



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۲/۱۵

وقت : ۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۲ (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله صفحه ای را بیابید که از دو نقطه A و B بگذرد و موازی خط گذرا از دو نقطه C و D باشد.

۱۵ نمره

$$A = (1, 0, -1), B = (-1, 1, 0), C = (2, 1, -1), D = (4, 5, -2)$$

سوال ۲- معادله رویه زیر را در مختصات دکارتی xyz بدست آورید. نام آن را بنویسید و

شکل تقریبی رویه را رسم کنید.

۱۵ نمره

$$\sin \varphi \sin \theta = \rho \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho \cos^2 \varphi$$

سوال ۳- تابع بطور پیوسته مشتق پذیر $z = f(t, s)$ که $t = y - z$ و $s = xy^2 + \sin x$ را در نظر بگیرید و

حاصل z_{xy} را محاسبه کنید.

۲۰ نمره

سوال ۴- برای تابع برداری $\vec{R}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + t \vec{k}$ بردار قائم اصلی $\vec{N}$ را در $t = 0$ بیابید.

۱۵ نمره

سوال ۵- کمترین مقدار تابع $f(x, y, z) = x + y + z^2$ را روی بیضیگون $x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$

به کمک روش ضرایب لاگرانژ بیابید.

۱۵ نمره

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: بردار قائم صفحه مورد نظر باید بر هر دو بردار $\vec{AB} = (-2, 1, 1)$ و $\vec{CD} = (2, 4, -1)$ عمود باشد.

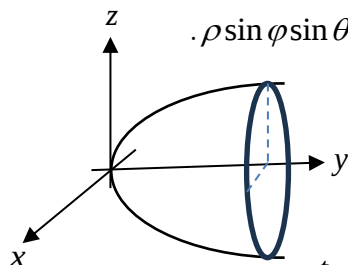
بنابر این $\vec{N} = (-2, 1, 1) \times (2, 4, -1) = (-5, 0, -10)$ و معادله صفحه مورد نظر عبارت است از:

$$-5(x-1) - 10(z+1) = 0 \rightarrow x + 2z = -1$$

پاسخ سوال ۲: دو طرف معادله را در ρ ضرب می‌کنیم: $\rho \sin \varphi \sin \theta = (\rho \sin \varphi \cos \theta)^2 + (\rho \cos \varphi)^2$

این معادله در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $y = x^2 + z^2$ خواهد بود.

این رویه، یک سهمیگون دوار است که محور تقارن آن محور y ها است و راس آن بر مبدا مختصات قرار دارد.



پاسخ سوال ۳: داریم: $t_x = -1, t_y = 1, t_{xy} = 0, s_x = y^2 + \cos x, s_y = 2xy, s_{xy} = 2y$

$$z_x = z_t t_x + z_s s_x \rightarrow z_{xy} = (z_{tt} t_y + z_{ts} s_y) t_x + z_t t_{xy} + (z_{st} t_y + z_{ss} s_y) s_x + z_s s_{xy}$$

$$\rightarrow z_{xy} = -(z_{tt} + 2xyz_{ts}) + (y^2 + \cos x)(z_{st} + 2xyz_{ss}) + 2yz_s$$

$$\rightarrow z_{xy} = -z_{tt} + 2xy(y^2 + \cos x)z_{ss} - 2xyz_{ts} + (y^2 + \cos x)z_{st} + 2yz_s$$

پاسخ سوال ۴: $\vec{R}'(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \rightarrow |\vec{R}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 2} \rightarrow \vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 2}}(2t\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$$\rightarrow \vec{T}'(t) = \frac{-4t}{\sqrt{(4t^2 + 2)^3}}(2t\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 2}}(2\vec{i}) \rightarrow \vec{T}'(0) = \sqrt{2}\vec{i} \rightarrow \vec{N}(0) = \frac{\vec{T}'(0)}{|\vec{T}'(0)|} = \frac{\sqrt{2}\vec{i}}{\sqrt{2}} = \vec{i}$$

پاسخ سوال ۵: برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، تابع

را تعریف می‌کنیم. باید داشته باشیم: $\text{grad } \varphi = 0$

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = x + y + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + 3z^2 - 6) \quad \varphi_x = 1 - 2\lambda x = 0, \quad \varphi_y = 1 - 2\lambda y = 0, \quad \varphi_z = 2z - 6\lambda z = 0, \quad \varphi_\lambda = -(x^2 + y^2 + 3z^2 - 6) = 0$$

دو معادله اول نتیجه می‌دهند $x = y = \frac{1}{2\lambda}$ و با توجه به معادله سوم، دو حالت متفاوت را در نظر می‌گیریم:

$$1) \quad x = y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = 0 \rightarrow 2x^2 = 6 \rightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$$

$$2) \quad x = y = \frac{1}{2\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \rightarrow x = y = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3z^2 = 6 \rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اکنون چهار نقطه روی بیضیگون شناسایی شده‌اند که ممکن است مقدار مینیمم تابع f در آنها اتفاق بیفتد.

$$A = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) \rightarrow f(A) = 2\sqrt{3}, \quad C = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow f(C) = \frac{7}{2}$$

$$B = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0) \rightarrow f(B) = -2\sqrt{3}, \quad D = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow f(D) = \frac{7}{2}$$

اکنون داریم $f(B) < f(A) < f(C) = f(D)$. پس کمترین و بیشترین مقدار تابع f بر روی بیضیگون داده شده به ترتیب،

برابر $-2\sqrt{3}$ و $\frac{7}{2}$ است.