نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۱۰/۳۰**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۲-فنی** (۹ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۴- ۱۴۰۳**

توجه :

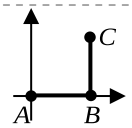
از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- با رسم ناحیه انتگرال‌گیری و تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، مقدار انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

$$I=\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y^2}^{2} y\cos(\pi x^2)\,dx\,dy$$

سوال ۲- حجم محدود به رویه‌های $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z=8-\sqrt{x^2+y^2}$ را محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- انتگرال منحنی‌الخط تابع $f(x,y)=x^2+\sqrt{y}$ را روی مسیر شکل مقابل بدست آورید. $A=(0,0)\ ,\ B=(1,0)\ ,\ C=(1,1)$ **(۱۵ نمره)**



سوال ۴- با استفاده از قضیه گرین، انتگرال زیر را که در آن، $\overleftarrow{C}$ دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ است که در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

$$K=\oint_{\overleftarrow{C}}(3x^3-x^2y)\,dx+(y^2x+y^3)\,dy$$

سوال ۵- میدان برداری زیر مفروض است : **(۲۰ نمره)**

$$\vec{F}(x,y,z)=(\ln y-\cos 2z)\vec{i}+\left(\frac{x}{y}+z\right)\vec{j}+(y+2x\sin 2z)\vec{k}$$

الف) پایستار بودن $\vec{F}$ را بررسی کنید.

ب) انتگرال $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ را با فرض اینکه مسیر C خم برداری زیر باشد، محاسبه کنید.

$$\vec{R}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}\ ,\quad \frac{1}{2}\le t\le 1$$

سوال ۶- مساحت بخشی از سطح سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ که بین دو رویه $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ محدود است را بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

سوال ۷- فرض کنید $\vec{F}=xy^2\,\vec{i}+yz^2\,\vec{j}+zx^2\,\vec{k}$ و S سطح خارجی ناحیه بسته محدود به کره $x^2+y^2+z^2=4$ و داخل مخروط $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ باشد. انتگرال شارّ $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ را بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

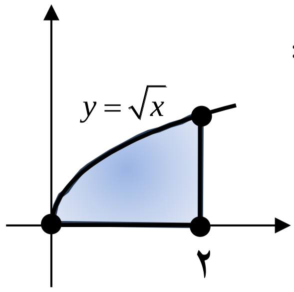
موفق باشید

سیدرضا موسوی

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم ریاضی۲-فنی (۹ گروه هماهنگ)

نیمسال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

پاسخ سوال۱:



$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\int_{y^2}^{2} y\cos(\pi x^2)\,dxdy=\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(\pi x^2)\,dydx$$

$$=\int_0^{2}\cos(\pi x^2)\Big(\int_0^{\sqrt{x}} ydy\Big)dx=\int_0^{2}\cos(\pi x^2)\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^{2}\frac{1}{2}x\cos(\pi x^2)\,dx=\left[\frac{1}{4\pi}\sin(\pi x^2)\right]_0^{2}=0$$

پاسخ سوال۲: اشتراک دو مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z=8-\sqrt{x^2+y^2}$، دایره $x^2+y^2=16, z=4$ است و تصویر ناحیه محدود به دو مخروط، R، بر روی صفحه $z=0$، ناحیه $x^2+y^2\le 16$ است. حجم ناحیه R برابر است با : $V=\iiint\limits_R dxdydz$

برای حل انتگرال از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{4}\int\limits_{z=r}^{8-r} rdzdrd\theta=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{4} r\left[z\right]_r^{8-r}drd\theta=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{4} r(8-2r)drd\theta=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\left[4r^2-\frac{2}{3}r^3\right]_0^4 d\theta=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\frac{64}{3}d\theta=\frac{128}{3}\pi$$

پاسخ سوال۳: باید انتگرال منحنی‌الخط $J=\int\limits_\Gamma (x^2+\sqrt{y})ds=\int\limits_\Gamma (x^2+\sqrt{y})\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ را حل کنیم.

منحنی Γ شامل دو پاره‌خط AB و BC است. پس داریم : $J=\int\limits_{AB}(x^2+\sqrt{y})ds+\int\limits_{BC}(x^2+\sqrt{y})ds$

اکنون داریم : $\int\limits_{AB}(x^2+\sqrt{y})ds=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ ، $\int\limits_{BC}(x^2+\sqrt{y})ds=\int\limits_0^1(1+\sqrt{y})dy=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

و در نتیجه $J=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$.

پاسخ سوال۴: داریم $P=3x^3-x^2y$ و $Q=y^2x+y^3$ و در نتیجه $Q_x-P_y=x^2+y^2$.

پس طبق قضیه گرین داریم $K=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ که در آن D ناحیه درون دایره C است.

برای حل این انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. $K=\int\limits_{r=0}^{2}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi} r^3d\theta dr=\int\limits_{r=0}^{2}2\pi r^3dr=\left[\frac{\pi}{2}r^4\right]_0^2=8\pi$

پاسخ سوال۵: الف) برای بررسی پایستاری $\vec{F}$ باید $curl\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$curl\vec{F}=(1-1)\vec{i}+(2\sin 2z-2\sin 2z)\,\vec{j}+\Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\Big)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$$

میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان پایستار است و می‌توانیم ببینیم که اگر $f(x,y,z)=x(\ln y-\cos 2z)+yz$ آنگاه داریم :

$$\vec{F}=grad\ f(x,y,z)$$

ب) با توجه به قسمت (الف)، انتگرال $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ یک انتگرال مستقل از مسیر است و خواهیم داشت $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=f(B)-f(A)$

که A و B، به ترتیب، نقاط ابتدا و انتهای مسیر C هستند.

$$A=\vec{R}(\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8})\ ,\ B=\vec{R}(1)=(1,1,1)\ \rightarrow\ f(A)=\tfrac{1}{2}(\ln\tfrac{1}{4}-\cos\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{32}\ ,\ f(B)=1-\cos 2$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=f(B)-f(A)=\frac{31}{32}+\ln 2-\cos 2+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}$$

پاسخ سوال۶ : سطح مورد نظر را R و تصویر آن بر روی صفحه $z=0$ را D می‌نامیم و باید مقدار انتگرال $S=\iint_R d\sigma$ را محاسبه کنیم. ابتدا بردار یکه قائم بر سطح خارجی سهمی‌گون $x^2+y^2-z=0$ را پیدا می‌کنیم.

داریم $grad(x^2+y^2-z)=(2x,2y,-1)\ ,\ |grad(\sqrt{x^2+y^2}-z)|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$

و در نتیجه $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x,2y,-1)\quad\rightarrow\quad \cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

اکنون داریم $d\sigma=\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$ و در نتیجه : $S=\iint_R d\sigma=\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$

برای محاسبه این انتگرال دوگانه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$S=\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r\sqrt{4r^2+1}\,drd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{12}\sqrt{(4r^2+1)^3}\right]_1^2 d\theta=\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$$

پاسخ سوال۷ – برای محاسبه این انتگرال از قضیه واگرایی (دیورژانس) استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V div\vec{F}\,dxdydz=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$

برای حل این انتگرال از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

$$M=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\rho=0}^{2}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^2 d\varphi d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{32}{5}\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{32}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}(-\frac{1}{2}+1)d\theta=\frac{16}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta=\frac{32}{5}\pi$$