



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۲/۸

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۱ (۸ گروه هماهنگ)
(برق، مکانیک، عمران، کامپیوتر، صنایع، مهندسی پزشکی)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید : ۲۰ نمره

$$z^2 - 8iz + 9 = 0 \quad (\text{الف}) \quad z^4 + 2 - 2i = 0 \quad (\text{ب})$$

سوال ۲- دامنه تابع $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ را بدست آورید. ۱۵ نمره

سوال ۳- مقدار حد زیر را بدست آورید : (استفاده از قاعده هوییتال و همارزی مجاز نیست). ۱۰ نمره

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 5x} - \sqrt{x^4 - 6x^2 + 3})$$

سوال ۴- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد. ۱۵ نمره

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1} & x > 1 \\ \sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{x-1} & x > 1 \\ a + \left[\frac{-x}{2} \right] & x \leq 1 \end{cases}$$

سوال ۵- مشتق توابع زیر را بدست آورید : ۲۰ نمره

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin 3x) \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \frac{\sin \sqrt{3x}}{3x^2 + 1} \quad (\text{ب})$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱:

$$z = 4i \pm \sqrt{-16-9} = 4i \pm 5i \rightarrow z_1 = -i, z_2 = 9i$$

(الف)

$$z^6 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, z_1 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{4}i}, z_2 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{19\pi}{4}i}, z_3 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{27\pi}{4}i}$$

(ب)

پاسخ سوال ۲: باید داشته باشیم: $-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1, x+1 \neq 0$.

اگر $x > -1$ آنگاه $-x-1 \leq x \leq x+1$ و یا $-1 \leq 2x$ که نتیجه می دهد $\frac{-1}{2} \leq x$.

اگر $x < -1$ آنگاه $-x-1 \geq x \geq x+1$ و یا $0 \geq 1$ که هیچگاه برقرار نیست.

پس دامنه تابع برابر است با: $D_f = [\frac{-1}{2}, \infty)$.

$$\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^2+3} = \frac{(\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^2+3})(\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^2+3})}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^2+3}}$$

پاسخ سوال ۳: داریم:

$$= \frac{(x^6-5x) - (x^6-6x^2+3)}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^2+3}} = \frac{6x^2-5x-3}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^2+3}} = \frac{6 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}} + \sqrt{1-\frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^2+3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}} + \sqrt{1-\frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}}} = \frac{6}{1+1} = 3$$

و در نتیجه:

پاسخ سوال ۴: باید مقدار تابع، حد راست و حد چپ برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1}}{1 - \sqrt[3]{x-1}} = \frac{0-0}{1-0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + \left[\frac{-x}{2}\right]) = a-1, \quad f(1) = a-1$$

پس باید $a-1=0$ که نتیجه می دهد $a=1$.

پاسخ سوال ۵:

$$f'(x) = 3 \times \cos 3x \times \frac{1}{1 + \sin^2 3x} = \frac{3 \cos 3x}{1 + \sin^2 3x}$$

(الف)

$$g'(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \times \cos \sqrt{3x} \times (3x^2+1) - (6x) \sin \sqrt{3x}}{(3x^2+1)^2} = \frac{\sqrt{3}(3x^2+1) \cos \sqrt{3x} - 12x \sin \sqrt{3x}}{2\sqrt{x}(3x^2+1)^2}$$

(ب)



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۴/۲/۸

وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۱ (۸ گروه هماهنگ)

(مهندسی شیمی، مواد و متالورژی، علم و مواد، نقشه برداری، ساخت و تولید)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

نمره ۲۰

سوال ۱- معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید :

$$z^2 - 8iz + 9 = 0 \quad \text{الف)}$$

$$z^5 i = 32 \quad \text{ب)}$$

نمره ۱۵

سوال ۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-1}}$ را بدست آورید.

نمره ۱۰

سوال ۳- مقدار حد زیر را بدست آورید : (استفاده از قاعده هوییتال و هم‌ارزی مجاز نیست.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 4x} - \sqrt{x^4 - 6x^2 + 3})$$

نمره ۱۵

سوال ۴- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} & x > 1 \\ a + [-x] & x \leq 1 \end{cases}$$

نمره ۲۰

سوال ۵- مشتق توابع زیر را بدست آورید :

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin 3x) \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{3x^2 + 1} \quad \text{ب)}$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱:

$$z = 4i \pm \sqrt{-16-9} = 4i \pm 5i \rightarrow z_1 = -i, z_2 = 9i$$

(الف)

$$z^5 = -32i = 32e^{-\frac{\pi}{2}i} \rightarrow z_0 = 2e^{i0}, z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}, z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}, z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}, z_4 = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}, z_5 = -2i$$

(ب)

پاسخ سوال ۲: باید داشته باشیم: $\frac{x-3}{x^2-1} \leq 0, x^2-1 \neq 0$.

اگر $x \geq 3$ آنگاه $x^2-1 > 0$ و در نتیجه $\frac{x-3}{x^2-1} \leq 0$.

اگر $x < 3$ آنگاه باید داشته باشیم $x^2-1 < 0$ و یا $x^2 < 1$ که نتیجه می دهد $-1 < x < 1$.

پس دامنه تابع برابر است با: $D_f = (-1, 1) \cup [3, \infty)$

$$\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^3+3} = \frac{(\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^3+3})(\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^3+3})}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^3+3}}$$

پاسخ سوال ۳: داریم:

$$= \frac{(x^6-5x) - (x^6-6x^3+3)}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^3+3}} = \frac{6x^3-5x-3}{\sqrt{x^6-5x} + \sqrt{x^6-6x^3+3}} = \frac{6 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \sqrt{1 - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^6}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6-5x} - \sqrt{x^6-6x^3+3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \sqrt{1 - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^6}}}} = \frac{6}{1+1} = 3$$

و در نتیجه:

پاسخ سوال ۴: باید مقدار تابع، حد راست و حد چپ برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{x-1} - 1} = \frac{0}{0-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + [-x]) = a-1, \quad f(1) = a-1$$

پس باید $a-1=0$ که نتیجه می دهد $a=1$.

پاسخ سوال ۵:

$$f'(x) = 3 \times \cos 3x \times \frac{1}{1 + \sin^2 3x} = \frac{3 \cos 3x}{1 + \sin^2 3x}$$

(الف)

$$g'(x) = \frac{y \times \cos yx \times (3x^2+1) - (yx) \times \sin yx}{(3x^2+1)^2} = \frac{y(3x^2+1) \cos yx - yx \sin yx}{(3x^2+1)^2}$$

(ب)