= y - \hat{y} = x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\ \dot{e}_1 &= e_2 - k_1 S \operatorname{gn}(e_1) \\ \dot{e}_2 &= \Delta f - k_2 S \operatorname{gn}(e_1) \end{aligned} \quad (134-3)$$

که در آن $\Delta f = \hat{f} - f$ خواهد بود. برای یک سیستم با مرتبه n هم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - k_1 S \operatorname{gn}(e_1) \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= \Delta f - k_n S \operatorname{gn}(e_1) \end{aligned} \quad (135-3)$$

حال برای اثبات پایداری رویت‌گر از رابطه‌ی اول (135-3) شروع می‌کنیم. تابع لیاپانوف برای این رابطه به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$V = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (136-3)$$

مشتق این تابع لیپانوف به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (e_2 - k_1 \text{Sgn}(e_1)) \quad (137-3)$$

برای تضمین همگرایی زمان محدود، شرط لغزش زیر را برقرار می‌کنیم:

$$\dot{V} \leq -\eta |e_1| \quad (138-3)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 (e_2 - k_1 \text{Sgn}(e_1)) \leq -\eta |e_1| \\ \dot{V} &= \frac{e_1}{|e_1|} (e_2 - k_1 \text{Sgn}(e_1)) + \eta \leq 0 \end{aligned} \quad (139-3)$$

برای برقراری این شرط کافی است k_1 را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$k_1 = \alpha_{e_2} + \eta \quad (140-3)$$

که در آن α_{e_2} ماکزیمم مقدار خطای متغیر حالت دوم خواهد بود. بنابراین با انتخاب این مقدار برای k_1 تضمین می‌گردد e_1 در یک مدت زمان محدود به صفر همگرا شود.

حال با توجه به رابطه‌ی اول (135-3) داریم:

$$\text{Sgn}(e_1) = \frac{e_2}{k_1} \quad (141-3)$$

با جایگذاری این رابطه در روابط دوم تا n عبارت (35-3) ماتریسی سیستم خطی به صورت زیر حاصل می‌-

گردد:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-k_2}{k_1} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \frac{-k_3}{k_1} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{-k_n}{k_1} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (142-3)$$

بنابراین برای پایداری متغیرهای تخمین زده شده دوم تا n ام کافی است قسمت حقیقی مقادیر ویژه‌ی

ماتریس بالا منفی باشد و البته شرط زیر برقرار باشد:

$$k_n \geq |\Delta f| \quad (143-3)$$

که در آن Δf ماکزیمم مقدار خطای تخمین تابع f می‌باشد.