دانشگاه صنعتی شاهرود

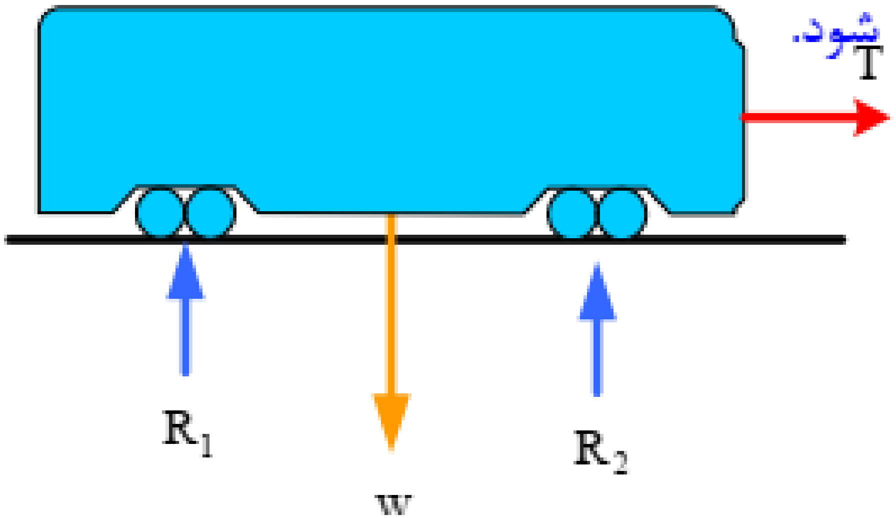
# جلسه ۲

## نیروهای داخلی و خارجی ، قابلیت انتقال نیر و ، انواع ضرب های نیرو و گشتاور نیرو

## نیروهای خارجی و داخلی:

نیروهای خارجی، نیروهایی هستند که از طرف اجسام دیگر برجسم صلب وارد می شوند و سبب رفتار خارجی جسم می شوند به عبارت دیگر یا عامل به حرکت درآوردن جسم اند یا عامل به سکون درآوردن آن.

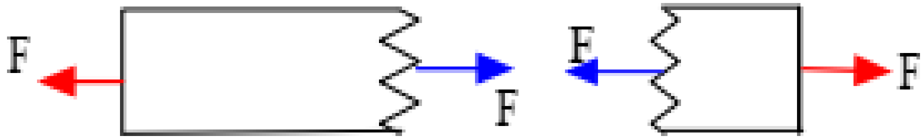
بعنوان مثال یک خودرو را درنظر بگیرید که در امتداد افقی به وسیله کابلی توسط افرادی کشیده شود.



نیروهای داخلی نیروهایی هستند که سبب می شوند اجزاءتشکیل دهنده جسم صلب در جوار یکدیگر باقی بمانند و از هم جدا نشوند.

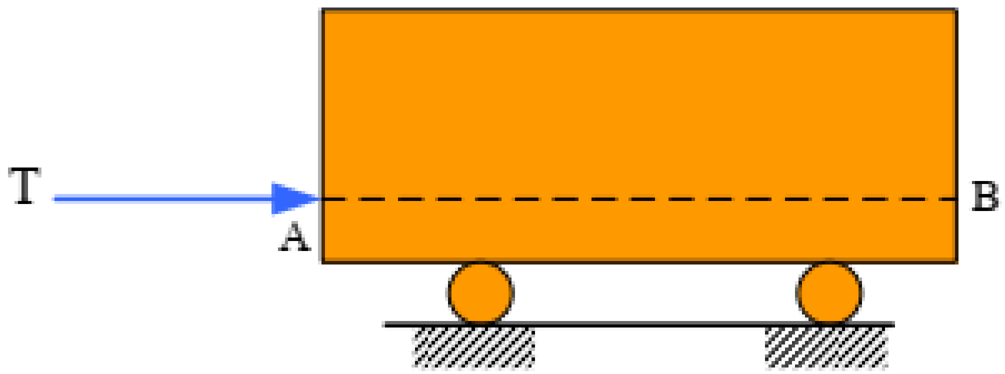
بعنوان مثال یک میله را درنظر بگیرید و فرض کنید که میله در دو انتها تحت تاثیردو نیروی مساوی و مختلف الجهت قرار گرفته باشد.

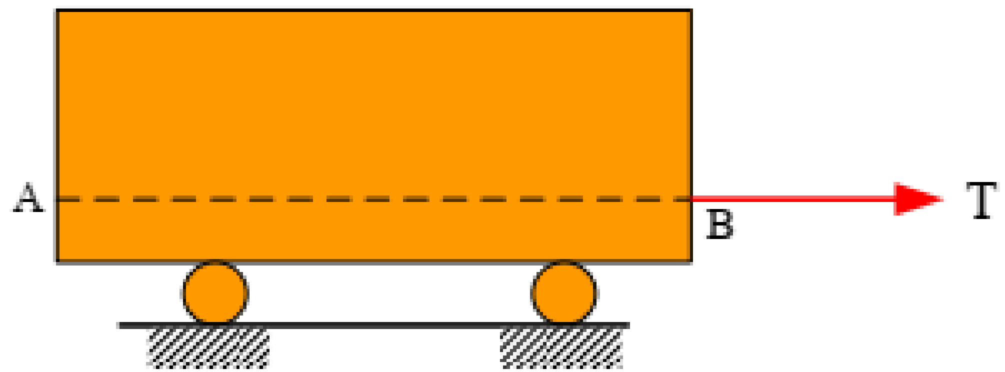

Fهای با رنگ آبی نیروهای داخلی اند.

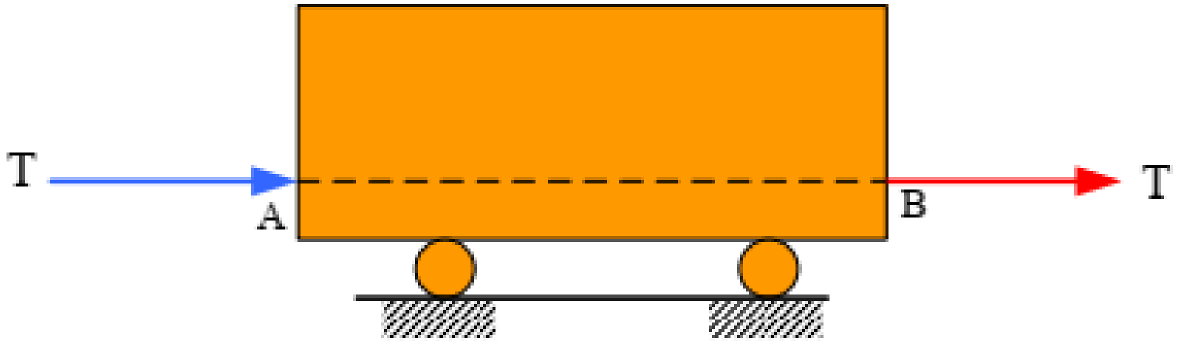


## اصل قابلیت انتقال نیرو:

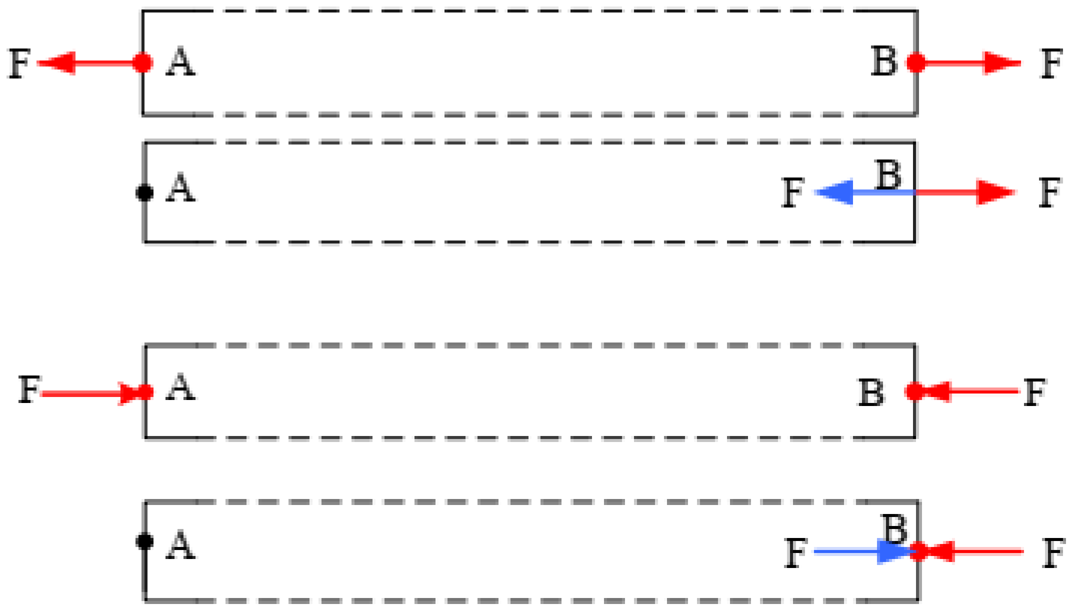
شرایط تعادل یا حرکت جسم صلب بدون تغییر خواهد ماند، چنانچه نیرویی را که به نقطه ای از جسم اثر می کند با یک نیرو در نقطه ای دیگر که مساوی و هم جهت با نیروی اولیه باشد تعویض کنیم. مشروط برآن که امتداد نیروی تعویضی (خط اثر نیروی تعویضی) همان خط اثر نیروی اولیه باشد.


T
A
B


A
B
T

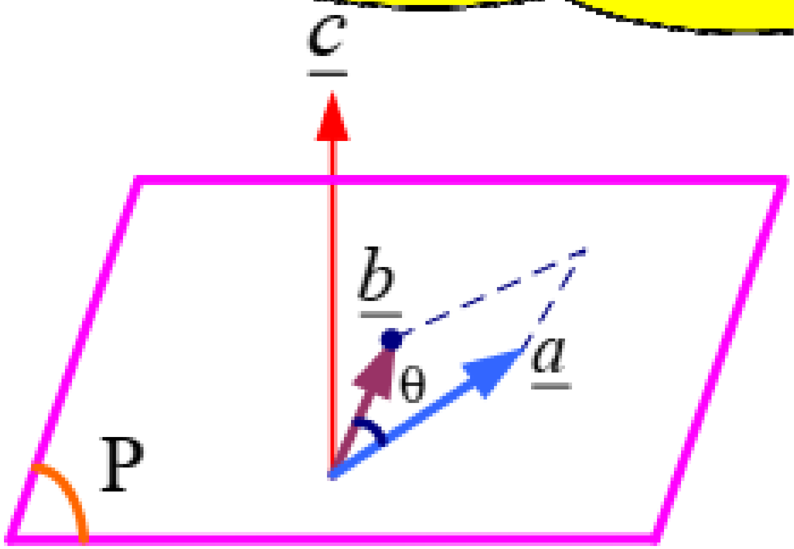

T
A
B
T

اصل قابلیت انتقال نیرو فقط برای مطالعه رفتار خارجی اجسام کاملا درست است.



# ضرب برداری دو بردار

طبق تعریف ،ضرب برداری دوبردار یک بردار
است.



a- بردار مقدم

b- بردار مؤخر

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

$$c = ab \sin \theta$$

مساحت متوازی الاضلاعی که روی دوبردار بنا شود.

امتداد عمود بر صفحه دو بردار $\underline{b},\underline{a}$ به عبارت دیگر یعنی صفحه P

**جهت بردار c به وسیله قانون دست راست تعیین می شود.**

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$$

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \left( a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} \right) \times \left( b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} \right)$$

$$= a_x b_x \left( \underline{i} \times \underline{i} \right) + a_x b_y \left( \underline{i} \times \underline{j} \right) + a_x b_z \left( \underline{i} \times \underline{k} \right) + a_y b_x \left( \underline{j} \times \underline{i} \right)$$

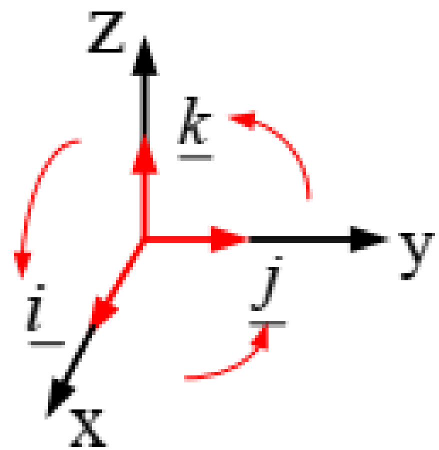
$$+ a_y b_y \left( \underline{j} \times \underline{j} \right) + a_y b_z \left( \underline{j} \times \underline{k} \right) + a_z b_x \left( \underline{k} \times \underline{i} \right) + a_z b_y \left( \underline{k} \times \underline{j} \right)$$

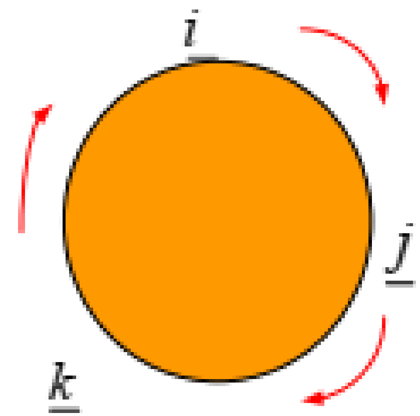
$$+ a_z b_z \left( \underline{k} \times \underline{k} \right)$$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$$

$$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$$

$$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$




$$\underline{c} = a_x b_y \underline{k} - a_x b_z \underline{j} - a_y b_x \underline{k} + a_y b_z \underline{i} + a_z b_x \underline{j} - a_z b_y \underline{i}$$

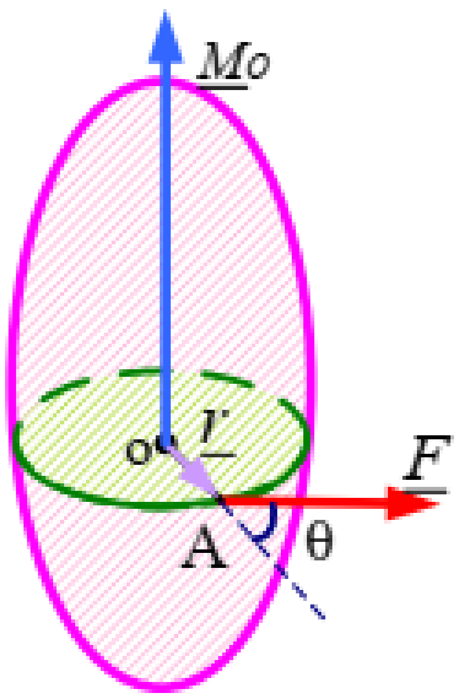
$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\underline{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\underline{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\underline{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## گشتاور حول یک نقطه

$\underline{r}$ بردار وضعیت است. از مبدأ به نقطه اثر نیروی F وصل شده است.

ترتیب بردارها مهم است.




$$\underline{M}_o = \underline{r}\times\underline{F}$$

$$\begin{cases} \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \\ \underline{F} = F_x\underline{i} + F_{\gamma}\underline{j} + F_z\underline{k} \end{cases}$$

$$M_O = rF\sin\theta$$

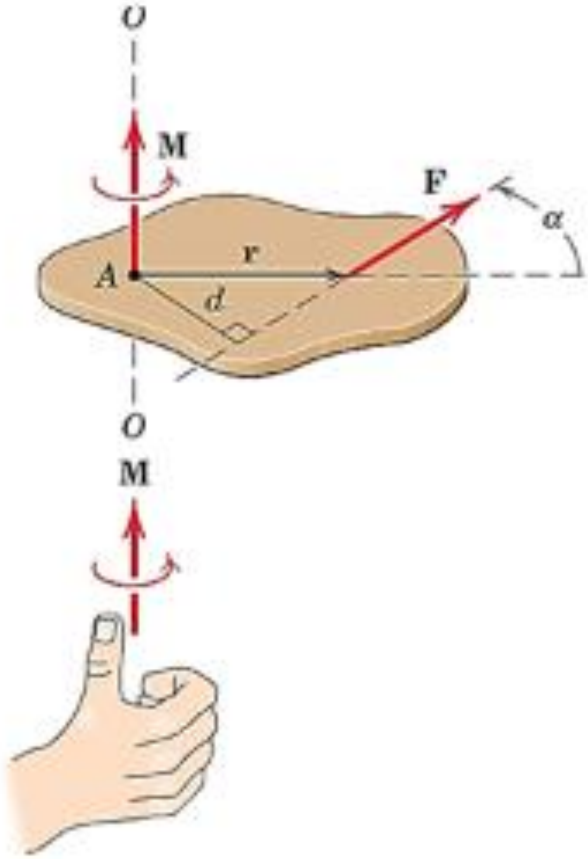
$$\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\underline{i} - \left(xF_z - zF_x\right)\underline{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\underline{k}$$

$$= M_o)_x\,\underline{i} + M_o)_y\,\underline{j} + M_o)_z\,\underline{k}$$

$$\begin{cases} M_O)_x = yF_z - zF_y \\ M_O)_y = zF_x - xF_z \\ M_O)_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

# تعیین جهت گشتاور

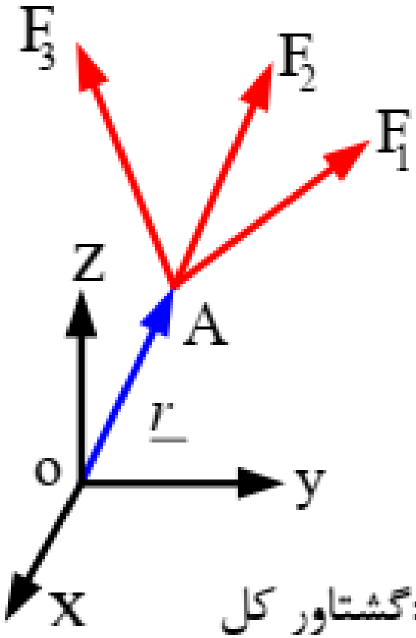
- برای تعیین جهت گشتاور، ازقانون دست راست استفاده می‌شود. بدین صورت که اگر انگشتان دست راست را در جهت بردار r بگیریم و سپس در جهت نیروی F انگشتان را بچرخانیم، انگشت شست جهت بردار گشتاور را نشان خواهد داد.
- به طور قراردادی، جهت پادساعتگرد (برون سو) گشتاور، مثبت و جهت ساعتگرد (درونسو) منفی در نظر گرفته می‌شود. این قرارداد را می‌توان برعکس درنظر گرفت اما باید توجه داشت که اولا در حل سوال، قراردادی که حل بر مبنای آن انجام شده باید ذکر شود و دوما تا انتهای حل سوال، قرارداد به همان صورت فرض شده حفظ شود.




نمایش گشتاور نیرویF حول نقطهA

## قضیه وریتون (Varignon)

یک نقطه از جسم صلب مثل نقطه A را درنظر می گیریم که به آن انواع نیروها وارد شده باشند.




$$\underline{M}_1 o) = \underline{r} \times \underline{F}_1$$

$$\underline{M}_2 o) = \underline{r} \times \underline{F}_2$$

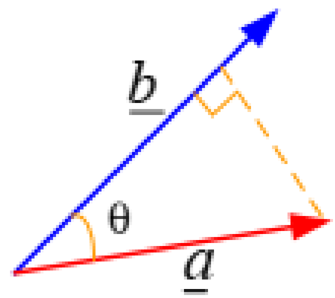
$$\underline{M}_3 o) = \underline{r} \times \underline{F}_3$$

گشتاور کل: $\underline{M}_O = \underline{M}_1 o + \underline{M}_2 o + \underline{M}_3 o + \ldots$

$$= \underline{r} \times \left( \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \ldots \right) = \underline{r} \times \underline{R}$$

گشتاور برایندنیروهای متقارب حول یک نقطه
برابر است بامجموع برداری گشتاورهای حاصل
از هر یک از نیروها حول ان نقطه.

# ضرب اسکالر دو بردار




$$\underline{a}.\underline{b} = ab\cos\theta$$

$$\begin{cases} \underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k} \\ \underline{b} = b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k} \end{cases}$$

$$\underline{a}.\underline{b} = \left(a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}\right).\left(b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k}\right)$$

$$= a_xb_x\left(\underline{i}.\underline{i}\right) + a_xb_y\left(\underline{i}\cdot\underline{j}\right) + a_xb_z\left(\underline{i}.\underline{k}\right) + a_xb_z\left(\underline{i}.\underline{j}\right) + a_yb_y\left(\underline{j}.\underline{j}\right)$$

$$a_yb_z\left(\underline{j}.\underline{k}\right) + a_zb_x\left(\underline{k}.\underline{i}\right) + a_zb_y\left(\underline{k}.\underline{j}\right) + a_zb_z\left(\underline{k}.\underline{k}\right)$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

کاربرد یک: تعیین زاویه ما بین دو بردار در فضا

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

کاربرد دو : تعیین تصویر یا مولفه یک بردار در امتداد یک بردار دیگر

$\underline{a}.\underline{b} = ab\cos\theta$ تصویر یا مولفه a در امتداد b است $a\cos\theta$

$$\frac{\underline{a}.\underline{b}}{b} = \underline{a}.\left(\frac{\underline{b}}{b}\right) = \underline{a}.\underline{\lambda}$$

تصویر یا مولفه بردار a در امتداد b

$\underline{\lambda}$ : بردار یکه در امتداد بردار $\underline{b}$

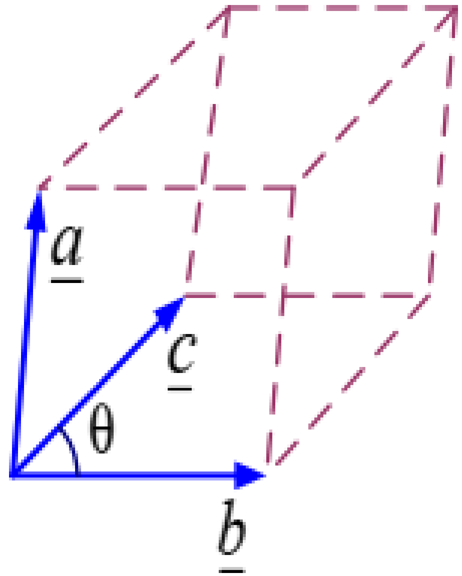
## ضرب مختلط سه بردار

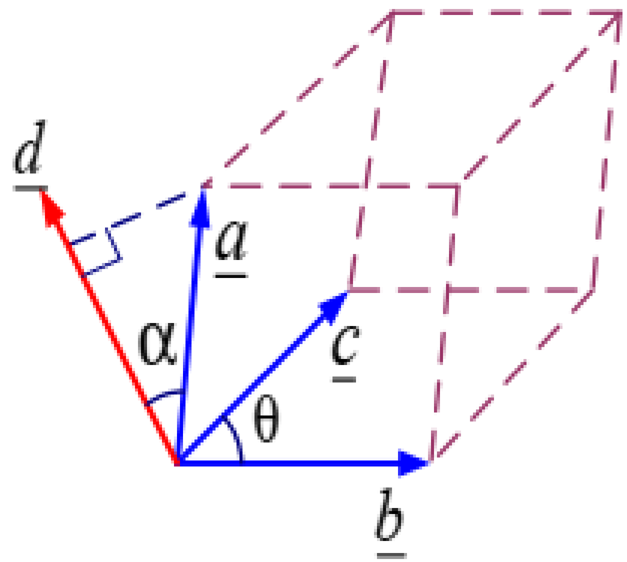
$\underline{a}.(\underline{b}\times\underline{c})$

یک کمیت اسکالر

$$\underline{d}=\underline{b}\times\underline{c} \qquad d=bc\sin\theta$$

$$\underline{a}.(\underline{b}\times\underline{c})=\underline{a}.\underline{d}=ad\cos\alpha=abc\sin\theta\cos\alpha$$



$$\boxed{\underline{a}.\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)=abc\sin\theta\cos\alpha}$$

حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار

$\underline{c},\underline{b},\underline{a}$ بنا می شود.

$$\begin{cases} \underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} \\ \underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} \\ \underline{c} = c_x \underline{i} + c_y \underline{j} + c_z \underline{k} \end{cases}$$

$$\underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(b_y c_z - c_y b_z\right) \underline{i} - \left(b_x c_z - c_x b_z\right) \underline{j} + \left(b_x c_y - c_x b_y\right) \underline{k} = \underline{d}$$

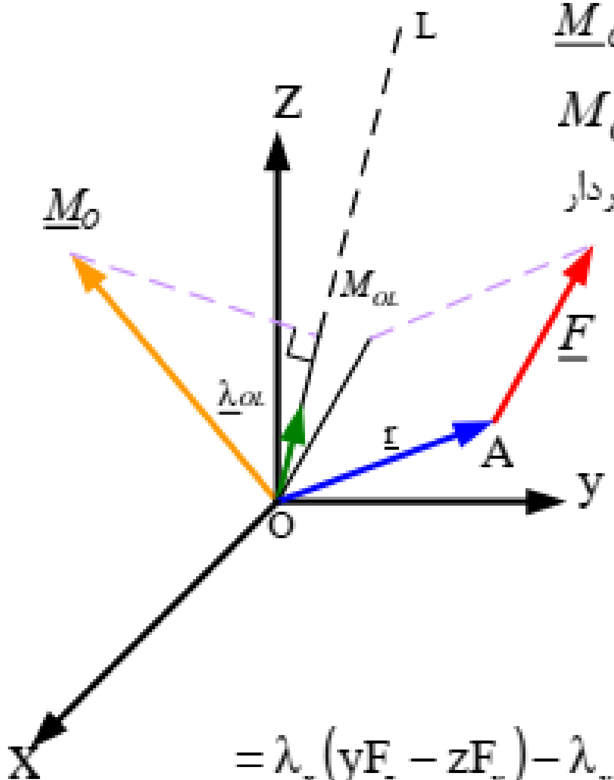
$$\underline{a}.\underline{d} = \underline{a}.(\underline{b} \times \underline{c}) = (a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k})[(b_y c_z - c_y b_z)\underline{i}$$

$$-(b_x c_z - c_x b_z)\underline{j} + (b_x c_y - c_x b_y)\underline{k}]$$

$$= a_x (b_y c_z - c_y b_z) + a_y (c_x b_z - c_z b_x) + a_z (b_x c_y - c_x b_y)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

## گشتاور حول یک محور




$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

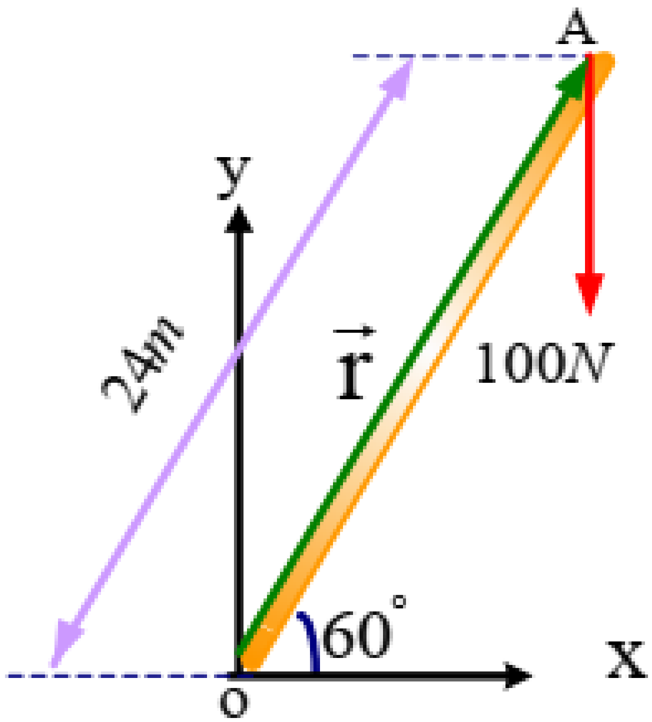
$$M_{OL} = \underline{\lambda}_{OL} \cdot (\underline{M}_O) = \underline{\lambda}_{OL} \cdot (\underline{r} \times \underline{F})$$

حجم متوازی السطوحی است که روی سه بردار

$\underline{F}, \underline{r}, \underline{\lambda}_{oL}$ بنامی شود

$$M_{OL} = \underline{\lambda}_{OL} \cdot (\underline{r} \times \underline{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_x (yF_z - zF_y) - \lambda_y (xF_z - zF_x) + \lambda_z (xF_y - yF_x)$$



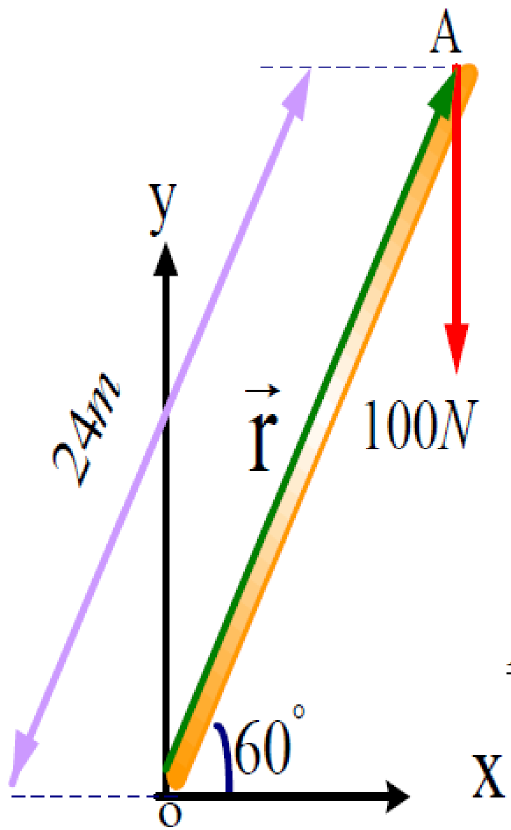

**مثال:** برای میله OA مطابق شکل که در نقطـه A تحت تاثیر نیـروی صـد نیـوتن (100N) قـرار دارد مطلوب است:

**الف)** گشتاور نیروی 100N حول نقطه O.

**ب)** بزرگی نیرویی که به طور افقی در نقطه A اعمال شود و همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد نماید.

**ج)** کوچکترین نیروی اعمال شده در نقطه A که همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند.

**د)** چنانچه در نقطه ای از میله OA نیرویی با بزرگی 240N و در امتداد عمودی اعمال کنیم فاصله این نقطه از O چقدر باید باشد تا گشتاوری برابر با همان گشتاور قبلی ایجاد کند؟

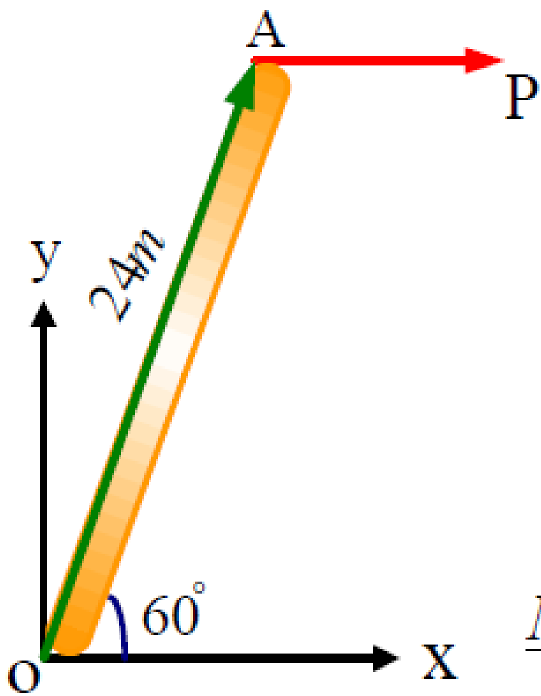




$$\underline{F} = -100\,\underline{j}$$

$$\underline{r} = 24\cos 60\underline{i} + 24\sin 60\,\underline{j} = 12(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$$

$$\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix} = -1200\ \underline{k}\ \left(N.m\right)$$




ب)

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{p}$$

$$\underline{p} = p\,\underline{i}$$

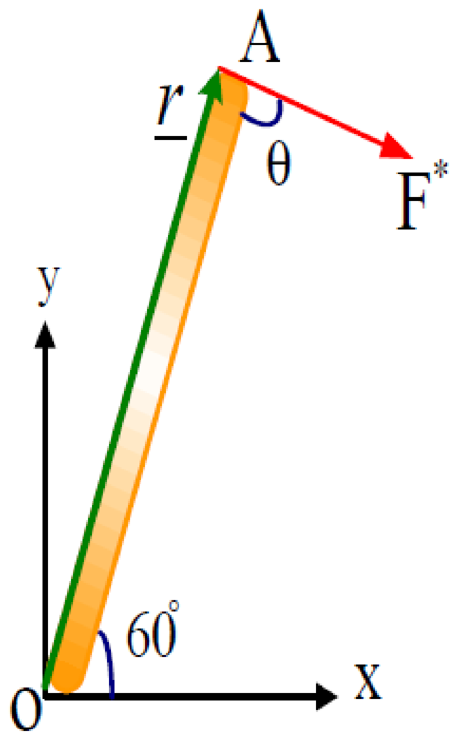
$$\underline{r} = 12\,(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$$

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12\sqrt{3}\,p\,\underline{k} = -1200\underline{k}$$

$$p = \frac{1200}{12\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\,N$$

ج)

$$\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{\overset{*}{F}} \qquad M_o = r \overset{*}{F} \sin\theta$$




$$\overset{*}{F} = \frac{M_o}{r \sin \theta}$$

r و $M_o$ ثابت اند

برای اینکه $\overset{*}{F}$ کمترین مقدار باشد

$\sin \theta$ باید بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

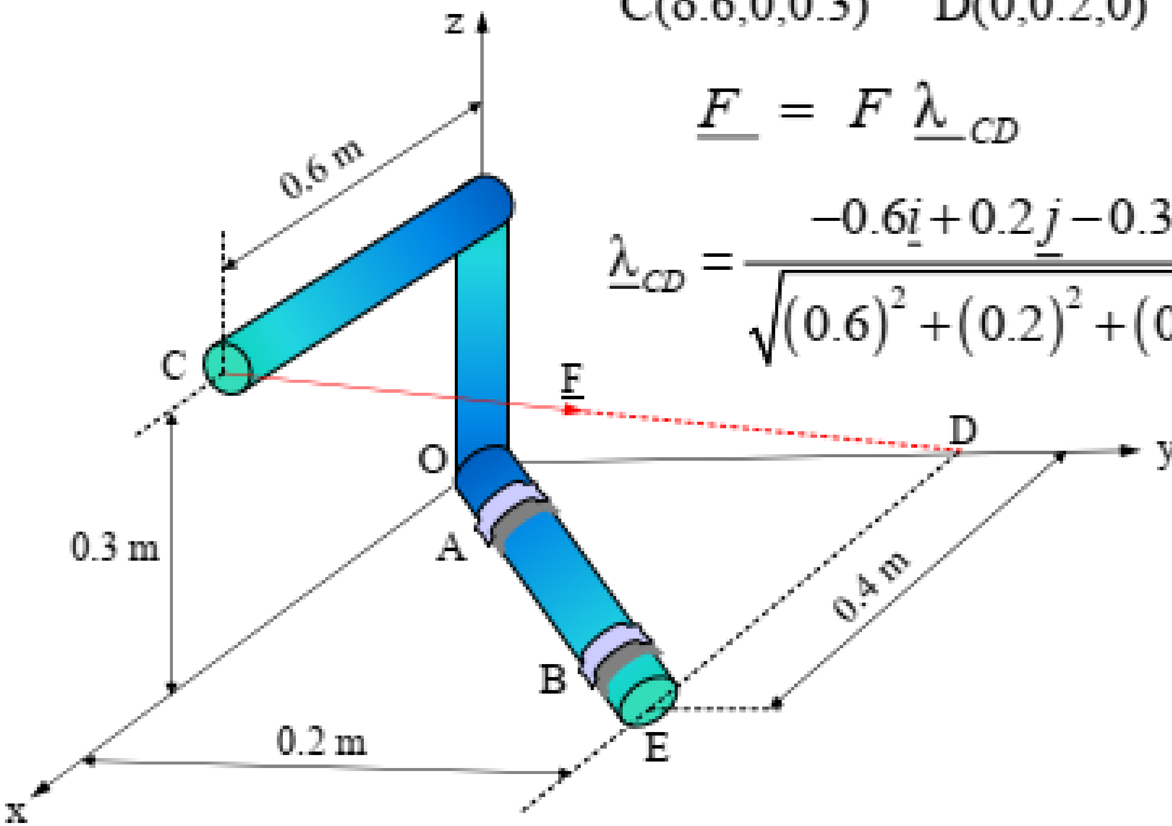
$$\sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\underline{\overset{*}{F}} = \overset{*}{F} (\cos 30^\circ \underline{i} - \sin 30^\circ \underline{j}) \qquad \underline{r} = 12 (\underline{i} + \sqrt{3} \underline{j})$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{\overset{*}{F}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3/2}\,\overset{*}{F} & -\overset{*}{F}/2 & 0 \end{vmatrix} = (-6\overset{*}{F} - 18\overset{*}{F})\underline{k}$$

$$24\,\overset{*}{F} = 1200 \Rightarrow \overset{*}{F} = 50\,N$$

**مثال:** میله نشان داده شده در شکل به وسیله دو یاتاقان A و B نگهداری شده است در صورتیکه بزرگی نیروی F، 700N باشد گشتاور نیروی F را حول محور AB پیدا کنید.




C(o.6,0,0.3)  D(0,0.2,0)

$$\underline{F} = F\,\underline{\lambda}_{CD}$$

$$\underline{\lambda}_{CD} = \frac{-0.6\underline{i} + 0.2\underline{j} - 0.3\underline{k}}{\sqrt{(0.6)^2 + (0.2)^2 + (0.3)^2}}$$

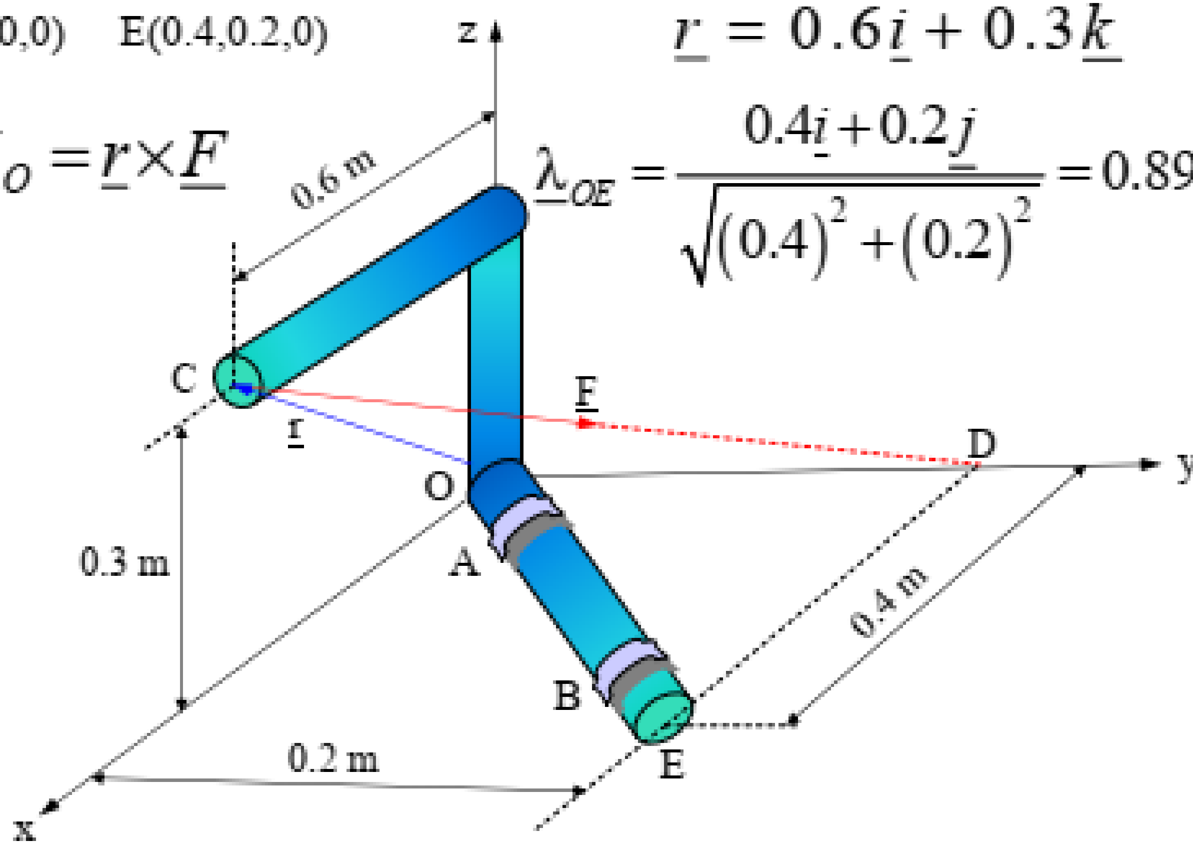
$$\underline{F} = (700)\frac{-0.6\underline{i} + 0.2\underline{j} - 0.3\underline{k}}{0.7} = -600\underline{i} + 200\underline{j} - 300\underline{k}$$

O(0,0,0)  E(0.4,0.2,0)

$$\underline{r} = 0.6\underline{i} + 0.3\underline{k}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\underline{\lambda}_{OE} = \frac{0.4\underline{i} + 0.2\underline{j}}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2}} = 0.89\underline{i} + 0.45\underline{j}$$



$$M_{AB} = \underline{\lambda}_{OE} . \underline{M}_O = \underline{\lambda}_{OE} . (\underline{r} \times \underline{F})$$

$$= \begin{vmatrix} 0.89 & 0.45 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ -600 & 200 & -300 \end{vmatrix} = -53.6\, N.m$$