دانشگاه صنعتی شاهرود

# جلسه چهارم
# تعادل جسم صلب

$$\begin{cases} \underline{R} = \sum \underline{F} = 0 \\ \sum \underline{M} = 0 \end{cases}$$

تعادل کامل

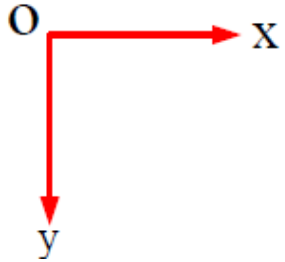
$$\sum \underline{F} = \sum F_x \underline{i} + \sum F_y \underline{j} + \sum F_z \underline{k} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \underline{M} = \sum M_x \underline{i} + \sum M_y \underline{j} + \sum M_z \underline{k} = 0$$

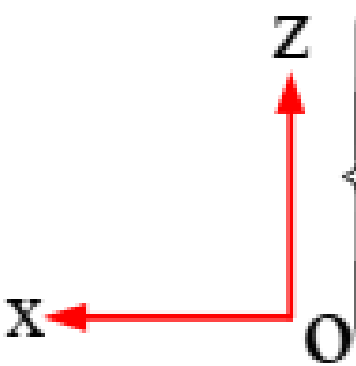
$$\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

**برای یک جسم صلب سه بعدی ۶ معادله اسکالر تعادل داریم:**



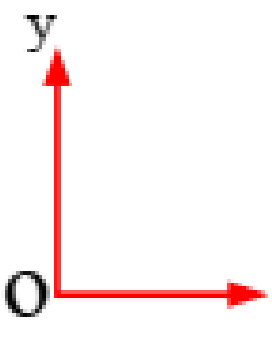

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = \sum M_o = 0 \end{cases}$$

برای یک جسم دوبعدی در صفحه xy




$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_y = \sum M_O = 0 \end{cases}$$

در صفحه xz




$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = \sum M_O = 0 \end{cases}$$

در صفحه yz

# انواع تکیه گاه ها

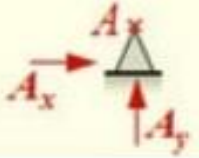
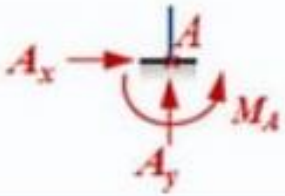
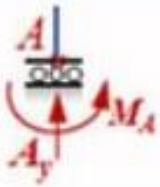
تکیه‌گاه گیردار

- این تکیه گاه که به نوعی می‌توان گفت یکی از پر کاربرد ترین تکیه گاه‌ها در سازه‌های مهندسی عمران می‌باشد و در آن از حرکت های افقی، قائم و دورانی سازه در محل اتصالش جلوگیری به عمل می‌آید.

- . تکیه‌گاه مفصلی
- این تکیه‌گاه یکی از تکیه‌گاه‌هایی می‌باشد که در آن در نقطه اتصال سازه از حرکت‌های افقی و قائم جلوگیری می‌شود اما در برابر حرکت‌های دورانی مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد.

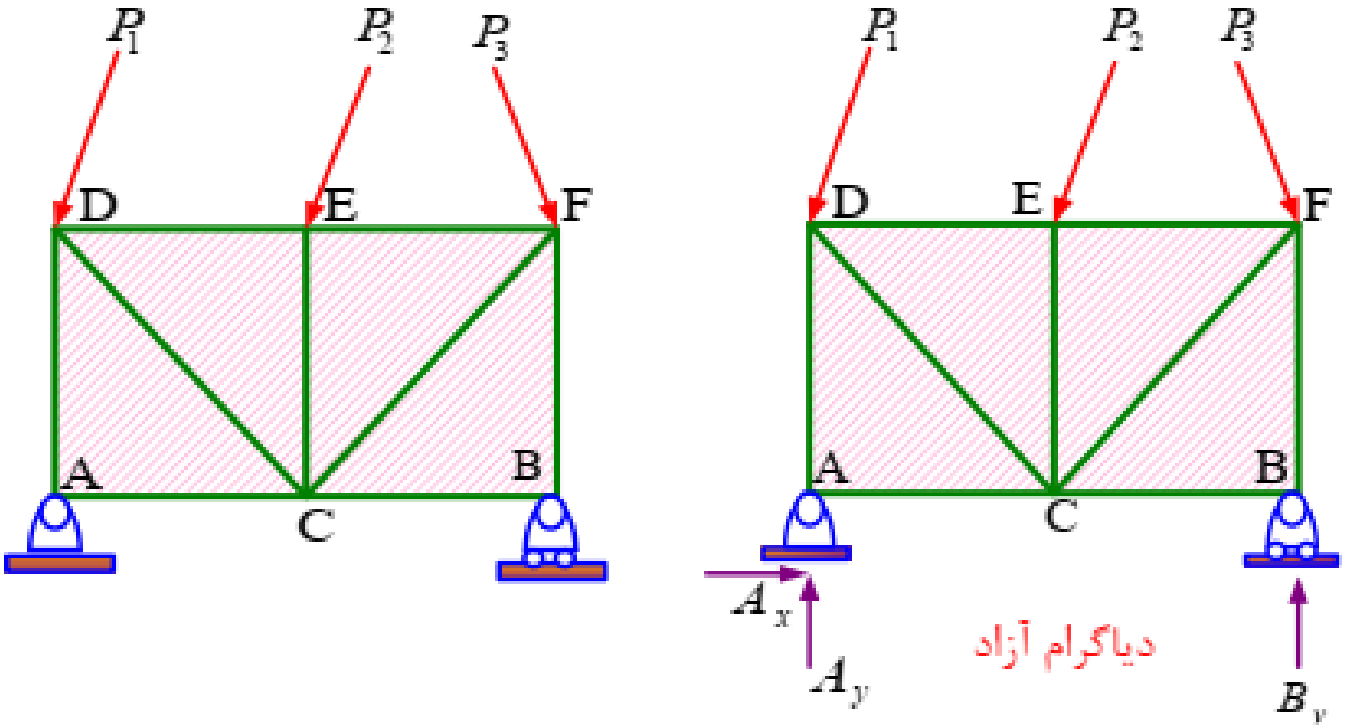
- . تکیه‌گاه غلتکی یا مفصلی متحرک
- این تکیه گاه مشابه همان تکیه‌گاه مفصلی بوده اما با آن یک تفاوت داشته و این تفاوت در درجه آزادی آن است. یعنی در این تکیه‌گاه علاوه بر عدم مقاومت در برابر دوران، در برابر حرکت در امتداد افق نیز مقاومتی وجود ندارد.

- . گیردار برش آزاد
- تفاوت این سری از تکیه‌گاه‌ها در سازه با تکیه‌گاه غلتکی، وجود عامل مقاوم در برابر دوران در آن ها می‌باشد به صورتی که این تکیه‌گاه در برابر حرکت قائم و دوران در محل اتصال از خود مقاوت نشان می‌دهد.

| نام | نمایش | عکس العمل ها | محدودیت های حرکتی |
| --- | --- | --- | --- |
| غلتکی | | | $\Delta_{A_y} = 0$ |
| مفصلی | |  | $\Delta_{A_x} = 0$<br>$\Delta_{A_y} = 0$ |
| گیردار | |  | $\Delta_{A_x} = 0$<br>$\Delta_{A_y} = 0$<br>$\theta_A = 0$ |
| گیردار برش آزاد | |  | $\Delta_{A_y} = 0$<br>$\theta_A = 0$ |

## عکس العمل های نامعین استاتیکی

از وزن سازه صرف نظر کرده ایم. ابعاد هم معلوم هستند. نیروهای $P_3, P_2, P_1$ نیز معلومند. با توجه به این که سازه را دو بعدی فرض کرده ایم بنا بر این سه معادله تعادل داریم:



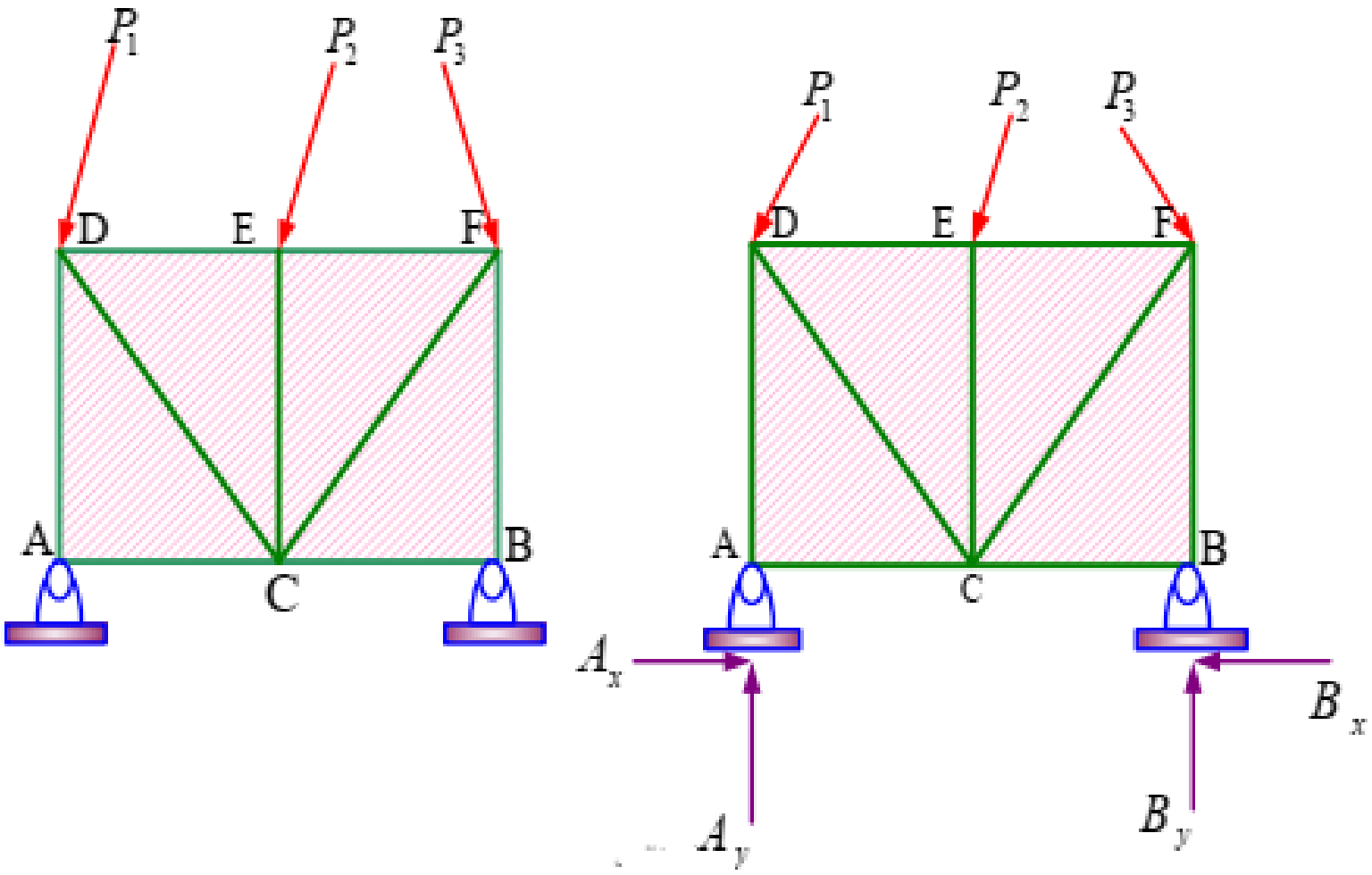
$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $B_y \Rightarrow$ $B_y$ تعیین میشود

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $A_y \Rightarrow$ $A_y$ تعیین میشود

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $A_x \Rightarrow$ $A_x$ تعیین میشود

از نظر استاتیکی عکس العمل ها معین اند.

سازه با همان شرایط قبل که این بار در هر دو تکیه گاه مفصل شده



$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $B_y \Rightarrow$ $B_y$ تعیین میشود

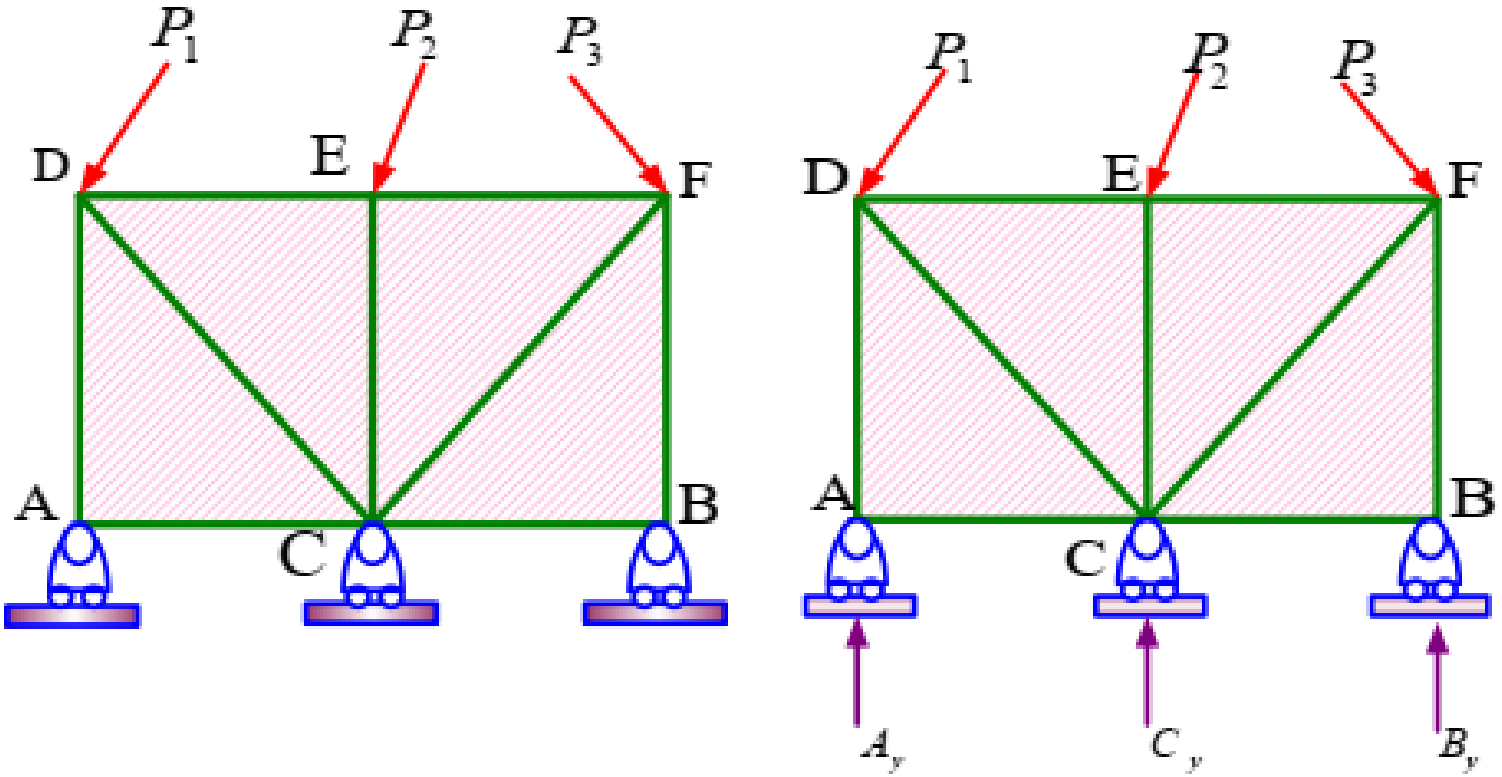
$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $A_y \Rightarrow$ $A_y$ تعیین میشود

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ $B_x, A_x$ معادله ای با دو مجهول

بنابراین $B_x$ ، $A_x$ از نظر استاتیکی عکس العمل های نـامعین انـد.

$$\sum M_D = 0, \sum M_C = 0, \sum M_B = 0, \sum M_E = 0, \sum M_F = 0$$

هیچکدام از معادلات بالا را نمی توان برای بدست آوردن مجهول جدیدی استفاده کرد.
نوشتن آنها معادله مستقلی را بدست نمی دهد


P1
P2
P3
D
E
F
A
C
B
P1
P2
P3
D
E
F
A
C
B
Ay
Cy
By

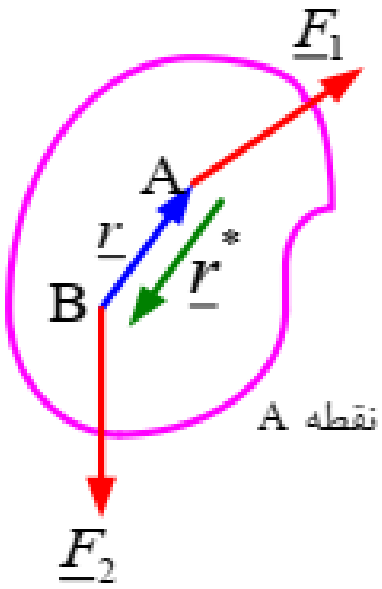
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$ معادله ای با دومجهول $C_y, B_y$ می دهد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$ معادله ای با سه مجهول $C_y, B_y, A_y$ می دهد.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$ معادله ای بدست می آید فاقد مجهولات $C_y, B_y, A_y$

**عکس العمل ها از نظر استاتیکی نا معین اند**

# تعادل اجسام دو نیرویی




نسبت به نقطه B $\sum \underline{M}_B = \underline{r} \times \underline{F}_1 = 0$

می بایست نیروی $F_1$ در امتداد بردار $\underline{r}$ باشد.

نسبت به نقطه A $\sum \underline{M}_A = \underline{r}^* \times \underline{F}_2 = -\underline{r} \times \underline{F}_2 = 0$

می بایست نیروی $F_2$ در امتداد بردار $\underline{r}$ باشد.

برای برقراری شرایط تعادل دورانی یعنی : $\sum \underline{M} = 0$

میبایست دو نیرو در یک امتداد باشند

برای برقراری شرایط تعادل انتقالی یعنی: $\sum \underline{F} = 0 \rightarrow \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0$

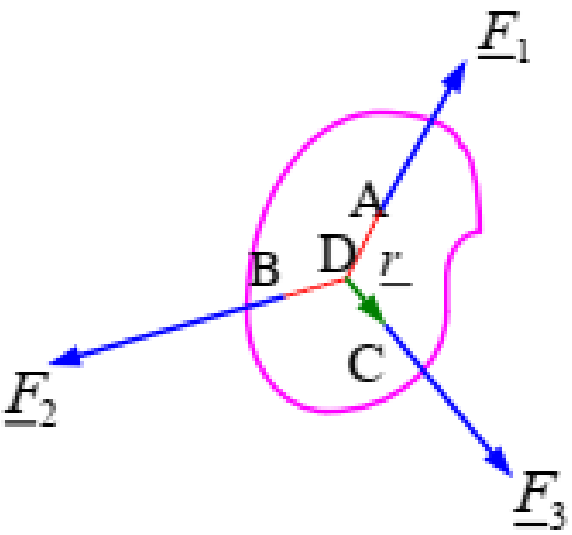
دو نیرو میبایست مساوی و مختلف الجهت باشند

نتیجه کلی: برای تعادل کامل جسم دو نیرویی دو نیرو باید مساوی و مختلف الجهت و نیز در یک راستا باشند

# تعادل اجسام سه نیرویی

دو بردار $F_2, F_1$ را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند.

از D به نقطه اثر $F_3$ وصل می کنیم.




**تعادل دورانی:**

$$\sum \underline{M}_D = \underline{r} \times \underline{F}_3 = 0$$

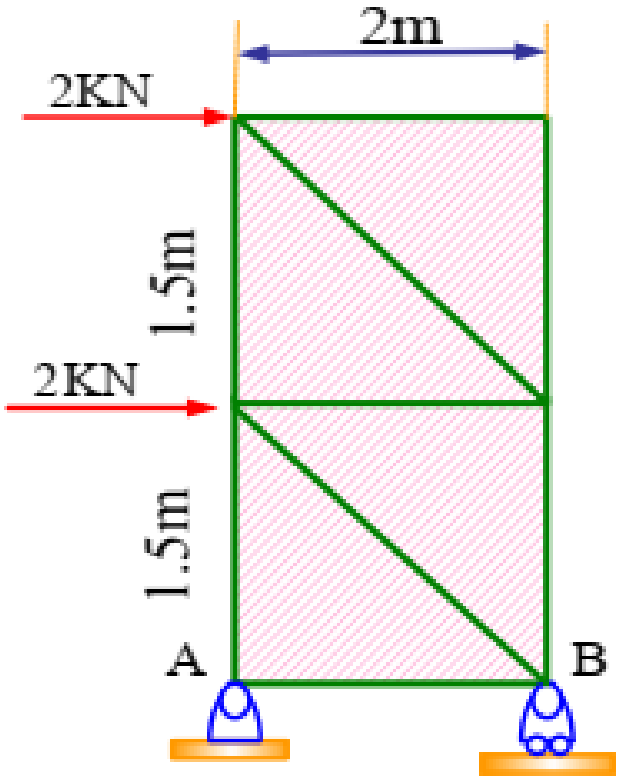
سه نیرو می بایست متقارب باشند.

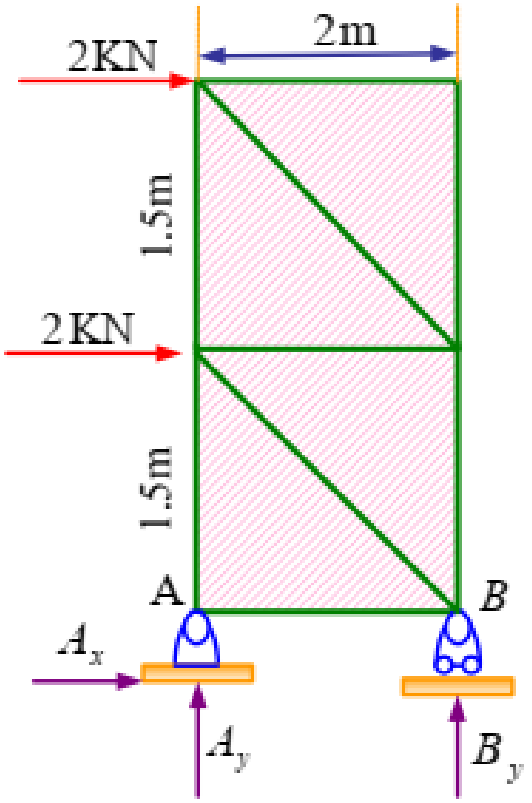
**تعادل انتقالی:**

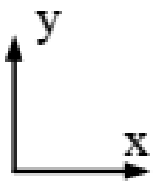
$$\sum \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 0$$

نتیجه: برای تعادل کامل جسم سه نیرویی می بایست: سه نیرو متقارب بوده وهمچنین شرط تعادل انتقالی نیز برقرار باشد

**مثال**: برای خرپای نشان داده شده در شکل مؤلفه های عکس العمـل در تکیـه گـاه های A , B را بیابید.






$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 2 + 2 = 0$$

$$A_x = -4KN$$

علامت منفی نشان می دهد جهت آن مخالف جهتی است که ما فرض کرده ایم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2B_y - 2\times 3 - 2(1.5) = 0$$

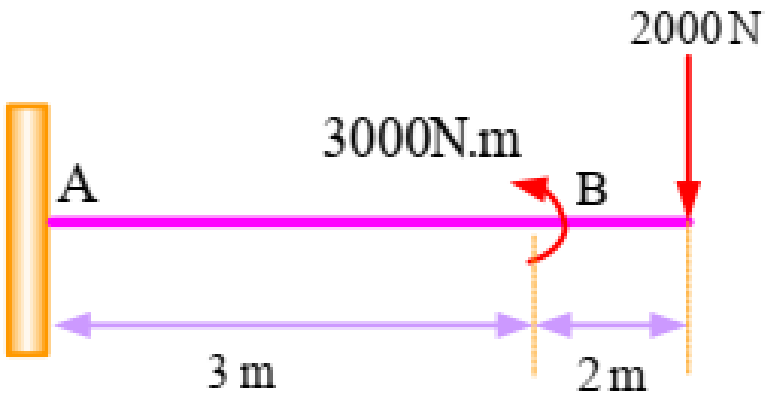
$$B_y = 4.5KN$$

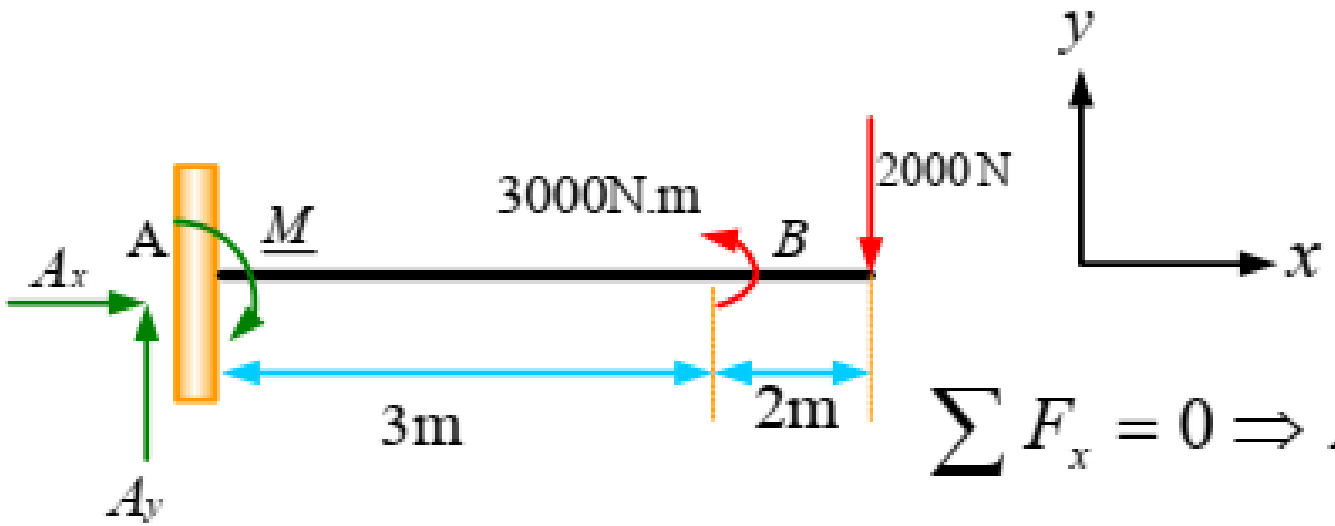
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -4.5KN$$

**این ساختار از نظر استاتیکی عکس العمل هایش معین اند.**

**مثال**: برای تیر نشان داده شده در شکل عکس العمل ها را در A تعیین کنید.






$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

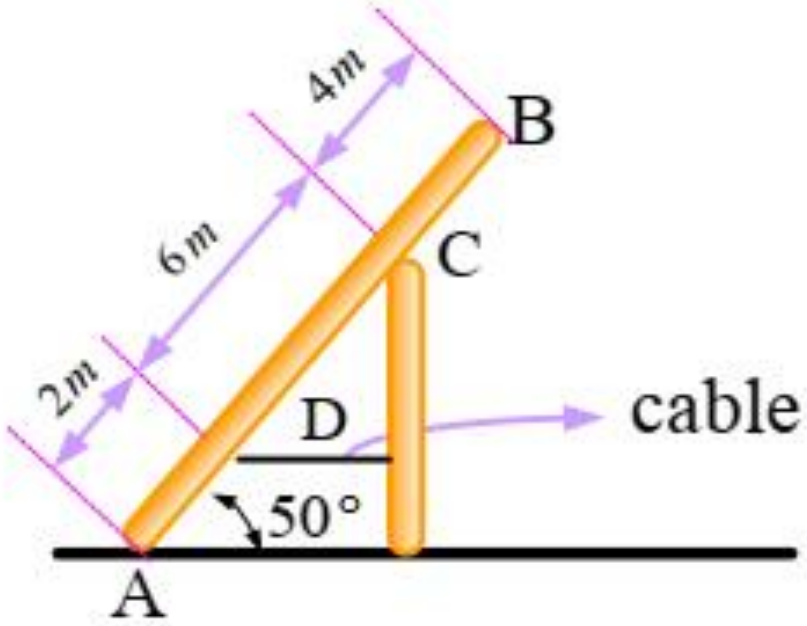
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2000 = 0 \Rightarrow A_y = 2000\,N$$

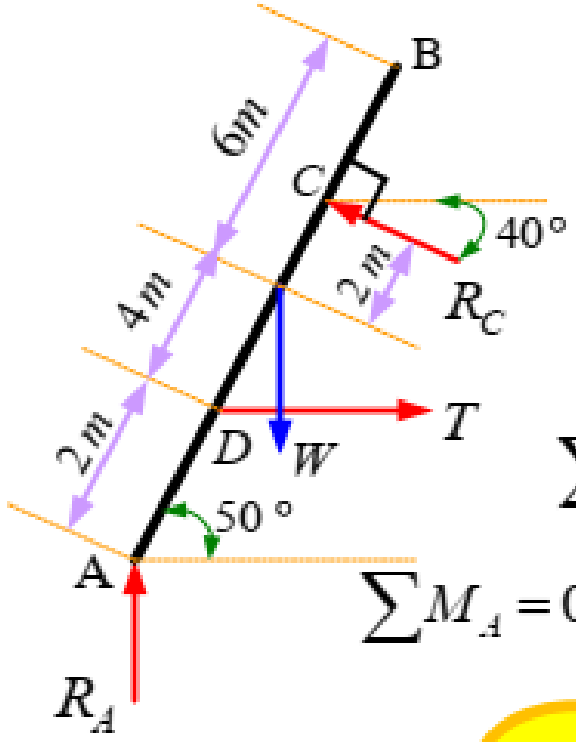
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2000 \times 5 - 3000 + M = 0$$

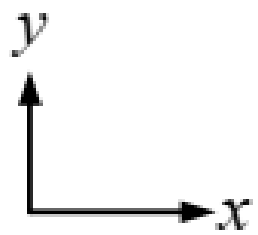
$$M = -7000 \quad N.M$$

علامت منفی نشان می دهد جهت آن مخالف آن جهتی است که انتخاب کرده ایم.

**مثال :** میله AB به وزن 250N در وضعیت نشان داده شده در شکل قرار گرفته است چنانچه سطوح تکیه گاهی میله صیقلی فرض شوند مطلوبست تعیین کشش در کابل ونیروها در نقاط A و C .





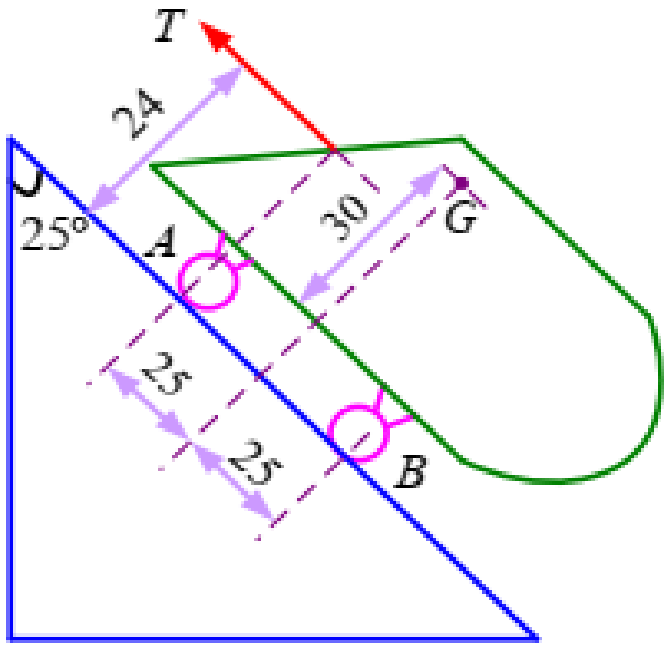

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - R_C \cos 40 = 0$$

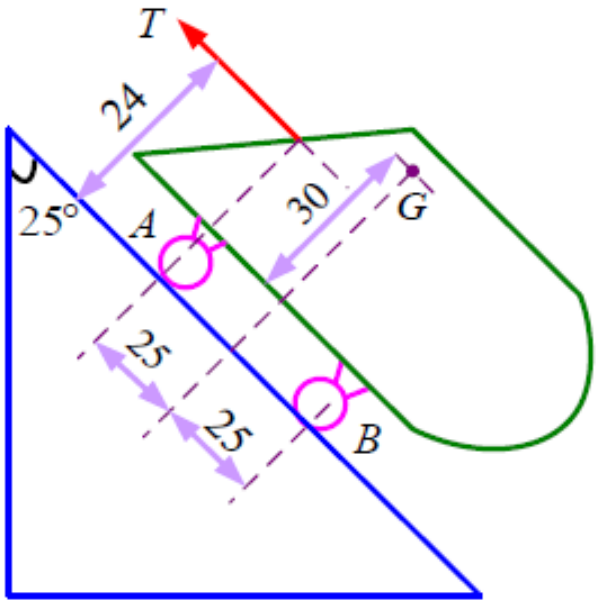
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_C \sin 40 + R_A - 250 = 0$$

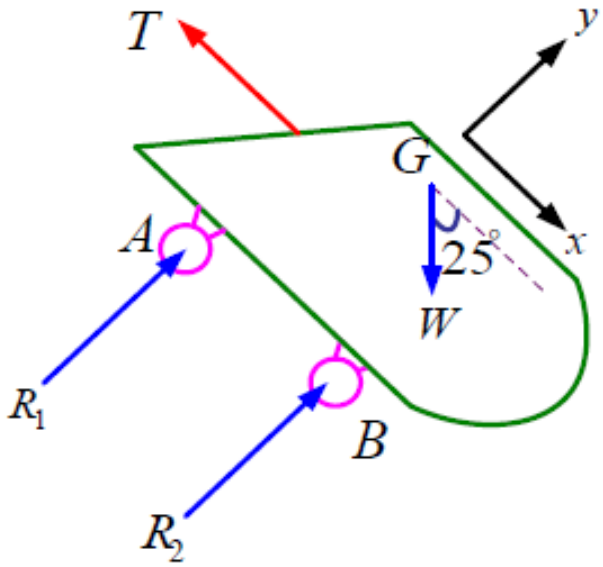
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 8R_C - 250 \times (6\cos 50) - 2T \sin 50 = 0$$

$R_C = 141.3\ N$
$R_A = 159\ .3\ N$
$T = 108\ .23\ N$

**مثال**: مدل ارابه ای به وزن 100N که مرکز ثقل آن در نقطه G می باشد بر روی سطح شیبداری مطابق شکل قرار گرفته است و به وسیله نیروی کشش T در امتداد سطح شیبدار نگهداری شده است. مطلوبست تعیین نیروی T و عکس العمل های چرخ ها در صورتیکه از اصطکاک صرف نظر شود. (ابعاد بر حسب سانتیمترهستند)






$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \qquad W\cos 25 - T = 0 \Rightarrow \qquad T = 90.6\,N$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$0.5R_2 + 0.24T - 0.3W\cos 25^\circ - 0.25W\sin 25^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 32.02\ N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad R_1 + R_2 - W\sin 25^\circ = 0 \qquad R_1 = 10.3\,N$$