نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : **۱۴۰۴/۲/۱۸**
وقت : **۱۰۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۴- ۱۴۰۳**

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{4y^2 - 2x^2}{x^2 + 3xy}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۲- یک عامل انتگرالساز برای معادله زیر بیابید و به کمک آن، معادله را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$(10x^2y + 6y - x^3)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$$

سوال ۳- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید : **۱۵ نمره**

$$y' + \frac{4x}{x^2 - 1}y = x\sqrt{y} \ , \ x > 1$$

سوال ۴- می‌دانیم که تابع $y_1 = x$ یک جواب معادله $(x > 0)$, $y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0$ می‌باشد. **۱۵ نمره**

جواب عمومی معادله $(x > 0)$, $y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = x$ را با روش کاهش مرتبه بدست آورید.

سوال ۵- جواب عمومی معادله زیر را حل بیابید. **۲۰ نمره**

$$y'' - 4y' + 3y = 8xe^x - 65\cos 2x$$

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : این معادله یک معادله همگن است. از تغییر متغیر $y = xu$ استفاده می‌کنیم.

$$y' = \frac{4y^2 - 2x^2}{x^2 + 3xy} \rightarrow u + xu' = \frac{4x^2u^2 - 2x^2}{x^2 + 3x^2u} \rightarrow xu' = \frac{4u^2 - 2}{1 + 3u} - u \rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u - 2}{1 + 3u}$$

این معادله یک معادله جدایی پذیر است.

$$\rightarrow \frac{1 + 3u}{(u+1)(u-2)}du = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{2}{u+1} + \frac{7}{u-2}\right)du = \frac{dx}{x} \rightarrow \int\left(\frac{2}{u+1} + \frac{7}{u-2}\right)du = \int\frac{3dx}{x}$$

$$\rightarrow 2\ln(u+1) + 7\ln(u-2) = 3\ln x + c \rightarrow (u+1)^2(u-2)^7 = ax^3 \rightarrow \left(\frac{y}{x}+1\right)^2\left(\frac{y}{x}-2\right)^7 = ax^3$$

$$\rightarrow (y+x)^2(y-2x)^7 = ax^{12}$$

پاسخ سوال۲ : داریم $M = 10x^2y + 6y - x^3$, $N = 2x^3 + 2x$ و در نتیجه $M_y = 10x^2 + 6$, $N_x = 6x^2 + 2$

چون $M_y \neq N_x$ پس این معادله یک معادله کامل نیست. اما چون $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(10x^2+6)-(6x^2+2)}{2x^3+2x} = \frac{2}{x}$ فاقد y است

پس تابع $\mu = e^{\int\frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$ یک عامل انتگرالساز معادله است و معادله

$$(10x^4y + 6x^2y - x^5)dx + (2x^5 + 2x^3)dy = 0$$

یک معادله کامل است و داریم : $\int(2x^5 + 2x^3)dy = 2x^5y + 2x^3y$, $\int(10x^4y + 6x^2y - x^5)dx = 2x^5y + 2x^3y - \frac{1}{6}x^6$

جواب معادله عبارت است از : $12x^5y + 12x^3y - x^6 = c$

پاسخ سوال۳ : این معادله ، یک معادله برنولی است. آن را به صورت $\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{4x}{x^2-1} \times \sqrt{y} = x$ می‌نویسیم.

از تغییر متغیر $u = \sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم. $2u' + \frac{4x}{x^2-1}u = x \rightarrow u' + \frac{2x}{x^2-1}u = \frac{x}{2}$

به یک معادله مرتبه اول خطی رسیده‌ایم. داریم $\mu = e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx} = e^{\ln(x^2-1)} = x^2 - 1$ و در نتیجه :

$$u = \frac{1}{x^2-1}\left(c + \int(x^2-1)\left(\frac{x}{2}\right)dx\right) = \frac{1}{x^2-1}\left(c + \int\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\right)dx\right) = \frac{1}{x^2-1}\left(c + \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{y} = \frac{x^4 - 2x^2 + c_1}{8(x^2-1)} \rightarrow y = \frac{(x^4 - 2x^2 + c_1)^2}{64(x^2-1)^2}$$

پاسخ سوال۴ : برای استفاده از روش کاهش مرتبه ، از تغییر متغیر $y = xu$ استفاده می‌کنیم.

$$(xu'' + 2u') + \frac{4}{x}(xu' + u) - \frac{4}{x^2}(xu) = x \rightarrow xu'' + 6u' = x \rightarrow u'' + \frac{6}{x}u' = 1$$

این معادله ، یک معادله فاقد u است. از تغییر متغیر $u' = v$ استفاده می‌کنیم و به معادله مرتبه اول خطی

$v' + \frac{6}{x}v = 1$ می‌رسیم که جواب آن عبارت است از :

$$v = e^{-\int\frac{6}{x}dx}\left(c + \int e^{\int\frac{6}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{x^6}\left(c + \int x^6dx\right) = \frac{1}{x^6}\left(c + \frac{1}{7}x^7\right) \rightarrow v = \frac{c}{x^6} + \frac{x}{7}$$

اکنون داریم $u'=\frac{c}{x^{6}}+\frac{x}{7}$ که نتیجه می‌دهد $u=\frac{-c}{5x^{5}}+\frac{x^{2}}{14}+c_1$ و بالاخره ، جواب معادله اصلی عبارت است از :

$$y=x\left(\frac{-c}{5x^{5}}+\frac{x^{2}}{14}+c_1\right)=\frac{-c}{5x^{4}}+\frac{x^{4}}{14}+c_1x$$

پاسخ سوال۵ : ابتدا معادله همگن $y''-4y'+3y=0$ را حل می‌کنیم. معادله مشخصه عبارت است از $m^{2}-4m+3=0$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=1\,,\,m_2=3$ دارد. بنابر این داریم : $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیر همگن ، حدس می‌زنیم $y_{p_1}=(ax^{2}+bx)e^{x}$ و $y_{p_2}=A\sin 2x+B\cos 2x$ که مجموع آنها یعنی $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ جواب خصوصی معادله خواهد بود.

$$y''_{p_1}-4y'_{p_1}+3y_{p_1}=(ax^{2}+(4a+b)x+(2a+2b))e^{x}-4(ax^{2}+(2a+b)x+b)e^{x}+3(ax^{2}+bx)e^{x}=8xe^{x}$$

بعد از ساده کردن عبارت‌ها خواهیم داشت : $-4ax+(2a-2b)=8x$

اکنون باید داشته باشیم $-4a=8\ ,\ 2a-2b=0$ که نتیجه می‌دهد $a=-2\ ,\ b=-2$ و $y_{p_1}=-2(x^{2}+x)e^{x}$.

$$y''_{p_2}-4y'_{p_2}+3y_{p_2}=(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)-4(2A\cos 2x-2B\sin 2x)+3(A\sin 2x+B\cos 2x)=-65\cos 2x$$

$$(8B-A)\sin 2x-(B+8A)\cos 2x=-65\cos 2x\ \rightarrow\ 8B-A=0\ ,\ B+8A=65$$

و در نتیجه داریم $A=8\ ,\ B=1$ و $y_{p_2}=8\sin 2x+\cos 2x$

و بالاخره جواب عمومی معادله داده شده برابر است با : $y_g=c_1e^{x}+c_2e^{3x}-2(x^{2}+x)e^{x}+(8\sin 2x+\cos 2x)$