بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

استاتیک ومقاومت مصالح

محمد احمدی دریاکناری

برنامه درسی

هفته	موضوع
1	نیرو وتعادل ذره مادی
2 3	گشتاور و زوج نیرو
4	تعادل
5	تعیین مراکز تعادل
6 7	تحلیل سازه ها
8 9	استاتیک سیالات
10	ممان اینرسی
11	اصطکاک
12	تحلیل تیرها
13	تحلیل کابل ها
14 , 15	مفهوم تنش و کرنش و قانون هوک
16	دایره موهر

۱- نمره کوییز ۶
۲– نمره میان ترم ۴
۳– نمره پایان ترم ۱۰

۱- مقدمه، ارایه برداری نیرو و تعادل ذره مادی

تعاریف:

مکانیک: بخشی از علوم است که درباره وضع سکون و حرکت اجسام تحت تأثیر نیروها گفتگو میکند.

فضا: یک ناحیه هندسی است که بوسیله اجسام اشغال میشود و درآن رویدادها بوقوع میپیوندد. مـوقعیت هر نقطه از جسمی بوسیله مختـصات مربوط به آن نقـطه با انتخاب دستگاه مختصات مناسب مشخص میشود.

زمان: معیار توالی رویدادهاست. در مکانیک نیوتونی زمان یک کمیت مطلق محسوب میشود.

نیرو (Force) :

اثر برداری یک جسم بر جسم دیگر است. نیرویی که بر جسمی وارد میشود، تمایل دارد آن جسم را در راستا و جهتی که بر آن اثر کرده است به حرکت درآورد.

ذره مادی (Particle) :

نمایــشگر یک جسم است با ابعاد قابل اغـماض. به هنگامیکه ابعاد یک جسم در تشریح حرکت آن و یا اثر نیروهای وارده بر آن مطرح نیستند، جسم را ذره مادی فرض میکنند.

جسم صلب (Rigid body) :

جسمی است که بین اجزاء تشکیل دهنده آن هیچ تغییر شکل نسبی بوجود نیاید. بعبارت دیگر: هرگاه تغییر شکل جسم در مقایسه با ابـعاد کلی جسم ناچیز باشد، جسم را صلب فرض میکنیم.

استاتیک (Statics) :

شاخه ای از علم مکانیک است که در ارتباط با تعادل اجسام بحث می کند. در استاتیک، فرض برآنست که جسم مورد نظر کاملاً صلب است؛ یعنی هیچ تغییر شکلی بواسطه نیروهای اعمالی در آن ایجاد نمی شود.

دیاگرام آزاد (Free body diagram) :

یک سیستم مکانیکی را میتوان بصورت یک جسم یا گروهی از اجسام که میتوان آنها را از یکدیگر مجزا نمود تعریف کرد. در حل مسایل مـکانیک لازم است که نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از دیـاگرام آزاد که نمایـشگر نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی میباشد استفاده میکنند.

کمیت	یکا	نماد	فرمول
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	...	$m/s^{۲}$
زاویه	رادیان	rad	*
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	...	$rad/s^{۲}$
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	...	rad/s
سطح	مترمربع	...	$m^{۲}$
چگالی	کیلوگرم بر مترمکعب	...	$kg/m^{۳}$
انرژی	ژول	J	N.m
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^{۲}$
بسامد	هرتز	Hz	$s^{-۱}$
ضربه	نیوتون ـ ثانیه	...	kg.m/s
طول	متر	m	**
جرم	کیلوگرم	kg	**
گشتاور نیرو	نیوتون ـ متر	...	N.m
توان	وات	W	J/s
فشار	پاسکال	Pa	$N/m^{۲}$
تنش	پاسکال	Pa	$N/m^{۲}$
زمان	ثانیه	s	**
سرعت	متر بر ثانیه	...	m/s
حجم			
جامدات	مترمکعب	...	$m^{۳}$
مایعات	لیتر	L	$۱۰^{-۳}m^{۳}$
کار	ژول	J	N.m

قانون اول نیوتن حرکت بیان می‌کند که

یک جسم در هر حالتی (سکون یا حرکت) باشد به حالت خود ادامه می‌دهد. به شرطی که برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد.

کاربرد

ورزشکار معمولاً قبل از پرش از راه دور مسافتی می‌دود. او این کار را برای غلبه بر اینرسی سکون و بدست آوردن حرکت انجام می‌دهد. از این رو در زمان پرش سرعت بیشتری دارد.

قانون دوم نیوتن حرکت بیان می‌کند که

شتاب جسم در حال حرکت به جرم جسم و همچنین نیرویی که بر جسم وارد می‌شود بستگی دارد. $F = ma$، که در آن، F نیرو، m جرم و a شتاب می‌باشد..

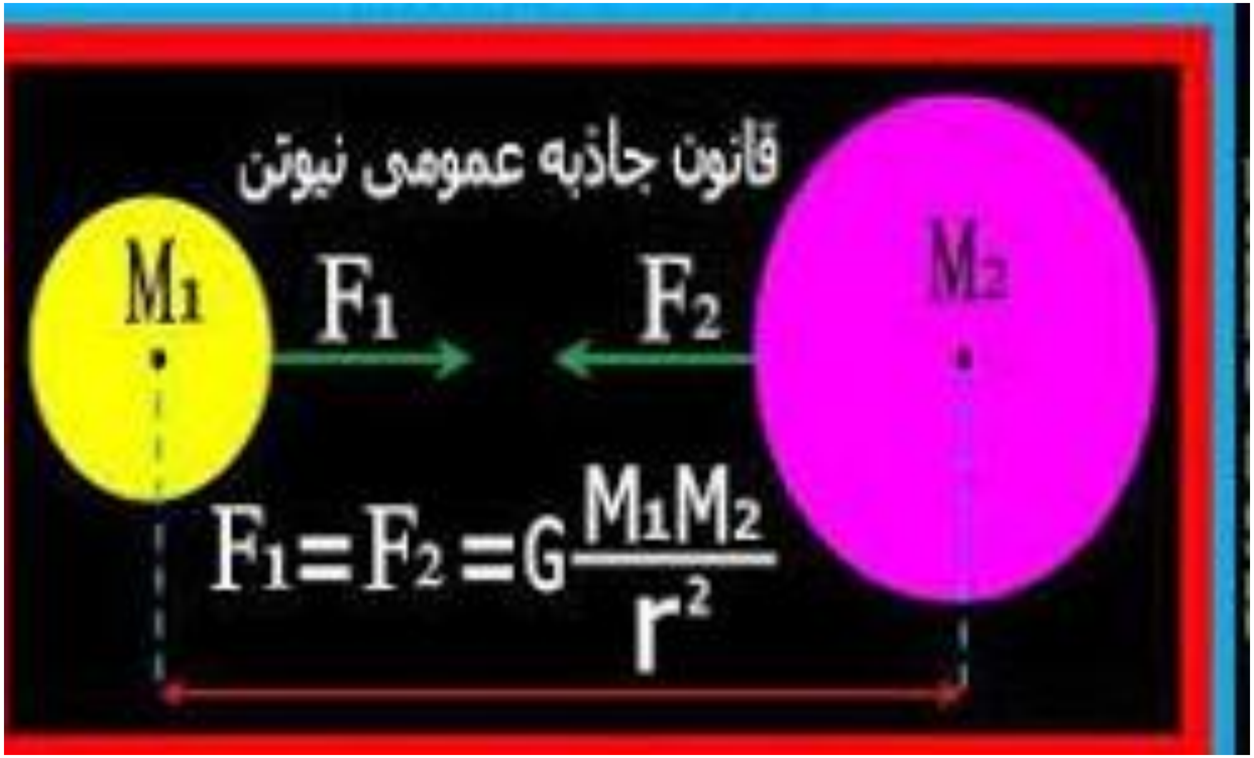
کاربرد

بازی طناب کشی را در نظر بگیرید، دو تیم طناب‌ها را در جهت مخالف می‌کشند. اما حرکت طناب در نتیجه نیروی خالص روی طناب خواهد بود. نیروی خالص به نوبه خود توسط اختلاف نیرویی که دو تیم اعمال می‌کنند تعیین می‌شود. هر کدام از تیم‌ها که سخت‌تر می‌کشند یا نیروی بیشتری اعمال می‌کنند، پیروز می‌شوند.

قانون سوم نیوتن حرکت بیان می‌کند که

برای هر عملی، عکس العملی برابر و خلاف جهت آن وجود دارد

کاربرد

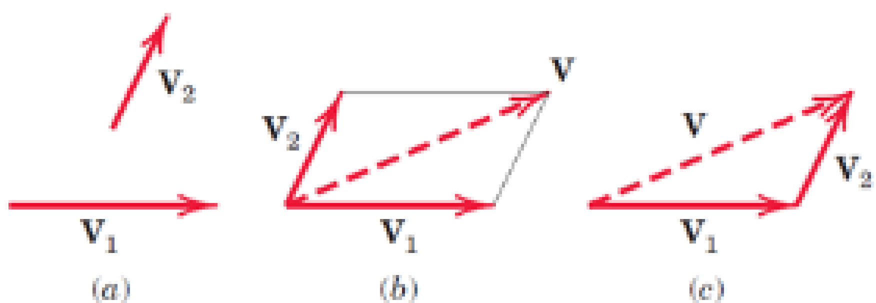


.

مقدمه ای بر بردارها

بردارها در صفحه

برایند بردارها: برای بدست آوردن برایند دو بردار به روش ترسیمی، از دو روش متوازی الاضلاع و مثلث استفاده می‌کنیم (شکل۲). در روش متوازی الاضلاع ابتدا از یک نقطه، هم‌سنگ بردار اول را رسم کرده و از ابتدای آن، هم‌سنگ بردار دوم را رسم می‌کنیم. برای پیدا کردن شکل متوازی الاضلاع، از انتهای بردار اول خطی به موازات بردار دوم رسم می‌کنیم. از انتهای بردار دوم هم خطی به موازات بردار اول می‌کشیم و بدین ترتیب متوازی الاضلاع بدست می‌آید. قطر این متوازی الاضلاع، برایند دو بردار است (شکل۲-b). در روش مثلث، هم‌سنگ بردار اول را از نقطه ای کشیده و از انتهای آن، هم‌سنگ بردار دوم را رسم می‌کنیم. ابتدار بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم و بردار حاصل، همان برایند دو بردار است(شکل۲-c). پررنگ بودن **V** ها در شکل بیانگر این است که اینکمیت‌ها برداری هستند.

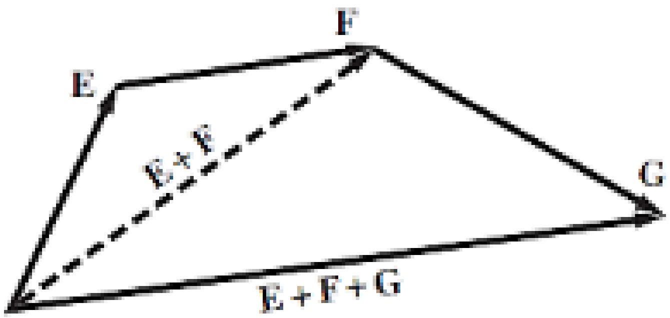


شکل ۲-(a) نمایش دو بردار.(b) برایند بردارها به روش متوازی الاضلاع.(c) برایند بردارها به روش مثلث $V= V_۱+ V_۲$ برایند بردارهاست.

برایند بیش از دو بردار

برای پیدا کردن بردار برایند بیش از دو بردار، هم‌سنگ بردارها را به دنبال هم رسم می‌کنیم (مشابه روش مثلثی).

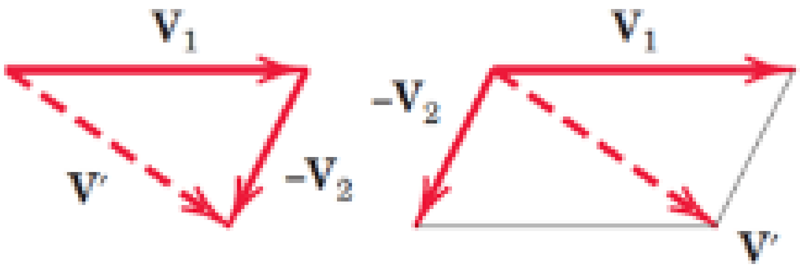
برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند، برایند بردارهاست (شکل ۳).



شکل۳- نمایش رسم برایند سه بردار

تفاضل دو بردار

تفاضل بردارها:برای پیدا کردن حاصل تفاضل V_1وV_2- کافیست بردارV_2- را رسم کرده و سپس به دو روش ذکر شده در پیدا کردن برایند دو بردار، برایندV_2- وV_1را پیدا کنیم (شکل ۴).

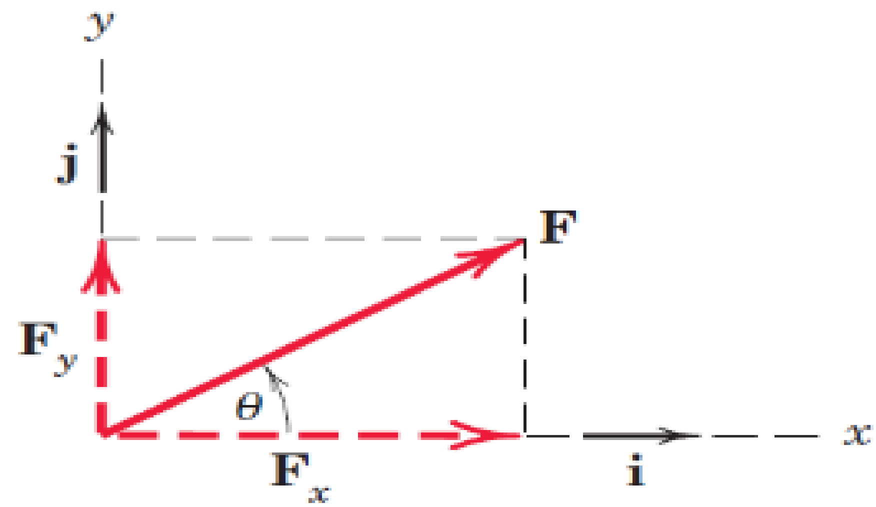


$$V' = V_1 - V_2$$

شکل ۴- (a)نمایش دو بردار. (b)تفاضل بردارها به روش متوازی الاضلاع(c) . تفاضل بردارها به روش مثلث

تجزیه بردارها به بردارهای متعامد

در قسمت قبل مشاهده شد که می‌توان مجموع دو بردار را بهروش متوازی الاضلاع یا مثلث پیدا کرد. حال در صورتی که دو امتداد متعامد در صفحه و برداری مانند F داشته باشیم، می‌توان آن را مطابق شکل۵ بر دو امتداد تجزیه کرد.



شکل۳- تجزیه بردار F به دو بردار متعامد F_x و F_y

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

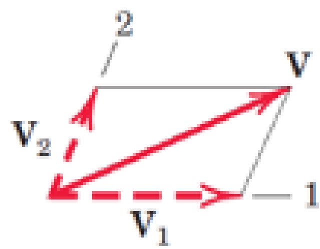
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

$$F_x = F\cos\theta \qquad F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$$

$$F_y = F\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$

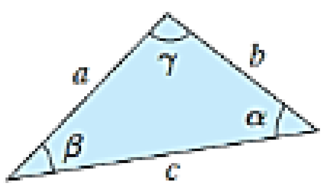
تجزیه بردارها به بردارهای غیر متعامد

در شکل ۶ تجزیه بردار V را بر دو امتداد غیر متعامد ۱ و ۲ می‌بینیم.



شکل ۴- تجزیه بردار V به دو بردار غیر متعامد V_1 و V_2

درتجزیه بردار به مولفه‌های غیر متعامد، استفاده از قانون سینوس‌ها و کوسینوس‌ها بسیار کارامد است (شکل۷).



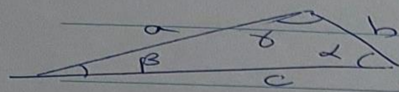
Law of sines	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
Law of cosines	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Law of Cosines

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

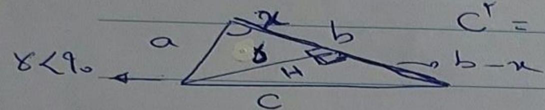
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



* اثبات :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

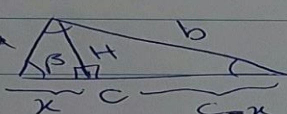


$$\begin{cases} H^2 + x^2 = a^2 \\ H^2 + (b-x)^2 = c^2 \end{cases}$$

$H^2 + (b-x)^2 = c^2 \Rightarrow H^2 + b^2 + x^2 - 2bx = c^2 \to a^2 + b^2 - 2bx = c^2$

$\cos\gamma = \frac{x}{a} \to x = a\cos\gamma$ $\quad a^2 \quad \to a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$

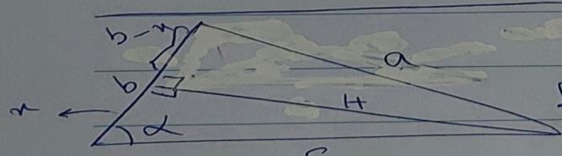
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$



$$\begin{cases} H^2 + x^2 = a^2 \\ H^2 + (c-x)^2 = b^2 \to \underbrace{H^2 + c^2 + x^2}_{a^2} - 2cx = b^2 \\ c^2 + a^2 - 2cx = b^2 \end{cases}$$

$\cos\beta = \frac{x}{a}$

$a\cos\beta = x \quad \to c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta = b^2$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\begin{cases} H^2 + x^2 = c^2 \\ H^2 + b^2 + x^2 - 2bx = a^2 \end{cases}$$

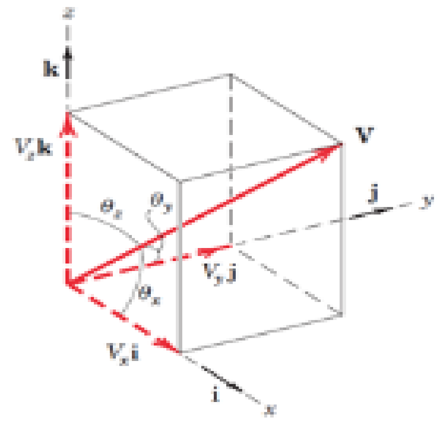
$\to c^2 + b^2 - 2bx = a^2$

$\boxed{x = c\cos\alpha}$ $\quad -2bc\cos\alpha \to b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$

بردارها در فضا

بردارها در فضا

بردار **V** شکل ۸ را در نظر بگیرید.



شکل ۶- نمایش بردار در فضا

این بردار در هر سه راستای x،y وz مولفه دارد که آنها را با V_x و V_y و V_z نشان می‌دهیم و داریم:

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

می‌توان نوشت:

$$V_x = lV \qquad V_y = mV \qquad V_z = nV$$

منظور از l،n وm، کوسینوس‌های هادی (کوسینوس بردار **V** با هر یک از سه محور x،y وz) است.

$$l = \cos\theta_x \qquad m = \cos\theta_y \qquad n = \cos\theta_z$$

لازم به ذکر است که مجموع مربعات کوسینوس‌های هادی برابر یک است.

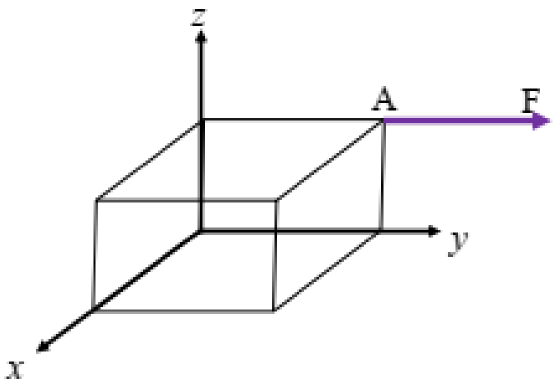
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

مربع اندازه بردار **V** برابر مجموع مربعات اندازه مولفه‌های آن در سه راستاست:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

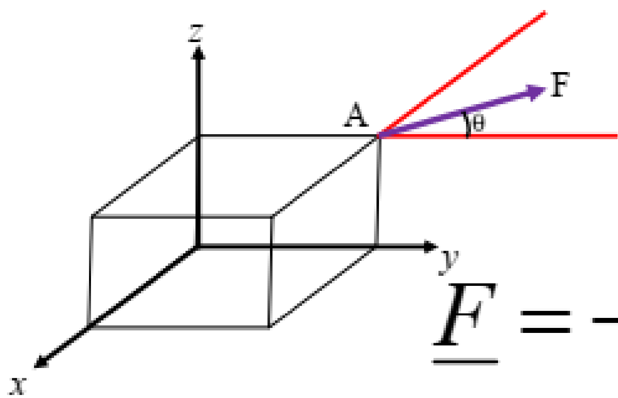
نمایش نیروها:

نیروی محوری:



$$\underline{F} = F\,\underline{j}$$

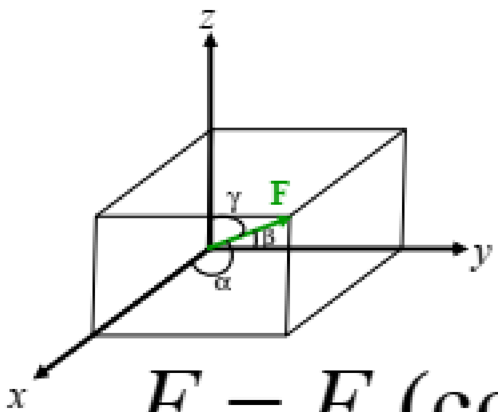
نیروی صفحه ای:



$$\underline{F} = -F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j}$$

$$\underline{F} = -F\,\sin\theta\;\underline{i} + F\,\cos\theta\;\underline{j}$$

نیروی فضایی:



$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$\underline{F} = F\,(\cos\alpha\ \underline{i} + \cos\beta\ \underline{j} + \cos\gamma\ \underline{k})$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

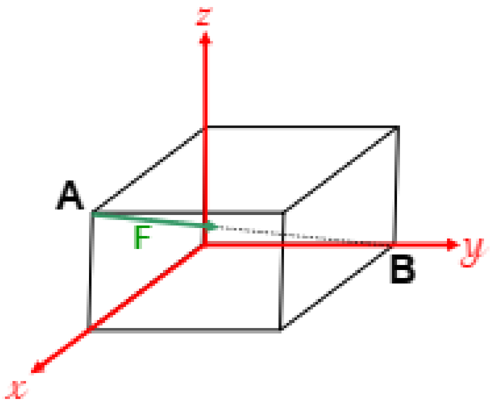
$$\cos\beta = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

نحوه ارایه یک نیرو در فضا به شکل برداری:

روش اول: با معلوم بودن مختصات دو نقطه از امتداد نیرو:



$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\underline{F} = F\,\underline{\lambda}$$

$$\underline{\lambda}_{BA} = -\underline{\lambda}_{AB}$$

روش دوم:

اگر کسینوس های هادی معلوم باشند، آنگاه داریم:

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \cos\ \alpha_x\ \underline{i} + \cos\ \alpha_y\ \underline{j} + \cos\ \alpha_z\ \underline{k}$$

$$\underline{F} = F\ \underline{\lambda}$$

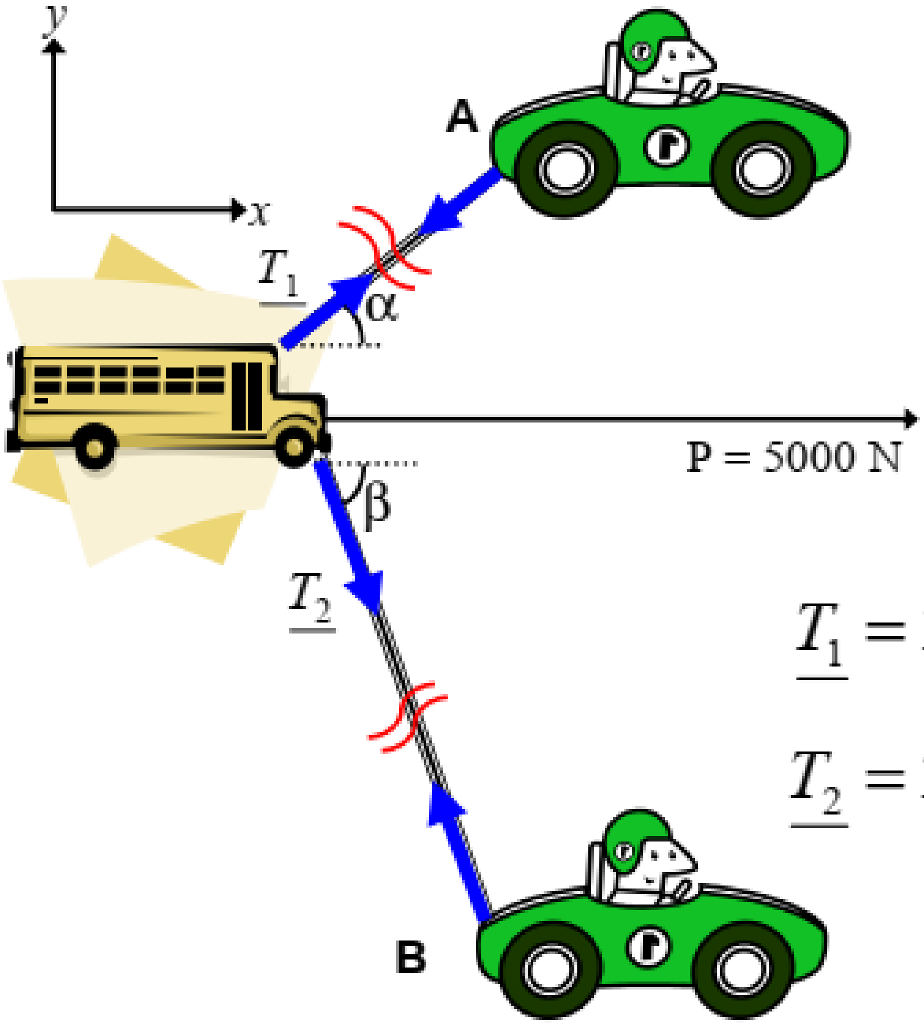
تعادل ذره مادی (Equilibrium of a particle)

یک ذره مادی به هنگامی در وضعیت تعادل است که برآیند نیروهای وارده بر آن برابر صفر باشد.

بعبارت دیگر؛ جهت ارضای قانون اول نیوتون میبایست داشته باشیم:

$$\underline{R}=\sum \underline{F}=0$$

مثال: اتوبوسی بوسیله دو خودرو A و B در جهت و امتداد نشان‌داده‌شده در شکل تحت تأثیر نیروی P کشیده می‌شود. چنانچه زوایای α و β بترتیب برابر 30 و 45 باشند، نیروهای کشش وارده از طرف کابل‌ها را بر اتوبوس بیابید:



قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات

قدم دوم: دیاگرام آزاد (رسم نیروها)

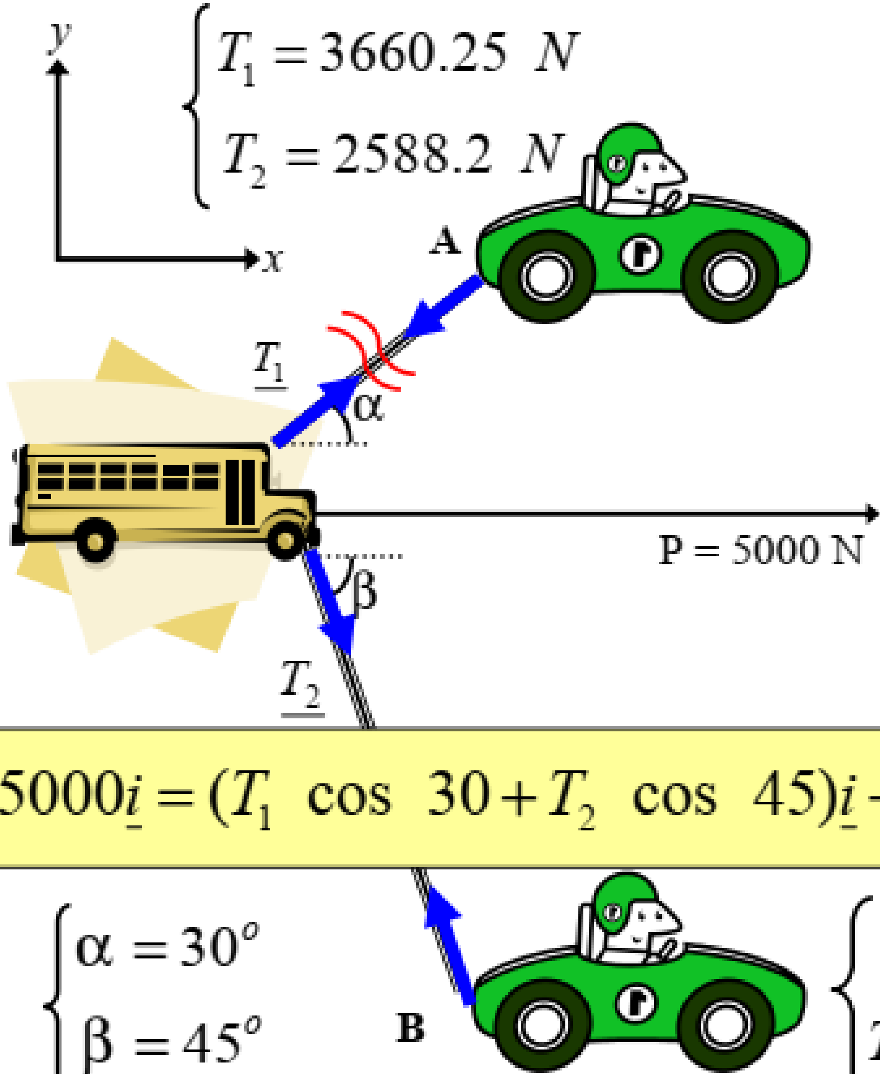
قدم سوم: معرفی نیروها

$$\underline{P} = 5000\ \underline{i}$$

$$\underline{T}_1 = T_1\ (\cos\ \alpha\ \underline{i} + \sin\ \alpha\ \underline{j})$$

$$\underline{T}_2 = T_2\ (\cos\ \beta\ \underline{i} - \sin\ \beta\ \underline{j})$$

قدم آخر: محاسبه خواسته سؤال



$$\begin{cases} T_1 = 3660.25 \ N \\ T_2 = 2588.2 \ N \end{cases}$$

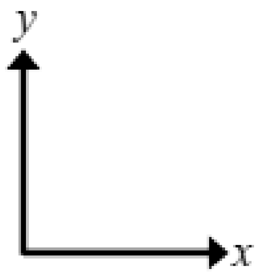
$$\underline{P} = \underline{T_1} + \underline{T_2}$$

$$5000\underline{i} = (T_1 \cos 30 + T_2 \cos 45)\underline{i} + (T_1 \sin 30 - T_2 \sin 45)\underline{j}$$

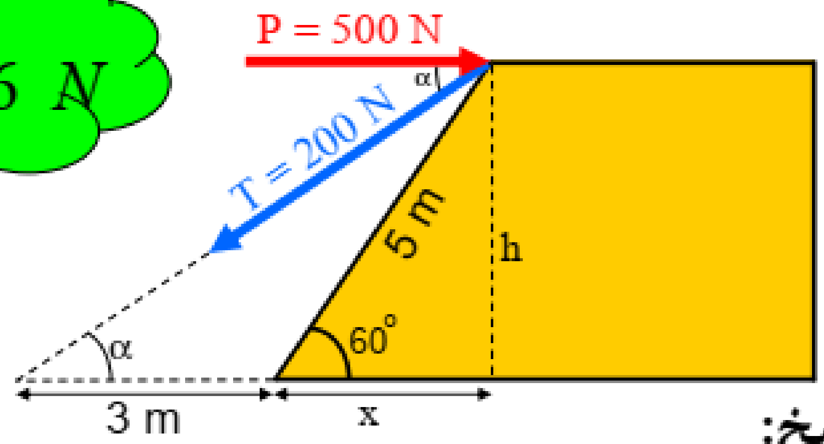
$$\begin{cases} \alpha = 30^o \\ \beta = 45^o \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5000 = T_1 \cos 30 + T_2 \cos 45 \\ T_1 \sin 30 - T_2 \sin 45 = 0 \end{cases}$$

مثال: بر سازه زیر دو نیروی P و T مطابق شکل وارد می شود. مطلوبست محاسبه برآیند نیروها و بزرگی آن؟



$$R = 364.46 \;\; N$$



پاسخ:

$$x = 5 \;\; \cos \;\; 60^o = 2.5$$

$$h = 5 \;\; \sin \;\; 60^o = 4.3$$

$$\tan \;\; \alpha = \frac{h}{x+3} = \frac{4.3}{5.5}$$

$$\boxed{\alpha = 38.2^o}$$

$$\underline{P} = 500 \;\; \underline{i}$$

$$\underline{T} = -200 \;\; (\cos \;\; \alpha \;\; \underline{i} + \sin \;\; \alpha \;\; \underline{j})$$

$$\underline{T} = -200 \;\; (0.79 \;\; \underline{i} + 0.62 \;\; \underline{j})$$

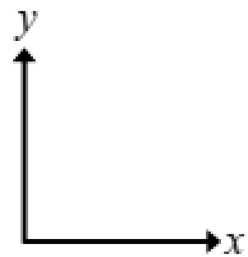
$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{T}$$

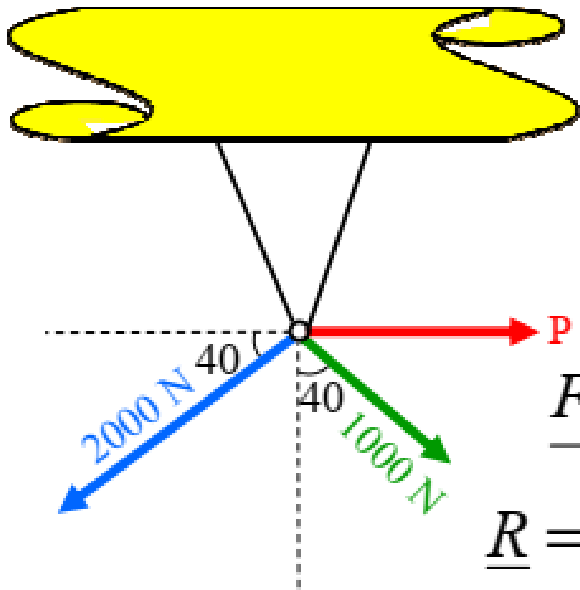
$$\underline{R} = (500 - 157.17)\underline{i} - 123.68\underline{j}$$

$$\underline{R} = 342.83\underline{i} - 123.68\underline{j} \quad N$$

مثال: یک جرثقیل سقفی مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است. نیروی P را بنحوی تعیین کنید که برآیند نیروها در امتداد قائم باشد؛

پاسخ:





$$\underline{P} = P \; \underline{i}$$

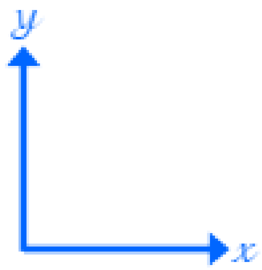
$$\underline{F}_1 = 1000 \; (\sin \; 40^o \underline{i} - \cos \; 40^o \; \underline{j})$$

$$\underline{F}_2 = -2000 \; (\cos \; 40^o \underline{i} + \sin \; 40^o \; \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$\underline{R} = (P - 889.3)\underline{i} - (2051.62)\underline{j} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{P} = 889.3 \; \underline{i} \; N \\ \underline{R} = -2051.62 \; \underline{j} \; N \end{cases}$$

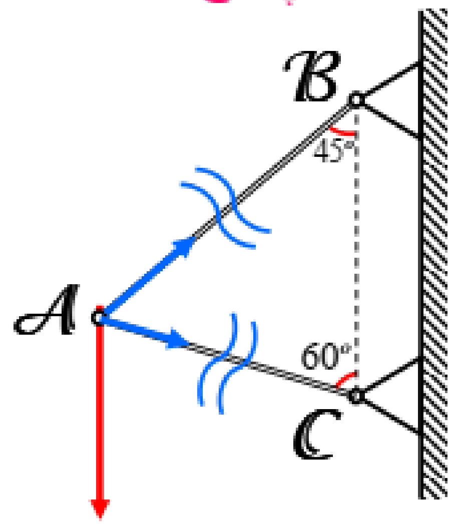
مثال: به سازه ای مطابق شکل که شامل دو میله AB و AC است، نیروی F در نقطه A اعمال شده است.این نیرو در امتداد اعضای AB و AC سازه چه نیروهایی را ایجاد میکند؟



$$\boxed{F_{AB} = -313.8\ N}$$

$$\boxed{F_{AC} = 256.2\ N}$$

پاسخ:



$$\underline{F_1} = F_{AB}\ (\cos\ 45\ \underline{i} + \sin\ 45\ \underline{j})$$

$$\underline{F_2} = F_{AC}\ (\cos\ 30\ \underline{i} - \sin\ 30\ \underline{j})$$

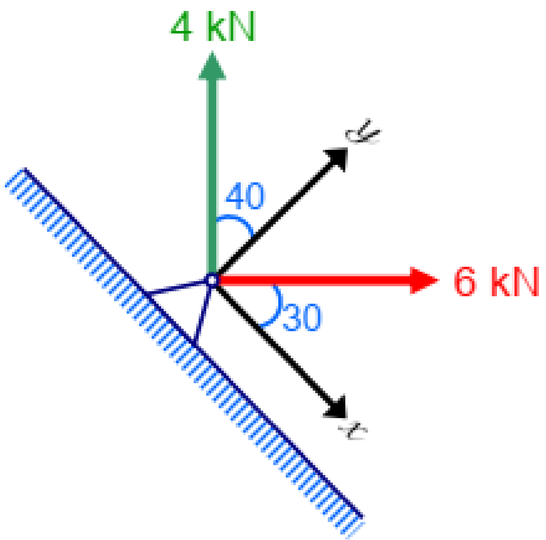
$$\underline{F} = -350\ \underline{j} \qquad \underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{F}$$

$$\underline{R} = (F_{AB}\ \cos\ 45 + F_{AC}\ \cos\ 30)\underline{i} + (F_{AB}\ \sin\ 45 - F_{AC}\ \sin\ 30)\underline{j} = -350\underline{j}$$

$$F_{AB}\cos 45 + F_{AC}\cos 30 = 0 \qquad F_{AB}\sin 45 - F_{AC}\sin 30 = -350$$

مثال: به مفصلی از یک سازه مطابق شکل دو نیرو در امتدادهای نشان داده شده، اعمال شده اند. آن ها را با یک نیرو تعویض نمایید و امتداد نیروی تعویضی را مشخص کنید؛

پاسخ:



$$\underline{F_1} = 6\ (\cos\ 30\ \underline{i} + \sin\ 30\ \underline{j})$$

$$\underline{F_2} = -4\ (\sin\ 40\ \underline{i} - \cos\ 40\ \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$\underline{R} = (6\ \cos\ 30 - 4\ \sin\ 40)\underline{i} + (6\ \sin\ 30 + 4\ \cos\ 40)\underline{j}$$

$$\underline{R} = 2.62\underline{i} + 6.06\underline{j}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.06}{2.62}\right) \Longrightarrow \theta = 66.6^o$$

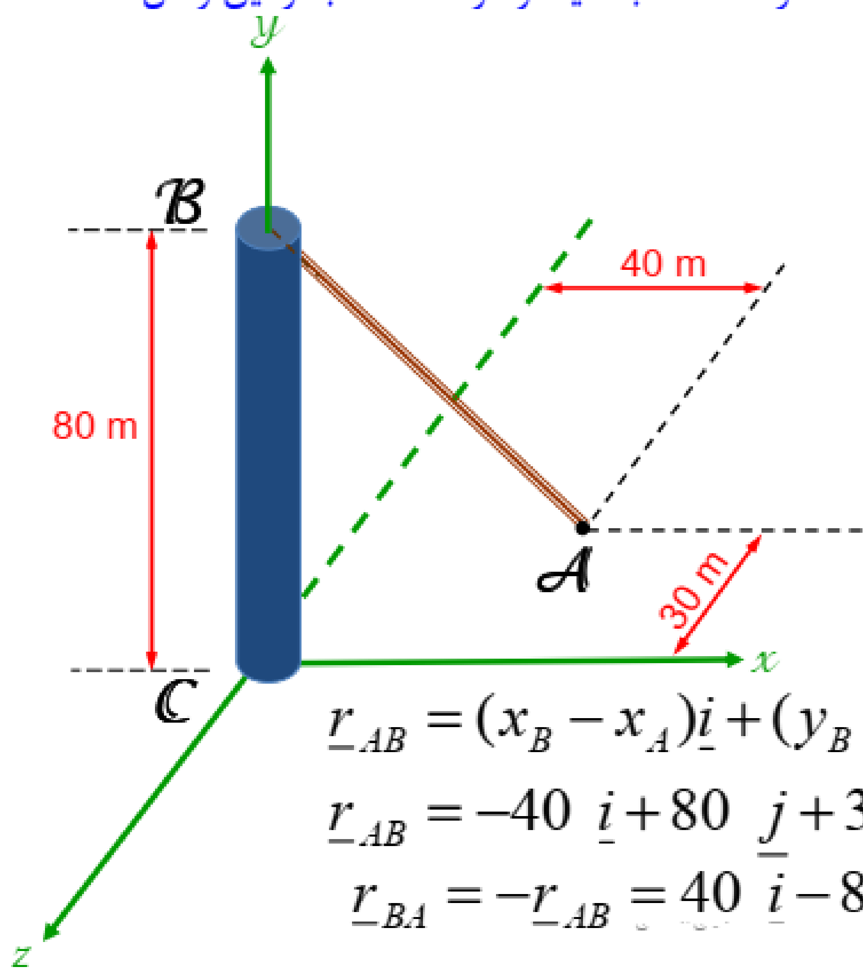
مثال: میله قائم BC بوسیله کابل AB در نقطه B به میله و در نقطه A به زمین وصل شده است. مطلوبست:

الف. بردار وضعیت AB ؛

ب. بردار وضعیت BA ؛

پ. بردار یکه AB .

پاسخ:



$$A(40,0,-30)$$

$$B(0,80,0)$$

$$\underline{r}_{AB} = (x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}$$

$$\underline{r}_{AB} = -40\ \underline{i} + 80\ \underline{j} + 30\ \underline{k}$$

$$\underline{r}_{BA} = -\underline{r}_{AB} = 40\ \underline{i} - 80\ \underline{j} - 30\ \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$A(40,0,-30)$

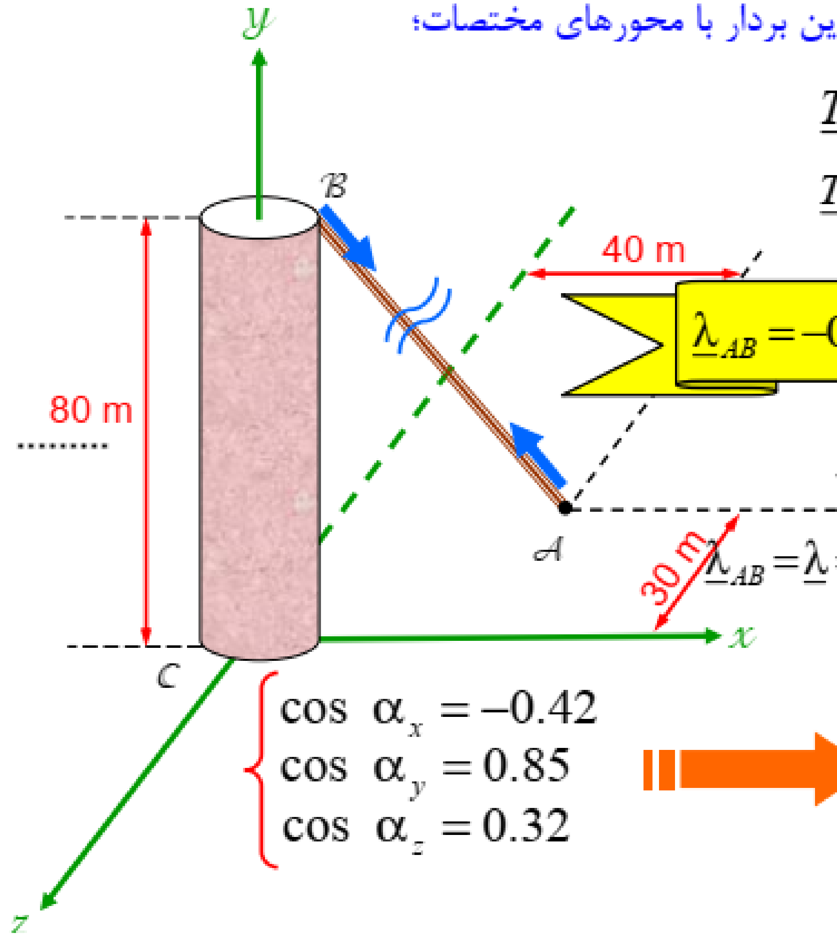
$B(0,80,0)$

$$\underline{r}_{AB} = -40\ \underline{i} + 80\ \underline{j} + 30\ \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-40\ \underline{i} + 80\ \underline{j} + 30\ \underline{k}}{\sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}} = -0.42\ \underline{i} + 0.85\ \underline{j} + 0.32\ \underline{k}$$

مثال: چنانچه در مثال قبل بزرگی نیروی کشش در کابل برابر 2500 N باشد، مطلوبست:

الف: بردار کشش AB ؛ ب: زاویه این بردار با محورهای مختصات؛



پاسخ:

$$\underline{T}_{AB} = T_{AB} \times \underline{\lambda}_{AB}$$

$$\underline{T}_{AB} = 2500\ \underline{\lambda}_{AB}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = -0.42\ \underline{i} + 0.85\ \underline{j} + 0.32\ \underline{k}$$

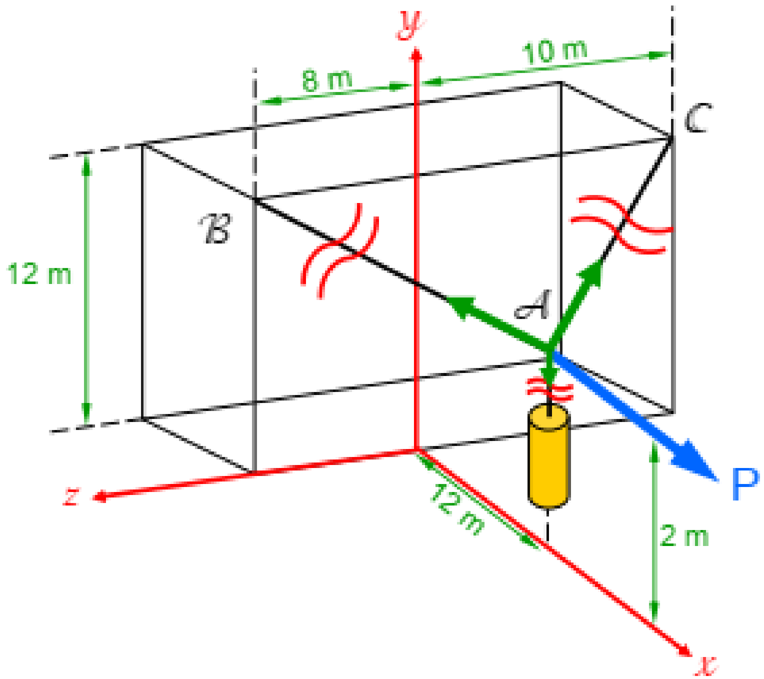
$$\underline{T}_{AB} = -1050\,\underline{i} + 2125\,\underline{j} + 800\,\underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \cos\alpha_x\ \underline{i} + \cos\alpha_y\ \underline{j} + \cos\alpha_z\ \underline{k}$$

$$\begin{cases} \cos\ \alpha_x = -0.42 \\ \cos\ \alpha_y = 0.85 \\ \cos\ \alpha_z = 0.32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = 114.8^o \\ \alpha_y = 31.79^o \\ \alpha_z = 71.34^o \end{cases}$$

مثال: یک وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی بوسیله دو کابل AB و AC و نیروی P در وضعیت شکل نگهداری شده است. مطلوبست: محاسبه بزرگی نیروی کشش کابل ها و بزرگی نیروی P

پاسخ



$$\underline{P} = P\,\underline{i}$$

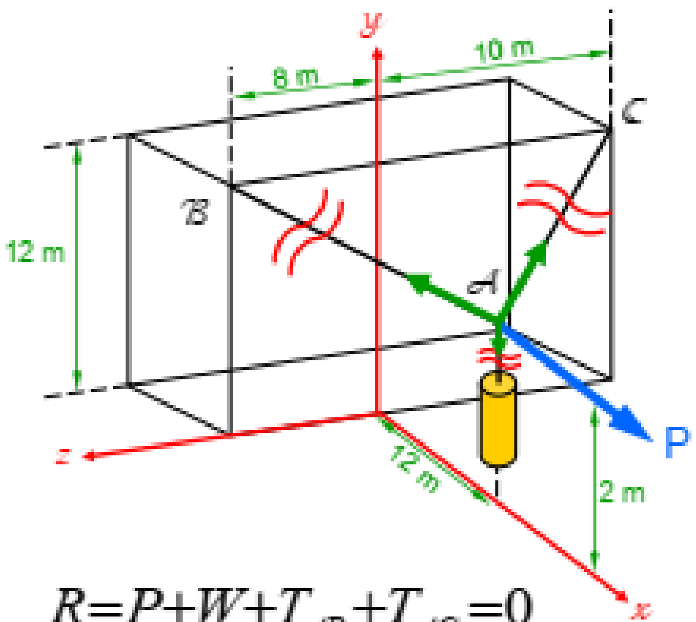
$$\underline{W} = -2000\ \underline{j}$$

$$\underline{T}_{AB} = T_{AB}(-0.68\ \underline{i} + 0.57\ \underline{j} + 0.46\ \underline{k})$$

$A\,(12, 2, 0)$

$C\,(0, 12, -10)$

$$\underline{T}_{AC} = T_{AC} \times \underline{\lambda}_{AC} = T_{AC} \times \frac{-12\ \underline{i} + 10\ \underline{j} - 10\ \underline{k}}{18.55} = T_{AC}(-0.65\ \underline{i} + 0.54\ \underline{j} - 0.54\ \underline{k})$$



$$P = 2395.54\ N$$
$$T_{AB} = 1941.75\ N$$
$$T_{AC} = 1654.08\ N$$

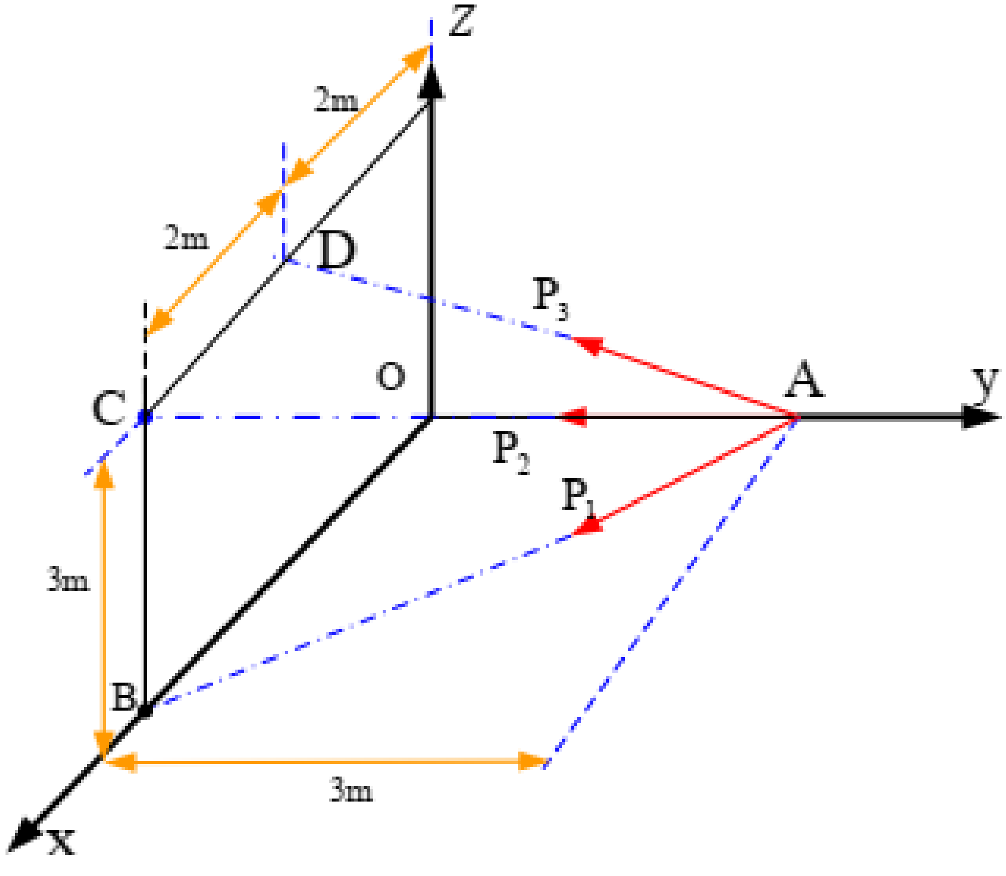
$$\underline{P} = P\,\underline{i}$$
$$\underline{W} = -2000\ \underline{j}$$
$$\underline{T}_{AB} = T_{AB}(-0.68\ \underline{i} + 0.57\ \underline{j} + 0.46\ \underline{k})$$
$$\underline{T}_{AC} = T_{AC}(-0.65\ \underline{i} + 0.54\ \underline{j} - 0.54\ \underline{k})$$

$$\begin{cases} 0.54\ T_{AC} + 0.57\ T_{AB} = 2000 \\ 0.46\ T_{AB} - 0.54\ T_{AC} = 0 \\ -0.65T_{AC} - 0.68T_{AB} + P = 0 \end{cases}$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{W} + \underline{T}_{AB} + \underline{T}_{AC} = 0$$

$$\underline{R} = (-0.65T_{AC} - 0.68T_{AB} + P)\underline{i} + (0.54T_{AC} + 0.57T_{AB} - 2000)\underline{j} + (0.46T_{AB} - 0.54T_{AC})\underline{k} = 0$$

مثال: مقادیر سه نیروی نشان داده شده در شکل را با توجه به اینکه نیروی برآیند آنها برابر با $\underline{R} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k}\ (kN)$ باشد تعیین کنید.



A(0,3,0) , B(4,0,0) , C(4,0,3) , D(2,0,3) پاسخ

$$\underline{\lambda}_{AB}=\frac{\underline{\underline{AB}}}{AB}=\frac{4\underline{i}-3\underline{j}}{5}=\frac{1}{5}\left(4\underline{i}-3\underline{j}\right)$$

$$\underline{\lambda}_{AC}=\frac{\underline{\underline{AC}}}{AC}=\frac{4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{34}}=\frac{1}{\sqrt{34}}\left(4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{\lambda}_{AD}=\frac{\underline{\underline{AD}}}{AD}=\frac{2\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{22}}=\frac{1}{\sqrt{22}}\left(2\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{P}_1=P_1\underline{\lambda}_{AB}=\frac{P_1}{5}\left(4\underline{i}-3\underline{j}\right)$$

$$\underline{P}_2=P_2\underline{\lambda}_{AC}=\frac{P_2}{\sqrt{34}}\left(4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{P}_3 = P_3\underline{\lambda}_{AD} = \frac{P_3}{\sqrt{22}}\left(2\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k}\right)$$

$$\underline{R} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3 = \left(\frac{4}{5}P_1 + \frac{4}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{2}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{i} - \left(\frac{3}{5}P_1 + \frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{j}$$

$$+\left(\frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{k} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}P_1 + \frac{2}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = 100 \\ \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{100}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{50}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 250 \ kN \\ P_2 = -293.3 \ kN \\ P_3 = 471.86 \ kN \end{cases}$$